Curs 10
Funcţii reale de mai multe variabile reale. Limite şi continuitate.

Facultatea de Hidrotehnică
Universitatea Tehnică "Gh. Asachi"
Iaşi 2014

Fie $p, q \in \mathbb{N}^*$. Fie funcţia $f : D \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$.
Avem următoarele situaţii:

1) $p = q = 1$: $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este funcţie reală de o variabilă reală.

Exemplu: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin x$.

2) $q = 1$ şi $p > 1$: $f : D \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ este funcţie reală de variabilă vectorială (sau de p variabile reale).

$$f(x) = f(x_1, x_2, ..., x_p)$$

Exemplu: $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = x^2 + y^2$.

3) $p = 1$ şi $q > 1$: $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^q$ este funcţie vectorială de o variabilă reală.

$$f(x) = (f_1(x), f_2(x), ..., f_q(x)),$$

unde $f_i : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se numesc **componentele reale ale funcţiei vectoriale** f.

Exemplu: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $f(t) = (r \cos t, r \sin t)$, $r > 0$.

4) $p > 1$ şi $q > 1$: $f : D \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ este funcţie vectorială de variabilă vectorială (sau de p variabile reale).
Pentru $x = (x_1, x_2, ..., x_p) \in D \subseteq \mathbb{R}^p$,

$$f(x) = (f_1(x), f_2(x), ..., f_q(x)),$$

unde $f_i : D \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ sunt **componentele reale ale funcţiei vectoriale** f.

Exemplu: $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $f(x, y) = \left(x^2, y^2, x + y\right)$.

Fie o funcţie $f : D \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ şi $x_0 \in \mathbb{R}^p$.

Definiţie

Spunem că x_0 este punct de acumulare al mulţimii D dacă

$$\forall V \in \mathcal{V}(x_0), \ (V \setminus \{x_0\}) \cap D \neq \emptyset.$$

Definiţie

Fie $f : D \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ şi x_0 punct de acumulare pentru D. Spunem că $l \in \mathbb{R}^q$ este limita funcţiei f în punctul x_0 dacă: $\forall V \in \mathcal{V}(l)\ \exists U \in \mathcal{V}(x_0)$ astfel încât, $\forall x \in U \cap D$, $x \neq x_0$, să avem: $f(x) \in V$.

Notăm

$$l = \lim_{x \to x_0} f(x).$$

Observaţii

1.) x_0 este punct de acumulare x_0 al mulţimii D (pe care este definită funcţia) astfel că ne putem apropia oricât de mult de punctul x_0 prin puncte din mulţimea D.

2.) x_0 poate să nu aparţină mulţimii D.

3.) Dacă f este definită în x_0, valoarea limitei în punctul x_0 nu depinde de valoarea funcţiei în x_0, adică $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$, dacă există, şi $f(x_0)$ pot fi egale sau nu.

Teoremă de caracterizare a noţiunii de limită

Fie $f : D \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ şi x_0 punct de acumulare pentru D. Atunci următoarele afirmaţii sunt echivalente:

(i) l este limita funcţiei f în punctul x_0;

(ii) $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$ astfel încât $\forall x \in D \setminus \{x_0\}$, cu $\|x - x_0\| < \delta$, avem: $\|f(x) - l\| < \varepsilon$;

(iii) $\forall (x_n)_{n \geq 1} \subset \mathbb{R}^p$, $x_n \in D$, $x_n \neq x_0$, $x_n \to x_0$, să avem: $f(x_n) \to l$.

Exerciţiu

Să se arate că

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y}{x^2+y^2} = 0.$$

Soluţie. Fie funcţia $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, definită prin:

$$f(x,y) = \frac{x^2 y}{x^2+y^2}.$$

Observăm că $(0,0)$ nu aparţine lui D, dar este punct de acumulare pentru D.
Trebuie să arătăm că:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \text{ a.î. } \forall (x,y) \in D, \ \|(x,y)-(0,0)\| < \delta$$

$$\Rightarrow |f(x,y) - 0| < \varepsilon,$$

adică,

$$\text{dacă } 0 < \sqrt{x^2 + y^2} < \delta \Rightarrow \left| \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} \right| < \varepsilon.$$

Folosind inegalitatea

$$x^2 \leq x^2 + y^2$$

obţinem:

$$\left| \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} \right| = \frac{x^2 |y|}{x^2 + y^2} \leq \frac{\left(x^2 + y^2\right) |y|}{x^2 + y^2}$$

$$\leq |y| = \sqrt{y^2} \leq \sqrt{x^2 + y^2} < \delta.$$

Alegând $\delta = \varepsilon$ obţinem că $|f(x, y)| < \delta$ pentru orice $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ cu $0 < \sqrt{x^2 + y^2} < \delta$, adică $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = 0$.

Corolar

Dacă există două şiruri convergente $(z_n)_{n\geq 1}, (v_n)_{n\geq 1} \subset D \setminus \{x_0\}$ astfel încât $z_n \to x_0$ şi $v_n \to x_0$, pentru care şirurile valorilor $(f(z_n))_{n\geq 1}, (f(v_n))_{n\geq 1}$ au limite diferite, atunci funcţia f nu are limită în punctul x_0.

Exerciţiu

Arătaţi că funcţia

$$f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, y);\ x = y\} \to \mathbb{R},\ f(x, y) = \frac{x + y}{x - y},$$

nu are limită în origine.

Soluţie. Observăm mai întâi că $(0,0)$ este punct de acumulare pentru mulţimea $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x,y)\,;\ x=y\}$.
Considerăm şirurile: $z_n = \left(\frac{1}{n}, 0\right)$ şi $v_n = \left(\frac{1}{n}, -\frac{1}{n}\right)$
convergente la $(0,0)$.
Atunci,

$$f(z_n) = f\left(\frac{1}{n}, 0\right) = 1 \to 1,\ f(v_n) = f\left(\frac{1}{n}, -\frac{1}{n}\right) = 0 \to 0.$$

Deci, am găsit două şiruri de puncte convergente la $(0,0)$, pentru care şirurile valorilor funcţiei converg la limite diferite. Prin urmare, funcţia f nu are limită în origine.

Teoremă

Fie $f : D \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$, $f = (f_1, f_2, ..., f_q)$ unde $f_i : D \to \mathbb{R}$, orice $i = 1, 2, ..., q$.
Fie x_0 punct de acumulare pentru D şi $l = (l_1, l_2, ..., l_q) \in \mathbb{R}^q$.
Atunci:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0} f_i(x) = l_i, \ \forall i = 1, 2, ..., q.$$

Exerciţiu

Să se calculeze $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$, unde

$$f : \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}^3,\ f(x) = \left(\frac{\sin 3x}{x}, (1+x)^{\frac{2}{x}}, \frac{5^x - 1}{x}\right).$$

Soluţie. Folosind limitele fundamentale studiate în liceu,

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1,\ \ \lim_{x\to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e \text{ şi } \lim_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a,\ \ a > 0,$$

obţinem

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \left(\lim_{x\to 0} \frac{\sin 3x^2}{x}, \lim_{x\to 0} (1+x)^{\frac{2}{x}}, \lim_{x\to 0} \frac{5^x - 1}{x}\right)$$

$$= \left(3, e^2, \ln 5\right).$$

Exerciţiu

Să se calculeze

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sqrt{x^2+y^2+4}-2}{x^2+y^2}$$

Soluţie. Numitorul şi numărătorul tind la zero când $(x, y) \to (0, 0)$. În acest caz vom scrie

$$\frac{\sqrt{x^2+y^2+4}-2}{x^2+y^2} = \frac{\sqrt{x^2+y^2+4}-2}{x^2+y^2} \cdot \frac{\sqrt{x^2+y^2+4}+2}{\sqrt{x^2+y^2+4}+2}$$

$$= \frac{x^2+y^2+4-4}{(x^2+y^2)\left(\sqrt{x^2+4}+2\right)} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+4}+2}.$$

Prin urmare,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sqrt{x^2+y^2+4}-2}{x^2+y^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+4}+2} = \frac{1}{4}.$$

Exerciţiu

Să se calculeze

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-xy}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}.$$

Soluţie. În acest caz vom scrie

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-xy}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-xy}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} \cdot \frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x\,(x-y)}{x-y} \cdot (\sqrt{x}+\sqrt{y}) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} x\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right) = 0.$$

Exerciţiu

Să se calculeze limita

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin\left(x^3+y^3\right)}{x^2+y^2}.$$

Soluţie. Arătăm mai întâi că $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2} = 0$. Avem:

$$\begin{aligned}
0 &\leq \left|\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}\right| = \frac{|x+y|\left|x^2-xy+y^2\right|}{x^2+y^2} \\
&\leq (|x|+|y|)\frac{\left|x^2+y^2\right|+|xy|}{x^2+y^2} \\
&= (|x|+|y|)\left(1+\frac{|xy|}{x^2+y^2}\right) \leq \frac{3}{2}(|x|+|y|),
\end{aligned}$$

deoarece $x^2+y^2 > 2|x||y|$.

Trecând la limită, obţinem

$$0 \leq \lim_{(x,y)\to(0,0)} \left| \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} \right| \leq \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3}{2}\left(|x|+|y|\right) = 0,$$

deci $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2} = 0$. Revenind la funcţia iniţială, vom folosi limita fundamentală $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\sin t}{t} = 1$ şi vom scrie

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin\left(x^3+y^3\right)}{x^2+y^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(\frac{\sin\left(x^3+y^3\right)}{x^3+y^3} \cdot \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} \right)$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin\left(x^3+y^3\right)}{x^3+y^3} \cdot \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} = 1 \cdot 0 = 0.$$

Definiţie

Fie funcţia $f : D \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ şi $x_0 \in D$ punct de acumulare pentru D.
Spunem că funcţia f este continuă în punctul $x_0 \in D$ dacă

$$\exists \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Observaţie

Continuitatea unei funcţii se studiază numai în punctele mulţimii de definiţie a funcţiei: $x_0 \in D$.

Teoremă

Fie $f : D \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ şi $x_0 \in D$ punct de acumulare petru D. Atunci următoarele afirmaţii sunt echivalente:

(i) f este continuă în x_0;

(ii) $\forall \left(x_n\right)_{n \geq 1} \subset D$ cu $x_n \to x_0$, să avem: $f\left(x_n\right) \to f\left(x_0\right)$.

Exerciţiu

Să se studieze continuitatea funcţiei

$$f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R},\ f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy^2}{\sqrt{x^2+y^2}}, & \text{dacă } (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & \text{dacă } (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

în punctul $(0,0)$.

Soluţie. Calculăm mai întâi $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$. Deoarece

$$0\leq |f(x,y)|=|xy|\frac{|y|}{\sqrt{x^2+y^2}}\leq |xy|,$$

rezultă că

$$0\leq \lim_{(x,y)\to(0,0)}|f(x,y)|\leq \lim_{(x,y)\to(0,0)}|xy|=0.$$

adică

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0.$$

Cum $f(0,0) = 0$, rezultă că funcţia f este continuă în origine.

Exerciţiu

Să se studieze continuitatea funcţiei

$$f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R},\ f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy^2}{x^2+y^4},\ \text{dacă } (x,y)\neq(0,0)\\ 0,\ \text{dacă } (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

în origine.

Soluţie. Considerăm şirul $z_n=\left(\frac{1}{n^2},\frac{1}{n}\right)$, $n\in\mathbb{N}^*$, convergent la $(0,0)$. Atunci $f(z_n)=f\left(\frac{1}{n^2},\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{2}$, de unde rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty} f(z_n)=\frac{1}{2}$.

Dar $f(0,0)=0\neq\lim\limits_{n\to\infty} f(z_n)$, ceea ce arată că funcţia dată nu este continuă în origine.

Teoremă

Fie $f : D \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$, $f = (f_1, f_2, ..., f_q)$ şi $x_0 \in D$ punct de acumulare petru D.
Atunci:

f continuă în$x_0 \in D \;\Leftrightarrow f_i : D \to \mathbb{R}$ continue în $x_0, \forall i = 1, 2, ..., q$.

Exerciţiu

Să se studieze continuitatea funcţiei

$$f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,$$

definită prin

$$f(x,y) = \begin{cases} \left(\dfrac{1-\sqrt{1-x^2-y^2}}{x^2+y^2}, \dfrac{x^2+y^2}{|x|+|y|} \right), & \text{dacă } (x,y) \neq (0,0) \\ \left(\dfrac{1}{2}, 0 \right), & \text{dacă } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

în punctul $(0,0)$, unde D este domeniul maxim de definiţie al funcţiei.

Soluţie. Domeniul maxim de definiţie al funcţiei este:

$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2 + y^2 \leq 1 \right\}.$$

Funcţia f este o funcţie vectorială de două variabile, $f(x, y) = (f_1(x, y), f_2(x, y))$, unde

$$f_1 : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f_1(x, y) = \begin{cases} \dfrac{1 - \sqrt{1 - x^2 - y^2}}{x^2 + y^2}, (x, y) \neq (0, 0) \\ \dfrac{1}{2}, (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

şi

$$f_2 : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f_2(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 + y^2}{|x| + |y|},\ \text{dacă}\ (x, y) \neq (0, 0) \\ 0,\ \text{dacă}\ (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Funcţia f este continuă în origine dacă şi numai dacă funcţiile f_1 şi f_2 sunt continue în origine.

Studiem continuitatea în origine a funcţiei f_1.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f_1(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1-\sqrt{1-x^2-y^2}}{x^2+y^2}$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\left(1-\sqrt{1-x^2-y^2}\right)\left(1+\sqrt{1-x^2-y^2}\right)}{\left(x^2+y^2\right)\left(1+\sqrt{1-x^2-y^2}\right)}$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{\left(x^2+y^2\right)\left(1+\sqrt{1-x^2-y^2}\right)}$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1}{1+\sqrt{1-x^2-y^2}} = \frac{1}{2}.$$

Deoarece $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f_1(x,y) = \frac{1}{2} = f_1(0,0)$ rezultă că funcţia f_1 este continuă în origine.

Studiem continuitatea în origine a funcţiei f_2. Au loc majorările:

$$0 \leq f_2(x,y) = \frac{x^2+y^2}{|x|+|y|} = \frac{|x|^2+|y|^2}{|x|+|y|}$$

$$\leq \frac{|x|^2+|y|^2+2|x||y|}{|x|+|y|} = \frac{(|x|+|y|)^2}{|x|+|y|} = |x|+|y|.$$

Prin urmare,

$$0 \leq \lim_{(x,y)\to(0,0)} f_2(x,y) \leq \lim_{(x,y)\to(0,0)} (|x|+|y|) = 0,$$

de unde rezultă că $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f_2(x,y) = 0 = f_2(0,0)$. Deci, şi f_2 este continuă în origine. Prin urmare, f este continuă în origine.