Curs 13
Extremele funcţiilor de mai multe variabile

Facultatea de Hidrotehnică
Universitatea Tehnică "Gh. Asachi"
Iaşi 2014

Definiţie

Fie funcţia $f : D \to \mathbb{R}$, unde $D \subseteq \mathbb{R}^p$, şi $a \in D$.

(i) Punctul a se numeşte punct de maxim local al funcţiei f dacă există există o vecinătate V a punctului a astfel încât

$$f(x) - f(a) \leq 0, \ \forall x \in V \cap D.$$

(ii) Punctul a se numeşte punct de minim local al funcţiei f dacă există o vecinătate V a punctului a astfel încât

$$f(x) - f(a) \geq 0, \ \forall x \in V \cap D.$$

(iii) Punctele de maxim şi minim local se numesc puncte de extrem local.

Observaţie

Punctul a este punct de extrem local dacă există o vecinătate V a punctului a astfel încât diferenţa

$$f(x) - f(a)$$

să păstreze semn constant sau să fie nulă pe $V \cap D$.

Definiţie

Fie $D \subseteq \mathbb{R}^p$ o mulţime deschisă, $a \in D$ şi $f : D \to \mathbb{R}$ o funcţie diferenţiabilă în a.
Punctul $a \in D$ se numeşte punct critic (staţionar) pentru funcţia f dacă toate derivatele parţiale de ordinul întâi ale funcţiei f se anulează în a, adică

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = 0, \ \forall i = 1, 2, ..., n.$$

Observaţie

Punctul $a \in D$ este punct critic pentru f dacă şi numai dacă

$$df(a) = 0.$$

Teorema lui Fermat pentru funcţii de mai multe variabile

Fie $D \subseteq \mathbb{R}^p$ o mulţime deschisă, $a \in D$ şi $f : D \to \mathbb{R}$.
Dacă:

- f este diferenţiabilă în a şi
- a este punct de extrem local pentru f,

atunci a este punct critic pentru f.

Demonstraţie

Vom demonstra teorema în cazul $p = 2$.

Fie $a = (x_0, y_0) \in D$ un punct de maxim local pentru funcţia f.

Deci, există o vecinătate V a punctului (x_0, y_0) astfel încât

$$f(x, y) - f(x_0, y_0) \leq 0, \ \forall (x, y) \in V \cap D.$$

Fără a restrânge generalitatea, putem considera $V \subseteq D$, întrucât mulţimea D este o mulţime deschisă.
În particular, are loc

$$f(x, y_0) - f(x_0, y_0) \leq 0, \ \forall x \in V_1,$$

unde V_1 este restricţia vecinătăţii V pentru y egal y_0, deci o vecinătate a punctului x_0.

Rezultă că funcţia de o singură variabilă $g : V_1 \to \mathbb{R}$, definită prin

$$g(x) = f(x, y_0),$$

satisface inegalitatea

$$g(x) - g(x_0) \leq 0, \ \forall x \in V_1,$$

adică x_0 este punct de maxim pentru g.

Cum g este derivabilă în x_0, conform Teoremei lui Fermat rezultă că

$$g'(x_0) = 0.$$

Dar

$$g'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0}$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0).$$

În concluzie, am obţinut $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0$.

Analog, se arată că $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$.

Observaţie

Teorema lui Fermat afirmă că punctele de extrem local ale unei funcţii diferenţiabile se găsesc printre punctele sale critice, adică printre soluţiile sistemului

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2, ..., x_p) = 0 \\ \vdots \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_p}(x_1, x_2, ..., x_p) = 0. \end{cases}$$

Observaţie

Reciproca acestei teoreme este falsă. Nu orice punct critic este punct de extrem, cum se poate vedea din exemplul următor.

Exemplu

Fie funcţia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definită prin

$$f(x, y) = x^2 - y^2.$$

Avem $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -2y$ şi obţinem că punctul $(0, 0)$ este punct critic. Dar, în $(0, 0)$ funcţia nu are nici minim local, nici maxim local, deoarece

$$f(x, 0) = x^2 \geq 0 = f(0, 0),$$

$$f(0, y) = -y^2 \leq 0 = f(0, 0).$$

Definiţie

Un punct critic care nu este punct de extrem se numeşte punct şa.

Condiţii suficiente pentru ca un punct critic al unei funcţii de mai multe variabile să fie punct de extrem:

Teoremă

Fie $D \subseteq \mathbb{R}^p$ mulţime deschisă, $f \in C^2(D)$ şi $a \in D$ punct critic pentru f.
Dacă forma pătratică $d^2 f(a)$ este:

(i) pozitiv definită, atunci a este punct de minim local;

(ii) negativ definită, atunci a este punct de maxim local;

(iii) nedefinită, atunci a nu este punct de extrem (a este punct şa).

Exerciţiu

Să se afle punctele de extrem ale funcţiei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, definită prin

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 4y - 6z.$$

Soluţie. Aflăm mai întâi punctele critice ale funcţiei f. Pentru aceasta rezolvăm sistemul

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

echivalent cu

$$\begin{cases} 2x + 2 = 0 \\ 2y + 4 = 0 \\ 2z - 6 = 0. \end{cases}$$

Deci, avem un singur punct critic: $M_0\left(-1, -2, 3\right)$.

Pentru a stabili dacă M este punct de extrem, vom apela la diferenţiala de ordinul doi în punctul M_0.
În acest scop calculăm valorile derivatelor de ordinul doi în acest punct.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(x, y, z\right) = \left(2x + 2\right)'_x = 2, \text{ deci } \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(-1, -2, 3\right) = 2,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(x, y, z\right) = \left(2y + 4\right)'_y = 2, \text{ deci } \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(-1, -2, 3\right) = 2,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x,y,z) = (2z-6)'_z = 2, \text{ deci } \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(-1,-2,3) = 2,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y,z) = (2y+4)'_x = 0, \text{ deci } \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(-1,-2,3) = 0,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}(x,y,z) = (2z-6)'_x = 0, \text{ deci } \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}(-1,-2,3) = 0,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(x,y,z) = (2z-6)'_y = 0, \text{ deci } \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(-1,-2,3) = 0.$$

Atunci

$$d^2 f\left(-1,-2,3\right)(h) = 2h_1^2 + 2h_2^2 + 2h_3^2 = 2\left(h_1^2 + h_2^2 + h_3^2\right) > 0$$

pentru orice $h = (h_1, h_2, h_3) \neq (0,0,0)$.

Deci, $d^2 f\left(-1,-2,3\right)$ este o formă pătratică pozitiv definită.

Prin urmare, punctul $M_0\left(-1,-2,3\right)$ este punct de minim local.

Valoarea minimă locală este

$$f_{\min} = f\left(-1,-2,3\right) = -4.$$

Teoremă

Fie $D \subseteq \mathbb{R}^p$ o mulţime deschisă, $f \in C^2(D)$ şi $a \in D$ un punct critic pentru f. Fie H matricea hessiană a funcţiei f în punctul a, adică

$$H = \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)\right]_{1 \leq i,j \leq n},$$

şi $\Delta_1, \Delta_2, ..., \Delta_p$ minorii principali ai matricei.

(i) Dacă numerele $\Delta_1, \Delta_2, ..., \Delta_p$ sunt strict pozitive, atunci forma pătratică $d^2 f(a)$ este pozitiv definită şi a este punct de minim local.

(ii) Dacă numerele $-\Delta_1, \Delta_2, ..., (-1)^p \Delta_p$ sunt strict pozitive, atunci forma pătratică $d^2 f(a)$ este negativ definită şi a este punct de maxim local.

(iii) Dacă numerele $\Delta_1, \Delta_2, ..., \Delta_p$ sunt nenule şi nu satisfac condiţiile de la punctele (i) sau (ii), atunci a nu este punct de extem.

Exerciţiu

Să se găsească punctele de extrem ale funcţiei

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ f(x,y,z) = x^2 + 3y^2 + 2z^2 - 2xy + 2xz.$$

Soluţie. Determinăm punctele critice ale funcţiei f, rezolvând sistemul:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = 0, \end{cases}$$

echivalent cu

$$\begin{cases} 2x - 2y + 2z = 0 \\ 6y - 2x = 0 \\ 4z + 2x = 0. \end{cases}$$

Soluţia unică a sistemului este $x = y = z = 0$, deci $O(0, 0, 0)$ este singurul punct critic al funcţiei f.

Calculăm derivatele parţiale de ordinul al doilea pentru a stabili dacă acesta este punct de extrem.
Avem:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y, z) = 2,\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y, z) = -2,\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}(x, y, z) = 2,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y, z) = 6,\ \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x, y, z) = 4,\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(x, y, z) = 0$$

În punctul $O\,(0,0,0)$ avem:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0,0) = 2,\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0,0) = -2,\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}(0,0,0) = 2,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0,0) = 6,\ \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(0,0,0) = 4,\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(0,0,0) = 0.$$

Prin urmare, minorii matricei hessiene sunt:

$$\Delta_1 = 2,\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 6 \end{vmatrix} = 8,\ \Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -2 & 6 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 8.$$

Deoarece $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3 > 0$, forma pătratică $d^2 f\,(0,0,0)$ este pozitiv definită şi $O\,(0,0,0)$ este punct de minim local al funcţiei f.

Teoremă

Fie $D \subseteq \mathbb{R}^2$ mulţime deschisă, $f \in C^2(D)$, $a \in D$ punct critic pentru f. Notăm

$$A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a),\; B = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a),\; C = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a).$$

Dacă:

1) $B^2 - AC < 0$ şi $A > 0$, atunci a este punct de minim local;

2) $B^2 - AC < 0$ şi $A < 0$, atunci a este punct de maxim local;

3) $B^2 - AC > 0$, atunci a nu este punct de extrem.

Observaţie

Dacă $B^2 - AC = 0$, nu putem afirma nimic despre punctul a.

În unele cazuri este punct de extrem al funcţiei f, în alte cazuri nu este punct de extrem.

Exerciţiu

Să se găsească punctele de extrem ale funcţiei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definită prin

$$f(x, y) = x^3 + y^3 + 3xy.$$

Soluţie. Observăm că $f \in C^2(\mathbb{R}^2)$.

Aflăm punctele critice, rezolvând sistemul:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 3x^2 + 3y = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 3y^2 + 3x = 0, \end{cases}$$

Soluţiile sistemului sunt punctele $O\,(0,0)$ şi $M\,(-1,-1)$.

Verificăm în continuare dacă aceste puncte critice sunt puncte de extrem.
Calculăm derivatele parţiale de ordinul doi.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(x,y) = \left(3x^2+3y\right)'_x = 6x,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(x,y) = \left(3y^2+3x\right)'_x = 3,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(x,y) = \left(3y^2+3x\right)'_y = 6y.$$

Pentru punctul critic $O\,(0,0)$ avem

$$A=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\,(0,0)=0,\;\; B=\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\,(0,0)=3,$$

$$C=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\,(0,0)=0.$$

Deci

$$B^2-AC=9>0,$$

rezultă că punctul $O\,(0,0)$ nu este punct de extrem.

Pentru punctul critic $M(-1,-1)$ avem

$$A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-1,-1) = -6,\ B = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(-1,-1) = 3,$$

$$C = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(-1,-1) = -6.$$

Deci

$$B^2 - AC = 9 - 36 = -27 < 0.$$

Cum $A < 0$, rezultă că punctul $M(-1,-1)$ este punct de maxim local.
Valoarea maximă locală este

$$f_{\max} = f(-1,-1) = 1.$$