AG-1: Test Semestrial - I   Noiembrie 2008   A

A.1 Să se verifice că familia (ordonată) de polinoame $B = [1 \quad t-1 \quad (t-1)^2 \quad (t-1)^3]$ formează o bază pentru spaţiul $\mathrm{POL}_3(\mathbb{R})$ şi să se scie matricea transformării de la baza standard a acestui spaţiu, $E = [1 \quad t \quad t^2 \quad t^3]$, la B.

A.2 Să se găsească inversa matricei $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 4 & -2 & 1 \end{bmatrix}$

şi să se rezolve ecuaţia matriceală $AX = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$.

AG-1: Test Semestrial - I Noiembrie 2008 B

B.1 Să se verifice că familiile de vectori de mai jos (A & B)

$$A : a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, a_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, a_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \&$$

$$B : b_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}, b_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, b_3 = \begin{bmatrix} 6 \\ 7 \\ 9 \end{bmatrix}$$

sunt ambele baze în spațiul $\mathbb{R}^3$ şi să se găseasca matricea de transformare de la A la B ($B = AT^{\mathrm{T}}$).

B.2 Să se verifice dacă matricea A de mai jos este singulară, să se găsească $\mathrm{rang}A$ şi o bază în COLSP_A :

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 5 \end{bmatrix}.$$

Să se exprime coloana din afara acesteia în baza selectată.

AG-1: Test Semestrial - I   Noiembrie 2008   C

C.1 Date fiind două baze ale spațiului $\mathbb{R}^3$, anume

$$A:\ a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},\ a_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},\ a_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}\ \&$$

$$B:\ b_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix},\ b_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix},\ b_3 = \begin{bmatrix} 6 \\ 7 \\ 9 \end{bmatrix}$$

să se determine (simultan) coordonatele în baza B ale vectorilor a_1, a_2 şi $X = 2a_1 - 5a_2 + 3a_3$.

Sugestie: *Se poate determina X ca vector din $\mathbb{R}^3$ şi se pot apoi găsi coordonatele cerute rezolvând un sistem neomogen triplu cu coeficienții în matricea B şi termenii liberi a_1, a_2 şi X. Alternativ, se poate determina matricea de trecere T de la A la B, apoi coordonatele cerute în B aplicând (simultan) formula de transformare a coordonatelor.*

C.2 Să se determine parametrul real m pentru care sistemul omogen

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + mx_3 - x_4 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0, \\ 3x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = 0, \\ mx_1 - 2x_2 \quad - 2x_4 = 0 \end{cases}$$

admite soluții nebanale şi să se găsească (o bază pentru) subspațiul soluțiilor S în acest(e) caz(uri).

AG-1: Test Semestrial - I Noiembrie 2008 $\boxed{\text{D}}$

D.1 Dați fiind vectorii

$$a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},\ a_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},\ a_3 = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \ (1) \quad \&\ X = -8a_1 + 4a_2 - a_3, \qquad (2)$$

să se determine coordonatele lui X în baza B care constă din

$$\begin{cases} b_1 &= a_1 + a_2 + a_3, \\ b_2 &= a_1 + a_2 - a_3, \\ b_3 &= a_1 - a_2 + a_3. \end{cases} . \qquad (3)$$

Încercați să verificați rezultatul.

Sugestie: *Matricea de trecere T de la A la B rezultă din* (3). *Cu aceasta, se pot găsi coordonatele X_B folosind formula de transformare. Alternativ, se pot găsi efectiv vectorii bazei B şi - apoi – coordonatele X_B – rezolvând sistemul neomogen $BX_B = X$.*

D.2 Să se aducă matricea de mai jos la o formă quasi-triunghiulară şi să se găsească o bază pentru COLSP_A :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 10 & 1 \\ 4 & 8 & 18 & 7 \\ 10 & 18 & 40 & 17 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \end{bmatrix}.$$

AG-1: Test Semestrial - I   Noiembrie 2008   E

E.1 Să se determine inversa matricei de mai jos şi să se verifice rezultatul :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 2 & 8 \\ 1 & 3 & 5 \end{bmatrix}.$$

E.2 Să se stabilească dependența / independența liniară a vectorilor din $\mathbb{R}^4$

$$v_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \\ 3 \\ 10 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad v_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

şi să se scrie o relație de liniară dependență, dacă ea există.

AG-1: Test Semestrial - I   Noiembrie 2008   F

F.1 Să se determine (câte o bază în fiecare din) subspațiile $W_1 + W_2$ şi $W_1 \cap W_2$ unde

$$W_1 = \mathcal{L}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ 6 \end{bmatrix}\right) \text{ iar } W_2 = \mathcal{L}\left(\begin{bmatrix} -1 \\ -3 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix}\right)$$

Sugestie: *Se pot nota cu* a_1, a_2 *generatorii lui* W_1 *şi cu* a_3, a_4 *generatorii lui* W_2. *Apoi* $u = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 \in W_1$ *şi* $w = \ \dots \ \in W_2$.

F.2 Să se determine parametrii reali α & β care asigură existența unei infinități de soluții pentru sistemul neomogen

$$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 + x_3 &= 5, \\ x_1 + 5x_2 - 3x_3 &= 4, \\ \alpha x_1 + \beta x_2 + 4x_3 &= \alpha + \beta \end{cases}$$

şi să se determine mulțimea S al soluțiilor sale în acest caz.

Sugestie: *Se va impune o condiție de rang pentru matricea coeficienților* $A(\alpha, \beta)$ *şi apoi o condiție de compatibilitate, utilizând o teoremă clasică pe matricea lărgită* $\widetilde{A}(\alpha, \beta)$. *Cu parametrii* α, β *astfel determinați, se va căuta soluția generală a sistemului neomogen particular. Se recomandă verificarea soluției generale obținute.*

AG-1: **Test Semestrial - I** **Noiembrie 2008** G

G.1 Să se determine soluția generală a sistemului omogen $AX = 0$ unde

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}.$$

Să se determine (o bază pentru) subspațiul S al soluțiilor acestui sistem.

G.2 Să se determine o relație de dependență liniară între vectorii familiei

$$\mathcal{A} : u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix},\ u_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix},\ u_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix},\ u_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Să se determine o bază $\mathcal{B}$ pentru subspațiul $W = \mathcal{L}(\mathcal{A})$ şi să se exprime liniar vectorii din afara lui $\mathcal{B}$ în această bază.

Sugestie: *O bază a lui W se poate determina aducând matricea $A = [u_1\ u_2\ u_3\ u_4]$ la o formă quasi-triunghiulară. Continuând transformările până la obținerea unei forme quasi-diagonale, se va determina (din soluția sistemului $AX = \mathbf{0}$) atât o relație (generală) de dependență cât şi − pe coloanele (secundare) din afara lui I_r − coordonatele cerute în baza B.*

AG-1: Test Semestrial - I   Noiembrie 2008   H

H.1 Să se determine soluția generală a sistemului omogen $AX = \mathbf{0}$ unde

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & -5 & 4 \\ 1 & 17 & 4 \end{bmatrix}.$$

Să se determine (o bază pentru) subspațiul S al soluțiilor acestui sistem.

H.2 Să se determine o relație de dependență liniară între polinoamele din $\mathrm{POL}_2(\mathbb{R})$

$$\mathcal{A} : p_1 = -1 + 2t + t^2 \,,\ p_2 = 1 + 3t^2 \,,\ p_3 = 1 + t + 5t^2.$$

Să se determine o bază $\mathcal{B}$ pentru subspațiul $W = \mathcal{L}(\mathcal{A})$ şi să se exprime liniar polinomul din afara lui $\mathcal{B}$ în această bază.

Sugestie: *Se recomandă reprezentarea polinoamelor prin vectorii-coloană u_1, u_2, u_3 din $\mathbb{R}^3$ ai coeficienților. O bază a lui W se poate determina aducând matricea $A = [u_1\ u_2\ u_3]$ la o formă quasi-triunghiulară. Continuând transformările până la obținerea unei forme quasi-diagonale, se va determina (din soluția sistemului $AX = \mathbf{0}$) atât o relație (generală) de dependență cât şi – pe coloanele (secundare) din afara lui I_r – coordonatele cerute în baza B.*

AG-1: Test Semestrial - I   Noiembrie 2008   J

J.1 Să se determine rangul matricei

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 3 & -3 & 1 \\ 5 & 9 & -10 & 3 \\ -1 & 0 & 5 & -2 \\ 2 & 1 & -3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Să se determine o bază B pentru subspațiul COLSP_A şi să se exprime liniar coloana / coloanele din afara bazei în această bază B. Să se determine şi soluția sistemului omogen $AX = \mathbf{0}$.

Sugestie: *Toate elementele care se cer mai sus determinate se pot obține prin aducerea matricei A la o formă quasi-triunghiulară, apoi la una quasi-diagonală, prin transformări cu liniile lui A.*

J.2 Să se determine subspațiul S. al soluțiilor sistemului omogen $A(\lambda)X = \mathbf{0}$, în cazul $S \neq \{\mathbf{0}\}$, unde

$$A(\lambda) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 3 & -3 \\ \lambda & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 0 & \lambda \end{bmatrix}.$$

Sugestie: *Se va impune condiția* $\mathrm{rang}\,A(\lambda) < 4$ *care-l va determina pe* λ. *Cu acest* λ *înlocuit în* $A(\lambda)$ *se va proceda la rezolvarea sistemului (de preferință prin transformări cu liniile matricei coeficienților).*

AG-1: Test Semestrial - I　　　　Noiembrie 2008　　$\boxed{\text{K}}$

K.1 Se consideră, în spațiul $\mathbb{R}^3$, subspațiile

$$U = \mathcal{L}\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}\right), .W = \mathcal{L}\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \alpha \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}\right).$$

(i) Să se determine $\dim U$, $\dim W$;

(ii) Să se determine $\alpha \in \mathbb{R}$ astfel încât $U \cap W = \{\mathbf{0}\}$;

(iii) Pentru $\alpha = 2$, să se verifice că vectorul $X = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix} \in U \oplus W$.

Sugestie: *Se pot nota cu* a_1 *generatorul lui* U *şi cu* a_2, a_3 *generatorii lui* W. *Condiția din* (ii) *este echivalentă cu reducerea mulțimii soluțiilor unui sistem omogen la un singur vector. .*

K.2 Să se studieze dependența / independența liniară a vectorilor de mai jos în funcție de parametrul real m.

$$V_1 = \begin{bmatrix} m \\ 1 \\ m \\ m \end{bmatrix}, \ V_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ m \\ m \\ 1 \end{bmatrix}, \ V_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ m \end{bmatrix}.$$

Pentru cazul dependenței să se scrie o relație de dependență între cei 3 vectori.

Sugestie: *Se recomandă folosirea metodei bordării* (*ca la determinarea rangului*)*, plecând de la un minor de ordin 2 presupus a fi* $\neq 0$.

AG-1: Test Semestrial - I Noiembrie 2008 $\boxed{L}$

$\boxed{\textbf{L.1}}$ Să se studieze, în funcție de parametrul $\sigma \in \mathbb{R}$, dependența / independența liniară a matricelor

$$A_1 = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_3 = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 5 \end{bmatrix},$$

$$A_4(\sigma) = \begin{bmatrix} 2-\sigma & \sigma+1 \\ \sigma & 3 \end{bmatrix}.$$

Sugestie: *Ecuația în* λ_i $(i = \overline{1,4})$ *pentru cercetarea dependenței / independenței este echivalentă cu un sistem omogen de tip* 4×4 ; *elementele fiecăreia din cele 4 matrici se vor scrie pe câte o coloană* (*a matricei coeficienților sistemului*), *într-o anumită – dar aceeaşi – ordine.*

$\boxed{\textbf{L.2}}$ Se consideră, în spațiul $\mathbb{R}^3$, vectorii

$$a_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, a_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix}, a_3 = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 8 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} -5 \\ -6 \\ -16 \end{bmatrix}, Y = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix};$$

(i) Să se determine $\dim W$ unde $W = \mathcal{L}(a_1, a_2, a_3)$ Dacă este cazul, să se determine o bază B pentru subspațiul W.

(ii) Să se determine dacă $X, Y \in W$ împreună cu coordonatele corespunzătoare.

Sugestie: *La* (i). *se va verifica dacă cei 3 generatori pot forma o bază ; în caz contrar se va determina o bază* B. *La* (ii) *se va studia un sistem neomogen dublu şi se va găsi soluția unuia din sistemele componente. Se recomandă verificarea coordonatelor găsite,* X_B.*sau* Y_B .

AG-1: Test Semestrial - I Noiembrie 2008 $\boxed{\text{M}}$

M.1 Să se determine inversa matricei A şi să se rezolve ecuaţia matriceală $XA = B$, unde

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 5 & -2 & -3 \\ 4 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

M.2 Se consideră matricea din $\mathcal{M}_{3\times 5}(\mathbb{R})$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

şi subspaţiile $W_1 = \mathcal{L}(A^1, A^2, A^3)$, $W_2 = \mathcal{L}(A^4, A^5)$.

(i) Să se determine o bază B pentru subspaţiul $W_1 + W_2$. şi o alta pentru $W_1 \cap W_2$.

(ii) Să se verifice teorema lui Grassmann (după determinarea $\dim W_1$ şi $\dim W_2$).

Sugestie: *La* (i)*. se va determina o bază pentru* $W_1 + W_2$*, formată din câteva coloane ale lui* A*, prin aducerea matricei la o formă quasi-triunghiulară. Pentru* $W_1 \cap W_2$ *se va găsi un vector* $U = \lambda_1 A^1 + \lambda_2 A^2 + \lambda_3 A^3 = \lambda_4 A^4 + \lambda_5 A^5$ *după rezolvarea sistemului omogen* (*de tip* 3×5) *corespunzător ultimei ecuaţii. Este de asteptat ca* U să depindă de (cel puţin) 2 parametri, $2 \geq 5 - \operatorname{rang} A$.