Curs 6
Funcţii continue

Facultatea de Hidrotehnică
Universitatea Tehnică "Gh. Asachi"
Iaşi 2014

Definiţie

Spunem că funcţia $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, este *continuă* în punctul $x_0 \in D$ dacă $\forall V \in \mathcal{V}(f(x_0))\ \exists U \in \mathcal{V}(x_0)$ astfel încât $\forall x \in U \cap D$ să avem $f(x) \in V$.

Definiţie

O funcţie se numeşte *discontinuă* în punctul $x_0 \in D$ dacă nu-i continuă în acest punct.

Observaţie

Continuitatea unei funcţii se studiază numai în punctele mulţimii de definiţie a funcţiei.

Definiţie

$x_0 \in D$ se numeşte *punct izolat* al mulţimii D dacă nu este punct de acumulare.

Exemplu

$D = [1, 2) \cup \{3\}$
Mulţimea punctelor de acumulare ale mulţimii D este $[1, 2]$.
Punctul 3 este punct izolat pentru D.

Definiţie

Fie $f : D \to \mathbb{R}$, unde $D \subseteq \mathbb{R}$. Spunem că f este continuă pe o mulţime $E \subseteq D$ dacă este continuă în fiecare punct al mulţimii E.

Teoremă

Fie $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ şi $x_0 \in D$. Atunci f este continuă în punctul x_0 dacă şi numai dacă are loc una din următoarele situaţii:
(i) sau x_0 este punct de acumulare pentru D şi

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0);$$

(ii) sau x_0 este punct izolat pentru mulţimea D.

$$\left| \begin{array}{l} x_0 \in D \\ x_0 \text{ punct de acumulare pentru } D \\ \exists \lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) \end{array} \right| \quad \left| \begin{array}{l} x_0 \in D \\ x_0 \text{ punct izolat pentru } D \\ \end{array} \right|$$

Demonstraţie

Să presupunem că f este continuă în x_0 şi x_0 este punct de acumulare pentru D. Atunci, pentru orice vecinătate V a lui $f(x_0)$, există o vecinătate U a punctului x_0 astfel încât oricare ar fi $x \in D \cap U$ să avem $f(x) \in V$. Cu atât mai mult, pentru orice $x \in U \cap D \setminus \{x_0\}$ avem $f(x) \in V$, ceea ce spune că $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Reciproc, să presupunem mai întâi că x_0 este punct izolat pentru D. Atunci există o vecinătate U a lui x_0 astfel încât $U \cap D = \{x_0\}$. Deci, pentru orice vecinătate V a lui $f(x_0)$, dacă $x \in U \cap D$, atunci $f(x) = f(x_0) \in V$, adică f este continuă în x_0. Dacă $x_0 \in D$ este punct de acumulare pentru D, folosind definiţia cu vecinătăţi a limitei $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, pentru orice V vecinătate a lui $f(x_0)$ există U vecinătate a lui x_0 astfel încât oricare ar fi $x \in U \cap D$, $x \neq x_0$, să avem $f(x) \in V$. Cum şi pentru $x = x_0$ are loc $f(x_0) \in V$, rezultă că $f(x) \in V$ pentru orice $x \in U \cap D$, adică f este continuă în x_0.

Teoremă

Fie $f : D \to \mathbb{R}$, unde $D \subseteq \mathbb{R}$, şi $x_0 \in D$. Atunci următoarele afirmaţii sunt echivalente:

(i) f este continuă în x_0;

(ii) pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\delta > 0$ astfel încât pentru orice $x \in D$, cu $|x - x_0| < \delta$, să avem $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$;

(iii) pentru orice şir $(x_n)_{n \geq 1} \subset D$ cu $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$, rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$.

Teoremă

Fie $f, g : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x_0 \in D$ şi $\lambda \in \mathbb{R}$.
Dacă f şi g sunt continue în x_0, atunci sunt continue în x_0 şi funcţiile $f + g$, λf, fg; în plus, când $g(x) \neq 0$, este continuă şi funcţia $\dfrac{f}{g}$.

Exemplu

Funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definită prin

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x}, & x \neq 0 \\ a, & x = 0 \end{cases}$$

este continuă pe $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Cum

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1,$$

rezultă că f este continuă în $x_0 = 0$ dacă şi numai dacă $f(x_0) = 1$, adică $a = 1$.

Teoremă (Continuitatea funcţiilor compuse)

Fie $f : E \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ şi $\varphi : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ astfel încât $\varphi(D) \subset E$ şi fie $x_0 \in D$.
Dacă φ este continuă în x_0 şi f este continuă în $y_0 = \varphi(x_0)$ atunci funcţia compusă $f \circ \varphi : D \to \mathbb{R}$ este continuă în x_0.

Exemplu

Funcţia $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definită prin $g(x) = \sin\left(x^2 + 1\right)$, este continuă pe tot domeniul de definiţie, deoarece este compunerea funcţiilor continue $\varphi(x) = x^2 + 1$ (funcţie polinomială) şi $f(y) = \sin y$ (funcţie trigonometrică).

Definiţie

Fie $f : D \to \mathbb{R}$ şi $x_0 \in D$.

1) x_0 este punct de acumulare la stânga pentru D. Spunem că f este continuă la stânga în x_0 dacă

$$\exists \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x) = f(x_0).$$

2) x_0 este punct de acumulare la dreapta pentru D. Spunem că f este continuă la dreapta în x_0 dacă

$$\exists \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x) = f(x_0).$$

Exemplu

Fie $f : [1,3] \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \in [1,2] \\ 1, & x \in (2,3]. \end{cases}$$

Avem

$$\lim_{\substack{x \to 2 \\ x < 2}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 2 \\ x < 2}} x = 2, \quad \lim_{\substack{x \to 2 \\ x > 2}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 2 \\ x > 2}} 1 = 1 \text{ şi } f(2) = 2.$$

Prin urmare, f este continuă la stânga în $x_0 = 2$, dar nu este continuă la dreapte în 2.

Teoremă

Funcţia $f : D \to \mathbb{R}$ este continuă în punctul $x_0 \in D$ dacă şi numai dacă este continuă la stânga şi la dreapta în punctul x_0.

Exerciţiu

Să se studieze continuitatea funcţiei $f : [0, 2] \to \mathbb{R}$, definită prin

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{6\sin 2(x-1)}{x-1}, & 0 \leq x < 1 \\ 7 + 5x, & 1 \leq x \leq 2. \end{cases}$$

Soluţie. Funcţia f este continuă pe $[0, 1) \cup (1, 2]$. Calculăm

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} f(x) &= \lim_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} \frac{6\sin 2(x-1)}{x-1} = 12 \lim_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} \frac{\sin 2(x-1)}{2(x-1)} = 12, \\ \lim_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} f(x) &= \lim_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} (7 + 5x) = 12, \\ f(1) &= 7 + 5 \cdot 1 = 12, \end{aligned}$$

deci f este continuă în $x_0 = 1$.

Teoremă

Fie $f : D \to \mathbb{R}$ şi $x_0 \in D$ punct de acumulare la stânga (dreapta) pentru D.

1) f este continuă la stânga în x_0 dacă $\forall (x_n)_n$ astfel încât $x_n \to x_0$, cu $x_n \leq x_0$ şi $x_n \in D$, atunci $f(x_n) \to f(x_0)$.

2) f este continuă la dreapta în x_0 dacă $\forall (x_n)_n$ astfel încât $x_n \to x_0$, cu $x_n \geq x_0$ şi $x_n \in D$, atunci $f(x_n) \to f(x_0)$.

Propoziţie

Fie $f : D \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă în punctul $x_0 \in D$. Atunci:

1) dacă $a < f(x_0) < b$, atunci $\exists U \in \mathcal{V}(x_0)$ astfel încât să avem $a < f(x) < b$, $\forall x \in U \cap D$;

2) dacă $f(x_0) \neq 0$, atunci $\exists U \in \mathcal{V}(x_0)$ astfel încât să avem $f(x) \neq 0$, $\forall x \in U \cap D$.

Propoziţie

Fie $f : D \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă pe D. Atunci:

1) dacă $\exists a, b \in D$ astfel încât $a < b$ şi $f(a) f(b) < 0$ atunci $\exists c \in (a, b)$ astfel încât $f(c) = 0$.

2) dacă f nu se anulează în nici un punct din D, atunci f păstrează semn constant pe D.

Teoremă (Weierstrass)

O funcţie continuă pe o mulţime compactă (închisă şi mărginită) este mărginită şi îşi atinge marginile pe această mulţime.

Deci, dacă $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ este continuă pe $[a, b]$, atunci

$$\exists M > 0 \text{ astfel încât } |f(x)| \leq M, \ \forall x \in [a, b]$$

şi

$$\exists x_1, x_2 \in [a, b] \text{ astfel încât } f(x_1) = \inf_{x \in [a,b]} f(x) \text{ şi } f(x_2) = \sup_{x \in [a,b]} f(x).$$