Algebră şi geometrie
Culegere de probleme

Alina Ilinca Lazu

Cuprins

Capitolul 1

Matrice şi determinanţi

1. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$,

$C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 0 & -5 & -5 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 11 \end{pmatrix}$, $E = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ şi

$F = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. Să se calculeze $A \cdot B \cdot C + D^t$, $E \cdot F$, $F \cdot E$.

Rezolvare: $A \cdot B \cdot C + D^t = \begin{pmatrix} 10 & -6 & 2 \\ 10 & -4 & 3 \\ 15 & -7 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ -5 & -1 & 2 \\ -5 & 2 & 11 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 10 & -5 & 5 \\ 5 & -5 & 5 \\ 10 & -5 & 15 \end{pmatrix} = 5 \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$;

$E \cdot F = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$; $F \cdot E = (5)$.

2. Fie matricea

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Să se calculeze A^n.

Rezolvare: Scriem matricea A sub forma

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = E + B,$$

unde $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Dar

$$B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \; B^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = B.$$

Deci,

$$\begin{aligned} A^n &= (E+B)^n = E + C_n^1 B + C_n^2 B^2 + C_n^3 B + C_n^4 B^2 + ... \\ &= E + B\left(C_n^1 + C_n^3 + ...\right) + B^2\left(C_n^2 + C_n^4 + ...\right) \\ &= E + 2^{n-1} B + \left(2^{n-1} - 1\right) B^2. \end{aligned}$$

3. Fie $A = (a_{ij})_{i,j=\overline{1,n}}$ şi $B = (b_{ij})_{i,j=\overline{1,n}}$ două matrice pătratice de tip $n \times n$ şi I matricea unitate de acelaşi tip. Să se arate că

$$AB - BA \neq I.$$

Rezolvare: Să notăm $AB = (p_{ij})_{i,j=\overline{1,n}}$, $BA = (q_{ij})_{i,j=\overline{1,n}}$ şi $AB - BA = (d_{ij})_{i,j=\overline{1,n}}$. Vom calcula urma matricei $AB - BA$. Amintim că prin urma unei matrice pătratice se înţelege suma elementelor de pe diagonala principală. În cazul nostru,

$$tr\,(AB - BA) = \sum_{i=1}^{n} d_{ii} = \sum_{i=1}^{n} (p_{ii} - q_{ii}) \, .$$

Avem

$$p_{ii} - q_{ii} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{ki} - \sum_{k=1}^{n} b_{ik} a_{ki}.$$

Deci,

$$tr\,(AB - BA) = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{ki} - \sum_{k=1}^{n} b_{ik} a_{ki} \right) = 0.$$

Prin urmare, egalitatea $AB - BA = I$ nu este posibilă deoarece urma matricei $AB - BA$ este zero, în timp ce urma matricei unitate este n.

4. Să se calculeze determinanţii

$$D_1 = \begin{vmatrix} \alpha & 2\alpha & 3\alpha \\ 4\alpha & \alpha & \alpha \\ 2\alpha & \alpha & \alpha \end{vmatrix}, \, \alpha \in \mathbb{R},$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} a^2 & b^2 & c^2 \\ (b+c)^2 & (c+a)^2 & (a+b)^2 \\ -a+b+c & a-b+c & a+b-c \end{vmatrix}, \, a, b, c \in \mathbb{R},$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{vmatrix},$$

$$D_4 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3\alpha & \beta + 2\alpha & \alpha + 2\beta & 3\beta \\ 3\alpha^2 & \alpha^2 + 2\alpha\beta & \beta^2 + 2\alpha\beta & 3\beta^2 \\ \alpha^3 & \alpha^2\beta & \alpha\beta^2 & \beta^3 \end{vmatrix}, \, \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Rezolvare: $D_1 = -2\alpha^3$, $D_2 = 0$ (se scade linia întâi din linia a doua). $D_3 = 9$, $D_4 = (\alpha - \beta)^6$ (se scade prima coloană din celelalte şi apoi se dezvoltă determinantul după elementele primei linii).

5. Să se calculeze determinantul

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 & -2 & 4 \\ 1 & 5 & 2 & -1 & 6 \\ 3 & 2 & 1 & -5 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 2 \end{vmatrix}.$$

Rezolvare: Folosind proprietăţile determinanţilor, obţinem succesiv

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 4 & 3 & 1 & 5 \\ 3 & -1 & 4 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 & 2 \\ 4 & 3 & 1 & 5 \\ -1 & 4 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 0 & -2 & 2 \\ 4 & 3 & -9 & 5 \\ -1 & 4 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 4 & 3 & -9 \\ -1 & 4 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & -17 \\ -1 & 4 & 7 \end{vmatrix} = -(21 + 68) = -89.$$

6. Să se calculeze

$$D_n = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

Rezolvare: Dezvoltăm D_n după elementele primei linii. Avem

$$D_n = 2D_{n-1} - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & ... & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & ... & 0 & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & ... & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

Dezvoltând al doilea determinant după prima coloană se obţine formula de recurenţă

$$D_n = 2D_{n-1} - D_{n-2}.$$

Avem $D_1 = 2$, $D_2 = 3$, $D_3 = 2D_2 - D_1 = 4$. Prin inducţie se demonstrează că

$$D_n = n + 1.$$

7. Să se arate că

$$D_n = \begin{vmatrix} 1! & 2! & 3! & ... & n! \\ 2! & 2! & 3! & ... & n! \\ 3! & 3! & 3! & ... & n! \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ n! & n! & n! & ... & n! \end{vmatrix} = (-1)^{n+1} (n-1)!1!2!...n!$$

Rezolvare: Se scade linia întâi din toate celelalte, se dezvoltă apoi după ultima coloană şi se ţine cont de relaţia $k! - (k-1)! = (k-1)(k-1)!$.

8. Să se calculeze valoarea determinantului

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & ... & n-1 & n \\ -1 & 0 & 3 & ... & n-1 & n \\ -1 & -2 & 0 & ... & n-1 & n \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ -1 & -2 & -3 & ... & 0 & n \\ -1 & -2 & -3 & ... & -(n-1) & 0 \end{vmatrix}.$$

Rezolvare: Se adună prima linie la toate celelalte şi obţinem $D = n!$.

9. Să se calculeze valoarea determinantului de ordinul n

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & ... & 2 \\ 2 & 2 & 2 & ... & 2 \\ 2 & 2 & 3 & ... & 2 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 2 & 2 & 2 & ... & n \end{vmatrix}.$$

Rezolvare: Se scade prima linie din celelalte şi se obţine $D = -2\,(n-2)!$.

10. Să se calculeze determinantul Vandermonde

$$V\,(a_1, a_2, ..., a_n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a_1 & a_2 & ... & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & ... & a_n^2 \\ ... & ... & ... & ... \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & ... & a_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

Rezolvare: Din fiecare linie începând cu ultima scădem precedenta înmulţită cu a_1 şi obţinem

$$V\,(a_1, a_2, ..., a_n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & a_2 - a_1 & ... & a_n - a_1 \\ 0 & a_2^2 - a_1 a_2 & ... & a_n^2 - a_n a_1 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & a_2^{n-1} - a_2^{n-2} a_1 & ... & a_n^{n-1} - a_n^{n-2} a_1 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_2 - a_1 & ... & a_n - a_1 \\ a_2\,(a_2 - a_1) & ... & a_n\,(a_n - a_1) \\ ... & ... & ... \\ a_2^{n-2}\,(a_2 - a_1) & ... & a_n^{n-2}\,(a_n - a_1) \end{vmatrix}.$$

Scoatem de pe prima coloană factorul $a_2 - a_1$, de pe coloana a doua $a_3 - a_1$ ş.a.m.d. Se obţine

$$V(a_1, a_2, ..., a_n) = (a_2 - a_1)(a_3 - a_1)...(a_n - a_1)\,V(a_2, a_3, ..., a_n).$$

$V(a_2, a_3, ..., a_n)$ este determinantul Vandermonde de ordinul $n-1$ şi prin acelaşi procedeu obţinem succesiv

$$\begin{array}{l} V(a_2, a_3, ..., a_n) = (a_3 - a_2)(a_4 - a_2)...(a_n - a_2)\,V(a_3, a_4, ..., a_n) \\ \dotfill \\ V(a_{n-1}, a_n) = (a_n - a_{n-1}). \end{array}$$

În final avem

$$\begin{aligned} V(a_1, a_2, ..., a_n) &= (a_2 - a_1)(a_3 - a_1)...(a_n - a_1) \times \\ &\quad \times (a_3 - a_2)...(a_n - a_2) \times \\ &\quad \dots\dots\dots\dots \\ &\quad \times (a_n - a_{n-1}) \\ &= \prod_{1 \le j < i \le n} (a_i - a_j). \end{aligned}$$

11. Să se calculeze valorile determinanţilor

$$\text{a) } D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & ... & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & ... & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & ... & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & ... & 0 & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... & -1 & 2 \end{vmatrix},$$

b) $P_n = \begin{vmatrix} a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & ... & a_0 \\ -1 & x & 0 & ... & 0 \\ 0 & -1 & x & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... & x \end{vmatrix}.$

Rezolvare: a) Dezvoltând după prima coloană, obţinem

$$D_n = 2^{n-1} + D_{n-1}.$$

Deducem $D_n = 2^{n-1} + 2^{n-2} + ... + 2 + 1 = 2^n - 1.$

b) Similar obţinem

$$P_n = a_n x^{n-1} + P_{n-1},$$

de unde $P_n = a_n x^{n-1} + a_{n-1} x^{n-2} + ... + a_1 x + a_0.$

12. Să se arate că oricare ar fi matricea A de tip $n \times n$, cu elemente reale, avem

$$\det\left(I + A^2\right) \geq 0.$$

Rezolvare: Se foloseşte identitatea

$$I + A^2 = (I + iA)(I - iA).$$

13. Fie A de forma

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

în care α este o constantă şi fie $f(x)$ un polinom oarecare. Să se arate că

$$f(A) = \begin{pmatrix} f(\alpha) & f'(\alpha) & \frac{1}{2} f''(\alpha) \\ 0 & f(\alpha) & f'(\alpha) \\ 0 & 0 & f(\alpha) \end{pmatrix}$$

Rezolvare: Fie $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$. Atunci

$$f'(x) = na_n x^{n-1} + (n-1)\,a_{n-1}x^{n-2} + ... + 2a_2 x + a_1$$

şi

$$f''(x) = n(n-1)\,a_n x^{n-2} + (n-1)(n-2)\,a_{n-1}x^{n-3} + ... + 2a_2.$$

Să observăm că $A = \alpha I + B$, unde

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Atunci $A^n = (\alpha I + B)^n = \alpha^n I + C_n^1 \alpha^{n-1} B + C_n^2 \alpha^{n-2} B^2 + ... + B^n$. Dar

$$B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ şi } B^n = O_3,\ \forall n \geq 3.$$

Atunci

$$A^n = \begin{pmatrix} \alpha^n & n\alpha^{n-1} & \dfrac{n(n-1)}{2}\alpha^{n-2} \\ 0 & \alpha^n & n\alpha^{n-1} \\ 0 & 0 & \alpha^n \end{pmatrix}.$$

Concluzia rezultă imediat.

14. Să se cerceteze dacă următoarele matrice sunt inversabile şi în caz afirmativ să se găsească inversa

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 5 \\ 3 & 6 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Rezolvare: $\det A = 13 \neq 0$, deci A este inversabilă şi

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 7/13 & -1/13 & -1/13 \\ 18/13 & 3/13 & -10/13 \end{pmatrix}.$$

$$\det B = -8 \neq 0 \text{ şi } B^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

15. Să se determine valoarea parametrului real m astfel încât matricea

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ x & 1 & 2 \\ 1 & x & m \end{pmatrix}$$

să fie inversabilă pentru orice x real.

Rezolvare: $\det A = x^2 - 2x + m - 1 \neq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}$, adică $\Delta = 4\,(2-m) < 0$, de unde $m \in (2, \infty)$.

16. Să se rezolve ecuaţia matriceală

$$X \cdot A = B,$$

unde $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ şi $B = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 1 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$.

Rezolvare: $\det A \neq 0, \quad X = B \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

17. Să se rezolve matriceal sistemul

$$\begin{cases} x + 2y + 4z = -3 \\ 2x - y + 3z = -6 \\ x + y - 2z = 2. \end{cases}$$

Rezolvare: Considerăm matricele

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -3 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Cu aceste notaţii sistemul se scrie

$$A \cdot X = B$$

$\det A \neq 0$, deci A admite inversă şi ecuaţia are soluţia

$$X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \text{ deci } x = -1,\ y = 1,\ z = -1.$$

18. Să se rezolve ecuaţiile matriceale

a) $X \cdot A = B$, unde $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$;

b) $A \cdot X \cdot B = C$, unde $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 6 \end{pmatrix}$,

$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Rezolvare: a) $X = B \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & -3 & 2 \end{pmatrix}$.

b) $X = A^{-1} \cdot C \cdot B^{-1} = \begin{pmatrix} 26 & -39 & 15 \\ -40 & 60 & -23 \\ -11 & 18 & -7 \end{pmatrix}$.

19. Fie A o matrice pătratică de ordin n, inversabilă şi să notăm

$$\det(A+\lambda I)=\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+...+a_{n-1}\lambda+a_n.$$

Să se calculeze $\det(A^*+\mu I)$, $\mu\neq 0$, unde cu A^* am notat adjuncta matricei A.

Rezolvare: Pentru $\lambda=0$ obţinem $\det A=a_n\neq 0$ (deoarece A este inversabilă). Atunci $A^*=a_nA^{-1}$. Aceasta implică

$$\det(A^*+\mu I)=\det\left(a_nA^{-1}+\mu I\right)=\det\left[\mu A^{-1}\left(A+\frac{a_n}{\mu}I\right)\right]$$

$$=\mu^n\det A^{-1}\det\left(A+\frac{a_n}{\mu}I\right)$$

$$=\mu^n(\det A)^{-1}\left[\left(\frac{a_n}{\mu}\right)^n+a_1\left(\frac{a_n}{\mu}\right)^{n-1}+...+a_{n-1}\left(\frac{a_n}{\mu}\right)+a_n\right]$$

$$=\frac{1}{a_n}\left[(a_n)^n+a_1(a_n)^{n-1}\mu+...+a_{n-1}a_n\mu^{n-1}+a_n\mu^n\right]$$

$$=(a_n)^{n-1}+a_1(a_n)^{n-2}\mu+...+a_{n-1}\mu^{n-1}+\mu^n.$$

20. Fie A, ξ şi η trei matrice de tip $m\times m$, $m\times 1$ şi respectiv $1\times m$ astfel încât $A^2=-I+\xi\eta$ şi $\eta\xi=1$. Să se arate că:

a) $A\xi=0$ şi $\eta A=0$;

b) $A+\xi\eta$ este nesingulară şi $(A+\xi\eta)^{-1}=-A+\xi\eta$;

Rezolvare: a) Avem

$$A^2\xi=(-I+\xi\eta)\xi=-\xi+\xi\eta\xi=-\xi+\xi=0$$

$$\eta A^2=\eta(-I+\xi\eta)=-\eta+\eta\xi\eta=-\eta+\eta=0.$$

Atunci

$$0=A\left(A^2\xi\right)=A^2(A\xi)=(-I+\xi\eta)A\xi=-A\xi+\xi\eta A\xi,$$

de unde rezultă că $A\xi = \xi\eta A\xi$. Scriind acum

$$0 = A^2\xi = A(A\xi) = A(\xi\eta A\xi) = (A\xi)(\eta A\xi) = (\xi\eta A\xi)(\eta A\xi) = \xi(\eta A\xi)^2$$

şi având în vedere că $\xi \neq 0$, iar $\eta A\xi \in \mathbb{R}$, obţinem că $\eta A\xi = 0$, ceea ce va antrena $A\xi = 0$. Pe de altă parte,

$$0 = \eta A\xi = \eta A\xi\eta = \eta A\left(I + A^2\right) = \eta A + \eta A^3 = \eta A.$$

b) Din egalităţile

$$(A + \xi\eta)(-A + \xi\eta) = -A^2 + A\xi\eta - \xi\eta A + \xi(\eta\xi)\eta = -A^2 + \xi\eta = I$$

obţinem că $A + \xi\eta$ este nesingulară, iar inversa sa este $-A + \xi\eta$.

21. Fie A, B şi C matrice de tip $n \times n$ astfel încât $B = C^{-1}AC$. Dacă $f(x)$ este un polinom oarecare, să se arate că

$$f(B) = C^{-1}f(A)C.$$

Rezolvare: Din egalitatea $B = C^{-1}AC$ rezultă prin inducţie matematică faptul că $B^k = C^{-1}A^kC$, pentru orice $k \in \mathbb{N}$. Fie

$$f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1x + a_0,\ a_i \in \mathbb{R},\ i = \overline{0,n}.$$

Avem

$$\begin{aligned} f(B) &= a_nB^n + a_{n-1}B^{n-1} + ... + a_1B + a_0I \\ &= a_nC^{-1}A^nC + a_{n-1}C^{-1}A^{n-1}C + ... + a_1C^{-1}AC + a_0C^{-1}C \\ &= C^{-1}\left(a_nA^n + a_{n-1}A^{n-1} + ... + a_1A + a_0I\right)C \\ &= C^{-1}f(A)C, \end{aligned}$$

ceea ce trebuia demonstrat.

22. Să se calculeze rangul următoarelor matrice pentru diferite valori ale lui $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\text{a) } A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & \alpha \end{pmatrix},$$

$$\text{b) } B = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 3 & 2 \\ 2 & 3 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & \alpha - 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Rezolvare: a) $\det A = 3 - 4\alpha$; deci, dacă $\alpha = \dfrac{3}{4}$ atunci $\text{rang}A = 2$, iar dacă $\alpha \in \mathbb{R} - \left\{\dfrac{3}{4}\right\}$ atunci $\text{rang}A = 3$.

b) Avem minorul de ordin doi $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 7 \neq 0$, deci $\text{rang}B \geq 2$. Mai departe, calculăm minorul de ordin trei $\begin{vmatrix} 1 & \alpha & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -3\alpha + 15$, deci dacă $\alpha \neq 5$ atunci $\text{rang}B = 3$. Dacă $\alpha = 5$ calculăm celălalt minor de ordin trei şi avem $\begin{vmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 0$, deci $\text{rang}B = 2$.

23. Se consideră matricele

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & m \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{şi} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & m & n \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Să se determine m şi n astfel încât cele două matrice să aibă acelaşi rang.

Rezolvare: Avem $\text{rang}A \leq \text{rang}B$, $\det A = m + 3$. Dacă $m \neq -3$

atunci rang$A$ =rang$B$, pentru orice $n \in \mathbb{R}$. Dacă $m = -3$, atunci rang$A = 2$. Pentru a avea şi B rangul 2, punem condiţia $\begin{vmatrix} 1 & 2 & n \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0$ şi obţinem $n = 1$.

24. Se dau matricele

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{şi} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Să se arate că $B^{-1} = A$ şi $A^{-1} = B$.

25. Folosind transformările elementare să se afle rangurile următoarelor matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 2 \\ 6 & -1 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 3 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 10 & 1 \\ 4 & 8 & 18 & 7 \\ 10 & 18 & 40 & 17 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & -3 & 4 \\ 1 & -5 & 7 \end{pmatrix}.$$

Rezolvare: Avem

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 2 \\ 6 & -1 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 3 & -1 \end{pmatrix} \underset{\sim}{\overset{\substack{-l_1+l_2\to l_2 \\ -2l_1+l_3\to l_3 \\ -l_1+l_4\to l_4}}{}} \begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \sim$$

$$\overset{l_2 \longleftrightarrow l_3}{\sim} \begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -7 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \overset{-4l_2 + l_3 \to l_3}{\sim} \begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 28 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix},$$

de unde rezultă că $\text{rang}A = 4$.

În acelaşi mod obţinem: $\text{rang}B = 2$, $\text{rang}C = 5$, $\text{rang}D = 2$.

Capitolul 2

Sisteme de ecuaţii liniare

1. Folosind regula lui Cramer să se rezolve sistemul

$$\begin{cases} \dfrac{x}{15} + \dfrac{y}{10} + \dfrac{z}{6} = \dfrac{38}{30} \\ \dfrac{x}{10} + \dfrac{y}{6} + \dfrac{z}{15} = \dfrac{31}{30} \\ \dfrac{x}{6} + \dfrac{y}{15} + \dfrac{z}{10} = \dfrac{31}{30} \end{cases}.$$

Rezolvare: Sistemul dat este echivalent cu

$$\begin{cases} 2x + 3y + 5z = 38 \\ 3x + 5y + 2z = 31 \\ 5x + 2y + 3z = 31 \end{cases}.$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 2 \\ 5 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -70, \quad \Delta_x = \begin{vmatrix} 38 & 3 & 5 \\ 31 & 5 & 2 \\ 31 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -140,$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & 38 & 5 \\ 3 & 31 & 2 \\ 5 & 31 & 3 \end{vmatrix} = -210, \quad \Delta_z = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 38 \\ 3 & 5 & 31 \\ 5 & 2 & 31 \end{vmatrix} = -350.$$

Deci, $x = \dfrac{\Delta_x}{\Delta} = 2$, $y = \dfrac{\Delta_y}{\Delta} = 3$, $z = \dfrac{\Delta_z}{\Delta} = 5$.

2. Folosind regula lui Cramer să se rezolve sistemul

$$\begin{cases} x + ay + a^2 z = a^3 \\ x + by + b^2 z = b^3 \\ x + cy + c^2 z = c^3 \end{cases},$$

unde $a, b, c \in \mathbb{R}$, diferite două câte două.

Rezolvare: $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = (a-b)(b-c)(c-a) \neq 0,$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} a^3 & a & a^2 \\ b^3 & b & b^2 \\ c^3 & c & c^2 \end{vmatrix} = abc\,(a-b)(b-c)(c-a),$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & a^3 & a^2 \\ 1 & b^3 & b^2 \\ 1 & c^3 & c^2 \end{vmatrix} = -(ab+bc+ca)(a-b)(b-c)(c-a),$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & a & a^3 \\ 1 & b & b^3 \\ 1 & c & c^3 \end{vmatrix} = (a+b+c)(a-b)(b-c)(c-a).$$

Soluţia este $x = abc$, $y = -(ab+bc+ca)$, $z = a+b+c$.

3. Să se rezolve şi să se discute sistemele

$$\text{a)} \begin{cases} x - 4y - 3z = 1 \\ -3x + 12y - 3z = 2 \end{cases}, \text{ b)} \begin{cases} x - 4y - 3z = 1 \\ x + 2y + z = 2 \\ 2x + 4y + 2z = 3 \end{cases}.$$

Rezolvare: a) Matricea sistemului şi matricea extinsă sunt:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 \\ -3 & 12 & -3 \end{pmatrix}, \text{ respectiv } \overline{A} = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 & 1 \\ -3 & 12 & -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Avem rang$A$ =rang$\overline{A}$ = 2, deci sistemul este compatibil nedeterminat. Dacă determinantul principal este $\Delta_p = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -3 & -3 \end{vmatrix} = -12$, atunci x, z sunt necunoscutele principale şi y necunoscută secundară. Se obţin soluţiile: $x = 4\alpha - \frac{1}{4}$, $y = \alpha$, $z = -\frac{5}{12}$, $\alpha \in \mathbb{R}$.
b) Corespunzător sistemului avem matricele:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix} \text{ şi } \overline{A} = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Avem rang$A = 2$ şi rang$\overline{A} = 3$, deci sistemul este incompatibil.

4. Să se rezolve şi să se discute după valorile parametrului real λ sistemul

$$\begin{cases} x + \lambda y + z = 1 \\ \lambda x - y + z = 1 \\ x + y - z = 2 \end{cases}.$$

Rezolvare: Determinantul sistemului este $\Delta = (1 + \lambda)^2$. Avem cazurile:
a) $\lambda \in \mathbb{R} - \{-1\}$, atunci $\Delta \neq 0$ şi sistemul are soluţie unică dată de regula lui Cramer

$$\Delta_x = 3\,(\lambda + 1)\,,\ \Delta_y = 3\,(\lambda - 1)\,,\ \Delta_z = -2\left(\lambda^2 - \lambda + 1\right).$$

Deci, soluţia este

$$x = \frac{3}{\lambda + 1},\quad y = \frac{3\,(\lambda - 1)}{(1 + \lambda)^2},\quad z = \frac{-2\left(\lambda^2 - \lambda + 1\right)}{(1 + \lambda)^2}.$$

b) $\lambda = -1$, atunci $\Delta = 0$, sistemul devine

$$\begin{cases} x - y + z = 1 \\ -x - y + z = 1 \\ x + y - z = 2 \end{cases}.$$

Cu notaţiile obişnuite avem $\operatorname{rang} A = 2$, iar $\operatorname{rang} \overline{A} = 3$, deci sistemul este incompatibil.

5. Să se rezolve şi să se discute după valorile reale ale parametrilor α, β, γ sistemul

$$\begin{cases} (\alpha - 1)\,x + \alpha y + (\alpha + 1)\,z = 1 \\ (\beta - 1)\,x + \beta y + (\beta + 1)\,z = 1 \\ x + \gamma y + \gamma z = -2 \end{cases}.$$

Rezolvare: Avem

$$\begin{aligned} \Delta &= \begin{vmatrix} \alpha - 1 & \alpha & \alpha + 1 \\ \beta - 1 & \beta & \beta + 1 \\ 1 & \gamma & \gamma \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & \alpha & 1 \\ -1 & \beta & 1 \\ 1 - \gamma & \gamma & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \alpha & 1 \\ 0 & \beta & 1 \\ 1 - \gamma & \gamma & 0 \end{vmatrix} \\ &= (1 - \gamma)\,(\alpha - \beta)\,. \end{aligned}$$

Distingem cazurile:

a) dacă $\gamma \neq 1$ şi $\alpha \neq \beta$ atunci sistemul este compatibil determinat şi se rezolvă cu regula lui Cramer

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 1 & \alpha & \alpha + 1 \\ 1 & \beta & \beta + 1 \\ -2 & \gamma & \gamma \end{vmatrix} = -2\,(\alpha - \beta)$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} \alpha - 1 & 1 & \alpha + 1 \\ \beta - 1 & 1 & \beta + 1 \\ 1 & -2 & \gamma \end{vmatrix} = (\gamma + 3)\,(\alpha - \beta)$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} \alpha - 1 & \alpha & 1 \\ \beta - 1 & \beta & 1 \\ 1 & \gamma & -2 \end{vmatrix} = -\,(1 + \gamma)\,(\alpha - \beta)\,.$$

Soluţia este: $x = -\dfrac{2}{1 - \gamma}$, $y = \dfrac{\gamma + 3}{1 - \gamma}$, $z = -\dfrac{1 + \gamma}{1 - \gamma}$.

b) dacă $\gamma = 1$ şi $\alpha \neq \beta$ sistemul devine:

$$\begin{cases} (\alpha - 1)\, x + \alpha y + (\alpha + 1)\, z = 1 \\ (\beta - 1)\, x + \beta y + (\beta + 1)\, z = 1 \\ x + y + z = -2 \end{cases}.$$

Avem $\Delta_p = \begin{vmatrix} \alpha - 1 & \alpha \\ \beta - 1 & \beta \end{vmatrix} = \alpha - \beta \neq 0$ şi $\Delta_{car} = \begin{vmatrix} \alpha - 1 & \alpha & 1 \\ \beta - 1 & \beta & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -2\,(\alpha - \beta) \neq 0$, deci sistemul este incompatibil.

c) dacă $\gamma = 1$ şi $\alpha = \beta$, sistemul devine

$$\begin{cases} (\alpha - 1)\, x + \alpha y + (\alpha + 1)\, z = 1 \\ x + y + z = -2 \end{cases}.$$

$\Delta_p = \begin{vmatrix} \alpha - 1 & \alpha \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$, rang$A$ =rang$\overline{A} = 2$, deci sistemul este compatibil simplu nedeterminat cu soluţiile: $x = -1 - 2\alpha + \lambda$, $y = -1 + 2\alpha - 2\lambda$, $z = \lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

d) dacă $\gamma \neq 1$ şi $\alpha = \beta$, sistemul devine

$$\begin{cases} (\alpha - 1)\, x + \alpha y + (\alpha + 1)\, z = 1 \\ x + \gamma y + \gamma z = -2 \end{cases}.$$

Calculând $\Delta_1 = \begin{vmatrix} \alpha - 1 & \alpha \\ 1 & \gamma \end{vmatrix} = \alpha\gamma - \gamma - \alpha$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} \alpha & \alpha + 1 \\ \gamma & \gamma \end{vmatrix} = -\gamma$, $\Delta_3 = \begin{vmatrix} \alpha - 1 & \alpha + 1 \\ 1 & \gamma \end{vmatrix} = \alpha\gamma - \gamma - \alpha - 1$, se observă că totdeauna există un determinant nenul ($\Delta_3 = \Delta_1 - 1$), deci rang$A = 2$.

d$_1$) dacă $\gamma \neq 0$, atunci $\Delta_p = \Delta_2 \neq 0$, x este necunoscută secundară ($x = \lambda$) şi sistemul devine

$$\begin{cases} \alpha y + (\alpha + 1)\, z = 1 - (\alpha - 1)\, \lambda \\ \gamma y + \gamma z = -2 - \lambda \end{cases},$$

care se rezolvă imediat.

d$_2$) dacă $\gamma = 0$, sistemul devine

$$\begin{cases} (\alpha - 1)\, x + \alpha y + (\alpha + 1)\, z = 1 \\ x = -2 \end{cases},$$

care este compatibil simplu nedeterminat, rezolvându-se în funcţie de α.

6. Să se determine parametrul $\lambda \in \mathbb{R}$, astfel încât sistemul

$$\begin{cases} 2x - y + 3z = 9 \\ 3x + 2y + 5z = 11 \\ -x - y + z = 2 \\ 4x + 5y + z = 1 \\ 4x + \lambda z = 22 \end{cases}$$

să fie compatibil.

Rezolvare: Se observă că rang$A = 3$ (Δ_p fiind obţinut din primele trei linii). Sistemul este compatibil dacă rang$\overline{A} = 3$. $\Delta_{car1} = 0$, $\Delta_{car2} = -38\,(\lambda - 9)$, de unde $\lambda = 9$.

7. Să se găsească relaţia dintre parametrii reali α, β, γ astfel încât sistemul

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = \alpha \\ 2x + y + 2z = \beta \\ 3x + z = \gamma \end{cases}$$

să fie compatibil.

Rezolvare: Avem rang$A = 2$. Din condiţia rang$\overline{A} = 2$ obţinem $\alpha - 2\beta + \gamma = 0$.

8. Fie sistemul

$$\begin{cases} 2x - 3y + 4z - 5t = -1 \\ x + 9y + \alpha z + t = 3 \\ 5x - 6y + 10z + \beta t = \gamma \end{cases}.$$

Să se determine parametrii reali α, β, γ astfel ca rangul matricei sistemului să fie doi şi sistemul să fie compatibil.

Rezolvare: $\alpha = 2$, $\beta = -12$, $\gamma = -2$.

9. Să se arate că sistemele

$$\text{a)}\ \begin{cases} x - 3y + 4z = 0 \\ x + 2y - z = 0 \\ 2x - y + 3z = 0 \end{cases},\quad \text{b)}\ \begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ x - 2y + 2z = 0 \\ 3x - 2y + 5z = 0 \end{cases}$$

admit şi soluţii diferite de cea banală şi să se determine aceste soluţii.

Rezolvare: a) $\det A = 0$, $\Delta_p = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 5$, x, y necunoscute principale, z necunoscută secundară. Soluţiile sunt $x = -\alpha$, $y = \alpha$ şi $z = \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

b) $\det A = 0$, $\Delta_p = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -4$, x, y necunoscute principale, z necunoscută secundară. Soluţiile sunt $x = -\frac{3}{2}\alpha$, $y = \frac{1}{4}\alpha$ şi $z = \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

10. Să se arate că sistemul

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ 4x + 5y + 6z = 0 \\ x + \lambda^2 z = 0 \end{cases}$$

admite doar soluţia banală, indiferent de valorile lui $\lambda \in \mathbb{R}$.

Rezolvare: $\det A = -3\left(\lambda^2 + 1\right) \neq 0$.

11. Să se rezolve sistemul liniar omogen

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0 \\ (b + c)\, x_1 + (c + a)\, x_2 + (a + b)\, x_3 = 0 \end{cases},\quad \text{cu } a \neq b.$$

Rezolvare: Sistemul este compatibil simplu nedeterminat, cu soluţia $x_1 = \lambda(b-c)$, $x_2 = \lambda(c-a)$, $x_3 = \lambda(a-b)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

12. Să se rezolve sistemul

$$\begin{cases} x+y+z-t=2 \\ 2x+y-z+2t=9 \\ -x+2y+2z-t=5 \\ x+3y-z-2t=-4 \end{cases}.$$

Rezolvare: Aplicarea regulii lui Cramer necesită multe calcule, de aceea este indicată rezolvarea sistemului aplicând metoda lui Gauss.

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 2 & 9 \\ -1 & 2 & 2 & -1 & 5 \\ 1 & 3 & -1 & -2 & -4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & -3 & 4 & 5 \\ 0 & 3 & 3 & -2 & 7 \\ 0 & 2 & -2 & -1 & -6 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & -3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & -6 & 10 & 22 \\ 0 & 0 & -8 & 7 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & -3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & -3 & 5 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & -19/3 & -76/3 \end{array}\right),$$

astfel am obţinut sistemul triunghiular echivalent

$$\begin{cases} x+y+\ \ z-\ \ t=2 \\ \quad -y-3z+4t=5 \\ \qquad\quad -3z+5t=11 \\ \qquad\qquad -\frac{19}{3}t=-\frac{76}{3} \end{cases}.$$

Din ultima ecuaţie obţinem $t=4$, pe care o înlocuim apoi în a treia şi găsim $z=3$, din a doua ecuaţie obţinem $y=2$ şi din prima $x=1$.

13. Să se rezolve folosind metoda lui Gauss sistemele:

a) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 8 \\ 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 2 \\ 3x_1 + 4x_2 + 4x_3 = 23 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x_2 + 2x_3 = 4 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = -3 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 2 \\ x_1 - 2x_2 - 2x_4 = -1 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 1 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 - x_4 = 1 \\ 5x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 2 \end{cases}$

e) $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 - x_5 + 2x_6 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 + x_6 = 2 \\ -x_1 - 4x_3 - 2x_4 + 2x_5 + 3x_6 = 1 \\ 3x_1 + 2x_2 + 7x_3 + x_4 - x_6 = -1 \end{cases}$

f) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 5 \\ 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 + x_5 = 8 \\ 3x_1 - 6x_2 + 3x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 13 \\ -x_1 + 4x_2 + x_4 - 2x_5 = -7 \\ x_1 + x_3 + x_4 - x_5 = 9. \end{cases}$

Rezolvare: a) Avem

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 1 & 8 \\ 2 & 3 & -2 & 2 \\ 3 & 4 & 4 & 23 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 1 & 8 \\ 0 & -1 & -4 & -14 \\ 0 & -2 & 1 & -1 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 1 & 8 \\ 0 & -1 & -4 & -14 \\ 0 & 0 & 9 & 27 \end{array}\right),$$

de unde se obţine sistemul

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 8 \\ \quad -x_2 - 4x_3 = -14 \\ \qquad\quad 9x_3 = 27 \end{cases}$$

care are soluţia $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$.

b) Avem

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 0 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & -3 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & -3 \end{array}\right) \tilde{} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 1 & -3 \end{array}\right) \tilde{}$$

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & -5 & 7 & -3 \end{array}\right) \tilde{} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 17 & 17 \end{array}\right)$$

şi obţinem $x_1 = -1$, $x_2 = 2$ şi $x_3 = 1$.

c) Avem

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 0 & -2 & -1 \end{array}\right) \tilde{} \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & -3 & -2 \end{array}\right) \tilde{}$$

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right).$$

Ultima ecuaţie $0 = -2$, ceea ce nu se poate, deci sistemul este incompatibil.

d) Avem

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & -1 & 1 \\ 5 & 5 & 2 & 0 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & -4 & -8 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & -5 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -5 & -13 & 5 & -3 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & -4 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -5 & 3 & -1 \\ 0 & -5 & -13 & 5 & -3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & -6 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & -18 & 15 & -3 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

sistemul este simplu nedeterminat, cu soluţiile: $x_1 = (1+5\alpha)/6$, $x_2 = (1-7\alpha)/6$, $x_3 = (1+5\alpha)/6$, $x_4 = \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

e) Avem:

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -4 & -2 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 7 & 1 & 0 & -1 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & -7 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 1 & 5 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & -8 & 3 & -7 & -4 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & -7 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 8 & -1 & 8 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & -15 & 5 & -10 & -4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & -7 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 8 & -1 & 8 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 6 & 0 \end{array}\right)$$

sistem compatibil dublu nedeterminat, cu soluţiile: $x_1 = -9 - 145\alpha - 92\beta$, $x_2 = 6 + 81\alpha + 52\beta$, $x_3 = 2 + 40\alpha + 25\beta$, $x_4 = -6\alpha - 3\beta$, $x_5 = \beta$, $x_6 = \alpha$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

f) Avem

$$\left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & -2 & 1 & -1 & 1 & 5 \\ 2 & -2 & 3 & -2 & 1 & 8 \\ 3 & -6 & 3 & 2 & 3 & 13 \\ -1 & 4 & 0 & 1 & -2 & -7 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & -1 & 9 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & -2 & 1 & -1 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & -2 & 4 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & -2 & 1 & -1 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & -2 & 1 & -1 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

sistem compatibil simplu nedeterminat, $x_1 = \dfrac{81}{5} + 2\alpha$, $x_2 = \dfrac{12}{5} + \alpha$, $x_3 = -\dfrac{34}{5} - \alpha$, $x_4 = -\dfrac{2}{5}$, $x_5 = \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

14. Să se rezolve folosind metoda lui Gauss sistemele

a) $\begin{cases} x - 2y + z = -4 \\ 4x + 3y - 2z = 11 \\ -2x + 3y + 4z = 11 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 4x + 8y + 2z + t = 30 \\ x + 5y + 3z + 8t = 52 \\ 2x + 7y + z + 4t = 35 \\ 3x + 8y + 2z + t = 29 \end{cases}$

c) $\begin{cases} -x_1 + x_2 + 2x_4 + x_5 = 3 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 + 2x_5 = 5 \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 4x_4 - x_5 = -2 \\ x_1 - x_2 - x_3 - 3x_4 - 3x_5 = -7 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x + 2y + z = 3 \\ 2x - y + 3z = 2 \\ x - 3y + 2z = 0 \end{cases}$

e) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 7 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 - 3x_5 = -2 \\ x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 6x_5 = 23 \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 3x_4 - x_5 = 12. \end{cases}$

Rezolvare: a) $x = 1$, $y = 3$, $z = 1$.

b) $x = 1$, $y = 2$, $z = 3$, $t = 4$.

c) $x_1 = -4 + 2\alpha + 3\beta$, $x_2 = -1 + 2\beta$, $x_3 = 4 - \alpha - 2\beta$, $x_4 = \alpha$, $x_5 = \beta$, unde α, $\beta \in \mathbb{R}$.

d) sistem incompatibil.

e) $x_1 = -16 + \alpha + \beta + 5\gamma$, $x_2 = 23 - 2\alpha - 2\beta - 6\gamma$, $x_3 = \alpha$, $x_4 = \beta$, $x_5 = \gamma$, unde α, β, $\gamma \in \mathbb{R}$.

15. Fie sistemul de ecuaţii liniare omogene cu coeficienţi reali

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 + 2x_5 = 0 \\ x_2 + x_3 + 3x_4 = 0 \\ -x_1 + 2x_2 + 4x_4 - x_5 = 0 \end{cases}.$$

a) Să se determine un sistem fundamental de soluţii.

b) Să se stabilească dacă următoarele elemente formează un sistem fundamental de soluţii: $v_1 = (-5, -4, 1, 1, 1)$, $v_2 = (-5, -6, 0, 2, 1)$, $v_3 = (0, 1, -1, 0, 2)$.

Rezolvare: Rezolvăm mai întâi sistemul. Avem

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 4 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

deci sistemul este compatibil nedeterminat, x_1,x_2 sunt necunoscutele principale şi x_3, x_4, x_5 sunt necunoscutele secundare. Mulţimea soluţiilor sistemului este

$$S = \{(-2\alpha - 2\beta - \gamma, -\alpha - 3\beta, \alpha, \beta, \gamma) \ ; \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}\}.$$

Pentru a determina un sistem fundamental de soluţii, luăm:

$$\begin{aligned} \alpha &= 1,\ \beta = \gamma = 0 & \Rightarrow \overline{u}_1 = (-2, -1, 1, 0, 0) \\ \alpha &= 0,\ \beta = 1,\ \gamma = 0 & \Rightarrow \overline{u}_2 = (-2, -3, 0, 1, 0) \\ \alpha &= \beta = 0,\ \gamma = 1 & \Rightarrow \overline{u}_3 = (-1, 0, 0, 0, 1). \end{aligned}$$

Mulţimea $\{\overline{u}_1, \overline{u}_2, \overline{u}_3\}$ este sistem fundamental de soluţii pentru că rangul matricei formată din aceşti vectori este 3 (=număr necunoscute secundare).

b) Se verifică faptul că vectorii $\overline{v}_1$, $\overline{v}_2$, $\overline{v}_3$ sunt soluţii ale sistemului, iar matricea formată din cei trei vectori,

$$\begin{pmatrix} -5 & -4 & 1 & 1 & 1 \\ -5 & -6 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

are rangul 3, deci mulţimea $\{\overline{v}_1, \overline{v}_2, \overline{v}_3\}$ formează un sistem fundamental de soluţii.

16. Fie sistemul de ecuaţii liniare omogene cu coeficienţi reali

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 + x_5 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_5 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 6x_4 - 5x_5 = 0 \\ x_1 + 2x_4 + 3x_5 = 0 \end{cases}.$$

a) Să se determine un sistem fundamental de soluţii.

b) Să se stabilească dacă următoarele elemente formează un sistem fundamental de soluţii: $\overline{v}_1 = (0,2,2,0,0)$, $\overline{v}_2 = (2,5,1,-1,0)$, $\overline{v}_3 = (-4,-4,0,-1,2)$.

Rezolvare: a) Mulţimea soluţiilor sistemului este

$$S = \{(-2\beta - 3\gamma, \alpha - 4\beta - 4\gamma, \alpha, \beta, \gamma)\ ;\ \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}\},$$

iar un sistem fundamental de soluţii este

$$\{\overline{u}_1 = (0,1,1,0,0)\,, \overline{u}_2 = (-2,-4,0,1,0)\,, \overline{u}_3 = (-3,-4,0,0,1)\}.$$

b) Se verifică faptul că cei trei vectori sunt soluţii ale sistemului şi rangul matricei vectorilor este 3, deci formează un sistem fundamental de soluţii.

17. Să se determine parametrul $m \in \mathbb{R}$ astfel ca următorul sistem să admită şi soluţii diferite de soluţia banală şi, în acest caz, să se rezolve

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + mx_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ 3x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = 0 \\ mx_1 - 2x_2 - 2x_4 = 0 \end{cases}.$$

Rezolvare: Sistemul admite şi soluţii nebanale dacă şi numai dacă $\det A = 4 - 4m = 0$, deci dacă şi numai dacă $m = 1$. Aplicăm metoda lui Gauss

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -3 & 3 \\ 0 & -4 & -4 & 2 \\ 0 & -3 & -1 & -1 \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 8 & -10 \\ 0 & 0 & 8 & -10 \end{pmatrix},$$

deci sistemul este compatibil simplu nedeterminat. Soluţia este $x_1 = 2\alpha$, $x_2 = -3\alpha$, $x_3 = 5\alpha$, $x_4 = 4\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Capitolul 3

Spaţii vectoriale

3.1 Exemple de spaţii vectoriale

1. Fie K un corp comutativ. Pe mulţimea

$$K^n = K \times K \times ... \times K = \left\{ \overline{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)\,;\ x_i \in K,\ i = \overline{1, n} \right\}$$

definim operaţia de adunare prin:

$$\overline{x} + \overline{y} = (x_1, x_2, ..., x_n) + (y_1, y_2, ..., y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, ..., x_n + y_n)\,,\ \forall \overline{x}, \overline{y} \in K^n$$

şi operaţia de înmulţire cu scalari prin:

$$\alpha\overline{x} = (\alpha x_1, \alpha x_2, ..., \alpha x_n)\,,\ \forall \alpha \in K\,,\ \overline{x} \in K^n.$$

Să se arate că mulţimea K^n este spaţiu vectorial.

Rezolvare: Se verifică axiomele spaţiului vectorial.

2. Fie $\mathcal{P}_n$ mulţimea polinoamelor cu coeficienţi reali de grad cel mult n. Operaţiile de adunare a două polinoame şi de înmulţire a unui polinom cu un număr real definesc pe $\mathcal{P}_n$ o structură de spaţiu vectorial real.

Rezolvare: Se verifică axiomele spaţiului vectorial.

3. Să se arate că mulţimea $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ a matricelor cu m linii şi n coloane cu elemente din $\mathbb{R}$ formează un spaţiu vectorial real faţă de operaţiile de adunare şi înmulţire cu numere reale a matricelor.
   Rezolvare: Se verifică axiomele spaţiului vectorial.

4. Notăm cu $C[a,b]$ mulţimea funcţiilor continue pe $[a,b]$ cu valori reale. Definim operaţiile:

$$\forall f,g\in C[a,b],\ \ (f+g)(x)=f(x)+g(x),\ \forall x\in[a,b],$$

$$\forall\alpha\in\mathbb{R},\ f\in C[a,b],\ \ (\alpha f)(x)=\alpha f(x),\ \forall x\in[a,b].$$

   Să se arate că mulţimea $C[a,b]$ formează un spaţiu vectorial.
   Rezolvare: Se verifică axiomele spaţiului vectorial.

5. Fie $V=(0,\infty)$ mulţimea numerelor reale pozitive. Definim operaţiile

$$\begin{aligned} + &: V\times V\to V,\ \ x+y=xy,\ \ \forall x,y\in V \ \text{ şi}\\ \cdot &: \mathbb{R}\times V\to V,\ \ \alpha\cdot x=x^{\alpha},\ \ \forall\alpha\in\mathbb{R},\forall x\in V.\end{aligned}$$

   Să se arate că faţă de aceste operaţii V are structură de spaţiu vectorial real.
   Rezolvare: Se verifică uşor că $(V,+)$ este grup comutativ. De asemenea, $\forall\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ şi $\forall x,y\in V$ avem
   1) $(\alpha+\beta)\cdot x=x^{\alpha+\beta}=x^{\alpha}x^{\beta}=x^{\alpha}+x^{\beta}=\alpha\cdot x+\beta\cdot x$;
   2) $\alpha\cdot(x+y)=\alpha\cdot xy=(xy)^{\alpha}=x^{\alpha}y^{\alpha}=x^{\alpha}+y^{\alpha}=\alpha\cdot x+\alpha\cdot y$;
   3) $(\alpha\beta)\cdot x=x^{\alpha\beta}=\left(x^{\beta}\right)^{\alpha}=\alpha\cdot(\beta\cdot x)$;
   4) $1\cdot x=x^{1}=x$.
   Deci V este un spaţiu vectorial real.

3.2 Subspaţii vectoriale

1. Să se arate că mulţimile

$$X_1 = \left\{ A = \begin{pmatrix} a & b \\ a+b & 0 \end{pmatrix} ;\ a, b \in \mathbb{R} \right\} \text{ şi}$$

$$X_2 = \left\{ A = \begin{pmatrix} a & -a \\ 2a & b \end{pmatrix} ;\ a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

sunt subspaţii vectoriale ale spaţiului vectorial $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Rezolvare: Fie $A_1 = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_1+b_1 & 0 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ a_2+b_2 & 0 \end{pmatrix} \in X_1$, unde $a_1, b_1, a_2, b_2 \in \mathbb{R}$, şi $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Avem

$$\begin{aligned} \alpha A_1 + \beta A_2 &= \begin{pmatrix} \alpha a_1 + \beta a_2 & \alpha b_1 + \beta b_2 \\ \alpha(a_1+b_1) + \beta(a_2+b_2) & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \alpha a_1 + \beta a_2 & \alpha b_1 + \beta b_2 \\ (\alpha a_1 + \beta a_2) + (\alpha b_1 + \beta b_2) & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Deci $\alpha A_1 + \beta A_2 \in X_1$, adică X_1 este subspaţiul vectorial al lui $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. În acelaşi mod se demonstrează că X_2 este subspaţiul vectorial al lui $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

2. Să se verifice dacă mulţimile

$$X_1 = \left\{ A = \begin{pmatrix} x & y & x+y \\ -y & z & 2x+z \\ x-y+z & 0 & 0 \end{pmatrix} ;\ x, y, z \in \mathbb{R} \right\},$$

$$X_2 = \left\{ B = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ -a & b & 0 \\ a+2b & 0 & c \end{pmatrix} ;\ a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$$

sunt subspaţii vectoriale ale spaţiului vectorial $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Rezolvare: X_1 este subspaţiu vectorial, dar X_2 nu este subspaţiu vectorial.

3. Să se precizeze care din următoarele submulţimi ale lui $\mathbb{R}^3$ sunt subspaţii vectoriale ale lui $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned}
\text{a) } X_1 &= \{(x_1, x_2, 0)\ ;\ x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}\,;\\
\text{b) } X_2 &= \{(x, -1, 0)\ ;\ x \in \mathbb{R}\}\,;\\
\text{c) } X_3 &= \{(x_1, x_2, x_3)\ ;\ x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{Z}\}\,;\\
\text{d) } X_4 &= \{(x_1, x_2, x_1 - 2x_2)\ ;\ x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}\,;\\
\text{e) } X_5 &= \{(x_1, x_2, x_3)\ ;\ x_1 + 5x_2 - 2x_3 = 0,\ x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}\}\,;\\
\text{f) } X_6 &= \{(x_1, x_2, x_3)\ ;\ x_1 + 5x_2 - 2x_3 = 1,\ x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}\}\,;\\
\text{g) } X_7 &= \{(x_1, x_2, x_3)\ ;\ x_1 + x_2 > 0,\ x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}\}\,;\\
\text{h) } X_8 &= \{(x_1, x_2, x_3)\ ;\ x_1x_2x_3 = 0,\ x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}\,.
\end{aligned}$$

Rezolvare: Dintre aceste submulţimi, subspaţii vectoriale sunt doar X_1, X_4 şi X_5.

4. Fie $S \subset \mathbb{R}^n$ mulţimea soluţiilor unui sistem liniar omogen de m ecuaţii cu n necunoscute:

$$S = \left\{ \overline{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)\,;\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = 0,\ i = \overline{1, m} \right\},$$

cu $a_{ij} \in \mathbb{R}$, $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$. Să se arate că mulţimea S formează un subspaţiu vectorial al lui $\mathbb{R}^n$.

Rezolvare: Mulţimea S este nevidă, pentru că orice sistem liniar omogen admite cel puţin soluţia banală. Fie $\overline{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)\,,\ \overline{y} = (y_1, y_2, ..., y_n) \in S$. Atunci

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = 0,\ \ \sum_{j=1}^{n} a_{ij}y_j = 0,\ \ i = \overline{1, m}.$$

Oricare ar fi $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, avem

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\left(\alpha x_j + \beta y_j\right) = \alpha \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + \beta \sum_{j=1}^{n} a_{ij}y_j = 0,$$

deci $\alpha\overline{x} + \beta\overline{y} \in S$, deci S este subspaţiu vectorial al lui $\mathbb{R}^n$.

5. Fie $\mathcal{M}_n^s(\mathbb{R}) \subset \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ mulţimea matricelor pătratice de ordinul n simetrice, adică

$$\mathcal{M}_n^s(\mathbb{R}) = \left\{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R});\ A^t = A\right\}.$$

Să se arate că $\mathcal{M}_n^s(\mathbb{R})$ formează un subspaţiu vectorial al lui $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Rezolvare: Mulţimea $\mathcal{M}_n^s(\mathbb{R})$ este nevidă deoarece $O_n \in \mathcal{M}_n^s(\mathbb{R})$. Folosind proprietăţile operaţiei de transpunere a unei matrice, pentru orice $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ şi orice $A, B \in \mathcal{M}_n^s(\mathbb{R})$ avem:

$$(\alpha A + \beta B)^t = (\alpha A)^t + (\beta B)^t = \alpha A^t + \beta B^t = \alpha A + \beta B.$$

Rezultă că $\mathcal{M}_n^s(\mathbb{R})$ este subspaţiu vectorial al lui $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

6. Fie $\mathcal{M}_n^a(\mathbb{R}) \subset \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ mulţimea matricelor pătratice de ordinul n antisimetrice, adică

$$\mathcal{M}_n^a(\mathbb{R}) = \left\{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R});\ A^t = -A\right\}.$$

Să se arate că $\mathcal{M}_n^a(\mathbb{R})$ formează un subspaţiu vectorial al lui $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Rezolvare: Se procedează ca în exerciţiul precedent.

7. Fie Y mulţimea polinoamelor de forma $ax^4 + 2bx + 3a$, cu $a, b \in \mathbb{R}$. Să se arate că Y este un subspaţiu vectorial al lui $\mathcal{P}_4$.
Rezolvare: Se verifică folosind teorema de caracterizare a subspaţiilor vectoriale.

3.3 Dependenţă şi independenţă liniară. Sistem de generatori

1. Să se arate că vectorii

$$\overline{v}_1 = (0, 1, 1), \overline{v}_2 = (1, 2, 3), \overline{v}_3 = (2, -1, 1)$$

din $\mathbb{R}^3$ sunt liniar dependenţi şi să se afle relaţia de dependenţă liniară dintre ei.

Rezolvare: Să arătăm că există scalarii α_1, α_2, α_3 nu toţi nuli astfel ca $\alpha_1\overline{v}_1 + \alpha_2\overline{v}_2 + \alpha_3\overline{v}_3 = \overline{0}$, adică

$$\alpha_1(0,1,1) + \alpha_2\,(1,2,3) + \alpha_3\,(2,-1,1) = \overline{0},$$

de unde rezultă sistemul

$$\begin{cases} \alpha_2 + 2\alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 + 2\alpha_2 - \alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 + 3\alpha_2 + \alpha_3 = 0 \end{cases}.$$

Ca acest sistem să admită şi soluţii diferite de cea banală trebuie ca rangul matricei sistemului să fie mai mic decât numărul necunoscutelor. Cum $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0$, rangul matricei sistemului este $2 < 3$. Rezolvând sistemul obţinem $\alpha_1 = 5\alpha_3$, $\alpha_2 = -2\alpha_3$. Înlocuind în relaţia considerată avem

$$5\overline{v}_1 - 2\overline{v}_2 + \overline{v}_3 = \overline{0},$$

relaţia de dependenţă cerută.

Observaţie: Matricea sistemului are vectorii $\overline{v}_1$, $\overline{v}_2$, $\overline{v}_3$ ca vectori coloană. Cum rangul acestei matrice este 2, numărul maxim de vectori liniar independenţi din sistemul S este 2.

2. Să se studieze dependenţa liniară pentru sistemele de vectori:
a) $A_1 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $A_3 = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ în $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$;
b) $p_1 = 2x^2 + x + 3$, $p_2 = x^2 + 5x - 3$, $p_3 = 3x^2 - x + 7$ în $\mathcal{P}_2$;
c) $\overline{v}_1 = (1,-1,2)$, $\overline{v}_2 = (1,0,3)$, $\overline{v}_3 = (2,1,1)$ în $\mathbb{R}^3$;
d) $\overline{v}_1 = (1,2,-1,1,-2)$, $\overline{v}_2 = (1,3,2,-1,-1)$, $\overline{v}_3 = (0,1,4,2,0)$,

$\overline{v}_4 = (2, 4, -3, -2, -3)$ în $\mathbb{R}^5$.

În cazul sistemelor liniar dependente, să se precizeze relaţia de dependenţă.

Rezolvare: a) Considerăm relaţia $\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \alpha_3 A_3 = 0$. Prin înlocuirea vectorilor $\overline{v}_1$, $\overline{v}_2$, $\overline{v}_3$, această relaţie este echivalentă cu sistemul omogen

$$\begin{cases} 2\alpha_1 + 5\alpha_3 = 0 \\ -\alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ 3\alpha_1 - \alpha_2 + 2\alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 = 0. \end{cases}$$

Problema revine la a studia dacă acest sistem admite sau nu soluţii nebanale. Rangul matricei acestui sistem este 3, prin urmare sistemul are doar soluţia banală $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$. Deci sistemul de vectori este liniar independent.

b) Relaţia $\alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2 + \alpha_3 p_3 = 0$ este echivalentă cu sistemul omogen

$$\begin{cases} 2\alpha_1 + \alpha_2 + 3\alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 + 5\alpha_2 - \alpha_3 = 0 \\ 3\alpha_1 - 3\alpha_2 + 7\alpha_3 = 0. \end{cases}$$

Rangul matricei sistemului este $2 < 3$, deci sistemul este simplu nedeterminat. În acest caz sistemul de vectori este liniar dependent şi o relaţie de dependenţă liniară este

$$-16p_1 + 5p_2 + 9p_3 = 0.$$

c) Matricea cu vectorii $\overline{v}_1$,$\overline{v}_2$, $\overline{v}_3$ pe coloane $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ are rangul 3, deci sistemul de vectori este liniar independent.

d) Matricea $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \\ -1 & 2 & 4 & -3 \\ 1 & -1 & 2 & -2 \\ -2 & -1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ are rangul 3, deci sistemul de vectori este liniar dependent şi o relaţie de dependenţă este

$$\overline{v}_1 + \overline{v}_2 - \overline{v}_3 - \overline{v}_4 = \overline{0}.$$

3. Se consideră în $\mathbb{R}^3$ vectorii:

$$\overline{v}_1 = (1, -1, 1)\,,\ \overline{v}_2 = (2, -1, 3)\,,\ \overline{v}_3 = (1, 3, 5)\,,\ \overline{v}_4 = (3, 1, 7)\,.$$

Să se determine numărul maxim de vectori liniar independenţi din sistemul $S = \{\overline{v}_1, \overline{v}_2, \overline{v}_3, \overline{v}_4\}$.

Rezolvare: Numărul maxim de vectori liniar independenţi din sistemul S este dat de rangul matricei care are pe coloane (sau linii) vectorii sistemului S. Matricea astfel formată este

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ -1 & -1 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 5 & 7 \end{pmatrix}$$

şi are rangul 2, deci numărul maxim de vectori liniar independenţi din sistemul S este 2.

4. Se condideră în $\mathbb{R}^5$ vectorii

$$\overline{v}_1 = (2, 1, 3, -1, 1)\,,\ \overline{v}_2 = (1, 3, 4, -2, 3)\,,\ \overline{v}_3 = (4, -1, 1, 1, -3)\,,$$

$$\overline{v}_4 = (7, 0, 3, 1, -4)\,.$$

Să se determine numărul maxim de vectori liniar independenţi din sistemul $S = \{\overline{v}_1, \overline{v}_2, \overline{v}_3, \overline{v}_4\}$.

Rezolvare: Numărul maxim de vectori liniar independenţi este 3.

5. Să se găsească dimensiunea subspaţiului generat de vectorii

$$\overline{v}_1 = (1,0,2,-1)\,,\ \overline{v}_2 = (3,1,-1,0)\,,\ \overline{v}_3 = (2,-2,3,1)$$

din $\mathbb{R}^4$.

Rezolvare: Dimensiunea subspaţiului generat de vectorii $\overline{v}_1$, $\overline{v}_2$, $\overline{v}_3$ este egală cu numărul maxim de vectori liniar independenţi ai sistemului dat, adică cu rangul matricei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Se obţine rang$A = 3$, deci dimensiunea subspaţiului generat de cei trei vectori este 3.

6. Să se găsească dimensiunea subspaţiului generat de vectorii

$$\overline{v}_1 = (1,0,9,-1)\,,\ \overline{v}_2 = (1,2,5,-3)\,,\ \overline{v}_3 = (1,1,7,-2)\,,\ \overline{v}_4 = (0,-1,2,1)$$

din $\mathbb{R}^4$.

Rezolvare: Dimensiunea subspaţiului generat de vectorii $\overline{v}_1$, $\overline{v}_2$, $\overline{v}_3$, $\overline{v}_4$ este 2.

7. Să se arate că vectorii $\overline{v}_1 = (2,-1,3,5)$ şi $\overline{v}_2 = (1,3,-2,4)$ din $\mathbb{R}^4$ sunt liniar independenţi. Să se verifice dacă vectorul $\overline{v} = (-1,11,-12,2)$ aparţine spaţiului generat de $\overline{v}_1$ şi $\overline{v}_2$.

Rezolvare: Matricea $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \\ 3 & -2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$ are rangul 2, deci cei doi vectori sunt liniar independenţi. Subspaţiul generat de $\overline{v}_1$ şi $\overline{v}_2$ este

$$\begin{aligned} X &= \{\alpha\overline{v}_1 + \beta\overline{v}_2\ ;\ \alpha,\beta \in \mathbb{R}\} = \\ &= \{(2\alpha+\beta, -\alpha+3\beta, 3\alpha-2\beta, 5\alpha+4\beta)\ ;\ \alpha,\beta \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

Deci, vectorul $\overline{v}$ aparţine spaţiului generat de cei doi vectori dacă există $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ astfel încât $\overline{v} = \alpha \overline{v}_1 + \beta \overline{v}_2$ sau echivalent

$$(-1, 11, -12, 2) = \alpha (2, -1, 3, 5) + \beta (1, 3, -2, 4),$$

de unde rezultă sistemul

$$\begin{cases} 2\alpha + \beta = -1 \\ -\alpha + 3\beta = 11 \\ 3\alpha - 2\beta = -12 \\ 5\alpha + 4\beta = 2. \end{cases}$$

Problema se reduce la studierea compatibilităţii acestui sistem. Matricea extinsă a sistemului $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & 11 \\ 3 & -2 & -12 \\ 5 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ (care are pe coloane vectorii $\overline{v}_1$, $\overline{v}_2$ şi $\overline{v}$) are rangul 2, deci sistemul este compatibil determinat şi are soluţia $\alpha = -2$, $\beta = 3$, adică $\overline{v} = -2\overline{v}_1 + 3\overline{v}_2$.

8. Să se verifice dacă polinoamele $2x^2 + 3x$ şi $x + 1$ aparţin spaţiului generat de $\{x^3 + 2x - 1,\ 2x^2 + 1,\ x^3 - x\}$.

   Rezolvare: Cele două polinoame aparţin spaţiului dacă sunt combinaţii liniare de elementele sistemului de generatori. Deci

$$\begin{aligned} 2x^2 + 3x &= \alpha_1 \left(x^3 + 2x - 1\right) + \alpha_2 \left(2x^2 + 1\right) + \alpha_3 \left(x^3 - x\right) \text{ şi} \\ x + 1 &= \beta_1 \left(x^3 + 2x - 1\right) + \beta_2 \left(2x^2 + 1\right) + \beta_3 \left(x^3 - x\right). \end{aligned}$$

   Aceste relaţii sunt echivalente cu sistemele

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_3 = 0 \\ 2\alpha_2 = 2 \\ 2\alpha_1 - \alpha_3 = 3 \\ -\alpha_1 + \alpha_2 = 0 \end{cases} \text{ şi } \begin{cases} \beta_1 + \beta_3 = 0 \\ 2\beta_2 = 0 \\ 2\beta_1 - \beta_3 = 1 \\ -\beta_1 + \beta_2 = 1 \end{cases}.$$

Se observă că primul sistem este compatibil ($\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 1$, $\alpha_3 = -1$), ceea ce arată că $2x^2 + 3x$ aparţine spaţiului, în timp ce al doilea sistem este incompatibil, deci $x + 1$ nu aparţine acestui spaţiu.

3.4 Bază şi coordonate. Schimbări de baze şi coordonate

1. Să se găsească o bază a spaţiului vectorial $\mathbb{R}^n$.

   Rezolvare: Fie mulţimea

$$\mathcal{B} = \{\overline{e}_1 = (1, 0, 0, ..., 0), \ \overline{e}_2 = (0, 1, 0, ..., 0), ..., \overline{e}_n = (0, 0, 0, ..., 1)\}.$$

   Să arătăm mai întâi că sistemul $\mathcal{B}$ este liniar independent. Fie $\alpha_1, \alpha_2, ...,$ $\alpha_n \in \mathbb{R}$ astfel încât $\alpha_1\overline{e}_1 + \alpha_2\overline{e}_2 + ... + \alpha_n\overline{e} = \overline{0}$. Această egalitate este echivalentă cu $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) = (0, 0, ..., 0)$, adică $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 0, ..., \alpha_n = 0$. $\mathcal{B}$ este şi sistem de generatori pentru $\mathbb{R}^n$. Într-adevăr, orice vector $\overline{x} = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ poate fi scris sub forma $\overline{x} = x_1\overline{e}_1 + x_2\overline{e}_2 + ...x_n\overline{e}_n$. În concluzie $\mathcal{B}$ este o bază a spaţiului vectorial $\mathbb{R}^n$, iar $\dim \mathbb{R}^n = n$.

2. Să se găsească o bază a spaţiului vectorial $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ al matricelor cu m linii şi n coloane cu elemente din $\mathbb{R}$.

   Rezolvare: Considerăm matricele $E_{i,j}$ de tipul $m \times n$ care au toate elementele egale cu zero, mai puţin cele de pe linia i şi coloana j care sunt egale cu 1. Orice matrice $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$, $A = (a_{ij})_{i,j}$ se poate exprima în mod unic sub forma

$$A = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}E_{ij}.$$

   Matricele E_{ij} constituie o bază pentru spaţiul vectorial $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ şi cum sunt mn astfel de matrice, dimensiunea acestui spaţiu este mn.

3. Să se arate că în spaţiul vectorial $\mathcal{P}_n$, al polinoamelor de grad cel mult n cu coeficienţi reali, sistemul

$$\mathcal{B} = \left\{1, x, x^2, ..., x^n\right\}$$

formează o bază. Deci, $\dim \mathcal{P}_n = n + 1$.

Rezolvare: Se arată că sistemul $\mathcal{B}$ este liniar independent şi este sistem de generatori pentru $\mathcal{P}_n$.

4. Să se determine $\lambda \in \mathbb{R}$ astfel încât vectorii

$$\overline{v}_1 = (\lambda, 0, 1)\,, \overline{v}_2 = (0, \lambda, -1)\,, \overline{v}_3 = (-1, 1, \lambda)$$

să formeze o bază în $\mathbb{R}^3$.

Rezolvare: Considerăm matricea ale cărei coloane sunt formate din coordonatele vectorilor daţi

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & -1 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 1 & -1 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Deoarece $\dim \mathbb{R}^3 = 3$, cei trei vectori formează o bază în $\mathbb{R}^3$ dacă sunt liniar independenţi, adică dacă $\det A \neq 0$. Obţinem $\det A = \lambda^3 + 2\lambda$, astfel că vectorii daţi formează o bază pentru $\alpha \in \mathbb{R} - \{0\}$.

5. Pentru ce valori ale lui $\lambda \in \mathbb{R}$ matricele

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & \lambda \\ -2 & 2 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2\lambda & 5 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 2 & 10 \\ -12 & 1 \end{pmatrix}$$

sunt liniar independente.

Rezolvare: $\lambda \in \mathbb{R} - \{3\}$.

6. În $\mathbb{R}^4$ se dau vectorii

$$\overline{v}_1 = (1, 2, -3, -1)\,, \overline{v}_2 = (0, -1, 1, 2)\,, \overline{v}_3 = (-2, 0, 1, 3)\,, \overline{v}_4 = (-1, 1, 1, 2)\,.$$

Să se arate că aceştia formează o bază. Se cer coordonatele vectorului $\overline{v} = (-2, 2, -3, 1)$ în această bază.

Rezolvare: Deoarece $\dim \mathbb{R}^4 = 4$, este suficient să arătăm că vectorii daţi sunt liniar independenţi. Considerându-i ca vectori coloană într-o matrice, obţinem $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & -1 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$. Rangul acestei matrice este 4, deci vectorii sunt liniar independenţi. Scriem apoi $\overline{v} = \alpha_1 \overline{v}_1 + \alpha_2 \overline{v}_2 + \alpha_3 \overline{v}_3 + \alpha_4 \overline{v}_4$. Pentru determinarea coordonatelor obţinem sistemul

$$\begin{cases} \alpha_1 - 2\alpha_3 - \alpha_4 = -2 \\ 2\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_4 = 2 \\ -3\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = -3 \\ -\alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 + 2\alpha_4 = 1, \end{cases}$$

cu soluţia: $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = -1$, $\alpha_3 = 2$, $\alpha_4 = -1$.

7. a) În $\mathbb{R}^3$ se dau vectorii $\overline{v}_1 = (1, 2, 3)$, $\overline{v}_2 = (2, 3, 4)$, $\overline{v}_3 = (3, 4, 5)$. Să se arate că aceştia formează o bază şi apoi să se determine coordonatele vectorului $\overline{u} = (-1, -3, -5)$ în această bază.

   b) În $\mathbb{R}^4$ se dau vectorii $\overline{v}_1 = (-2, 1, 1, 1)$, $\overline{v}_2 = (1, -2, 1, 1)$, $\overline{v}_3 = (1, 1, -2, 1)$, $\overline{v}_4 = (1, 1, 1, -2)$. Să se arate că aceştia formează o bază. Se cer coordonatele vectorului $\overline{w} = (-1, 1, -1, 1)$ în această bază.

   Rezolvare: a) Se verifică liniara independenţă a celor trei vectori, aşadar ei formează o bază şi $\overline{u} = -2\overline{v}_1 - \overline{v}_2 + \overline{v}_3$, deci coordonatele lui $\overline{u}$ în această bază sunt $(-2, -1, 1)$.

   b) $\overline{w} = \frac{1}{3}\overline{v}_1 - \frac{1}{3}\overline{v}_2 + \frac{1}{3}\overline{v}_3 - \overline{v}_4$.

8. Pentru ce valori ale lui $\lambda \in \mathbb{R}$ vectorii

$$\overline{f}_1 = (\lambda, 0, 1), \overline{f}_2 = (-1, 1, 0) \text{ şi } \overline{f}_3 = (1, 1, -\lambda)$$

formează o bază în $\mathbb{R}^3$? Pentru $\lambda = 1$ scrieţi matricea schimbării de bază, de la baza uzuală din $\mathbb{R}^3$ la baza $W = \{\overline{f}_1, \overline{f}_2, \overline{f}_3\}$, aflaţi inversa acesteia şi componenetele vectorului $\overline{x} = (1, 2, 0)$ în baza W.

Rezolvare: $\det C = -\left(\lambda^2 + 2\right) \neq 0$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$. Pentru $\lambda = 1$, matricea trecerii de la baza uzuală la W este $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, iar inversa ei $C^{-1} = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. Legea schimbării componenetelor unui vector este $X' = C^{-1}X$, deci $\overline{x} = (1, 1, 1)_W$.

9. Să se determine dimensiunea şi o bază a spaţiului generat de vectorii:
   a) $\overline{v}_1 = (1, 2, -1, 3)$, $\overline{v}_2 = (2, 0, -1, 4)$, $\overline{v}_3 = (0, 4, -1, 2)$ din $\mathbb{R}^4$;
   b) $\overline{v}_1 = (-1, 0, 2, -3, 4)$, $\overline{v}_2 = (2, 1, -3, 0, -1)$, $\overline{v}_3 = (1, 3, 1, 1, 2)$, $\overline{v}_4 = (1, 5, 3, 5, 1)$ din $\mathbb{R}^5$.
   Rezolvare: a) Dimensiune spaţiului (numărul maxim de vectori liniar independenţi) este 2; o bază este, de exemplu, $\{\overline{v}_1, \overline{v}_2\}$.
   b) Dimensiune spaţiului este 3; o bază: $\{\overline{v}_1, \overline{v}_2, \overline{v}_3\}$.

10. Se consideră vectorii:
    a) $\overline{v}_1 = (2, 4, -1, 1)$, $\overline{v}_2 = (1, 3, 1, 2)$, $\overline{v}_3 = (-1, 1, 5, 4)$ din $\mathbb{R}^4$;
    b) $\overline{v}_1 = (3, -2, 1, 0, 1)$, $\overline{v}_2 = (1, 0, 2, -2, 1)$, $\overline{v}_3 = (2, -3, 0, 1, -2)$,
    $\overline{v}_4 = (2, -5, -5, 7, -4)$ din $\mathbb{R}^5$.
    Care este dimensiunea subspaţiului generat de aceştia? Să se pună în evidenţă o bază în fiecare din aceste subspaţii.
    Rezolvare: a) Dimensiunea subspaţiului este 2; o bază este, de exemplu, $\{\overline{v}_1, \overline{v}_2\}$.
    b) Dimensiunea subspaţiului este 3; o bază: $\{\overline{v}_1, \overline{v}_2, \overline{v}_3\}$.

11. Să se arate că mulţimea $B' = \{x^2 + x + 1, x^2 - x, x - 1\}$ este bază în

$\mathcal{P}_2$. Să se afle matricea de trecere de la baza uzuală $B = \{1, x, x^2\}$ la baza B'. Să se afle apoi coordonatele polinomului $p = x^2 + 5$ în noua bază.

Rezolvare: Cum $\dim \mathcal{P}_2 = 3$ este suficient să arătăm liniara independenţă a celor trei vectori. Considerând relaţia

$$\alpha_1 \left(x^2 + x + 1\right) + \alpha_2 \left(x^2 - x\right) + \alpha_3 (x - 1) = 0,$$

obţinem sistemul $\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = 0 \\ \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 - \alpha_3 = 0 \end{cases}$ care admite doar soluţia banală $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$, deci cei trei vectori sunt liniar independenţi şi formează o bază în $\mathcal{P}_2$. Pentru a determina coordonatele lui p în această bază vom rezolva sistemul $\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = 1 \\ \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 - \alpha_3 = 5 \end{cases}$. Soluţia sistemului este $\alpha_1 = 2$, $\alpha_2 = -1$, $\alpha_3 = -3$, deci

$$p = 2\left(x^2 + x + 1\right) - \left(x^2 - x\right) - 3(x - 1).$$

12. Pentru ce valori ale lui $\lambda \in \mathbb{R}$ polinoamele

$$p_1 = \lambda x^2 - x, \quad p_2 = 2x^2 + \lambda x, \quad p_3 = x^2 + 1$$

formează o bază în $\mathcal{P}_2$. Pentru $\lambda = 1$ aflaţi matricea trecerii de la baza uzuală $V = \{1, x, x^2\}$ la baza $W = \{p_1, p_2, p_3\}$ şi apoi coordonatele polinomului $q = 2x^2 - 1$ în baza W.

Rezolvare: $\det C = \lambda^2 + 2 \neq 0$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$. $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ şi avem $q = p_1 + p_2 - p_3$, adică $q = (1, 1, -1)_W$.

13. În $\mathbb{R}^3$ se consideră bazele:

$$\begin{aligned} B &= \{\overline{v}_1 = (1,-1,1)\,,\ \overline{v}_2 = (2,0,1)\,, \overline{v}_3 = (1,-2,0)\} \text{ şi} \\ B' &= \{\overline{w}_1 = (2,1,2)\,,\ \overline{w}_2 = (-1,-2,-1)\,,\ \overline{w}_3 = (0,1,1)\}\,. \end{aligned}$$

a) Să se determine legătura dintre cele două baze;

b) Să se determine coordonatele vectorului $\overline{v}$ faţă de baza B' ştiind că are coordonatele $(1,1,0)$ faţă de baza B.

Rezolvare: a) Legătura dintre cele două baze este dată de

$$\overline{w}_1 = \overline{v}_1 + \overline{v}_2 - \overline{v}_3,\ \ \overline{w}_2 = -\overline{v}_2 + \overline{v}_3,\ \ \overline{w}_3 = \overline{v}_1 - \overline{v}_3.$$

b) Coordonatele vectorului $\overline{v}$ faţă de baza B' se obţin ţinând cont de legătura stabilită mai sus. Se găseşte $\overline{v} = 2\overline{w}_1 + \overline{w}_2 - \overline{w}_3$, adică $\overline{v}$ are coordonatele $(2,1,-1)$ faţă de baza B'.

14. Să se găsească matricea de trecere de la baza uzuală a lui $\mathbb{R}^3$ la baza W şi componentele vectorului $\overline{x} \in \mathbb{R}^3$ în raport cu baza W dacă:

a) $W = \left\{\overline{f}_1 = (-1,1,-1)\,,\ \overline{f}_2 = (1,-1,2)\,, \overline{f}_3 = (2,1,2)\right\}$ şi $\overline{x} = (1,2,2)$;

b) $W = \left\{\overline{f}_1 = (1,0,3)\,,\ \overline{f}_2 = (2,-2,1)\,,\ \overline{f}_3 = (-1,1,1)\right\}$ şi $\overline{x} = (1,0,0)$.

Rezolvaree: a) $C = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$, $\overline{x} = (2,1,1)_W$.

b) $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\overline{x} = (1,-1,-2)_W$.

15. Se dau vectorii

$$\overline{v}_1 = \overline{u}_1 + \overline{u}_2 - \overline{u}_3,\ \overline{v}_2 = 2\overline{u}_1 + 3\overline{u}_2 \text{ şi } \overline{v}_3 = 3\overline{u}_1 + 7\overline{u}_2 + 6\overline{u}_3$$

dintr-un spaţiu vectorial în care mulţimea $\{\overline{u}_1, \overline{u}_2, \overline{u}_3\}$ este bază. Să se arate că $\{\overline{v}_1, \overline{v}_2, \overline{v}_3\}$ formează o bază în acest spaţiu şi să se afle coordonatele vectorului $\overline{w} = 2\overline{u}_1 - 7\overline{u}_3$ în această bază.

Rezolvare: Fie $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 7 \\ -1 & 0 & 6 \end{pmatrix}$ matricea de trecere de la baza $\{\overline{u}_1, \overline{u}_2, \overline{u}_3\}$ la $\{\overline{v}_1, \overline{v}_2, \overline{v}_3\}$. Rangul lui C este 3 ($\det C \neq 0$), deci vectorii $\overline{v}_1$, $\overline{v}_2$, $\overline{v}_3$ sunt liniar independenţi şi pot forma o bază. Fie $X = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -7 \end{pmatrix}$ matricea coloană a coordonatelor lui $\overline{w}$ în baza $\{\overline{u}_1, \overline{u}_2, \overline{u}_3\}$.
Legea schimbării componentelor unui vector la o schimbare de baze este $X' = C^{-1}X$, unde X' este matricea coloană a coordonatelor lui $\overline{w}$ în baza $\{\overline{v}_1, \overline{v}_2, \overline{v}_3\}$. Obţinem $X' = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, deci $\overline{w} = \overline{v}_1 + 2\overline{v}_2 - \overline{v}_3$.

16. Fie subspaţiul lui $\mathbb{R}^4$:

$$Y = \left\{ \overline{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4) \ ; \ x_1 + 2x_2 + x_4 = 0, \ x_i \in \mathbb{R}, \ i = \overline{1, 4} \right\}.$$

Să se găsească o bază şi să se precizeze dimensiunea subspaţiului.
Rezolvare: Putem scrie

$$Y = \left\{ (x_1, x_2, x_3, -x_1 - 2x_2) \ ; \ x_i \in \mathbb{R}, \ i = \overline{1, 3} \right\}$$

şi considerăm vectorii $\overline{u}_1 = (1, 0, 0, -1)$, $\overline{u}_2 = (0, 1, 0, -2)$, $\overline{u}_3 = (0, 0, 1, 0)$ din Y. Mulţimea $\{\overline{u}_1, \overline{u}_2, \overline{u}_3\}$ constituie o bază pentru Y deoarece cei trei vectori sunt liniar independenţi (matricea cu aceşti vectori pe coloane are rangul 3) şi orice $\overline{x} \in Y$ se poate scrie $\overline{x} = x_1\overline{u}_1 + x_2\overline{u}_2 + x_3\overline{u}_3$ ($\overline{u}_1$, $\overline{u}_2$, $\overline{u}_3$ este sistem de generatori pentru Y), iar $\dim Y = 3$.

17. Se consideră spaţiul vectorial real

$$X = \left\{ A = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ -b & c & a + c \end{pmatrix} \ ; \ a, b, c \in \mathbb{R} \right\}.$$

Să se arate că matricele $F_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, $F_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ şi $F_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ formează o bază în acest spaţiu.

Rezolvare: Se verifică mai întâi că matricele F_1, F_2 şi F_3 sunt liniar independente. Mai trebuie arătat că $\{F_1, F_2, F_3\}$ este un sistem de generatori pentru X. Fie $A \in X$, $A = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ -b & c & a+c \end{pmatrix}$, $a, b, c \in \mathbb{R}$ şi să determinăm scalarii α_1, α_2, α_3 cu proprietatea că

$$\alpha_1 F_1 + \alpha_2 F_2 + \alpha_3 F_3 = A.$$

Se obţine soluţia $\alpha_1 = \frac{1}{2}a$, $\alpha_2 = \frac{1}{6}(a - 4b + 2c)$, $\alpha_3 = \frac{1}{3}(b + c - a)$, deci

$$A = \frac{a}{2}F_1 + \frac{a - 4b + 2c}{6}F_2 + \frac{b + c - a}{3}F_3.$$

18. Să se calculeze dimensiunea şi să se indice o bază a spaţiului soluţiilor următorului sistem liniar omogen

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + 2x_5 = 0 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 = 0 \\ x_1 + 5x_2 - x_3 + x_4 + 4x_5 = 0 \end{cases}.$$

Rezolvare: Matricea sistemului este

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & -1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Deci mulţimea soluţiilor este

$$S=\left\{\left(\frac{-3\alpha-2\beta-3\gamma}{2},\frac{\alpha-\gamma}{2},\alpha,\beta,\gamma\right)\ ;\ \alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}\right\}.$$

O bază pentru S este

$$\left\{\overline{u}_1=(-3,1,2,0,0)\,,\ \overline{u}_2=(-1,0,0,1,0)\,,\ \overline{u}_3=(-3,-1,0,0,2)\right\},$$

iar $\dim S=3$.

19. Să se calculeze dimensiunea şi să se indice o bază a spaţiului soluţiilor următoarelor sisteme liniare şi omogene

$$\text{a)}\ \begin{cases} x_1+x_2-x_3=0\\ 3x_1-2x_2+2x_3=0\\ 6x_1+x_2-x_3=0\end{cases}\qquad \text{b)}\ \begin{cases} x_1-2x_2+x_3+x_4=0\\ x_1-2x_2+x_3-x_4=0\\ x_1-2x_2+x_3+5x_4=0\end{cases}$$

$$\text{c)}\ \begin{cases} x_1+2x_2-x_3+x_5=0\\ x_1+3x_2-2x_3+8x_4-3x_5=0\\ x_1+4x_2-2x_3+7x_4-4x_5=0\\ x_1+x_2+2x_5=0\end{cases}.$$

Rezolvare: a) $S=\{(0,\alpha,\alpha)\ ;\ \alpha\in\mathbb{R}\}$, deci $\dim S=1$, o bază este $\{\overline{u}_1=(0,1,1)\}$.
b) $S=\{(2\alpha-\beta,\alpha,\beta,0)\ ;\ \alpha,\beta\in\mathbb{R}\}$, $\dim S=2$, o bază este $\{\overline{v}_1=(2,1,0,0)\,,\ \overline{v}_2=(-1,0,1,0)\}$.
c) $S=\left\{\left(-\alpha-3\beta,\alpha+\beta,5\alpha-\frac{3}{2}\beta,\alpha,\beta\right)\ ;\ \alpha,\beta\in\mathbb{R}\right\}$, $\dim S=2$, o bază este $\left\{\overline{w}_1=(-1,1,5,1,0)\,,\ \overline{w}_2=\left(-3,1,-\frac{3}{2},0,1\right)\right\}$.

Capitolul 4

Spaţii euclidiene

1. Fie $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ spaţiul vectorial real al matricelor pătratice reale de ordin n. Definim aplicaţia " $\cdot$ " : $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ prin

$$A \cdot B = tr\left(A^t B\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{ki}b_{ki}, \ \forall A = (a_{ij}), \ B = (b_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).$$

Să se arate că această aplicaţie este un produs scalar pe $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Rezolvare: Avem că

1) $A \cdot B = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{ki}b_{ki} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} b_{ki}a_{ki} = B \cdot A$, $\forall A = (a_{ij}), B = (b_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$;

2) $A \cdot A = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} (a_{ki})^2 \geq 0$, $\forall A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ şi $A \cdot A = 0 \Leftrightarrow a_{ki} = 0$, $\forall k = \overline{1,n}$, $i = \overline{1,n}$;

3) $A \cdot (B + C) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{ki}(b_{ki} + c_{ki}) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} (a_{ki}b_{ki} + a_{ki}c_{ki})$ $= \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{ki}b_{ki} + \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{ki}c_{ki} = A \cdot B + A \cdot C$, $\forall A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$, $C = (c_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$;

4) $(\alpha A) \cdot B = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} (\alpha a_{ki}) b_{ki} = \alpha \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{ki}b_{ki} = \alpha A \cdot B$, $\forall A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, deci aplicaţia " $\cdot$ " este un produs scalar pe $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

2. Să se arate că aplicaţia " $\cdot$ " : $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definită prin

$$\overline{x} \cdot \overline{y} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + ... + x_n y_n,$$

unde $\overline{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$, $\overline{y} = (y_1, y_2, ..., y_n)$, este un produs scalar pe $\mathbb{R}^n$.
Rezolvare: Se verifică proprietăţile produsului scalar.

3. Fie $\mathcal{P}_n[-1,1]$ spaţiul vectorial real al polinoamelor de grad n cu coeficienţi reali definite pe $[-1,1]$. Să se arate că $\mathcal{P}_n[-1,1]$ este un spaţiu euclidian real în raport cu produsul scalar definit prin

$$p \cdot q = \int_{-1}^{1} p(x)\, q(x)\, dx, \ \ \forall p, q \in \mathcal{P}_n[-1,1].$$

Rezolvare: Se verifică proprietăţile produsului scalar.

4. Folosind produsele scalare standard cu care sunt dotate spaţiile euclidiene respective, să se calculeze produsul scalar şi apoi unghiul dintre vectorii:
a) $\overline{u}_1 = (1,2,3)$, $\overline{u}_2 = (2,3,4)$ din $\mathbb{R}^3$;
b) $\overline{v}_1 = (-1,0,2,5)$, $\overline{v}_2 = (2,-3,1,-1)$ din $\mathbb{R}^4$;
c) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ din $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$;
d) $p = x^2 - 3x$, $q = x + 1$ din $\mathcal{P}_2[-1,1]$.
Rezolvare: a) $\overline{u}_1 \cdot \overline{u}_2 = 2 + 6 + 12 = 20$,
$\cos\varphi = \dfrac{\overline{u}_1 \cdot \overline{u}_2}{\|\overline{u}_1\|\,\|\overline{u}_2\|} = \dfrac{20}{\sqrt{1+4+9}\sqrt{4+9+16}} = \dfrac{20}{\sqrt{406}}$.
b) $\cos\varphi = \dfrac{-5}{\sqrt{1+4+25}\sqrt{4+9+1+1}} = -\dfrac{1}{3\sqrt{2}}$.
c) $A^t B = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$, $A \cdot B = 4 - 1 = 3$, $\|A\| = \sqrt{A \cdot A} = \sqrt{15}$,
$\|B\| = \sqrt{B \cdot B} = \sqrt{6}$, $\cos\varphi = \dfrac{3}{\sqrt{15}\sqrt{6}} = \dfrac{1}{\sqrt{10}}$.

d) $p\cdot q=\int_{-1}^{1}\left(x^2-3x\right)(x+1)\,dx=\int_{-1}^{1}\left(x^3-2x^2-3x\right)dx=-\dfrac{4}{3}$,
$\cos\varphi=\dfrac{p\cdot q}{\|p\|\,\|q\|}$, $\|p\|=\sqrt{p\cdot p}=\sqrt{\dfrac{32}{5}}$, $\|q\|=\sqrt{q\cdot q}=\sqrt{\dfrac{8}{3}}$.

5. Să se verifice dacă aplicaţia " $\cdot$ " : $\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$, definită prin

$$\overline{x}\cdot\overline{y}=x_1y_3+2x_2y_1+x_2y_2+5x_3y_1,$$

unde $\overline{x}=(x_1,x_2,x_3)$, $\overline{y}=(y_1,y_2,y_3)$, este un produs scalar.
Rezolvare: Nu, deoarece nu este simetrică.

6. Să se cerceteze dacă aplicaţia " $\cdot$ " : $\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, definită prin

$\overline{x}\cdot\overline{y}=2x_1y_1-x_1y_2-x_2y_1+4x_2y_2$, unde $\overline{x}=(x_1,x_2)\,,\ \overline{y}=(y_1,y_2)\in\mathbb{R}^2$,

este un produs scalar şi în caz afirmativ să se calculeze produsul scalar dintre $\overline{x}=(2,1)$, $\overline{y}=(1,-1)$.
Rezolvare: Trebuie să verificăm proprietăţile produsului scalar. Se observă că $\overline{x}\cdot\overline{y}=\overline{y}\cdot\overline{x}$, $\forall\overline{x},\overline{y}\in\mathbb{R}^2$. Apoi $\overline{x}\cdot\overline{x}=2x_1^2-x_1x_2-x_2x_1+4x_2^2=2(x_1-\frac{1}{2}x_2)^2+\frac{7}{2}x_2^2\geq 0$, $\forall\overline{x}\in\mathbb{R}^2$ şi $\overline{x}\cdot\overline{x}=0\Leftrightarrow x_1=x_2=0\Leftrightarrow\overline{x}=\overline{0}$. Dacă considerăm $\overline{z}=(z_1,z_2)\in\mathbb{R}^2$, $\overline{x}\cdot(\overline{y}+\overline{z})=2x_1(y_1+z_1)-x_1(y_2+z_2)-x_2(y_1+z_1)+4x_2(y_2+z_2)=\overline{x}\cdot\overline{y}+\overline{x}\cdot\overline{z}$. Fie $\alpha\in\mathbb{R}$, $(\alpha\overline{x})\cdot\overline{y}=2(\alpha x_1)y_1-(\alpha x_1)y_2-(\alpha x_2)y_1+4(\alpha x_2)y_2=\alpha\overline{x}\cdot\overline{y}$, $\forall\overline{x},\overline{y}\in\mathbb{R}^2$. Prin urmare, " $\cdot$ " este un produs scalar. În plus, avem $\overline{x}\cdot\overline{y}=1$.

7. Fie $\mathcal{P}_n$ spaţiul vectorial real al polinoamelor de grad cel mult n. Definim aplicaţia " $\cdot$ " : $\mathcal{P}_n\times\mathcal{P}_n\to\mathbb{R}$, prin

$$p\cdot q=\sum_{i=0}^{n}a_ib_i,\ \text{unde}\ p(x)=\sum_{i=0}^{n}a_ix^i,\ q(x)=\sum_{i=0}^{n-1}b_ix^i\in\mathcal{P}_n.$$

a) Să se arate că aplicaţia dată este un produs scalar;
b) Să se calculeze $p\cdot q$, unde $p(x)=2x^2+4x-3$, $q(x)=x^3-x-2$ şi să se afle normele celor două polinoame.

Rezolvare: a) Se observă că $p \cdot q = q \cdot p$, $\forall p, q \in \mathcal{P}_n$. Fie $p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \in \mathcal{P}_n$. Avem $p \cdot p = \sum_{i=0}^{n} (a_i)^2 \geq 0$ şi $p \cdot p = 0 \Leftrightarrow a_i = 0$, $\forall i = \overline{0,n} \Leftrightarrow p = 0$. Pentru $r(x) = \sum_{i=0}^{n} c_i x^i \in \mathcal{P}_n$, are loc $p \cdot (q + r) = \sum_{i=0}^{n} a_i (b_i + c_i) = p \cdot q + p \cdot r$ şi $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $(\alpha p) \cdot q = \sum_{i=0}^{n} (\alpha a_i) b_i = \alpha p \cdot q$. Deci, aplicaţia dată este un produs scalar.
b) Avem $p \cdot q = 2$, $\|p\| = \sqrt{29}$ şi $\|q\| = \sqrt{6}$.

8. Verificaţi dacă următoarea mulţime din $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ este ortogonală:

$$\left\{ A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & -3 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Rezolvare: Se verifică $A_i \cdot A_j = 0$, $\forall i, j = \overline{1,3}$, $i \neq j$, deci mulţimea dată este ortogonală.

9. Pe spaţiul vectorial $C\left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$ al funcţiilor reale continue pe $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$ definim aplicaţia

$$f \cdot g = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} f(x)\, g(x) \sin x dx, \;\; \forall f, g \in C\left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right].$$

a) Să se arate că aplicaţia dată este un produs scalar;
b) Să se calculeze $\|f\|$ pentru $f(x) = \sqrt{x}$;
c) Să se afle $k \in \mathbb{R}$ astfel încât funcţiile $g(x) = x + k$ şi $h(x) = 1$ să fie ortogonale.
Rezolvare: a) Se verifică proprietăţile produsului scalar.
b) $\|f\| = \sqrt{f \cdot f}$, iar $f \cdot f = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} x \sin x dx = \frac{\sqrt{2}}{2} \pi$.
c) Punem condiţia $g \cdot h = 0$, adică $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} (x + k) \sin x dx = 0$, de unde rezultă $k = -\frac{\pi}{2}$.

10. Să se ortonormeze următoarele baze din $\mathbb{R}^3$:
a) $B = \left\{ \overline{f}_1 = (1, -1, 0), \overline{f}_2 = (2, 1, 0), \overline{f}_3 = (1, 0, 1) \right\}$;

b) $B = \left\{ \overline{f}_1 = (1,0,1), \overline{f}_2 = (0,1,-1), \overline{f}_3 = (-1,1,1) \right\}$.

Rezolvare: a) Construim vectorii ortogonali astfel

$$\begin{cases} \overline{g}_1 = \overline{f}_1 \\ \overline{g}_2 = \overline{f}_2 - \alpha_{11}\overline{g}_1 \\ \overline{g}_3 = \overline{f}_3 - \alpha_{21}\overline{g}_1 - \alpha_{22}\overline{g}_2. \end{cases}$$

Coeficienţii α_{ij} se determină punând condiţia ca vectorii să fie ortogonali doi câte doi. Astfel

$$\begin{aligned} \overline{g}_2 \quad \perp \quad \overline{g}_1 &\Leftrightarrow \overline{g}_2 \cdot \overline{g}_1 = 0 \Leftrightarrow \left(\overline{f}_2 - \alpha_{11}\overline{g}_1\right) \cdot \overline{g}_1 = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & \overline{f}_2 \cdot \overline{g}_1 - \alpha_{11}\overline{g}_1 \cdot \overline{g}_1 = 0 \Leftrightarrow \alpha_{11} = \frac{\overline{f}_2 \cdot \overline{g}_1}{\overline{g}_1 \cdot \overline{g}_1} \Leftrightarrow \alpha_{11} = \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

deci $\overline{g}_2 = \left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, 0\right)$ sau echivalent $\overline{g}_2 = (1,1,0)$. În acelaşi mod vom determina şi vectorul $\overline{g}_3$, anume

$$\begin{aligned} \begin{cases} \overline{g}_3 \perp \overline{g}_1 \\ \overline{g}_3 \perp \overline{g}_2 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} \overline{f}_3 \cdot \overline{g}_1 - \alpha_{21}\overline{g}_1 \cdot \overline{g}_1 = 0 \\ \overline{f}_3 \cdot \overline{g}_2 - \alpha_{22}\overline{g}_2 \cdot \overline{g}_2 = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_{21} = \dfrac{\overline{f}_3 \cdot \overline{g}_1}{\overline{g}_1 \cdot \overline{g}_1} \\ \alpha_{22} = \dfrac{\overline{f}_3 \cdot \overline{g}_2}{\overline{g}_2 \cdot \overline{g}_2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_{21} = \dfrac{1}{2} \\ \alpha_{22} = \dfrac{1}{2} \end{cases}, \end{aligned}$$

deci $\overline{g}_3 = (0,0,1)$. Normând cei trei vectori se obţine baza ortonormată

$$\begin{cases} \overline{e}_1 = \dfrac{\overline{g}_1}{\|\overline{g}_1\|} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0) \\ \overline{e}_2 = \dfrac{\overline{g}_2}{\|\overline{g}_2\|} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0) \\ \overline{e}_3 = \dfrac{\overline{g}_3}{\|\overline{g}_3\|} = (0,0,1). \end{cases}$$

b) Ca anterior se construiesc vectorii $\overline{g}_1$, $\overline{g}_2$ şi $\overline{g}_3$. Din condiţiile de ortogonalitate obţinem $\alpha_{11} = -\frac{1}{2}$, deci $\overline{g}_2 = \left(\frac{1}{2}, 1, -\frac{1}{2}\right)$, sau echivalent $\overline{g}_2 = (1,2,-1)$ şi $\alpha_{21} = \alpha_{22} = 0$, deci $\overline{g}_3 = \overline{f}_3$. În final se obţine baza ortonormată: $\overline{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1)$, $\overline{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1,2,-1)$ şi $\overline{e}_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}(-1,1,1)$.

11. Pentru ce valori ale lui $\lambda \in \mathbb{R}$ vectorii

$$\overline{f}_1 = (0,1,1)\,,\ \overline{f}_2 = (0,\lambda,1)\ \text{şi}\ \overline{f}_3 = (\lambda,1,0)$$

formează o bază în $\mathbb{R}^3$. Pentru $\lambda = -1$ ortonormaţi baza respectivă.

Rezolvare: Cei trei vectori formează o bază în $\mathbb{R}^3$ dacă sunt liniar independenţi, adică dacă matricea

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \lambda \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

are rangul 3. Cu alte cuvinte, trebuie $\det A = \lambda(1-\lambda) \neq 0$, deci $\lambda \in \mathbb{R} - \{0,1\}$. Construim vectorii ortogonali

$$\begin{cases} \overline{g}_1 = \overline{f}_1 \\ \overline{g}_2 = \overline{f}_2 - \alpha_{11}\overline{g}_1 \\ \overline{g}_3 = \overline{f}_3 - \alpha_{21}\overline{g}_1 - \alpha_{22}\overline{g}_2. \end{cases}$$

Din condiţia de ortogonalitate $\overline{g}_2 \perp \overline{g}_1$ obţinem $\alpha_{11} = 0$, deci $\overline{g}_2 = \overline{f}_2$ şi respectiv, din condiţiile $\overline{g}_3 \perp \overline{g}_1$ şi $\overline{g}_3 \perp \overline{g}_2$ găsim $\alpha_{21} = \frac{1}{2}$ şi $\alpha_{22} = -\frac{1}{2}$, de unde rezultă $\overline{g}_3 = (-1,0,0)$. Normăm vectorii ortogonali obţinuţi şi avem baza ortonormată: $\overline{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,1)$, $\overline{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(0,-1,1)$ şi $\overline{e}_3 = (-1,0,0)$.

12. Arătaţi că vectorii

$$\overline{f}_1 = (1,1,-1)\,,\ \overline{f}_2 = (-1,1,1)\ \text{şi}\ \overline{f}_3 = (1,0,1)$$

sunt liniar independenţi şi apoi ortonormaţi baza formată de aceştia în $\mathbb{R}^3$.

Rezolvare: Avem $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 4 \neq 0$, deci vectorii sunt liniar independenţi. Construim vectorii

$$\begin{cases} \overline{g}_1 = \overline{f}_1 \\ \overline{g}_2 = \overline{f_2} - \alpha_{11}\overline{g}_1 \\ \overline{g}_3 = \overline{f_3} - \alpha_{21}\overline{g}_1 - \alpha_{22}\overline{g}_2. \end{cases}$$

Din condiţia $\overline{g}_1 \perp \overline{g}_2$ obţinem $\alpha_{11} = -\frac{1}{3}$, deci $\overline{g}_2 = (-1, 2, 1)$ iar din $\overline{g}_1 \perp \overline{g}_3, \overline{g}_2 \perp \overline{g}_3$ rezultă $\alpha_{21} = \alpha_{22} = 0$, deci $\overline{g}_3 = \overline{f}_3$. Baza ortonormată este

$$\begin{cases} \overline{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, -1) \\ \overline{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(-1, 2, 1) \\ \overline{e}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 1). \end{cases}$$

13. În spaţiul euclidian $\mathcal{P}_3[-1, 1]$ dotat cu produsul standard se cere să se ortonormeze baza canonică $\{1, x, x^2, x^3\}$.

Rezolvare: Căutăm polinoamele ortogonale de forma

$$\begin{cases} f_1 = 1 \\ f_2 = x - \alpha_{11} f_1 \\ f_3 = x^2 - \alpha_{21} f_1 - \alpha_{22} f_2 \\ f_4 = x^3 - \alpha_{31} f_1 - \alpha_{32} f_2 - \alpha_{33} f_3 \end{cases}.$$

Din condiţia ca fiecare polinom f_i, $i = 2, 3, 4$ să fie ortogonal pe cele anterioare obţinem constantele α_{ij}. Astfel,

$$\begin{aligned} \alpha_{11} &= \frac{x \cdot f_1}{f_1 \cdot f_1} = 0, \text{ deci } f_2 = x, \\ \alpha_{21} &= \frac{x^2 \cdot f_1}{f_1 \cdot f_1} = \frac{1}{3},\ \alpha_{22} = \frac{x^2 \cdot f_2}{f_2 \cdot f_2} = 0, \text{ deci } f_3 = x^2 - \frac{1}{3}, \\ \alpha_{31} &= \frac{x^3 \cdot f_1}{f_1 \cdot f_1} = 0,\ \alpha_{32} = \frac{x^3 \cdot f_2}{f_2 \cdot f_2} = \frac{3}{5},\ \alpha_{33} = \frac{x^3 \cdot f_3}{f_3 \cdot f_3} = 0, \end{aligned}$$

deci $f_4 = x^3 - \frac{3}{5}x$.

În cazul general al polinoamelor cu coeficienţi reali definite pe $[-1,1]$, $\mathcal{P}[-1,1]$, polinoamele obţinute din 1, x, x^2,..., x^n,... prin procedeul de ortogonalizare se numesc polinoame Legendre. Aşadar $f_1 = 1$, $f_2 = x$, $f_3 = x^2 - \frac{1}{3}$, $f_4 = x^3 - \frac{3}{5}x$ sunt primele patru polinoame Legendre.

14. Să se determine vectorul unitar $\overline{v}$ din $\mathbb{R}^3$ ortogonal pe vectorii $\overline{v}_1 = (1,2,-1)$ şi $\overline{v}_2 = (1,-1,2)$.

Rezolvare: Fie $\overline{v} = (x,y,z)$. Din ipoteză avem $\overline{v} \cdot \overline{v}_1 = 0$ şi $\overline{v} \cdot \overline{v}_2 = 0$, adică $x + 2y - z = 0$, $x - y + 2z = 0$ şi $\|\overline{v}\| = 1$, deci $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Rezolvând acest sistem obţinem soluţiile: $x = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$, $y = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}$, $z = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ sau $x = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}$, $y = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$, $z = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

15. Să se găsească $\lambda \in \mathbb{R}$ astfel încât următorii vectori să fie ortogonali:

a) $\overline{v}_1 = (\lambda, 2, 5)$, $\overline{v}_2 = (-1, -2\lambda, 1)$ în $\mathbb{R}^3$;

b) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ \lambda & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix}$ în $M_2(\mathbb{R})$;

c) $p = \lambda x^2 + 1$, $q = x + 2\lambda$.

Rezolvare: a) $\overline{v}_1 \cdot \overline{v}_2 = -5\lambda + 5$, de unde $\lambda = 1$.

b) $A \cdot B = 5 + \lambda$, de unde $\lambda = -5$.

c) $p \cdot q = \dfrac{4}{3}\lambda^2 + 4\lambda$, deci $\lambda = 0$ sau $\lambda = -3$.

16. În spaţiul euclidian $\mathbb{R}^2$ înzestrat cu produsul scalar uzual se consideră vectorii

$$\overline{v}_1 = (1, 2\alpha) \quad \text{şi} \quad \overline{v}_2 = (\beta, -2)\,,\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Când cei doi vectori formează o bază ortogonală? Pentru $\alpha = \beta = 1$ normaţi vectorii.

Rezolvare: $\overline{v}_1 \cdot \overline{v}_2 = 0 \Leftrightarrow \beta - 4\alpha = 0 \Leftrightarrow \beta = 4\alpha$.

Când $\alpha = \beta = 1$, avem $\|\overline{v}_1\| = \|\overline{v}_2\| = \sqrt{5}$; vectorii normaţi vor fi $\overline{v}'_1 = \dfrac{1}{\sqrt{5}}(1,2)$, respectiv $\overline{v}'_2 = \dfrac{1}{\sqrt{5}}(1,-2)$.

Capitolul 5

Transformări liniare

5.1 Definiţie. Matricea unei transformări liniare

1. Să se arate că aplicaţia $U : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definită prin

$$U\left(\overline{x}\right) = \left(x_1, x_2, 2x_1 - x_2\right),$$

unde $\overline{x} = \left(x_1, x_2\right) \in \mathbb{R}^2$, este o transformare liniară şi să se scrie matricea transformării relativ la bazele uzuale din $\mathbb{R}^2$, respectiv $\mathbb{R}^3$.
Rezolvare: Verificăm condiţia

$$U\left(\alpha\overline{x} + \beta\overline{y}\right) = \alpha U\left(\overline{x}\right) + \beta U\left(\overline{y}\right),\ \forall\overline{x} = \left(x_1, x_2\right),\ \overline{y} = \left(y_1, y_2\right) \in \mathbb{R}^2$$

şi $\forall\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Avem

$$\begin{aligned} U\left(\alpha\overline{x} + \beta\overline{y}\right) &= U\left(\alpha\left(x_1, x_2\right) + \beta\left(y_1, y_2\right)\right) = U\left(\alpha x_1 + \beta y_1, \alpha x_2 + \beta y_2\right) \\ &= \left(\alpha x_1 + \beta y_1, \alpha x_2 + \beta y_2, 2\left(\alpha x_1 + \beta y_1\right) - \left(\alpha x_2 + \beta y_2\right)\right) \\ &= \left(\alpha x_1, \alpha x_2, 2\alpha x_1 - \alpha x_2\right) + \left(\beta y_1, \beta y_2, 2\beta y_1 - \beta y_2\right) \\ &= \alpha\left(x_1, x_2, 2x_1 - x_2\right) + \beta\left(y_1, y_2, 2y_1 - y_2\right) \\ &= \alpha U\left(\overline{x}\right) + \beta U\left(\overline{y}\right), \end{aligned}$$

deci U este transformare liniară. Pentru a determina matricea transformării calculăm $U(\overline{e}_1) = U(1,0) = (1,0,2)$, $U(\overline{e}_2) = U(0,1) = (0,1,-1)$ şi obţinem matricea

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

2. Se consideră aplicaţiile

$$\begin{aligned} U_1 &: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ U_1(x_1,x_2) = (x_1 - x_2, 2x_2), \\ U_2 &: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ U_2(x_1,x_2) = (x_1 + 2x_2, 3x_1). \end{aligned}$$

a) Să se arate că aceste aplicaţii sunt transformări liniare;
b) Să se determine transformările $U_1 \circ U_2$ şi $U_2 \circ U_1$ şi să se verifice că sunt liniare.
Rezolvare: a) Fie $\overline{x} = (x_1,x_2)$, $\overline{y} = (y_1,y_2) \in \mathbb{R}^2$, $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$, iar $\alpha\overline{x} + \beta\overline{y} = (\alpha x_1 + \beta y_1, \alpha x_2 + \beta y_2)$. Atunci

$$\begin{aligned} U_1(\alpha\overline{x} + \beta\overline{y}) &= (\alpha x_1 + \beta y_1 - \alpha x_2 - \beta y_2, 2\alpha x_2 + 2\beta y_2) \\ &= \alpha(x_1 - x_2, 2x_2) + \beta(y_1 - y_2, 2y_2) \\ &= \alpha U_1(\overline{x}) + \beta U_1(\overline{y}). \end{aligned}$$

În concluzie U_1 este o transformare liniară. Similar se arată că U_2 este o transformare liniară.
b) Pentru orice $\overline{x} = (x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2$ avem

$$\begin{aligned} (U_1 \circ U_2)(\overline{x}) &= U_1(U_2(\overline{x})) = U_1(x_1 + 2x_2, 3x_1) \\ &= (x_1 + 2x_2 - (3x_1), 2(3x_1)) \\ &= (-2x_1 + 2x_2, 6x_1). \end{aligned}$$

Analog,

$$\begin{aligned}(U_2 \circ U_1)(\overline{x}) &= U_2(U_1(\overline{x})) = U_2(x_1 - x_2, 2x_2) \\ &= (x_1 + 3x_2, 3x_1 - 3x_2), \ \forall \overline{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2.\end{aligned}$$

3. Să se verifice dacă aplicaţia $U : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dată prin
   a) $U(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2, 3x_1 - 2x_3, x_1)$
   b) $U(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2, x_3 + 1)$
   c) $U(x_1, x_2, x_3) = \left(x_1 + x_2, x_1, (x_3)^2\right)$
   este transformare liniară. În caz afirmativ să se scrie matricea transformării.
   Rezolvare: Numai transformarea de la punctul a) este liniară şi are matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

4. Se consideră aplicaţia $U : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$, definită prin

$$U(\overline{x}) = (x_1 + x_4, x_1 + 3x_2, x_1 - x_3 - x_4), \ \overline{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4).$$

   Să se arate că U este o transformare liniară şi să se scrie matricea transformării în raport cu bazele uzuale din $\mathbb{R}^3$ şi $\mathbb{R}^4$.
   Rezolvare: Se arată că $U(\alpha\overline{x} + \beta\overline{y}) = \alpha U(\overline{x}) + \beta U(\overline{y})$, $\forall \overline{x}, \overline{y} \in \mathbb{R}^3$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Matricea transformării este

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

5. Fie $P \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R})$ şi $Q \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ două matrice pătratice. Să searate că aplicaţia $T : \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$ definită prin $T(A) = PAQ$,

pentru orice $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$, este o transformare liniară.

Rezolvare: Pentru orice $A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ şi orice $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ avem

$$T(\alpha A + \beta B) = P(\alpha A + \beta B)Q = \alpha PAQ + \beta PBQ = \alpha T(A) + \beta T(B).$$

6. Fie $\mathcal{B} = \{\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3\}$ o bază în $\mathbb{R}^3$ şi se consideră transformarea liniară $U : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, definită prin $U(\overline{e}_1) = \overline{e}_1 + 3\overline{e}_2$, $U(\overline{e}_2) = \overline{e}_1 - \overline{e}_2$, $U(\overline{e}_3) = \overline{e}_1 + 2\overline{e}_2 + \overline{e}_3$. Să se scrie matricea transformării liniare U în baza $\mathcal{B}$.

   Rezolvare:
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

7. În spaţiul $\mathbb{R}^3$ se consideră bazele

$$\begin{aligned} V &= \{\overline{v}_1 = (2,1,1), \overline{v}_2 = (1,2,1), \overline{v}_3 = (1,1,2)\} \quad \text{şi} \\ W &= \{\overline{w}_1 = (1,-1,0), \overline{w}_2 = (0,1,-1), \overline{w}_3 = (2,0,2)\}. \end{aligned}$$

   Fie $U : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ o transformare liniară care are în raport cu baza V matricea
$$A_V = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -3 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

   Să se găsească matricea transformării U în raport cu baza W.

   Rezolvare: Deoarece $\overline{w}_1 = \overline{v}_1 - \overline{v}_2$, $\overline{w}_2 = \overline{v}_2 - \overline{v}_3$, $\overline{w}_3 = \overline{v}_1 - \overline{v}_2 + \overline{v}_3$, matricea schimbării de bază este

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Deoarece matricea transformării U în raport cu baza W satisface $B_W = S^{-1} \cdot A \cdot S$, rezultă că

$$B_W = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & -3 & 2 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

8. Fie $U : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ o transformare liniară astfel încât $U(1,2) = (5,0)$ şi $U(2,1) = (4,3)$. Care este expresia lui U? Să se calculeze $U(-2,3)$.

   Rezolvare: Se verifică uşor că vectorii $(1,2)$ şi $(2,1)$ formează o bază în $\mathbb{R}^2$. Un vector $\overline{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ se poate scrie

   $$(x_1, x_2) = \alpha(1,2) + \beta(2,1)$$

   de unde se obţine $\alpha = \dfrac{1}{3}(2x_2 - x_1)$, $\beta = \dfrac{1}{3}(2x_1 - x_2)$. Deoarece transformarea U este liniară avem

   $$\begin{aligned} U(x_1, x_2) &= \alpha U(1,2) + \beta U(2,1) = \alpha(5,0) + \beta(4,3) \\ &= (5\alpha + 4\beta, 3\beta) = (x_1 + 2x_2, 2x_1 - x_2), \end{aligned}$$

   iar $U(-2,3) = (4,-7)$.

9. Fie $U : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ o transformare liniară astfel încât $U(1,1,-2) = (3,-3,-1)$, $U(1,0,1) = (1,0,1)$ şi $U(-1,-1,1) = (-3,2,0)$. Care este expresia lui U? Să se calculeze $U(1,1,1)$.

   Rezolvare: $U(\overline{x}) = (x_1 + 2x_2, x_3 - x_1, x_2 + x_3)$, unde $\overline{x} = (x_1, x_2, x_3)$, iar $U(1,1,1) = (3,0,2)$.

10. Fie transformările liniare $U_1, U_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, care au în raport cu baza uzuală din $\mathbb{R}^3$ matricele:

    $$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \text{respectiv } A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Să se determine matricea transformării U_1 în raport cu baza

$$W = \left\{\overline{f}_1 = (2,1,-2)\,, \overline{f}_2 = (1,0,1)\,, \overline{f}_3 = (0,2,-7)\right\};$$

b) Să se determine imaginea vectorului $\overline{v} = (1,2,-2)$ prin transformările U_2, $U_1 + U_2$ şi $U_1 \circ U_2$.

Rezolvare: a) Matricea schimbării de bază este

$$S = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & -7 \end{pmatrix},$$

cu inversa

$$S^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -7 & -2 \\ -3 & 14 & 4 \\ -1 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Atunci matricea transformării U_1 în raport cu baza W este

$$B = S^{-1} \cdot A_1 \cdot S = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -2 & 3 & -6 \\ -1 & 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

b) Se observă că $\overline{v} = \overline{e}_1 + 2\overline{e}_2 - 2\overline{e}_3$. Ţinând cont de liniaritatea transformării U_2 avem

$$\begin{aligned} U_2\left(\overline{v}\right) &= U_2\left(\overline{e}_1\right) + 2U_2\left(\overline{e}_2\right) - 2U_2\left(\overline{e}_3\right) \\ &= (2,1,2) + 2\,(1,-2,1) - 2\,(0,1,1) = (4,-5,2)\,. \end{aligned}$$

Sau, făcând înmulţirea dintre matricea transformării U_2 şi matricea coloană a componentelor lui $\overline{v}$, obţinem matricea coloană a componentelor lui $U_2\left(\overline{v}\right)$,

$$A_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Transformarea $U_1 + U_2$ este de asemenea liniară şi are matricea

$$A_1 + A_2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Atunci,

$$(U_1 + U_2)(\overline{v}) = (3,1,1) + 2(1,0,2) - 2(0,2,0) = (5,-3,5).$$

Matricea transformării liniare $U_1 \circ U_2$ este

$$A_1 \cdot A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & -3 & 3 \\ -3 & -4 & 0 \end{pmatrix},$$

şi atunci avem

$$(U_1 \circ U_2)(\overline{v}) = (4,-8,-11).$$

11. Fie U, V, W trei spaţii vectoriale reale şi aplicaţiile $f : U \to V$, $g : V \to W$ astfel încât aplicaţia compusă $g \circ f : U \to W$ să fie liniară. Să se arate că:
(i) dacă g este liniară şi injectivă, atunci f este liniară;
(ii) dacă f este liniară şi surjectivă, atunci g este liniară.
Să se arate că dacă aplicaţia $f : U \to V$ este liniară şi bijectivă, atunci aplicaţia inversă $f^{-1} : V \to U$ este liniară.
Rezolvare: (i) Cum $g \circ f$ este liniară, rezultă că $(g \circ f)(\alpha u + \beta v) = \alpha (g \circ f)(u) + \beta (g \circ f)(v)$ adică $g(f(\alpha u + \beta v)) = \alpha g(f(u)) + \beta g(f(v))$ şi folosind liniaritatea lui g obţinem $g(f(\alpha u + \beta v)) = g(\alpha f(u) + \beta f(v))$.
Dar g fiind injectivă, deducem

$$f(\alpha u + \beta v) = \alpha f(u) + \beta f(v),$$

adică f este liniară.
(ii) Cum f este surjectivă şi liniară, $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 = \alpha_1 f(u_1) + \alpha_2 f(u_2)$, de unde, $g \circ f$ fiind liniară, deducem:

$$g(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) = \alpha_1 (g \circ f)(u_1) + \alpha_2 (g \circ f)(u_2) = \alpha_1 g(v_1) + \alpha_2 g(v_2).$$

Deoarece $f^{-1} \circ f = 1_U$, aplicaţia 1_U fiind liniară, iar f liniară şi surjectivă, din (ii) rezultă că f^{-1} este liniară.

5.2 Nucleu şi imagine

1. Fie aplicaţia $U : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definită prin

$$U(\overline{x}) = (x_1, x_1 + x_2 - x_3, 0),$$

unde $\overline{x} = (x_1, x_2, x_3)$.
a) Să se arate că U este transformare liniară;
b) Să se scrie matricea transformării U în raport cu baza uzuală şi apoi în raport cu baza

$$W = \left\{\overline{f}_1 = (2,1,1), \overline{f_2} = (1,1,0), \overline{f_3} = (1,1,-1)\right\};$$

c) Să se afle nucleul şi imaginea lui U.
Rezolvare: a) Se verifică $U(\alpha\overline{x} + \beta\overline{y}) = \alpha U(\overline{x}) + \beta U(\overline{y})$, $\forall \overline{x}, \overline{y} \in \mathbb{R}^3$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, deci U este transformare liniară.
b) Avem $U(\overline{e}_1) = U(1,0,0) = (1,1,0)$, $U(\overline{e}_2) = U(0,1,0) = (0,1,0)$ şi $U(\overline{e}_3) = U(0,0,1) = (0,-1,0)$, deci matricea transformării în baza uzuală va fi

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Matricea de trecere de la baza uzuală la baza W este

$$S=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

iar legea schimbării matricei la o schimbare de bază este $B=S^{-1}\cdot A\cdot S$, adică

$$B=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

deci matricea transformării în raport cu baza W este

$$B=\begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 2 & 4 & 7 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

c) Conform definiţiei, nucleul transformării U este

$$\ker U=\left\{\overline{x}\in\mathbb{R}^3\ ;\ U\left(\overline{x}\right)=\overline{0}\right\}.$$

Pornind de la relaţia $U\left(\overline{x}\right)=\overline{0}$ obţinem $(x_1,x_1+x_2-x_3,0)=(0,0,0)$, adică

$$\begin{cases} x_1=0 \\ x_1+x_2-x_3=0 \end{cases},$$

de unde $x_1=0$, $x_2=\alpha$, $x_3=\alpha$, $\alpha\in\mathbb{R}$. Deci $\ker U=\{(0,\alpha,\alpha)\ ;\ \alpha\in\mathbb{R}\}$. Imaginea transformării U este

$$\mathrm{Im}U=\left\{U\left(\overline{x}\right)\ ;\ \overline{x}\in\mathbb{R}^3\right\},$$

adică $\mathrm{Im}U=\{(x_1,x_1+x_2-x_3,0)\ ;\ x_1,x_2,x_3\in\mathbb{R}\}$ şi se observă că $\mathrm{Im}U=\{(\alpha,\alpha+\beta,0)\ ;\ \alpha,\beta\in\mathbb{R}\}$.

2. Fie transformarea liniară $U : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definită prin

$$U(\overline{x}) = (x_1 + x_2 + x_3, x_1 + x_2 + x_3, x_1 + x_2 + x_3),$$

unde $\overline{x} = (x_1, x_2, x_3)$. Să se determine rangul şi defectul acestei transformări liniare.

Rezolvare: Determinăm mai întâi nucleul transformării U. Pornind de la $U(\overline{x}) = \overline{0}$ obţinem $x_1 + x_2 + x_3 = 0$, deci

$$\begin{aligned} \ker U &= \{(\alpha, \beta, -\alpha - \beta)\ ;\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}\} \\ &= \{\alpha(1, 0, -1) + \beta(0, 1, -1)\ ;\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

Vectorii $\overline{v}_1 = (1, 0, -1)$ şi $\overline{v}_2 = (0, 1, -1)$ formează un sistem de generatori pentru $\ker U$. Se verifică uşor că ei sunt liniar independenţi, deci $\{\overline{v}_1, \overline{v}_2\}$ reprezintă o bază pentru $\ker U$. Atunci defectul transformării U, $\dim \ker U = 2$. Se ştie că

$$\dim \ker U + \dim \mathrm{Im} U = \dim \mathbb{R}^3 = 3,$$

deci rangul transformării U, $\dim \mathrm{Im} U = 1$. În plus,

$$\mathrm{Im} U = \{(\lambda, \lambda, \lambda)\ ;\ \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

3. Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & 3 & -8 \end{pmatrix}$ asociată transformării liniare $U : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ în baza uzuală din $\mathbb{R}^4$.

a) Să se determine expresia transformării U;

b) Să se găsească nucleul şi defectul lui U, punându-se în evidenţă o bază;

c) Să se găsească imaginea şi rangul lui U, punându-se în evidenţă o bază.

Rezolvare: a) Fie $\overline{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$, adică $\overline{x} = x_1\overline{e}_1 + x_2\overline{e}_2 + x_3\overline{e}_3 + x_4\overline{e}_4$, unde $\{\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3, \overline{e}_4\}$ este baza uzuală din $\mathbb{R}^4$. Deoarece transformarea U este liniară rezultă că

$$\begin{aligned} U(\overline{x}) &= U(x_1\overline{e}_1 + x_2\overline{e}_2 + x_3\overline{e}_3 + x_4\overline{e}_4) \\ &= x_1U(\overline{e}_1) + x_2U(\overline{e}_2) + x_3U(\overline{e}_3) + x_4U(\overline{e}_4). \end{aligned}$$

Dar vectorii $U(\overline{e}_1), ..., U(\overline{e}_4)$ se cunosc (coloanele matricei A) deci avem

$$U(\overline{x}) = x_1(1,0,0,-1) + x_2(0,1,0,0) + x_3(0,0,-1,3) + x_4(-1,0,3,-8)$$

$$= (x_1 - x_4, x_2, -x_3 + 3x_4, -x_1 + 3x_3 - 8x_4).$$

b) Să determinăm acum nucleul lui U. Relaţia $U(x) = \overline{0}$ conduce la sistemul

$$\begin{cases} x_1 - x_4 = 0 \\ x_2 = 0 \\ -x_3 + 3x_4 = 0 \\ -x_1 + 3x_3 - 8x_4 = 0. \end{cases}$$

Rezolvând acest sistem obţinem $x_1 = \alpha$, $x_2 = 0$, $x_3 = 3\alpha$, $x_4 = \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Deci

$$\ker U = \{(\alpha, 0, 3\alpha, \alpha) \ ; \alpha \in \mathbb{R}\}.$$

Vectorul $(1,0,3,1)$ reprezintă o bază a spaţiului $\ker U$ şi

$$\mathrm{def}U = \dim\ker U = 1.$$

c) Conform definiţiei,

$$\mathrm{Im}U = \left\{U(\overline{x}) \ ; \overline{x} \in \mathbb{R}^4\right\}.$$

Mulţimea vectorilor $U(\overline{e}_1)$,...,$U(\overline{e}_4)$, adică

$$\{(1,0,0,-1), (0,1,0,0), (0,0,-1,3), (-1,0,3,-8)\}$$

formează un sistem de generatori pentru ImU şi vom căuta vectorii liniar independenţi din această mulţime. Numărul maxim de vectori liniar independenţi este 3, deci o bază a lui ImU este, de exemplu,

$$\{(1,0,0,-1),(0,1,0,0),(0,0,-1,3)\}$$

şi atunci

$$\mathrm{Im}U=\{(\alpha,\beta,-\gamma,-\alpha+3\gamma)\ ;\ \alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}\},$$

iar rang$U=$ dimIm$U=3$.

4. Se consideră transformarea liniară $U:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$, definită prin

$$U(\overline{x})=(x_1-x_2,x_2-x_3,x_3-x_1),\ \overline{x}=(x_1,x_2,x_3).$$

Să se determine nucleul, imaginea, defectul şi rangul transformării, precizându-se câte o bază.
Rezolvare: Rezolvând ecuaţia $U(\overline{x})=\overline{0}$ obţinem

$$\ker U=\{(\alpha,\alpha,\alpha)\ ;\ \alpha\in\mathbb{R}\}.$$

Vectorul $\overline{u}=(1,1,1)$ reprezintă o bază pentru $\ker U$, deci def$U=1$. Im$U=\{(\alpha-\beta,\beta,-\alpha)\ ;\ \alpha,\beta\in\mathbb{R}\}$, o bază pentru Im$U$ este

$$\{\overline{v}_1=(1,0,-1),\overline{v}_2=(-1,1,0)\},$$

iar rang$U=2$.

5. Să se arate că transformarea liniară $U:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$, definit prin

$$U(\overline{x})=(x_1+x_2-2x_3,x_2,x_1-x_2)$$

este bijectivă. Să se determine transformarea inversă.
Rezolvare: U fiind un endomorfism, pentru a demonstra bijectivitatea sa este suficient să arătăm că este injectiv, ceea ce revine la a arăta

că nucleul său se reduce doar la vectorul nul din $\mathbb{R}^3$, adică $\ker U = \{\overline{0}\}$. Folosind definiţia nucleului lui U rezultă următorul sistem liniar omogen:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_1 - x_3 = 0, \end{cases}$$

care admite doar soluţia banală $x_1 = x_2 = x_3 = 0$. În concluzie, $\ker U = \{\overline{0}\}$, de unde rezultă că U este injectiv, deci bijectiv. Pentru a determina transformarea inversă, pornim de la relaţia $U(\overline{x}) = \overline{y}$, echivalentă cu sistemul

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 = y_1 \\ x_2 = y_2 \\ x_1 - x_3 = y_3, \end{cases}$$

care are soluţia $x_1 = -y_1 + y_2 + 2y_3$, $x_2 = y_2$, $x_3 = -\frac{1}{2}y_1 + y_2 + \frac{1}{2}y_3$. Deci,

$$U^{-1}(\overline{y}) = \left(-y_1 + y_2 + 2y_3, y_2, -\frac{1}{2}y_1 + y_2 + \frac{1}{2}y_3\right).$$

6. Fie dată transformarea liniară $U : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, definită prin

$$U(\overline{x}) = (x_1 + 2x_2 - x_3, -x_1 + x_2 + 2x_3, x_2 - x_3),$$

unde $\overline{x} = (x_1, x_2, x_3)$.

a) Să se arate că U este bijecţie;

b) Să se determine $U^{-1}(2, 0, 2)$, $U^{-1}(1, -1, 0)$.

Rezolvare: a) Verificăm mai întâi injectivitatea lui U. Pentru aceasta să calculăm $\ker U$. Folosind definiţia nucleului obţinem sistemul omogen

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0, \end{cases}$$

a cărui matrice are rangul 3, deci sistemul admite doar soluţia banală. Am obţinut $\ker U = \{\overline{0}\}$, deci U este injectiv. Obsevăm că transformarea U este un endomorfism şi în acest caz surjectivitatea este echivalentă cu injectivitatea, deci U este bijectiv.

b) Pentru a determina transformarea inversă, din $U(\overline{x}) = \overline{y}$, cu $\overline{y} = (y_1, y_2, y_3)$ obţinem sistemul

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = y_1 \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 = y_2 \\ x_2 - x_3 = y_3, \end{cases}$$

care are soluţia

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{4}(3y_1 - y_2 - 5y_3) \\ x_2 = \frac{1}{4}(y_1 + y_2 + y_3) \\ x_3 = \frac{1}{4}(y_1 + y_2 - 3y_3). \end{cases}$$

Deci,

$$U^{-1}(\overline{y}) = \left(\frac{1}{4}(3y_1 - y_2 - 5y_3), \frac{1}{4}(y_1 + y_2 + y_3), \frac{1}{4}(y_1 + y_2 - 3y_3)\right),$$

pentru orice $\overline{y} = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$. Atunci

$$U^{-1}(2, 0, 2) = (-1, 1, -1) \quad \text{şi} \quad U^{-1}(1, -1, 0) = (1, 0, 0).$$

7. Să se studieze injectivitatea transformării liniare $U : \mathcal{P}_2 \to \mathcal{P}_2$, definită prin

$$U(p) = p + p' + p'', \ \ \forall p \in \mathcal{P}_2.$$

Este U bijectivă?

Rezolvare: Pentru studierea injectivităţii avem nevoie de nucleul transformării. Fie $p \in \mathcal{P}_2$, $p = ax^2 + bx + c$. Avem $p' = 2ax + b$ şi $p'' = 2a$. Atunci:

$$U(p) = 0 \ \Leftrightarrow \ ax^2 + (b + 2a)x + (c + b + 2a) = 0 \ \Leftrightarrow \ a = b = c = 0,$$

deci $\ker U = \{0\}$, adică transformarea U este injectivă. În plus, ţinând cont că U este un endomorfism, rezultă bijectivitatea.

8. Se consideră mulţimea

$$X = \left\{p \in \mathcal{P}_3 \ ; \ p = ax^3 + bx^2 + cx + 2a, \ a, b, c \in \mathbb{R}\right\}.$$

Să se arate că aplicaţia

$$U : X \to \mathbb{R}^3, \ \ U(p) = (a, b, c)$$

este bijecţie.

Rezolvare: Observăm că X este un subspaţiu vectorial al lui $\mathcal{P}_3$ şi U este o transformare liniară. Calculăm nucleul transformării şi obţinem $\ker U = \{0\}$, deci U este injectiv. Cum $\dim X = 3 = \dim \mathbb{R}^3$, rezultă că U este bijecţie.

9. Se consideră transformarea liniară $U : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definită prin

$$U(\overline{x}) = (2x_1 + x_3, x_1 + x_2 + 2x_3, 3x_3),$$

unde $\overline{x} = (x_1, x_2, x_3)$. Se cere:
a) Să se afle $\ker U$ şi defectul lui U;
b) Să se afle $\mathrm{Im}U$, să se găsească o bază a sa şi rangul lui U.

Rezolvare: a) Se calculează nucleul folosind definiţia şi se obţine

$$\ker U = \left\{\overline{0}\right\},$$

deci $\mathrm{def}U = 0$;
b) Imaginea lui U este

$$\begin{aligned}\mathrm{Im}U &= \left\{U(\overline{x}) \ ; \ \overline{x} \in \mathbb{R}^3\right\} \\ &= \left\{(2x_1 + x_3, x_1 + x_2 + 2x_3, 3x_3) \ ; \ x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}\right\}.\end{aligned}$$

Vectorii $(2, 1, 0)$, $(0, 1, 0)$ şi $(1, 2, 3)$ constituie un sistem de generatori pentru $\mathrm{Im}\,U$ şi sunt liniar independenţi, deci reprezintă o bază pentru $\mathrm{Im}U$, iar $\mathrm{rang}U = 3$.

10. Fie U, V, W trei spaţii vectoriale reale şi transformările liniare $f : U \to V$, $g : V \to W$. Să se arate că $\mathrm{Im} f \subset \ker g$ dacă şi numai dacă $g \circ f = 0$.
Rezolvare: Presupunem că $\mathrm{Im}\, f \subset \ker g$. Pentru orice $u \in U$, $f(u) \in \mathrm{Im}\, f \subset \ker g$, deci $g(f(u)) = 0$, adică $g \circ f = 0$. Reciproc, să presupunem că $g \circ f = 0$ şi fie $v \in \mathrm{Im}\, f$. Atunci există $u \in U$ astfel încât $v = f(u)$. Avem
$$g(v) = g(f(u)) = (g \circ f)(u) = 0,$$
adică $v \in \ker g$, deci $\mathrm{Im}\, f \subset \ker g$.

11. Fie $f : U \to V$, $g : V \to W$ două transformări liniare cu proprietatea că $g \circ f = 0$. Să se arate că:
(i) dacă aplicaţia f este surjectivă, atunci $g = 0$;
(ii) dacă aplicaţia g este injectivă, atunci $f = 0$.
Rezolvare: (i) Dacă aplicaţia f este surjectivă, pentru orice $v \in V$ există $u \in U$ astfel încât $v = f(u)$. Atunci $g(v) = g(f(u)) = (g \circ f)(u) = 0$, deci $g = 0$.
(ii) Din $g \circ f = 0$ deducem $(g \circ f)(u) = 0$ pentru orice $u \in U$, sau $g(f(u)) = 0$ şi cum aplicaţia g este injectivă, rezultă $f(u) = 0$ pentru orice $u \in U$, adică $f = 0$.

5.3 Valori şi vectori proprii

1. Fie transformarea liniară $U : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, definită prin
$$U(\overline{x}) = (x_1 - x_2, x_2 + x_3, x_1 + x_3),$$
unde $\overline{x} = (x_1, x_2, x_3)$. Determinaţi nucleul lui U, valorile şi vectorii proprii.
Rezolvare: Ţinând cont de definiţia nucleului, $\ker U = \left\{\overline{x} \in \mathbb{R}^3,\ U(\overline{x}) = \overline{0}\right\}$,

se obţine $\ker U = \{(\alpha, \alpha, -\alpha)\ ;\ \alpha \in \mathbb{R}\}$. Pentru a determina matricea transformării U calculăm $U(\overline{e}_1) = (1, 0, 1)$, $U(\overline{e}_2) = (-1, 1, 0)$, $U(\overline{e}_3) = (0, 1, 1)$, deci matricea va fi

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ecuaţia caracteristică a transformării U este $\det(A - \lambda E) = 0$, adică

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0, \quad \text{sau} \quad -\lambda\left(\lambda^2 - 3\lambda + 3\right) = 0,$$

cu rădăcinile $\lambda_1 = 0$ şi $\lambda_{2,3} = \left(3 \pm \sqrt{3}i\right)/2$, deci transformarea U are valoarea proprie $\lambda = 0$. Vectorul propriu $\overline{v} = (x_1, x_2, x_3)$ corespunzător valorii proprii se determină prin rezolvarea sistemului

$$\begin{cases} (1-\lambda)\, x_1 - x_2 = 0 \\ (1-\lambda)\, x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + (1-\lambda)\, x_3 = 0. \end{cases}$$

Astfel, dacă $\lambda = 0$, acesta devine

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_3 = 0, \end{cases}$$

cu soluţiile: $x_1 = -\alpha$, $x_2 = -\alpha$, $x_3 = \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}^*$. Alegând $\alpha = 1$, obţinem vectorul propriu $\overline{v} = (-1, -1, 1)$.

2. Se consideră transformarea liniară $U : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definită prin

$$U(\overline{x}) = (x_1, x_2 + x_3, 2x_3),$$

cu $\overline{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$. Să se determine valorile proprii, vectorii proprii, un subspaţiu invariant unidimensional şi $U(\overline{x}_0)$, unde $\overline{x}_0 = (2, 0, 1)$.

Rezolvare: Ţinând cont de definiţia lui U avem $U(\overline{e}_1) = (1, 0, 0)$, $U(\overline{e}_2) = (0, 1, 0)$, $U(\overline{e}_3) = (0, 1, 2)$, astfel că matricea transformării va fi

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Ecuaţia caracteristică a transformării U este $\det(A - \lambda E) = 0$, adică

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0, \quad \text{sau} \quad (1-\lambda)^2 (2-\lambda) = 0,$$

deci valorile proprii ale lui U sunt $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ şi $\lambda_3 = 2$. Determinarea vectorilor proprii se face cu ajutorul sistemului

$$\begin{cases} (1-\lambda) x_1 = 0 \\ (1-\lambda) x_2 + x_3 = 0 \\ (2-\lambda) x_3 = 0, \end{cases}$$

x_1, x_2, x_3 reprezentând componentele vectorului. Pentru $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2 = 1$, sistemul este dublu nedeterminat, cu soluţia generală $x_1 = \alpha$, $x_2 = \beta$ $x_3 = 0$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, astfel că vectorul propriu va fi de forma

$$\overline{v} = (\alpha, \beta, 0) = \alpha(1, 0, 0) + \beta(0, 1, 0),$$

adică $\overline{v} = \alpha \overline{v}_1 + \beta \overline{v}_2$, unde $\overline{v}_1 = (1, 0, 0)$ şi $\overline{v}_2 = (0, 1, 0)$. Deci, orice vector propriu corespunzător valorii proprii duble $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ se poate exprima ca o combinaţie liniară de doi vectori, $\overline{v}_1$ şi $\overline{v}_2$, vectori liniar independenţi. Pentru $\lambda = \lambda_3 = 2$ sistemul are soluţia generală $x_1 = 0$, $x_2 = \alpha$, $x_3 = \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$ şi un vector propriu este $\overline{v}_3 = (0, 1, 1)$, pentru $\alpha = 1$. Un subspaţiu invariant unidimensional este $X_1 = \{\alpha (1, 0, 0)\ ; \alpha \in \mathbb{R}\}$ sau $X_2 = \{\alpha (0, 1, 0)\ ; \alpha \in \mathbb{R}\}$ sau $X_3 = \{\alpha (0, 1, 1)\ ; \alpha \in \mathbb{R}\}$. Iar $U(\overline{x}_0) = (2, 1, 2)$.

3. Se consideră transformarea liniară $U : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definită prin

$$U(\overline{x}) = (x_3, x_2, -x_1 - x_3),$$

unde $\overline{x} = (x_1, x_2, x_3)$. Determinaţi valorile proprii şi vectorii proprii corespunzători valorii proprii reale. Găsiţi un subspaţiu invariant unidimensional.

Rezolvare: Ţinând cont de expresia lui U avem $U(\overline{e}_1) = (0, 0, -1)$, $U(\overline{e}_2) = (0, 1, 0)$ şi $U(\overline{e}_3) = (1, 0, -1)$, deci matricea transformării este

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Ecuaţia caracteristică $\det(A - \lambda E) = 0$ are rădăcinile $\lambda_1 = 1$ şi $\lambda_{2,3} = \dfrac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$. Sistemul care dă vectorii proprii corespunzători valorii proprii $\lambda = 1$ este

$$\begin{cases} -x_1 + x_3 = 0 \\ -x_1 - 2x_3 = 0 \end{cases}$$

şi are soluţia $x_1 = 0$, $x_2 = \alpha$, $x_3 = 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Dacă se consideră $\alpha = 1$, obţinem vectorul propriu $\overline{v} = (0, 1, 0)$. Un subspaţiu invariant unidimensional este $X = \{\overline{x} = \alpha (0, 1, 0)\ ; \alpha \in \mathbb{R}\}$.

4. Fie transformarea liniară $U : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ a cărei matrice în raport cu baza canonică este

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Să se determine valorile şi vectorii proprii ai lui U şi să se cerceteze dacă matricea poate fi adusă la forma diagonală.

Rezolvare: Ecuaţia caracteristică a lui U este

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 & 0 \\ -2 & 2-\lambda & -2 \\ 0 & -2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(\lambda+1)(\lambda-5),$$

deci valorile proprii ale lui U sunt $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = 5$. Pentru a determina vectorii proprii corespunzători valorii proprii $\lambda_1 = 2$ se rezolvă sistemul

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 0 \\ 2x_1 + 2x_3 = 0 \\ -2x_2 + x_3 = 0, \end{cases}$$

şi rezultă soluţia $x_1 = -\alpha$, $x_2 = \dfrac{1}{2}\alpha$, $x_3 = \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Considerând $\alpha = 2$ se obţine vectorul propriu $\overline{v}_1 = (-2, 1, 2)$. Pentru determinarea vectorilor proprii corespunzători valorii proprii $\lambda_2 = -1$ se procedează în acelaşi mod şi se obţine vectorul $\overline{v}_2 = (2, 2, 1)$, iar pentru valoarea proprie $\lambda_3 = 5$ se obţine vectorul $\overline{v}_3 = (1, -2, 2)$. Deoarece valorile proprii ale transformării liniare U sunt distincte rezultă că matricea transformării poate fi adusă la forma diagonală şi mulţimea $W = \{\overline{v}_1, \overline{v}_2, \overline{v}_3\}$ formează o bază în $\mathbb{R}^3$. În raport cu această bază matricea transformării U are forma

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

5. Să se arate că matricea transformării liniare $U : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, dată de

$$U(\overline{x}) = (-3x_1 + 2x_2, -5x_1 + 4x_2, 2x_1 - 2x_2 - x_3),$$

unde $\overline{x} = (x_1, x_2, x_3)$, poate fi adusă la forma diagonală faţă de o bază din $\mathbb{R}^3$. Să se precizeze această bază.

Rezolvare: Determinăm valorile şi vectorii proprii. Ecuaţia caracteristică este

$$\begin{vmatrix} -3-\lambda & 2 & 0 \\ -5 & 4-\lambda & 0 \\ 2 & -2 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

şi are rădăcinile reale $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = \lambda_3 = -1$. Vom determina vectorii proprii cu ajutorul sistemului

$$\begin{cases} (-3-\lambda)\, x_1 + 2x_2 = 0 \\ -5x_1 + (4-\lambda)\, x_2 = 0 \\ 2x_1 - 2x_2 + (-1-\lambda)\, x_3 = 0. \end{cases}$$

Astfel, pentru $\lambda = \lambda_1 = 2$, obţinem $x_1 = -\alpha$, $x_2 = -\dfrac{5}{2}\alpha$, $x_3 = \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$, deci se obţine vectorul propriu $\overline{v}_1 = (-2, -5, 2)$. Rădăcina λ_1 fiind simplă, spaţiul propriu corespunzător (spaţiul generat de vectorul $\overline{v}_1$) are dimensiunea 1. Pentru $\lambda = \lambda_2 = \lambda_3 = -1$, soluţia sistemului este $x_1 = x_2 = \alpha$, $x_3 = \beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, deci rădăcinii duble îi corespund doi vectori proprii $\overline{v}_2 = (1, 1, 0)$ şi $\overline{v}_3 = (0, 0, 1)$. Dimensiunea spaţiului generat de aceşti vectori este 2 şi este egală cu multiplicitatea rădăcinii. În concluzie, matricea transformării poate fi adusă la forma diagonală

$$B = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

în baza $W = \{\overline{v}_1, \overline{v}_2, \overline{v}_3\}$.

6. Să se arate că matricea transformării liniare $U : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, date de

$$U(\overline{x}) = (2x_1, x_1 + 4x_2 - 2x_3, 7x_1 + 7x_2 - 5x_3),$$

unde $\overline{x} = (x_1, x_2, x_3)$, nu poate fi adusă la forma diagonală.

Rezolvare: Ecuaţia caracteristică

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & 4-\lambda & -2 \\ 7 & 7 & -5-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

are rădăcinile reale $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$ şi $\lambda_3 = -3$. Corespunzător valorii proprii $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2 = 2$ avem sistemul

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 0 \\ 7x_1 + 7x_2 - 7x_3 = 0 \end{cases},$$

cu soluţia $x_1 = 0$, $x_2 = x_3 = \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$ şi obţinem vectorul propriu $\overline{v}_1 = (0, 1, 1)$. Deci spaţiul propriu corespunzător (spaţiul generat de $\overline{v}_1$) are dimensiunea 1, mai mică decât multiplicitatea rădăcinii. Rezultă că matricea transformării nu poate fi adusă la forma diagonală.

7. Să se arate că matricea transformării liniare $U : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, dată prin

$$U(\overline{x}) = (4x_1 + 6x_2, -3x_1 - 5x_2, -3x_1 - 6x_2 + x_3),$$

unde $\overline{x} = (x_1, x_2, x_3)$, faţă de o bază din $\mathbb{R}^3$, poate fi adusă la forma diagonală.

Rezolvare: Valorile proprii sunt $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$. Rădăcina λ_1 fiind simplă subspaţiul propriu corespunzător are dimensiunea 1. Vectorii proprii corespunzători rădăcinii duble sunt daţi de $x_1 = -2\alpha$, $x_2 = \alpha$, $x_3 = \beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Deci, subspaţiul propriu corespunzător are dimensiunea 2, egală cu ordinul de multiplicitate al rădăcinii. Astfel, matricea poate fi adusă la forma diagonală

$$B = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

8. Fie $T : V \to V$ o transformare liniară, $\lambda \in K$ o valoare proprie a lui T şi $u \in V$ un vector propriu corespunzător valorii proprii λ. Să se arate că pentru orice $p \in \mathbb{N}$, λ^p este valoare proprie a transformării liniare $T^p = T \circ T \circ ... \circ T$ (de p ori) şi u vector propriu corespunzător.
   Rezolvare: Din $T(\overline{u}) = \lambda\overline{u}$ rezultă că $T^2(\overline{u}) = T(T(\overline{u})) = T(\lambda\overline{u}) = \lambda T(\overline{u}) = \lambda^2\overline{u}$. Prin inducţie matematică se arată că $T^p(\overline{u}) = \lambda^p\overline{u}$.

9. Fie $T_1, T_2 : V \to V$ două transformări liniare. Presupunem că T_1 este bijectivă. Să se arate că $T_1 \circ T_2$ şi $T_2 \circ T_1$ au acelaşi polinom caracteristic.
   Rezolvare: Fie A_1, A_2 matricele celor două transformări liniare într-o bază din V. Matricea A_1 este inversabilă (deoarece T_1 este bijectivă). Atunci putem scrie:

$$A_2A_1 = \left(A_1^{-1}A_1\right)(A_2A_1) = A_1^{-1}(A_1A_2)A_1,$$

   adică matricele A_1A_2 şi A_2A_1 sunt asemenea, deci au acelaşi polinom caracteristic.

10. Să se determine valorile şi vectorii proprii ai matricei

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

   Poate fi adusă matricea la forma diagonală?
   Rezolvare: Rădăcinile ecuaţiei caracteristice sunt $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = -1$. Vectorii proprii corespunzători rădăcinii triple $\lambda = -1$ sunt daţi de $x_1 = -\alpha$, $x_2 = -\alpha$, $x_3 = \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Subspaţiul propriu corespunzător are dimensiunea 1, mai mică decât multiplicitatea rădăcinii, deci matricea dată nu poate fi adusă la forma diagonală.

11. Să se calculeze A^n, unde

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -3 \\ 3 & 2 & 3 \\ -3 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Rezolvare: Ecuaţia caracteristică este $\lambda^3 - 12\lambda + 16 = 0$, cu rădăcinile $\lambda_1 = -4$, $m_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$, $m_2 = 2$ şi

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \; S^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \; B^n = \begin{pmatrix} (-4)^n & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}.$$

Din $B = S^{-1}AS$ deducem $A = SBS^{-1}$, deci $A^n = SB^nS^{-1}$, adică

$$A^n = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} (-4)^n + 2^n & 0 & (-4)^n - 2^n \\ -(-4)^n + 2^n & 2^{n+1} & -(-4)^n + 2^n \\ (-4)^n - 2^n & 0 & (-4)^n + 2^n \end{pmatrix}.$$

12. Fie A o matrice constantă de tip $n \times n$ şi

$$f(x) = b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + ... + b_{m-1}x + b_m$$

un polinom oarecare. Să se arate că orice vector propriu al lui A este vector propriu şi pentru matricea $f(A)$.

Rezolvare: Fie x un vector propriu al matriceai A, adică x este o matrice coloană de tipul $n \times 1$ astfel încât $Ax = \lambda x$ şi $x \neq 0$. Trebuie să arătăm că există μ astfel încât $f(A)x = \mu x$, unde

$$f(A) = b_0 A^m + b_1 A^{m-1} + ... + b_{m-1}A + b_m I.$$

Prin inducţie matematică se arată că $A^k x = \lambda^k x$ pentru orice $k = \overline{1, m}$. Atunci

$$f(A)\,x = b_0 A^m x + b_1 A^{m-1} x + ... + b_{m-1} A x + b_m x$$
$$= b_0 \lambda^m x + b_1 \lambda^{m-1} x + ... + b_{m-1} \lambda x + b_m x$$
$$= \left(b_0 \lambda^m + b_1 \lambda^{m-1} + ... + b_{m-1} \lambda + b_m\right) x$$
$$= f(\lambda)\,x.$$

13. Se consideră matricea
$$A = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ -5 & 4 & 0 \\ -8 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
Să se afle un polinom $f(x)$ de grad ≤ 2 astfel încât matricea $f(A)$ să aibă valorile proprii $\mu_1 = \mu_2 = 1$, $\mu_3 = 0$. Să se scrie $f(A)$.
Rezolvare: Fie $f(x) = ax^2 + bx + c$. Pentru a determina constantele a, b şi c, folosim faptul că valorile proprii ale lui $f(A)$ sunt $f(\lambda_1)$, $f(\lambda_2)$, $f(\lambda_3)$, unde $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ sunt valorile proprii ale lui A, pe care le aflăm rezolvând ecuaţia $\det(A - \lambda I_3) = 0$, anume $\lambda_1 = 9$, $\lambda_2 = 4$ şi $\lambda_3 = 1$.

14. Matricea nesingulară A de tip $n \times n$ are rădăcinile caracteristice $\lambda_1, \lambda_2, ...,$ λ_n. Să se afle rădăcinile caracteristice şi să se scrie polinomul caracteristic pentru matricea inversă A^{-1}.
Rezolvare: Avem
$$p_{A^{-1}}(\lambda) = \det\left(A^{-1} - \lambda I_n\right) = \det\left[\lambda A^{-1}\left(\frac{1}{\lambda} I - A\right)\right]$$
$$= (-1)^n \lambda^n (\det A)^{-1} \det\left(A - \frac{1}{\lambda} I\right)$$
Prin urmare, rădăcinile caracteristice ale lui A^{-1} sunt λ_i^{-1}, $i = \overline{1, n}$.

15. Fie A o matrice de tip $n \times n$ având polinomul caracteristic

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_n) = (\lambda_1 - \lambda)(\lambda_2 - \lambda) \ldots (\lambda_n - \lambda).$$

Să se găsească polinomul caracteristic al matricei A^2.
Rezolvare: Avem

$$p_{A^2}(\lambda) = \det\left(A^2 - \lambda I_n\right) = \left(\lambda_1^2 - \lambda\right)\left(\lambda_2^2 - \lambda\right) \ldots \left(\lambda_n^2 - \lambda\right).$$

16. Să se arate că dacă matricea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ este asemenea cu o matrice diagonală, atunci şi matricea A^t este asemenea cu o matrice diagonală.
Rezolvare: Fie $B = S^{-1}AS$, cu B matrice diagonală. Atunci B^t este tot diagonală şi

$$B^t = \left(S^{-1}AS\right)^t = S^t A^t \left(S^{-1}\right)^t = \left(\left(S^t\right)^{-1}\right)^{-1} A^t \left(S^t\right)^{-1},$$

deci A^t este asemenea cu o matrice diagonală.

5.4 Transformări liniare simetrice. Transformări liniare ortogonale

1. Fie E un spaţiu euclidian complex de dimensiune n, T un endomorfism simetric (autoadjunct) şi E endomorfismul unitate. Fie $\alpha + i\beta$ fixat în $\mathbb{C}$. Să se arate că

$$\|[T - (\alpha + i\beta)E](x)\|^2 = \|(T - \alpha E)(x)\|^2 + \beta^2 \|x\|^2, \ \forall x \in E.$$

Să se deducă de aici că valorile proprii ale lui T sunt reale.
Rezolvare: Egalitatea cerută rezultă imediat folosind proprietăţile produsului scalar. Dacă $\alpha + i\beta$ este valoare proprie şi x este vectorul propriu corespunzător, rezultă

$$\|(T - \alpha E)(x)\|^2 + \beta^2 \|x\|^2 = 0$$

ceea ce implică, în mod evident, $\beta = 0$. Deci, valorile proprii ale unui endomorfism autoadjunct sunt reale.

2. Fie T şi U două endomorfisme ale spaţiului euclidian E_n de dimensiune n, iar T^* şi U^* adjunctele lor. Să se arate că valorile proprii ale endomorfismelor T^*T şi U^*U sunt pozitive. Fie λ_1, λ_2 (respectiv μ_1, μ_2) cea mai mică şi cea mai mare valoare proprie a lui T^*T (respectiv U^*U). Să se arate că:
a) $\lambda_1 \|x\|^2 \leq \|T(x)\|^2 \leq \lambda_n \|x\|^2$, $\forall x \in E_n$;
b) dacă ρ este valoare proprie pentru $T \circ U$, atunci $\lambda_1\mu_1 \leq |\rho|^2 \leq \lambda_n\mu_n$.
Rezolvare: Să observăm mai întâi că endomorfismul T^*T este simetric. Într-adevăr, $(T^*T)^* = T^*T^{**} = T^*T$. Atunci, valorile proprii ale lui T^*T sunt reale. Fie $(T^*T)(x) = \lambda x$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Avem

$$0 \leq \|Tx\|^2 = Tx \cdot Tx = x \cdot (T^*T)x = x \cdot \lambda x = \lambda(x \cdot x) = \lambda \|x\|^2,$$

de unde rezultă că $\lambda \geq 0$. Fie $f_1, f_2, ..., f_n$ baza ortonormată de vectori proprii pentru T^*T, cu valorile proprii $0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq ... \leq \lambda_n$ şi fie $x = x_1f_1 + x_2f_2 + ... + x_nf_n$ un vector oarecare din E_n. Avem

$$\begin{aligned}(T^*T)(x) &= (T^*T)(x_1f_1 + x_2f_2 + ... + x_nf_n) \\ &= x_1\lambda_1f_1 + x_2\lambda_2f_2 + ... + x_n\lambda_nf_n,\end{aligned}$$

deci

$$\|T(x)\|^2 = x \cdot (T^*T)x = x_1^2\lambda_1 + x_2^2\lambda_2 + ... + x_n^2\lambda_n$$

de unde rezultă imediat dubla inegalitate (a) din enunţ. Aplicând această inegalitate vectorului $U(x)$ obţinem

$$\lambda_1 \|U(x)\|^2 \leq \|(T \circ U)(x)\|^2 \leq \lambda_n \|U(x)\|^2.$$

Ţinând seama că pentru U are loc inegalitatea $\mu_1 \|x\|^2 \leq \|U(x)\|^2 \leq \mu_n \|x\|^2$, pentru orice $x \in E_n$, rezultă că

$$\lambda_1\mu_1 \|x\|^2 \leq \|(T \circ U)(x)\|^2 \leq \lambda_n\mu_n \|x\|^2.$$

Dacă ρ este o valoare proprie pentru $T \circ U$, atunci rezultă din inegalitatea dublă de mai sus că

$$\lambda_1 \mu_1 \leq |\rho|^2 \leq \lambda_n \mu_n.$$

3. Se consideră transformarea liniară $U : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, definită prin matricea

$$A = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} -3 & -2 & 6 \\ 6 & -3 & 2 \\ 2 & 6 & 3 \end{pmatrix},$$

într-o bază dată B. Să se verifice că transformarea U este ortogonală.

Rezolvare: Fie $\overline{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ şi $\overline{y} = (y_1, y_2, y_3) = U(\overline{x})$. Astfel,

$$\begin{cases} y_1 = \frac{1}{7}(-3x_1 + 6x_2 + 2x_3) \\ y_2 = \frac{1}{7}(-2x_1 - 3x_2 + 6x_3) \\ y_3 = \frac{1}{7}(6x_1 + 2x_2 + 3x_3). \end{cases}$$

Să arătăm că $\|\overline{x}\| = \|\overline{y}\|$. Avem

$$\begin{aligned} \|\overline{y}\|^2 &= y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 \\ &= 49^{-1}\big(9x_1^2 + 36x_2^2 + 4x_3^2 - 36x_1x_2 - 12x_1x_3 + 24x_2x_3 + 4x_1^2 \\ &\quad +9x_2^2 + 36x_3^2 + 12x_1x_2 - 24x_1x_3 - 36x_2x_3 + 36x_1^2 + 4x_2^2 \\ &\quad +9x_3^2 + 24x_1x_2 + 36x_1x_3 + 12x_2x_3\big) \\ &= x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = \|\overline{x}\|^2. \end{aligned}$$

Prin urmare, $\|\overline{x}\| = \|\overline{y}\|$ şi deci U este o transformare ortogonală.

4. Fie A o matrice reală de tip $n \times n$ antisimetrică astfel încât $A + I_n$ să fie inversabilă. Să searate că matricea $(I_n - A)(I_n + A)^{-1}$ este ortogonală.

Rezolvare: Notăm $M = (I_n - A)(I_n + A)^{-1}$. Amintim mai întâi condiţia de ortogonalitate a unei matrice reale pătratice: $M \cdot M^T = I_n$, echivalentă cu $M^T = M^{-1}$. Avem

$$M^T = \left[(I_n - A)(I_n + A)^{-1}\right]^T = \left[(I_n + A)^{-1}\right]^T (I_n - A)^T$$
$$= \left[(I_n + A)^T\right]^{-1} \left(I_n^T - A^T\right) = \left(I_n^T + A^T\right)^{-1} (I_n + A)$$
$$= (I_n - A)^{-1} (I_n + A) = M^{-1}.$$

Am folosit faptul că A este o matrice antisimetrică, adică $A^T = -A$.

5. Se consideră un spaţiu euclidian finit dimensional E şi transformările liniare $T : E \to E$ şi $S : E \to E$ având proprietăţile:
(i) S este inversabil;
(ii) $(Tx \cdot Sy) + (Sx \cdot Ty) = 0$, $\forall x, y \in E$.
Să se arate că:
(a) pentru orice $(\lambda, x) \in \mathbb{R} \times E$, avem

$$\|(T - \lambda S)\, x\| = \|(T + \lambda S)\, x\|$$

(b) transformările $T - \lambda S$ şi $T + \lambda S$ sunt inversabile pentru $\lambda \neq 0$;
(c) transformarea liniară $U = (T - \lambda S) \circ (T + \lambda S)^{-1}$ este ortogonală.
Rezolvare: (a) Avem

$$\|(T - \lambda S)\, x\|^2 = (T - \lambda S)\, x \cdot (T - \lambda S)\, x$$
$$= \|Tx\|^2 - \lambda\, (Tx \cdot Sx + Sx \cdot Tx) + \lambda^2 \|Sx\|^2$$
$$= \|Tx\|^2 + \lambda^2 \|Sx\|^2$$

şi la fel arătăm că

$$\|(T + \lambda S)\, x\|^2 = \|Tx\|^2 + \lambda^2 \|Sx\|^2 .$$

(b) Condiţia $\|(T - \lambda S)\, x\| = 0$ implică $Sx = 0$ (am folosit punctul (a) şi faptul că $\lambda \neq 0$). Dar S fiind inversabil, rezultă $x = 0$. Aceasta ne

spune că $T - \lambda S$ este inversabil. La fel se arată că $T + \lambda S$ este inversabil pentru $\lambda \neq 0$.
(c) Trebuie să arătăm că $Ux \cdot Uy = x \cdot y$ pentru orice $x, y \in E$. Dacă notăm

$$(T + \lambda S)^{-1} x = z \;\; \text{şi} \;\; (T + \lambda S)^{-1} y = v,$$

atunci putem scrie, ţinând cont şi de condiţia (ii) din enunţ, că

$$Ux \cdot Uy = (T - \lambda S)\, z \cdot (T - \lambda S)\, v = Tz \cdot Tv + \lambda^2 Sz \cdot Sv.$$

Deoarece

$$x = (T + \lambda S)\, z \text{ şi } y = (T + \lambda S)\, v,$$

obţinem

$$x \cdot y = (T + \lambda S)\, z \cdot (T + \lambda S)\, v = Tz \cdot Tv + \lambda^2 Sz \cdot Sv,$$

deci U este o transformare ortogonală.

Capitolul 6

Forme biliniare şi forme pătratice

6.1 Forme biliniare

1. Fie $\mathcal{A} : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definită prin

$$\mathcal{A}(\overline{x}, \overline{y}) = x_1 y_1 - x_1 y_2 - x_2 y_1 + 2 x_2 y_2,$$

unde $\overline{x} = (x_1, x_2)$, $\overline{y} = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$.

a) Să se arate că $\mathcal{A}$ este o formă biliniară. Este $\mathcal{A}$ simetrică?

b) Să se găsească matricea formei $\mathcal{A}$ în raport cu baza uzuală din $\mathbb{R}^2$.

Rezolvare: a) Ţinând cont de definiţia lui $\mathcal{A}$, pentru $\overline{x} = (x_1, x_2)$, $\overline{y} = (y_1, y_2)$, $\overline{z} = (z_1, z_2) \in \mathbb{R}^2$ şi $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ avem

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}(\alpha\overline{x} + \beta\overline{y}, \overline{z}) &= (\alpha x_1 + \beta y_1) z_1 - (\alpha x_1 + \beta y_1) z_2 - (\alpha x_2 + \beta y_2) z_1 \\
&\quad + 2(\alpha x_2 + \beta y_2) z_2 \\
&= \alpha (x_1 z_1 - x_1 z_2 - x_2 z_1 + 2 x_2 z_2) \\
&\quad + \beta (y_1 z_1 - y_1 z_2 - y_2 z_1 + 2 y_2 z_2) \\
&= \alpha \mathcal{A}(\overline{x}, \overline{z}) + \beta \mathcal{A}(\overline{y}, \overline{z}).
\end{aligned}$$

În acelaşi mod se arată că $\mathcal{A}(\overline{x}, \alpha\overline{y} + \beta\overline{z}) = \alpha\mathcal{A}(\overline{x}, \overline{y}) + \beta\mathcal{A}(\overline{x}, \overline{z})$, $\forall\overline{x}, \overline{y}, \overline{z} \in \mathbb{R}^2$, $\forall\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. De asemenea, se verifică uşor că $\mathcal{A}(\overline{x}, \overline{y}) = \mathcal{A}(\overline{y}, \overline{x})$, $\forall\overline{x}, \overline{y} \in \mathbb{R}^2$, deci $\mathcal{A}$ este o formă biliniară simetrică.

b) Fie $A = (a_{ij})$, $i, j = 1, 2$, matricea formei $\mathcal{A}$ în raport cu baza uzuală $\{\overline{e}_1 = (1, 0)$,
$\overline{e}_2 = (0, 1)\}$ a lui $\mathbb{R}^2$. Avem $a_{11} = \mathcal{A}(\overline{e}_1, \overline{e}_1) = 1$, $a_{12} = \mathcal{A}(\overline{e}_1, \overline{e}_2) = -1$, $a_{21} = \mathcal{A}(\overline{e}_2, \overline{e}_1) = -1$, $a_{22} = \mathcal{A}(\overline{e}_2, \overline{e}_2) = 2$, deci am obţinut matricea

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

2. Fie $\mathcal{A} : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definită prin

$$\mathcal{A}(\overline{x}, \overline{y}) = x_1y_2 + 2x_1y_3 - x_3y_1 + 3x_3y_3,$$

unde $\overline{x} = (x_1, x_2, x_3)$, $\overline{y} = (y_1, y_2, y_3)$.

a) Să se arate că $\mathcal{A}$ este o formă biliniară. Este $\mathcal{A}$ simetrică?

b) Să se găsească matricea formei $\mathcal{A}$ în raport cu baza uzuală din $\mathbb{R}^3$.

c) Să se determine matricea formei $\mathcal{A}$ în raport cu baza

$$W = \left\{\overline{f}_1 = (1, 2, -1), \overline{f}_2 = (-1, 1, 0), \overline{f}_3 = (1, 1, 1)\right\}$$

din $\mathbb{R}^3$.

Rezolvare: a) Pentru $\overline{x} = (x_1, x_2, x_3)$, $\overline{y} = (y_1, y_2, y_3)$, $\overline{z} = (z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{R}^3$ şi $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ avem

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(\alpha\overline{x} + \beta\overline{y}, \overline{z}) &= (\alpha x_1 + \beta y_1) z_2 + 2(\alpha x_1 + \beta y_1) z_3 - (\alpha x_3 + \beta y_3) z_1 \\ &\quad +3(\alpha x_3 + \beta y_3) z_3 \\ &= \alpha(x_1z_2 + 2x_1z_3 - x_3z_1 + 3x_3z_3) \\ &\quad +\beta(y_1z_2 + 2y_1z_3 - y_3z_1 + 3y_3z_3) \\ &= \alpha\mathcal{A}(\overline{x}, \overline{z}) + \beta\mathcal{A}(\overline{y}, \overline{z}). \end{aligned}$$

Analog, $\mathcal{A}(\overline{x}, \alpha\overline{y} + \beta\overline{z}) = \alpha\mathcal{A}(\overline{x}, \overline{y}) + \beta\mathcal{A}(\overline{x}, \overline{z})$, $\forall \overline{x}, \overline{y}, \overline{z} \in \mathbb{R}^3$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, deci $\mathcal{A}$ este o formă biliniară. Se observă uşor că $\mathcal{A}$ nu este simetrică.

b) Matricea formei $\mathcal{A}$ în baza uzuală este

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

c) Matricea de trecere de la baza uzuală la baza W este

$$S = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Fie B matricea formei biliniare în baza W. Se ştie că $B = S^T \cdot A \cdot S$, adică

$$\begin{aligned} B &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -3 \\ -4 & 2 & 5 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Astfel, $\mathcal{A}(\overline{x}, \overline{y})_W = 4x_1'y_1' + x_1'y_3' - x_2'y_2' - 3x_2'y_3' - 4x_3'y_1' + 2x_3'y_2' + 5x_3'y_3'$.

3. Fie $\mathcal{A} : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definită prin

$$\mathcal{A}(\overline{x}, \overline{y}) = x_1y_1 + 2x_1y_2 + 3x_2y_2 - x_2y_3,$$

unde $\overline{x} = (x_1, x_2, x_3)$ şi $\overline{y} = (y_1, y_2, y_3)$.

a) Să se arate că $\mathcal{A}$ este o formă biliniară.

b) Să se găsească matricea formei $\mathcal{A}$ în raport cu baza uzuală a lui $\mathbb{R}^3$.

c) Să se determine matricea formei $\mathcal{A}$ în raport cu baza

$$W = \left\{\overline{f}_1 = (0, 2, -1), \overline{f}_2 = (-1, 1, 1), \overline{f}_3 = (1, 0, 1)\right\}$$

din $\mathbb{R}^3$.

Rezolvare: a) Se verifică relaţiile

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(\alpha\overline{x}+\beta\overline{y},\overline{z}) &= \alpha\mathcal{A}(\overline{x},\overline{z})+\beta\mathcal{A}(\overline{y},\overline{z}) \text{ şi}\\ \mathcal{A}(\overline{x},\alpha\overline{y}+\beta\overline{z}) &= \alpha\mathcal{A}(\overline{x},\overline{y})+\beta\mathcal{A}(\overline{x},\overline{z}),\ \ \forall\overline{x},\overline{y},\overline{z}\in\mathbb{R}^3,\forall\alpha,\beta\in\mathbb{R}.\end{aligned}$$

Deci $\mathcal{A}$ este o formă biliniară.

b) Matricea formei $\mathcal{A}$ în baza uzuală este

$$A=\begin{pmatrix}1&2&0\\0&3&-1\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

c) Matricea formei $\mathcal{A}$ în baza W este

$$B=S^T\cdot A\cdot S=\begin{pmatrix}14&4&-2\\3&1&-2\\4&1&1\end{pmatrix},$$

unde S este matricea de trecere de la baza uzuală la baza W. Astfel, $\mathcal{A}(\overline{x},\overline{y})_W=14x_1'y_1'+4x_1'y_2'-2x_1'y_3'+3x_2'y_1'+x_2'y_2'-2x_2'y_3'+4x_3'y_1'+x_3'y_2'+x_3'y_3'$.

4. Se dă forma biliniară

$$\mathcal{A}(\overline{x},\overline{y})=x_1y_1-x_1y_2+3x_2y_1+2x_2y_2-x_3y_3$$

în baza $V=\{\overline{e}_1,\overline{e}_2,\overline{e}_3\}$. Să se determine:

a) matricea lui $\mathcal{A}$ în baza V;

b) matricea lui $\mathcal{A}$ în baza

$$W=\left\{\overline{f}_1=\overline{e}_1+\overline{e}_2,\ \overline{f}_2=\overline{e}_2+\overline{e}_3,\ \overline{f}_3=\overline{e}_1+\overline{e}_2+\overline{e}_3\right\};$$

c) $\mathcal{A}(\overline{x}_0, \overline{y}_0)$, unde $\overline{x}_0 = (1, -1, 0)_W$ şi $\overline{y}_0 = (2, 0, 1)_W$.

Rezolvare: a) Matricea în baza uzuală este $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

b) Deoarece

$$\begin{cases} \overline{f}_1 = \overline{e}_1 + \overline{e}_2 \\ \overline{f}_2 = \overline{e}_2 + \overline{e}_3 \\ \overline{f}_3 = \overline{e}_1 + \overline{e}_2 + \overline{e}_3 \end{cases},$$

rezultă că matricea de trecere de la baza uzuală la baza W este

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Atunci matricea formei A în baza W este

$$B = S^T \cdot A \cdot S = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 5 \\ 5 & 1 & 4 \\ 5 & 0 & 4 \end{pmatrix},$$

adică $\mathcal{A}(\overline{x}, \overline{y})_W = 5x_1'y_1' + x_1'y_2' + 5x_1'y_3' + 5x_2'y_1' + x_2'y_2' + 4x_2'y_3' + 5x_3'y_1' + 4x_3'y_3'$.

c) Să determinăm mai întâi componentele vectorilor $\overline{x}_0$ şi $\overline{y}_0$ în baza uzuală. Fie X matricea coloană a coordonatelor lui $\overline{x}_0$ în baza uzuală şi $X' = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ matricea coloană a coordonatelor lui $\overline{x}_0$ în baza W.

Legea de schimbare a componenetelor unui vector este $X = S \cdot X'$, deci $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$. Similar, pentru $\overline{y}_0$ obţinem $Y = S \cdot Y'$, unde $Y' = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, adică $Y = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$. Deci $\overline{x}_0 = (1, 0, -1)$ şi $\overline{y}_0 = (3, 3, 1)$.

Pentru a determina componentele celor doi vectori putem proceda şi astfel: $\overline{x}_0 = \overline{f}_1 - \overline{f}_2 = \overline{e}_1 + \overline{e}_2 - (\overline{e}_2 + \overline{e}_3) = \overline{e}_1 - \overline{e}_3$, adică $\overline{x}_0 = (1, 0, -1)$. În acelaşi mod, $\overline{y}_0 = 2\overline{f}_1 + \overline{f}_3 = 2(\overline{e}_1 + \overline{e}_2) + \overline{e}_1 + \overline{e}_2 + \overline{e}_3 = 3\overline{e}_1 + 3\overline{e}_2 + \overline{e}_3$, adică $\overline{y}_0 = (3, 3, 1)$. Folosind acum definiţia lui $\mathcal{A}$, obţinem $\mathcal{A}(\overline{x}_0, \overline{y}_0) = 1$.

5. Să se arate că aplicaţia $\mathcal{A} : \mathcal{P}_3 \times \mathcal{P}_3 \to \mathbb{R}$, definită prin $\mathcal{A}(p, q) = \int_{-1}^{1} p(x)\, q(x)\, dx$, este o formă biliniară simetrică şi să se scrie matricea lui $\mathcal{A}$ în baza uzuală din $\mathcal{P}_3$, adică $\{1, x, x^2\}$.

   Rezolvare: Se verifică uşor că $\mathcal{A}$ este o formă biliniară simetrică. Matricea lui $\mathcal{A}$ în baza uzuală este

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{5} \end{pmatrix}.$$

6.2 Forme pătratice

1. Fie forma pătratică $P : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, definită prin

$$P(\overline{x}) = x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 - 2x_1x_2 + 6x_1x_3.$$

   a) Să se afle forma biliniară simetrică din care provine P;

   b) Să se determine matricea lui P în baza uzuală. Este P nedegenerată?

   Rezolvare:

   a) Forma biliniară simetrică din care provine P, $\mathcal{A} : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, se obţine prin dedublare

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(\overline{x}, \overline{y}) &= x_1y_1 + 2x_2y_2 + x_3y_3 - 2 \cdot \frac{1}{2}(x_1y_2 + x_2y_1) + 6 \cdot \frac{1}{2}(x_1y_3 + x_3y_1) \\ &= x_1y_1 - x_1y_2 + 3x_1y_3 - x_2y_1 + 2x_2y_2 + 3x_3y_1 + x_3y_3. \end{aligned}$$

Sau, se poate folosi formula

$$\mathcal{A}(\overline{x},\overline{y}) = \frac{1}{2}\left(P(\overline{x}+\overline{y}) - P(\overline{x}) - P(\overline{y})\right)$$

şi se obţine aceeaşi expresie pentru $\mathcal{A}$ ca anterior.

b) Matricea formei pătratice P este

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Se obţine $\det A = -17 \neq 0$, de unde $\operatorname{rang} P = 3 = \dim \mathbb{R}^3$, deci P este nedegenerată.

2. Să se determine formele biliniare simetrice din care provin formele pătratice $P : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definite prin:

a) $P(\overline{x}) = x_1^2 + 2x_2^2 + 4x_1x_2 - 6x_2x_3$;

b) $P(\overline{x}) = x_1^2 + 3x_2^2 - x_3^2 + 2x_1x_3 - 5x_2x_3$;

c) $P(\overline{x}) = x_1x_2 + 6x_1x_3 + 2x_2x_3$.

Rezolvare: a) $\mathcal{A}(\overline{x},\overline{y}) = x_1y_1 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + 2x_2y_2 - 3x_2y_3 - 3x_3y_2$.

b) $\mathcal{A}(\overline{x},\overline{y}) = x_1y_1 + x_1y_3 + 3x_2y_2 - \frac{5}{2}x_2y_3 + x_3y_1 - \frac{5}{2}x_3y_2 - x_3y_3$.

c) $\mathcal{A}(\overline{x},\overline{y}) = \frac{1}{2}x_1y_2 + 3x_1y_3 + \frac{1}{2}x_2y_1 + x_2y_3 + 3x_3y_1 + x_3y_2$.

3. Să se precizeze dacă există o formă pătratică $P : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, căreia să-i corespundă în baza uzuală matricea:

a) $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 3 & 5 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, b) $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ -2 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, c) $A_3 = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

În caz afirmativ să se precizeze forma pătratică.

Rezolvare: a) $P_1(\overline{x}) = x_1^2 + 5x_2^2 - x_3^2 + 6x_1x_2 - 4x_1x_3$.

b) Matricea A_2 nu e simetrică, deci nu există P.

c) $P_3(\overline{x}) = x_1^2 + 3x_2^2 + x_1x_2 - 2x_2x_3$.

4. Fie forma pătratică
$$P(\overline{x}) = x_1^2 + \frac{5}{4}x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_1x_3 - x_2x_3,$$
unde $\overline{x} = (x_1, x_2, x_3)$. Să se aducă la forma canonică prin metoda lui Gauss, să se determine baza canonică şi matricea în baza canonică. Să se determine rangul şi natura lui P.

Rezolvare:
$$\begin{aligned} P(\overline{x}) &= \left(x_1^2 + 2x_1x_3 + x_3^2\right) - x_3^2 + \frac{5}{4}x_2^2 + 2x_3^2 - x_2x_3 \\ &= (x_1 + x_3)^2 + \left(x_3^2 - x_2x_3 + \frac{1}{4}x_2^2\right) - \frac{1}{4}x_2^2 + \frac{5}{4}x_2^2 \\ &= (x_1 + x_3)^2 + \left(x_3 - \frac{1}{2}x_2\right)^2 + x_2^2. \end{aligned}$$
Cu schimbarea de coordonate
$$\begin{cases} y_1 = x_1 + x_3 \\ y_2 = x_3 - \frac{1}{2}x_2 \\ y_3 = x_2 \end{cases},$$
avem $P(\overline{x}) = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2$, unde $(y_1, y_2, y_3)_W = \overline{x}$, W fiind baza canonică. Matricea în baza canonică este
$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
Să determinăm în continuare baza W. Folosind legea schimbării componentelor unui vector la o schimbare de baze, $Y = S^{-1} \cdot X$, unde $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ şi $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, obţinem
$$S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Deci matricea trecerii de la baza uzuală la baza canonică este

$$S = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Coloanele acestei matrice reprezintă componentele vectorilor bazei W, adică

$$W = \left\{ \overline{f}_1 = (1, 0, 0), \overline{f}_2 = (-1, 0, 1), \overline{f}_3 = \left(-\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}\right) \right\}.$$

Se găseşte uşor rang$P$ =rang$B = 3$, iar P este pozitiv definită.

5. Se dă forma pătratică

$$P(\overline{x}) = 2x_1x_2 - 6x_1x_3 - 6x_2x_3,$$

unde $\overline{x} = (x_1, x_2, x_3)$. Să se determine matricea în baza uzuală, expresia canonică prin metoda lui Gauss, baza canonică, matricea în baza canonică, rangul şi natura lui P.

Rezolvare: Matricea în baza uzuală este

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & -3 \\ -3 & -3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Se observă că nu avem pătrate (coeficienţii lui x_i^2, $i = 1, 2, 3$ sunt nuli), deci vom folosi schimbarea de coordonate

$$\begin{cases} x_1 = y_1 - y_2 \\ x_2 = y_1 + y_2 \\ x_3 = y_3 \end{cases}.$$

Obţinem succesiv

$$\begin{aligned} P(\overline{x}) &= 2y_1^2 - 2y_2^2 - 6y_1y_3 + 6y_2y_3 - 6y_1y_3 - 6y_2y_3 \\ &= \left(2y_1^2 - 12y_1y_3\right) - 2y_2^2 \\ &= 2\left(y_1^2 - 6y_1y_3 + 9y_3^2\right) - 18y_3^2 - 2y_2^2 \\ &= 2\left(y_1 - 3y_3\right)^2 - 2y_2^2 - 18y_3^2. \end{aligned}$$

Cu schimbarea de coordonate

$$\begin{cases} z_1 = y_1 - 3y_3 \\ z_2 = y_2 \\ z_3 = y_3 \end{cases},$$

se obţine forma canonică a formei pătratice $P(\overline{x}) = 2z_1^2 - 2z_2^2 - 18z_3^2$, unde $(z_1, z_2, z_3)_W = \overline{x}$, W fiind baza canonică. Pentru a determina această bază avem nevoie de schimbarea de coordonate

$$\begin{cases} x_1 = z_1 - z_2 + 3z_3 \\ x_2 = z_1 + z_2 + 3z_3 \\ x_3 = z_3 \end{cases}$$

care ne dă matricea de trecere de la baza uzuală la baza canonică W,

$$S = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

deci $W = \left\{\overline{f}_1 = (1,1,0), \overline{f}_2 = (-1,1,0), \overline{f}_3 = (3,3,1)\right\}$. Matricea în baza canonică este

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -18 \end{pmatrix},$$

rangul lui P este 3 şi P este nedefinită.

6. Să se aducă la forma canonică următoarele forme pătratice, precizându-se matricea în baza canonică, rangul şi natura lui P:
a) $P(\overline{x}) = -x_1^2 - 3x_2^2 - 5x_3^2 - 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3$;
b) $P(\overline{x}) = 4x_1^2 + 16x_1x_2 + 16x_2^2 + 3x_2x_3$;
c) $P(\overline{x}) = x_1^2 - 5x_3^2 - 2x_1x_2 - 4x_1x_3 - 2x_2x_3$.
Rezolvare: a) Avem

$$\begin{aligned} P(\overline{x}) &= -\left(x_1^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_3 + (x_2 - 2x_3)^2\right) + \left(x_2^2 - 4x_2x_3 + 4x_3^2\right) \\ &\quad -3x_2^2 - 5x_3^2 + 4x_2x_3 \\ &= -(x_1 + x_2 - 2x_3)^2 - 2x_2^2 - x_3^2 \end{aligned}$$

şi se obţine forma pătratică $P(\overline{x}) = -y_1^2 - 2y_2^2 - y_3^2$, unde $y_1 = x_1 + x_2 - 2x_3$, $y_2 = x_2$ şi $y_3 = x_3$. Matricea în baza canonică este

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$\mathrm{rang}P = 3$, P este negativ definită.
b) Avem

$$\begin{aligned} P(\overline{x}) &= 4(x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_2^2) - 16x_2^2 + 16x_2^2 + 3x_2x_3 \\ &= 4(x_1 + 2x_2)^2 + 3x_2x_3 \end{aligned}$$

şi obţinem $P(\overline{x}) = 4y_1^2 + 3y_2y_3$, unde $y_1 = x_1 + 2x_2$, $y_2 = x_2$, $y_3 = x_3$.
În continuare facem schimbarea de coordonate:

$$\begin{cases} y_1 = z_1 \\ y_2 - y_3 = z_2 \\ y_2 + y_3 = z_3 \end{cases}$$

şi obţinem $P(\overline{x}) = 4z_1^2 + 3z_2^2 - 3z_3^2$, matricea în baza canonică este $B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$, rangul lui P este 3 şi P este nedefinită.

c) Avem

$$\begin{aligned} P(\overline{x}) &= \left(x_1^2 - 2x_1(x_2+2x_3) + (x_2+2x_3)^2\right) - x_2^2 - 4x_2x_3 - 4x_3^2 \\ &\quad -5x_3^2 - 2x_2x_3 \\ &= (x_1 - x_2 - 2x_3)^2 - x_2^2 - 6x_2x_3 - 9x_3^2 \\ &= (x_1 - x_2 - 2x_3)^2 - (x_2 + 3x_3)^2, \end{aligned}$$

deci am găsit forma canonică $P(\overline{x}) = y_1^2 - y_2^2$, unde $y_1 = x_1 - x_2 - 2x_3$, $y_2 = x_2 + 3x_3$. Deci matricea în baza canonică este $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, rangul lui P este 2 şi natura nedefinită.

7. Pentru forma pătratică

$$P(\overline{x}) = 2x_1x_2 + x_2^2 - x_1x_3 + \frac{3}{4}x_3^2,$$

unde $\overline{x} = (x_1, x_2, x_3)$, se cer: matricea în baza uzuală, expresia canonică, rangul, natura, matricea în baza canonică, forma biliniară simetrică din care provine şi $P(\overline{x}_0)$, unde $\overline{x}_0 = (1, 1, 0)$.

Rezolvare: Matricea în baza uzuală este

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 1 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{3}{4} \end{pmatrix}.$$

Aplicăm metoda lui Gauss de aducere la forma canonică şi avem

$$\begin{aligned} P(\overline{x}) &= \left(x_2^2 + 2x_1x_2 + x_1^2\right) - x_1^2 - x_1x_3 + \frac{3}{4}x_3^2 \\ &= (x_1 + x_2)^2 - \left(x_1^2 + x_1x_3 + \frac{1}{4}x_3^2\right) + \frac{1}{4}x_3^2 + \frac{3}{4}x_3^2 \\ &= (x_1 + x_2)^2 - \left(x_1 + \frac{1}{2}x_3\right)^2 + x_3^2. \end{aligned}$$

Facem schimbarea de coordonate

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + x_2 \\ y_2 = x_1 + \frac{1}{2}x_3 \\ y_3 = x_3 \end{cases}$$

şi obţinem $P(\overline{x}) = y_1^2 - y_2^2 + y_3^2$. Matricea în baza canonică va fi

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

rang$P = 3$, P este o formă pătratică nedefinită, iar $P(\overline{x}_0) = 3$.

8. Pentru forma pătratică

$$P(\overline{x}) = 2x_1^2 + 3x_2^2 + \frac{5}{4}x_3^2 + 4x_1x_2 - x_2x_3,$$

unde $\overline{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$, se cer: matricea în baza uzuală, expresia canonică, rangul, natura, matricea în baza canonică şi forma biliniară simetrică din care provine.

Rezolvare: Matricea formei P în baza uzuală este

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{5}{4} \end{pmatrix}.$$

Aplicăm metoda lui Gauss şi obţinem

$$\begin{aligned} P(\overline{x}) &= 2(x_1 + x_2)^2 + x_2^2 - x_2x_3 + \frac{5}{4}x_3^2 \\ &= 2(x_1 + x_2)^2 + \left(x_2 - \frac{1}{2}x_3\right)^2 + x_3^2. \end{aligned}$$

Deci, expresia canonică este

$$P(\overline{x}) = 2y_1^2 + y_2^2 + y_3^2,$$

rangul este 3, P este pozitiv definită, matricea lui P în baza canonică este

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

iar forma biliniară simetrică din care provine P este

$$\mathcal{A}(\overline{x}, \overline{y}) = 2x_1y_1 + 3x_2y_2 + \frac{5}{4}x_3y_3 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 - \frac{1}{2}x_2y_3 - \frac{1}{2}x_3y_2.$$

9. Fie forma pătratică

$$P(\overline{x}) = x_1^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3,$$

unde $\overline{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$. Să se aducă la forma canonică folosind metoda lui Jacobi şi apoi să se determine baza în care se obţine forma canonică. Să se precizeze rangul şi natura lui P.

Rezolvare: Matricea asociată lui P în baza uzuală a lui $\mathbb{R}^3$ este

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Calculăm determinanţii

$$\Delta_1 = 1,\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -4,\ \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -4, \text{ toţi nenuli.}$$

Deci există o bază $W = \left\{\overline{f}_1, \overline{f}_2, \overline{f}_3\right\}$ a lui $\mathbb{R}^3$ astfel încât forma pătratică P are următoarea formă canonică în raport cu baza W

$$\begin{aligned} P(\overline{x}) &= \frac{\Delta_0}{\Delta_1}y_1^2 + \frac{\Delta_1}{\Delta_2}y_2^2 + \frac{\Delta_2}{\Delta_3}y_3^2 \\ &= y_1^2 - \frac{1}{4}y_2^2 + y_3^2. \end{aligned}$$

Pentru a determina baza W, vom scrie vectorii ei sub forma

$$\begin{cases} \overline{f}_1 = c_{11}\overline{e}_1 \\ \overline{f}_2 = c_{21}\overline{e}_1 + c_{22}\overline{e}_2 \\ \overline{f}_3 = c_{31}\overline{e}_1 + c_{32}\overline{e}_2 + c_{33}\overline{e}_3 \ , \end{cases}$$

iar coeficienţii c_{ij} îi vom găsi din condiţia

$$\mathcal{A}\left(\overline{f}_i, \overline{e}_j\right) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } i \neq j \\ 1, & \text{dacă } i = j \ . \end{cases}$$

Astfel avem

$$\mathcal{A}\left(\overline{f}_1, \overline{e}_1\right) = 1 \Leftrightarrow \mathcal{A}\left(c_{11}\overline{e}_1, \overline{e}_1\right) = 1 \Leftrightarrow c_{11}\mathcal{A}\left(\overline{e}_1, \overline{e}_1\right) = 1 \Leftrightarrow c_{11} = 1.$$

$$\begin{cases} \mathcal{A}\left(\overline{f}_2, \overline{e}_1\right) = 0 \\ \mathcal{A}\left(\overline{f}_2, \overline{e}_2\right) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_{21}\mathcal{A}\left(\overline{e}_1, \overline{e}_1\right) + c_{22}\mathcal{A}\left(\overline{e}_2, \overline{e}_1\right) = 0 \\ c_{21}\mathcal{A}\left(\overline{e}_1, \overline{e}_2\right) + c_{22}\mathcal{A}\left(\overline{e}_2, \overline{e}_2\right) = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} c_{21} + 2c_{22} = 0 \\ 2c_{21} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_{21} = \dfrac{1}{2} \\ c_{22} = -\dfrac{1}{4} \end{cases} .$$

$$\begin{cases} \mathcal{A}\left(\overline{f}_3, \overline{e}_1\right) = 0 \\ \mathcal{A}\left(\overline{f}_3, \overline{e}_2\right) = 0 \\ \mathcal{A}\left(\overline{f}_3, \overline{e}_3\right) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_{31}\mathcal{A}\left(\overline{e}_1, \overline{e}_1\right) + c_{32}\mathcal{A}\left(\overline{e}_2, \overline{e}_1\right) + c_{33}\mathcal{A}\left(\overline{e}_3, \overline{e}_1\right) = 0 \\ c_{31}\mathcal{A}\left(\overline{e}_1, \overline{e}_2\right) + c_{32}\mathcal{A}\left(\overline{e}_2, \overline{e}_2\right) + c_{33}\mathcal{A}\left(\overline{e}_3, \overline{e}_2\right) = 0 \\ c_{31}\mathcal{A}\left(\overline{e}_1, \overline{e}_3\right) + c_{32}\mathcal{A}\left(\overline{e}_2, \overline{e}_3\right) + c_{33}\mathcal{A}\left(\overline{e}_3, \overline{e}_3\right) = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} c_{31} + 2c_{32} - 2c_{33} = 0 \\ 2c_{31} = 0 \\ -2c_{31} + c_{33} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_{31} = 0 \\ c_{32} = 1 \\ c_{33} = 1 \end{cases} .$$

Astfel că noua bază în care P are forma canonică anterior găsită este

$$\begin{cases} \overline{f}_1 = \overline{e}_1 = (1, 0, 0) \\ \overline{f}_2 = \dfrac{1}{2}\overline{e}_1 - \dfrac{1}{4}\overline{e}_2 = \left(\dfrac{1}{2}, -\dfrac{1}{4}, 0\right) \\ \overline{f}_3 = \overline{e}_2 + \overline{e}_3 = (0, 1, 1). \end{cases}$$

10. Fie forma pătratică

$$P(\overline{x}) = 2x_2^2 + x_3^2 - 4x_1x_3 - 4x_2x_3,$$

unde $\overline{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$. Să se aducă P la forma canonică folosind metoda transformărilor ortogonale (sau metoda valorilor proprii).

Rezolvare: Matricea asociată lui P în baza uzuală a lui $\mathbb{R}^3$ este

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Atunci, ecuaţia caracteristică este $\det(A - \lambda E) = 0$, adică

$$(\lambda - 1)(\lambda + 2)(\lambda - 4) = 0$$

şi se obţin valorile proprii $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -2$ şi $\lambda_3 = 4$. Deoarece valorile proprii sunt distincte, rezultă că vectorii proprii corespunzători sunt ortogonali. Pentru $\lambda_1 = 1$, din sistemul

$$\begin{cases} -x_1 - 2x_3 = 0 \\ x_2 - 2x_3 = 0 \\ -2x_1 - 2x_2 = 0 \end{cases}$$

determinăm un vector propriu normat, adică $\overline{f}_1 = \left(-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$. Pentru $\lambda_2 = -2$, din sistemul

$$\begin{cases} 2x_1 - 2x_3 = 0 \\ 4x_2 - 2x_3 = 0 \\ -2x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$$

obţinem $\overline{f}_2 = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$. Iar pentru valoarea proprie $\lambda_3 = 4$, din sistemul

$$\begin{cases} -4x_1 - 2x_3 = 0 \\ -2x_2 - 2x_3 = 0 \\ -2x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 0 \end{cases}$$

găsim $\overline{f}_3 = \left(-\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$. Astfel am obţinut baza ortonormată $W = \{\overline{f}_1, \overline{f}_2, \overline{f}_3\}$ şi cu legea de transformare a coordonatelor (ortogonală)

$$\begin{cases} x_1 = -\frac{2}{3}y_1 + \frac{2}{3}y_2 - \frac{1}{3}y_3 \\ x_2 = \frac{2}{3}y_1 + \frac{1}{3}y_2 - \frac{2}{3}y_3 \\ x_3 = \frac{1}{3}y_1 + \frac{2}{3}y_2 + \frac{2}{3}y_3 \end{cases},$$

forma pătratică P este redusă la următoarea formă canonică

$$P(\overline{x}) = y_1^2 - 2y_2^2 + 4y_3^2.$$

11. Fie forma pătratică $P : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, definită prin

$$P(\overline{x}) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3,$$

unde $\overline{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$. Să se aducă la forma canonică prin metoda transformărilor ortogonale.

Rezolvare: Matricea formei pătratice este

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}.$$

Ecuaţia caracteristică $\det(A - \lambda E) = 0$ admite rădăcinile $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = \lambda_3 = \frac{1}{2}$. Pentru $\lambda_1 = 2$, din sistemul

$$\begin{cases} -x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 = 0 \\ \frac{1}{2}x_1 - x_2 + \frac{1}{2}x_3 = 0 \\ \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

obţinem vectorul propriu normat $\overline{u}_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$. Pentru $\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{1}{2}$ se obţine sistemul

$$\begin{cases} \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 = 0 \\ \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 = 0 \\ \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 = 0 \end{cases}.$$

Sistemul fundamental de soluţii pentru acest sistem de ecuaţii este format din $\overline{v}_1 = (-1, 1, 0)$ şi $\overline{v}_2 = (-1, 0, 1)$, soluţia generală a sistemului fiind $\overline{v} = \alpha\overline{v}_1 + \beta\overline{v}_2$. Deoarece vectorii $\overline{v}_1$ şi $\overline{v}_2$ nu sunt ortogonali, se procedează astfel: se ia $\overline{u}_2 = \frac{\overline{v}_2}{\|\overline{v}_2\|}$ şi se caută $\overline{u}_3 = \overline{v}$, normat şi ortogonal lui $\overline{u}_2$. Deoarece $\overline{v} = (-\alpha - \beta, \alpha, \beta)$ şi $\overline{u}_2 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$, din condiţia de ortogonalitate a acestora obţinem $\beta = -2\alpha$, astfel că $\overline{v} = (\alpha, \alpha, -2\alpha)$. Normând acest vector, obţinem $\overline{u}_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}\right)$. Astfel, vectorii $\overline{u}_1$, $\overline{u}_2$, $\overline{u}_3$ formează o bază ortonormată şi cu transformarea ortogonală

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}y_1 - \frac{1}{\sqrt{2}}y_2 + \frac{1}{\sqrt{6}}y_3 \\ x_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}y_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}y_2 + \frac{1}{\sqrt{6}}y_3 \\ x_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}y_1 - \frac{2}{\sqrt{6}}y_3 \end{cases}$$

forma pătratică este redusă la forma canonică

$$P(\overline{x}) = 2y_1^2 + \frac{1}{2}y_2^2 + \frac{1}{2}y_3^2.$$

12. Fie forma pătratică

$$P(\overline{x}) = x_1^2 + 3x_2^2 + 4x_2x_3,$$

unde $\overline{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$. Să se aducă la forma canonică prin metodele cunoscute.

Rezolvare:

Metoda lui Gauss

$$\begin{aligned} P(\overline{x}) &= x_1^2 + 3\left(x_2^2 + \frac{4}{3}x_2x_3 + \frac{4}{9}x_3^2\right) - 3 \cdot \frac{4}{9}x_3^2 \\ &= x_1^2 + 3\left(x_2 + \frac{2}{3}x_3\right)^2 - \frac{4}{3}x_3^2, \end{aligned}$$

deci am obţinut forma canonică

$$P(\overline{x}) = y_1^2 + 3y_2^2 - \frac{4}{3}y_3^2.$$

Metoda lui Jacobi

Avem $\Delta_1 = 1$, $\Delta_2 = 3$, $\Delta_3 = -4$, deci forma canonică este

$$P(\overline{x}) = y_1^2 + \frac{1}{3}y_2^2 - \frac{3}{4}y_3^2.$$

Metoda transformărilor ortogonale

Pentru matricea formei pătratice P,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix},$$

valorile proprii sunt $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$ şi $\lambda_3 = 4$, distincte. Vectorii proprii corespunzători $\overline{v}_1 = (1, 0, 0)$, $\overline{v}_2 = (0, 1, -2)$, respectiv $\overline{v}_3 = (0, 2, 1)$ sunt ortogonali şi normându-i obţinem baza ortonormată

$$W = \left\{\overline{f}_1 = (1, 0, 0), \overline{f}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}(0, 1, -2), \overline{f}_3 = \frac{1}{\sqrt{5}}(0, 2, 1)\right\}.$$

În raport cu această bază forma pătratică P are următoarea expresie canonică

$$P(\overline{x}) = y_1^2 - y_2^2 + 4y_3^2.$$

13. Să se arate că forma pătratică asociată matricei $A^T A$, în care A este reală nesingulară de tipul $n \times n$, este pozitiv definită.

    Rezolvare: Notăm cu B matricea reală simetrică $A^T A$. Trebuie să arătăm că
    $$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} b_{ij} x_i x_j > 0 \text{ dacă } \exists x_i \neq 0.$$
    Considerăm transformările liniare notate B, A^T, A care în baza canonocă din $\mathbb{R}^n$ au matricele egale respectiv cu B, A^T, A. Trebuie să arătăm că $Bx \cdot x > 0$ pentru orice $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0$. Folosind identitatea
    $$Ax \cdot y = x \cdot A^T y, \ \forall x, y \in \mathbb{R}^n,$$
    putem scrie
    $$Bx \cdot x = A^T Ax \cdot x = Ax \cdot Ax$$
    şi având în vedere că $x \neq 0$ implică $Ax \neq 0$ (matricea A fiind nesingulară), afirmaţia e dovedită.

14. Fie $P(x) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$ $(a_{ij} = a_{ji})$ o formă pătratică în $\mathbb{R}^n$ având matricea $A = (a_{ij})_{i,j=\overline{1,n}}$. Dacă $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq ... \leq \lambda_n$ sunt valorile proprii ale lui A, să se arate că pentru orice $x \in \mathbb{R}^n$ avem
    $$\lambda_1 \left(x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2\right) \leq P(x) \leq \lambda_n \left(x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2\right).$$
    Rezolvare: Notăm cu T transformarea liniară care în baza canonică din $\mathbb{R}^n$ are matricea A, putem scrie $P(x) = Tx \cdot x$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$. Dacă $\{f_1, f_2, ..., f_n\}$ este baza ortonormată formată din vectorii proprii ai matricei simetrice A şi notăm $x = \xi_1 f_1 + \xi_2 f_2 + ... + \xi_n f_n$, atunci rezultă
    $$\lambda_1 \left(\xi_1^2 + \xi_2^2 + ... + \xi_n^2\right) \leq P(x) \leq \lambda_n \left(\xi_1^2 + \xi_2^2 + ... + \xi_n^2\right).$$
    Având în vedere că
    $$\xi_1^2 + \xi_2^2 + ... + \xi_n^2 = x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2 = \|x\|^2$$
    obţinem majorările cerute.

15. Se consideră forma pătratică $P : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definită prin

$$P(\overline{x}) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j, \ \forall \overline{x} = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n,$$

în care $a_{ij} = \int_a^b f_i(t) f_j(t)\, dt$, $i, j = \overline{1, n}$, cu f_i funcţii continue şi liniar independente pe $[a, b]$. Să se arate că P este pozitiv definită.

Rezolvare: Fie $\mathcal{B}'$ o bază în care P are expresia canonică $P(\overline{x}) = \sum_{l=1}^{n} \lambda_{ll} (y_l)^2$. Dacă trecerea de la baza $\mathcal{B}$ la baza $\mathcal{B}'$ se face prin $Y = XC$, deoarece $B = S^t A S$, avem

$$\lambda_{ll} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} s_{il} a_{ij} s_{jl} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} s_{il} \left(\int_a^b f_i(t) f_j(t)\, dt \right) s_{jl}$$

$$= \int_a^b \left(\sum_{i=1}^{n} s_{il} f_i(t) \right) \left(\sum_{j=1}^{n} s_{jl} f_j(t) \right) dt$$

sau, dacă notăm $g_l(t) = \sum_{i=1}^{n} s_{il} f_i(t)$, obţinem

$$\lambda_{ll} == \int_a^b (g_l(t))^2\, dt > 0,$$

deoarece g_l sunt continue şi liniar independente, deci neidentic nule pe $[a, b]$.

Capitolul 7

Calcul vectorial

1. Să se arate că trei vectori $\overline{a}$, $\overline{b}$ şi $\overline{c}$ pot forma un triunghi dacă şi numai dacă $\overline{a}+\overline{b}+\overline{c}=\overline{0}$.

   Rezolvare: Presupunem că vectorii daţi închid un triunghi, adică avem $\overline{a}=\overrightarrow{BC}$, $\overline{b}=\overrightarrow{CA}$, $\overline{c}=\overrightarrow{AB}$. Din definiţia adunării vectorilor $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$, adică $\overline{c}+\overline{a}=-\overline{b}$ sau $\overline{a}+\overline{b}+\overline{c}=0$. Reciproc, prin reducere la absurd, presupunem că avem satisfăcută relaţia $\overline{a}+\overline{b}+\overline{c}=0$ dar vectorii nu închid un triunghi, adică $\overline{c}=\overrightarrow{AB}$, $\overline{a}=\overrightarrow{BC}$, $\overline{b}=\overrightarrow{CD}$, cu $D\neq A$. În acest caz $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}$ sau $\overline{a}+\overline{b}+\overline{c}=\overrightarrow{AD}\neq\overline{0}$, ceea ce este fals, deci vectorii închid un triunghi.

2. Se consideră un paralelogram cu vârfurile A, B, C, D şi de centru O. Să se afle vectorii $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{DA}$ în funcţie de vectorii $\overline{a}=\overrightarrow{OA}$, $\overline{b}=\overrightarrow{OB}$, $\overline{c}=\overrightarrow{OC}$ şi $\overline{d}=\overrightarrow{OD}$.

   Rezolvare: Din definiţia sumei a doi vectori avem $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}$, adică $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=\overline{b}-\overline{a}$. În mod analog se determină şi ceilalţi vectori.

3. Fie triunghiul ABC. Să notam cu $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ vectorii $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CA}$ şi respectiv $\overrightarrow{AB}$. Să se exprime cu ajutorul lor vectorii ce coincid cu medianele

triunghiului şi să se arate că aceştia pot forma un triunghi.

Rezolvare: Fie $\overrightarrow{AA'}$, $\overrightarrow{BB'}$, $\overrightarrow{CC'}$ cele trei mediane ale triunghiului. Avem:

$\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA'} = \overline{c} + \frac{1}{2}\overline{a}$

$\overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CB'} = \overline{a} + \frac{1}{2}\overline{b}$

$\overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AC'} = \overline{b} + \frac{1}{2}\overline{c}.$

Deoarece $\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} = \left(\overline{a} + \overline{b} + \overline{c}\right) + \frac{1}{2}\left(\overline{a} + \overline{b} + \overline{c}\right) = \overline{0}$ rezultă că vectorii mediane închid un triunghi.

4. Fie triunghiul ABC, G centrul său de greutate şi M un punct oarecare. Să se demonstreze că:

   a) $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overline{0}$;

   b) $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}$.

   Rezolvare: a) G este punctul de intersecţie al medianelor triunghiului ABC. Atunci avem $\overrightarrow{GA} = \frac{2}{3}\overrightarrow{A'A}$, $\overrightarrow{GB} = \frac{2}{3}\overrightarrow{B'B}$, $\overrightarrow{GC} = \frac{2}{3}\overrightarrow{C'C}$, deci $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \frac{2}{3}\left(\overrightarrow{A'A} + \overrightarrow{B'B} + \overrightarrow{C'C}\right) = \overline{0}$.

   b) $\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA}$, $\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB}$, $\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GC}$ şi adunându-le, folosind punctul a), obţinem $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}$.

5. Fie o piramidă cu vârful S şi baza un paralelogram $ABCD$, ale cărui diagonale se intersectează în O. Să se demonstreze că:

   $$\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC} + \overrightarrow{SD} = 4\overrightarrow{SO}.$$

   Rezolvare: Avem: $\overrightarrow{SA} = \overrightarrow{SO} + \overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{SB} = \overrightarrow{SO} + \overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{SC} = \overrightarrow{SO} + \overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{SD} = \overrightarrow{SO} + \overrightarrow{OD}$. Cum $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = \overline{0}$ şi $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD} = \overline{0}$, adunând cele patru relaţii de mai sus obţinem egalitatea dorită.

6. Se consideră vectorii $\overline{a} = \overline{i} + 2\overline{j} - 3\overline{k}$, $\overline{b} = -2\overline{i} + 8\overline{j} - \overline{k}$, $\overline{c} = 3\overline{i} + \overline{j} - 2\overline{k}$, $\overline{d} = 2\overline{i} + \overline{k}$. Să se determine $\overline{v}_1 = \overline{a} + \overline{b} - 2\overline{c}$ şi $\overline{v}_2 = 2\overline{a} + \overline{b} - 4\overline{d}$.

Rezolvare: $\overline{v}_1 = (1-2-6)\,\overline{i} + (2+8-2)\,\overline{j} + (-3-1+4)\,\overline{k} = -7\overline{i} + 8\overline{j}$, $\overline{v}_2 = (2-2-8)\,\overline{i} + (4+8)\,\overline{j} + (-6-1-4)\,\overline{k} = -8\overline{i} + 12\overline{j} - 11\overline{k}$.

7. Se dau vectorii $\overline{a} = \overline{i} + (\lambda + 2\mu)\,\overline{j} + 2\overline{k}$ şi $\overline{b} = (-\lambda + \mu)\,\overline{i} - \overline{j} - \overline{k}$. Să se determine scalarii reali λ şi μ astfel încât vectorii $\overline{a}$ şi $\overline{b}$ să fie coliniari.
   Rezolvare: Vectorii $\overline{a}$ şi $\overline{b}$ sunt coliniari dacă au componentele proporţionale, adică $\dfrac{1}{-\lambda+\mu} = \dfrac{\lambda+2\mu}{-1} = \dfrac{2}{-1}$, de unde obţinem sistemul $\begin{cases} 2\lambda - 2\mu = 1 \\ \lambda + 2\mu = 2 \end{cases}$, cu soluţia $\lambda = 1$ şi $\mu = \dfrac{1}{2}$.

8. Fie vectorii $\overline{a} = \lambda\overline{i} - 3\overline{j} + 2\overline{k}$ şi $\overline{b} = \overline{i} + 2\overline{j} - \lambda\overline{k}$. Să se determine $\lambda \in \mathbb{R}$ astfel încât vectorii $\overline{a}$ şi $\overline{b}$ să fie ortogonali. Pentru $\lambda = 1$ să se determine unghiul dintre cei doi vectori.
   Rezolvare: Condiţia de ortogonalitate $\overline{a}\cdot\overline{b} = 0$ cere ca $\lambda - 6 - 2\lambda = 0$, de unde rezultă $\lambda = -6$. Pentru $\lambda = 1$, $\cos\varphi = \dfrac{\overline{a}\cdot\overline{b}}{\|\overline{a}\|\,\|\overline{b}\|} = -\dfrac{\sqrt{7}}{\sqrt{12}}$.

9. Să se calculeze scalarul $S = \overline{a}\cdot\overline{b} + \overline{b}\cdot\overline{c} + \overline{c}\cdot\overline{a}$, ştiind că vectorii $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ sunt vectori unitari şi satisfac condiţia $\overline{a} + \overline{b} + \overline{c} = 0$.
   Rezolvare: Înmulţind scalar relaţia $\overline{a} + \overline{b} + \overline{c} = 0$ pe rând cu $\overline{a}$, $\overline{b}$ şi $\overline{c}$ obţinem $\|\overline{a}\|^2 + \overline{b}\cdot\overline{a} + \overline{c}\cdot\overline{a} = 0$, $\overline{a}\cdot\overline{b} + \left\|\overline{b}\right\|^2 + \overline{c}\cdot\overline{b} = 0$ şi respectiv $\overline{a}\cdot\overline{c} + \overline{b}\cdot\overline{c} + \|\overline{c}\|^2 = 0$. Adunând cele trei relaţii şi ţinând cont de faptul că vectorii sunt unitari obţinem $3 + 2S = 0$, adică $S = -\dfrac{3}{2}$.

10. Pentru ce valori ale lui $\lambda \in \mathbb{R}$ vectorii $\overline{v}_1 = \lambda\overline{a} + 3\overline{b}$ şi $\overline{v}_2 = \overline{a} - 2\overline{b}$ sunt coliniari, $\overline{a}$ şi $\overline{b}$ fiind necoliniari?
    Rezolvare: $\lambda = -3/2$.

11. Fie vectorii $\overline{v}_1 = 2\overline{i} + \overline{j} - 2\overline{k}$ şi $\overline{v}_2 = \overline{i} - \overline{k}$. Să se calculeze:
    a) produsul lor vectorial;
    b) să se verifice că vectorul $\overline{v}_1 \times \overline{v}_2$ este perpendicular pe $\overline{v}_1$ şi $\overline{v}_2$;
    c) aria paralelogramului construit pe $\overline{v}_1$ şi $\overline{v}_2$;

d) unghiul dintre cei doi vectori.

Rezolvare: a) $\overline{v}_1 \times \overline{v}_2 = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -\overline{i} - \overline{k}$.

b) Se verifică $(\overline{v}_1 \times \overline{v}_2) \cdot \overline{v}_1 = -2 + 2 = 0$ şi $(\overline{v}_1 \times \overline{v}_2) \cdot \overline{v}_2 = 0$.

c) $\mathcal{A} = \|\overline{v}_1 \times \overline{v}_2\| = \sqrt{2}$.

d) Notând $\varphi = \sphericalangle(\overline{v}_1, \overline{v}_2)$, avem $\cos\varphi = \dfrac{\overline{v}_1 \cdot \overline{v}_2}{\|\overline{v}_1\| \, \|\overline{v}_2\|} = \dfrac{4}{3\sqrt{2}}$.

12. Să se determine vectorul $\overline{u}$ paralel cu vectorul $\overline{a} = 2\overline{i} - 3\overline{j} + \overline{k}$, ştiind că face un unghi de $\dfrac{\pi}{3}$ cu vectorul $\overline{k}$.

Rezolvare: Din condiţia de paralelism obţinem $\overline{u} = \lambda\left(2\overline{i} - 3\overline{j} + \overline{k}\right)$. Ştim că $\sphericalangle\left(\overline{u}, \overline{k}\right) = \dfrac{\pi}{3}$, adică $\cos\left(\overline{u}, \overline{k}\right) = \lambda = \dfrac{1}{2}$, deci $\overline{u} = \overline{i} - \dfrac{3}{2}\overline{j} + \dfrac{1}{2}\overline{k}$.

13. Să se determine vectorul $\overline{u}$ perpendicular pe vectorii $\overline{a} = \overline{i} - \overline{j} + 2\overline{k}$ şi $\overline{b} = 2\overline{i} + \overline{j} - \overline{k}$, ştiind că $\|\overline{u}\| = \sqrt{35}$ şi face un unghi ascuţit cu $\overline{i}$.

Rezolvare: Fie vectorul $\overline{u} = x\overline{i} + y\overline{j} + z\overline{k}$. Deoarece $\overline{u} \perp \overline{a}$ şi $\overline{u} \perp \overline{b}$ obţinem $\overline{u} \cdot \overline{a} = 0$ şi $\overline{u} \cdot \overline{b} = 0$, adică $x - y + 2z = 0$, respectiv $2x + y - z = 0$. De asemenea, din $\|\overline{u}\| = \sqrt{35}$ obţinem $x^2 + y^2 + z^2 = 35$. Rezolvând sistemul format din cele trei ecuaţii şi ţinând cont de faptul că $\sphericalangle\left(\overline{u}, \overline{i}\right)$ ascuţit, adică $\cos\left(\overline{u}, \overline{i}\right) > 0$, deci $\overline{u} \cdot \overline{i} = x > 0$, obţinem următoarea soluţie $x = 1$, $y = -5$, $z = -3$. Deci $\overline{u} = \overline{i} - 5\overline{j} - 3\overline{k}$.

14. Să se determine vectorul $\overline{u}$ care este ortogonal cu vectorii $\overline{a} = 3\overline{i} - \overline{j} + 2\overline{k}$ şi $\overline{b} = \overline{i} - \overline{j} - 4\overline{k}$, ştiind că are norma egală cu 3 şi face cu vectorul $\overline{k}$ un unghi obtuz.

Rezolvare: $\overline{u} = \dfrac{3}{\sqrt{59}}\left(3\overline{i} + 7\overline{j} - \overline{k}\right)$.

15. Să se determine lungimea vectorului $\overline{v} = \overline{v}_1 - \overline{v}_2 + \overline{v}_3$, ştiind că $\|\overline{v}_1\| = 1$, $\|\overline{v}_2\| = 2$, $\|\overline{v}_3\| = \sqrt{2}$, unghiul dintre $\overline{v}_1$ şi $\overline{v}_2$ este $\pi/6$, unghiul dintre $\overline{v}_1$ şi $\overline{v}_3$ este $\pi/4$, unghiul dintre $\overline{v}_2$ şi $\overline{v}_3$ este $\pi/3$.

Rezolvare: Deoarece $\|\overline{v}\|^2 = \|\overline{v}_1\|^2 + \|\overline{v}_2\|^2 + \|\overline{v}_3\|^2 - 2\overline{v}_1 \cdot \overline{v}_2 + 2\overline{v}_1 \cdot \overline{v}_3 - 2\overline{v}_2 \cdot \overline{v}_3$ şi $\overline{v}_1 \cdot \overline{v}_2 = \|\overline{v}_1\| \|\overline{v}_2\| \cos\frac{\pi}{6} = \sqrt{3}$, $\overline{v}_1 \cdot \overline{v}_3 = 1$, $\overline{v}_2 \cdot \overline{v}_3 = \sqrt{2}$, deducem că $\|\overline{v}\| = \sqrt{9 - 2\sqrt{3} - 2\sqrt{2}}$.

16. Se dau vectorii $\overline{v}_1$ şi $\overline{v}_2$ cu mărimile $\frac{1}{3}$, respectiv 2, iar unghiul dintre ei este $\frac{\pi}{6}$. Să se calculeze aria paralelogramului construit pe cei doi vectori.
Rezolvare: $\mathcal{A} = \|\overline{v}_1 \times \overline{v}_2\| = \frac{1}{3} \cdot 2 \cdot \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{3}$.

17. Fiind date punctele $A(2,3,-1)$, $B(2,1,3)$, $C(3,1,1)$ să se determine:
a) vectorii de poziţie $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ şi $\overrightarrow{OC}$;
b) aria triunghiului ABC;
c) mijlocul segmentului AB şi centrul de greutate al triunghiului.
Rezolvare: a) $\overrightarrow{OA} = \overline{r}_A - \overline{r}_O = 2\overline{i} + 3\overline{j} - \overline{k}$, $\overrightarrow{OB} = 2\overline{i} + \overline{j} + 3\overline{k}$, $\overrightarrow{OC} = 3\overline{i} + \overline{j} + \overline{k}$.
b) $\mathcal{A} = \frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right\|$, $\overrightarrow{AB} = \overline{r}_B - \overline{r}_A = -2\overline{j} + 4\overline{k}$, $\overrightarrow{AC} = \overline{r}_C - \overline{r}_A = \overline{i} - 2\overline{j} + 2\overline{k}$, $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = 4\overline{i} + 4\overline{j} + 2\overline{k}$, deci $\mathcal{A} = \frac{1}{2}\sqrt{4^2 + 4^2 + 2^2} = 3$.
c) Fie $C(x_C, y_C, z_C)$ mijlocul segmentului AB. Atunci $x_C = \frac{1}{2}(x_A + x_B) = 2$, $y_C = \frac{1}{2}(y_A + y_B) = 2$ şi $z_C = \frac{1}{2}(z_A + z_B) = 1$, deci $C(2,2,1)$.
Notăm cu $G(x_G, y_G, z_G)$ centrul de greutate al triunghiului ABC, unde $x_G = \frac{1}{3}(x_A + x_B + x_C) = \frac{7}{3}$, $y_G = \frac{5}{3}$ şi $z_G = 1$, deci $G\left(\frac{7}{3}, \frac{5}{3}, 1\right)$.

18. Să se determine aria triunghiului ABC, cunoscând vectorii de poziţie ai vârfurilor $\overrightarrow{OA} = 2\overline{i} + 3\overline{j} - \overline{k}$, $\overrightarrow{OB} = \overline{i} - 2\overline{j} + 2\overline{k}$ şi $\overrightarrow{OC} = 3\overline{i} + \overline{j} + \overline{k}$.
Rezolvare: $\mathcal{A} = \frac{3}{2}\sqrt{10}$.

19. Să se cerceteze coplanaritatea vectorilor:

a) $\overline{v}_1 = \overline{i} + 2\overline{j} + 3\overline{k}$, $\overline{v}_2 = 2\overline{i} + 3\overline{j} + 4\overline{k}$ şi $\overline{v}_3 = 3\overline{i} + 4\overline{j} + 5\overline{k}$;

b) $\overline{v}_1 = \overline{i} + 2\overline{j} - \overline{k}$, $\overline{v}_2 = 9\overline{i} - 11\overline{j} + 13\overline{k}$ şi $\overline{v}_3 = 2\overline{i} + 4\overline{j} - 2\overline{k}$;

c) $\overline{v}_1 = \overline{i} + \overline{j} + \overline{k}$, $\overline{v}_2 = \overline{i} + \overline{k}$ şi $\overline{v}_3 = \overline{j} + \overline{k}$.

Rezolvare: a) $(\overline{v}_1, \overline{v}_2, \overline{v}_3) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} = 0$, deci $\overline{v}_1$, $\overline{v}_2$ şi $\overline{v}_3$ sunt coplanari.

b) $(\overline{v}_1, \overline{v}_2, \overline{v}_3) = 0$, deci $\overline{v}_1$, $\overline{v}_2$ şi $\overline{v}_3$ sunt coplanari.

c) $(\overline{v}_1, \overline{v}_2, \overline{v}_3) \neq 0$, deci $\overline{v}_1$, $\overline{v}_2$ şi $\overline{v}_3$ nu sunt coplanari.

20. Să se determine $\lambda \in \mathbb{R}$ astfel încât vectorii $\overline{v}_1 = 3\overline{i} + (4 - \lambda)\,\overline{j} - 2\overline{k}$, $\overline{v}_2 = -\overline{i} + \lambda\overline{j} + 2\overline{k}$ şi $\overline{v}_3 = \overline{j} + 2\overline{k}$ să fie coplanari. Pentru λ astfel determinat, să se descompună vectorul $\overline{v}_1$ după direcţiile vectorilor $\overline{v}_2$ şi $\overline{v}_3$.

Rezolvare: Vectorii $\overline{v}_1$, $\overline{v}_2$, $\overline{v}_3$ sunt coplanari dacă produsul lor mixt $(\overline{v}_1, \overline{v}_2, \overline{v}_3) = 0$. Cum $(\overline{v}_1, \overline{v}_2, \overline{v}_3) = \begin{vmatrix} 3 & 4-\lambda & -2 \\ -1 & \lambda & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 4\lambda + 4$, obţinem $\lambda = -1$. Scriem acum $\overline{v}_1 = \alpha\overline{v}_2 + \beta\overline{v}_3$, relaţie echivalentă cu sistemul

$$\begin{cases} -\alpha = 3 \\ -\alpha + \beta = 5 \\ 2\alpha + 2\beta = -2 \end{cases}.$$

Soluţia acestui sistem este $\alpha = -3$, $\beta = 2$, astfel că $\overline{v}_1 = -3\overline{v}_2 + 2\overline{v}_3$.

21. Se dau punctele $A\,(2, 3, 1)$, $B\,(4, 1, -2)$, $C\,(6, 3, 7)$ şi $D\,(-5, -4, 8)$. Să se determine:

a) volumul tetraedrului $ABCD$ şi lungimea înălţimii coborâtă din D pe planul ABC;

b) unghiul dintre muchiile tetraedrului.

Rezolvare: a) $\mathcal{V} = \dfrac{1}{6}\left|\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right)\right|$, $\overrightarrow{AB} = 2\overline{i} - 2\overline{j} - 3\overline{k}$, $\overrightarrow{AC} =$

$4\overline{i}+6\overline{k}$, $\overrightarrow{AD}=-7\overline{i}-7\overline{j}+7\overline{k}$, $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}\right)=308$, deci $\mathcal{V}=154/3$. Pe de altă parte, $\mathcal{V}=\dfrac{1}{3}\mathcal{A}_{ABC}\cdot h_D$, iar $\mathcal{A}_{ABC}=\dfrac{1}{2}\left\|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right\|=14$, deci $h_D=11$.

b) $\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}/\left(\left\|\overrightarrow{AB}\right\|\left\|\overrightarrow{AC}\right\|\right)=-5/\sqrt{17\cdot 13}$. La fel se determină şi celelalte unghiuri.

22. Să se determine $\lambda\in\mathbb{R}$ astfel încât volumul paralelipipedului construit pe vectorii $\overline{v}_1=2\overline{i}-3\overline{j}+\overline{k}$, $\overline{v}_2=\overline{i}+\overline{j}-2\overline{k}$ şi $\overline{v}_3=\lambda\overline{i}+2\overline{j}$ să fie egal cu 5.

    Rezolvare: $(\overline{v}_1,\overline{v}_2,\overline{v}_3)=5\,(2+\lambda)$ de unde $\lambda_1=-1$, $\lambda_2=-3$.

23. Să se calculeze înălţimea paralelipipedului construit pe vectorii $\overline{v}_1$, $\overline{v}_2$, $\overline{v}_3$ luând ca bază paralelogranul construit pe vectorii $\overline{v}_1$ şi $\overline{v}_2$, ştiind că $\overline{v}_1=2\overline{i}+\overline{j}-\overline{k}$, $\overline{v}_2=3\overline{i}+2\overline{j}+\overline{k}$, $\overline{v}_3=-\overline{j}+2\overline{k}$.

    Rezolvare: $\mathcal{V}=|(\overline{v}_1,\overline{v}_2,\overline{v}_3)|=7$, $\mathcal{A}=\|\overline{v}_1\times\overline{v}_2\|=\sqrt{35}$, deci $h=7/\sqrt{35}$.

24. Se dau vectorii $\overline{v}_1=\overline{i}+\overline{j}-\overline{k}$, $\overline{v}_2=2\overline{i}-3\overline{j}-\overline{k}$ şi $\overline{v}_3=\overline{i}+2\overline{j}+3\overline{k}$. Să se calculeze produsele vectoriale $\overline{v}_1\times(\overline{v}_2\times\overline{v}_3)$ şi $(\overline{v}_1\times\overline{v}_2)\times\overline{v}_3$ şi să se compare rezultatele.

    Rezolvare: $\overline{v}_1\times(\overline{v}_2\times\overline{v}_3)=(\overline{v}_1\cdot\overline{v}_3)\,\overline{v}_2-(\overline{v}_1\cdot\overline{v}_2)\,\overline{v}_3=\overline{0}$, iar $(\overline{v}_1\times\overline{v}_2)\times\overline{v}_3=7\overline{i}+7\overline{j}-7\overline{k}$, deci $\overline{v}_1\times(\overline{v}_2\times\overline{v}_3)\neq(\overline{v}_1\times\overline{v}_2)\times\overline{v}_3$.

25. Fie vectorii $\overline{a}=3\overline{i}-2\overline{j}$ şi $\overline{b}=\overline{i}+2\overline{j}-3\overline{k}$. Să se calculeze sinusul unghiului dintre diagonalele paralelogramului construit pe vectorii $\overline{a}$ şi $\overline{b}$.

    Rezolvare: Diagonalele paralelogramului sunt date de vectorii $\overline{a}+\overline{b}=4\overline{i}-3\overline{k}$ şi $\overline{a}-\overline{b}=2\overline{i}-4\overline{j}+3\overline{k}$. Să notăm cu φ unghiul dintre cele două diagonale. Se ştie că $\left\|\left(\overline{a}+\overline{b}\right)\times\left(\overline{a}-\overline{b}\right)\right\|=\left\|\overline{a}+\overline{b}\right\|\cdot\left\|\overline{a}-\overline{b}\right\|\sin\varphi$. Dar, $\left\|\overline{a}+\overline{b}\right\|=5$, $\left\|\overline{a}-\overline{b}\right\|=\sqrt{29}$ şi $\left(\overline{a}+\overline{b}\right)\times\left(\overline{a}-\overline{b}\right)=-12\overline{i}-18\overline{j}-16\overline{k}$, deci $\sin\varphi=\sqrt{724}/5\sqrt{29}$.

26. Se dau vectorii $\overline{a}$, $\overline{b}$ şi $\overline{c}$. Să se verifice

$$\overline{a}\times\left(\overline{b}\times\overline{c}\right)+\overline{b}\times\left(\overline{c}\times\overline{a}\right)+\overline{c}\times\left(\overline{a}\times\overline{b}\right)=\overline{0}.$$

Rezolvare: Se ţine cont de formula de dezvoltare a produsului dublu vectorial.

27. Să se arate că $\left(\overline{a}\times\overline{b}\right)\cdot\left(\overline{u}\times\overline{v}\right)=\left(\overline{a}\cdot\overline{u}\right)\left(\overline{b}\cdot\overline{v}\right)-\left(\overline{b}\cdot\overline{u}\right)\left(\overline{a}\cdot\overline{v}\right)$.

Rezolvare: Notăm $\overline{c}=\overline{a}\times\overline{b}$. Folosind proprietăţile produsului mixt şi formula de dezvoltare a produsului dublu vectorial avem

$$\begin{aligned}
c\cdot\left(\overline{u}\times\overline{v}\right) &= \left(\overline{c}\times\overline{u}\right)\cdot\overline{v}=-\left[\overline{u}\times\left(\overline{a}\times\overline{b}\right)\right]\cdot\overline{v}\\
&= -\left[\left(\overline{u}\cdot\overline{b}\right)\overline{a}-\left(\overline{u}\cdot\overline{a}\right)\overline{b}\right]\cdot\overline{v}\\
&= \left(\overline{a}\cdot\overline{u}\right)\left(\overline{b}\cdot\overline{v}\right)-\left(\overline{b}\cdot\overline{u}\right)\left(\overline{a}\cdot\overline{v}\right).
\end{aligned}$$

28. Daţi vectorii $\overline{u}$, $\overline{v}$ şi $\overline{w}$, să se arate că are loc relaţia

$$\left(\overline{u}\times\overline{v},\overline{v}\times\overline{w},\overline{w}\times\overline{u}\right)=\left(\overline{u},\overline{v},\overline{w}\right)^2.$$

Rezolvare: Notând $\overline{a}=\overline{u}\times\overline{v}$, $\overline{b}=\overline{v}\times\overline{w}$, avem, succesiv

$$\begin{aligned}
\left(\overline{u}\times\overline{v},\overline{v}\times\overline{w},\overline{w}\times\overline{u}\right) &= \left(\overline{a},\overline{b},\overline{w}\times\overline{u}\right)=\overline{a}\cdot\left[\overline{b}\times\left(\overline{w}\times\overline{u}\right)\right]\\
&= \overline{a}\cdot\left[\left(\overline{b}\cdot\overline{u}\right)\overline{w}-\left(\overline{b}\cdot\overline{w}\right)\overline{u}\right]=\left(\overline{u},\overline{v},\overline{w}\right)\left(\overline{a}\cdot\overline{w}\right)\\
&= \left(\overline{u},\overline{v},\overline{w}\right)^2.
\end{aligned}$$

29. Se consideră vectorii

$$\overline{u}=\overline{i}+\overline{j}+2\overline{k},\ \overline{v}=2\overline{i}-\overline{j}+\lambda\overline{k},\ \overline{w}=\overline{i}-2\overline{j}+\overline{k}.$$

Să se determine $\lambda\in\mathbb{R}$ astfel încât vectorul $\overline{u}\times\left(\overline{v}\times\overline{w}\right)$ să fie paralel cu planul Oxy.

Rezolvare: Avem $\overline{u}\times\left(\overline{v}\times\overline{w}\right)=\left(1-2\lambda\right)\overline{i}+\left(4\lambda+1\right)\overline{j}-\left(\lambda+1\right)\overline{k}$. Din condiţia $\left[\overline{u}\times\left(\overline{v}\times\overline{w}\right)\right]\cdot\overline{k}=0$, rezultă $\lambda=-1$.

30. Să se rezolve ecuaţia vectorială $\overline{a} \times \overline{v} = \overline{b}$ ştiind că $\overline{a} = 2\overline{i} + \overline{j} - 2\overline{k}$ şi $\overline{b} = 3\overline{i} + 2\overline{j} + 4\overline{k}$.

    Rezolvare: Considerăm $\overline{v} = x\overline{i} + y\overline{j} + z\overline{k}$. Din condiţia $\overline{a} \times \overline{v} = \overline{b}$ obţinem următorul sistem compatibil simplu nedeterminat $2y + z = 3$, $-2x - 2z = 2$, $-x + 2y = 4$, ale cărui soluţii sunt $x = -1 - \alpha$, $y = \frac{3}{2} - \frac{\alpha}{2}$, $z = \alpha$, cu $\alpha \in \mathbb{R}$.

31. Să se rezolve ecuaţia vectorială $\overline{v} \times \overline{a} = \overline{b}$ ştiind că $\overline{a} = 3\overline{i} - 2\overline{j} + \overline{k}$ şi $\overline{b} = -2\overline{i} - \overline{j} + 4\overline{k}$, iar $\overline{v}$ este perpendicular pe $\overline{c} = -\overline{i} + \overline{j} + \overline{k}$.

    Rezolvare: Fie $\overline{v} = x\overline{i} + y\overline{j} + z\overline{k}$. Din condiţiile $\overline{v} \times \overline{a} = \overline{b}$ şi $\overline{v} \cdot \overline{c} = 0$ obţinem sistemul $y + 2z = -2$, $-x + 3z = -1$, $-2x - 3y = 4$, $-x + y + z = 0$. Soluţia sistemului este $x = -5/4$, $y = -1/2$, $z = -3/4$. Deci $\overline{v} = -\frac{5}{4}\overline{i} - \frac{1}{2}\overline{j} - \frac{3}{4}\overline{k}$.

32. Să se rezolve ecuaţia vectorială $\overline{a} \times \overline{v} = \overline{b} \times \overline{v}$.

    Rezolvare: $\left(\overline{a} - \overline{b}\right) \times \overline{v} = \overline{0}$, de unde $\overline{v} = \alpha\left(\overline{a} - \overline{b}\right)$, cu $\alpha \in \mathbb{R}$.

33. Să se rezolve sistemul

    $\begin{cases} \overline{a} \cdot \overline{v} = 1 \\ \overline{b} \times \overline{v} = \overline{c} \end{cases}$, ştiind că $\overline{a} = 2\overline{i} + \overline{j} + \overline{k}$, $\overline{b} = 4\overline{i} - 2\overline{j} + 3\overline{k}$ şi $\overline{c} = 3\overline{i} + 3\overline{j} - 2\overline{k}$.

    Rezolvare: Fie $\overline{v} = x\overline{i} + y\overline{j} + z\overline{k}$. Se obţine sistemul $2x + y + z = 1$, $-3y - 2z = 3$, $3x - 4z = 3$, $2x + 4y = -2$, care are soluţia $x = 1$, $y = -1$, $z = 0$. Deci $\overline{v} = \overline{i} - \overline{j}$.

34. Să se rezolve sistemul

    $$\begin{cases} \overline{a} \cdot \overline{v} = m \\ \overline{b} \times \overline{v} = \overline{c} \end{cases}, \text{ unde } m \in \mathbb{R},\ \overline{b} \perp \overline{c},\ \overline{b} \neq \overline{0} \text{ şi } \overline{a} \cdot \overline{b} \neq 0.$$

    Rezolvare: Înmulţim vectorial ambii membri ai ecuaţiei a doua cu $\overline{a}$ la stânga

    $$\overline{a} \times \left(\overline{b} \times \overline{v}\right) = \overline{a} \times \overline{c}, \text{ sau } \left(\overline{a} \cdot \overline{v}\right)\overline{b} - \left(\overline{a} \cdot \overline{b}\right)\overline{v} = \overline{a} \times \overline{c},$$

de unde obţinem soluţia

$$\overline{v} = \frac{1}{\overline{a} \cdot \overline{b}} \left[m\overline{b} + \overline{c} \times \overline{a} \right].$$

Se verifică apoi că această soluţie (unică) satisface într-adevăr ambele ecuaţii.

35. Fie vectorii $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ necoplanari. Să se găsească vectorul liber $\overline{v}$ pentru care

$$\overline{a} \cdot \overline{v} = \alpha, \ \overline{b} \cdot \overline{v} = \beta, \ \overline{c} \cdot \overline{v} = \gamma,$$

unde măcar două dintre numerele α, β, γ sunt nenule.

Rezolvare: Presupunem $\alpha \neq 0$ şi $\beta \neq 0$. Din primele două egalităţi obţinem: $\beta (\overline{a} \cdot \overline{v}) - \alpha \left(\overline{b} \cdot \overline{v}\right) = 0$, de unde $\left(\beta\overline{a} - \alpha\overline{b}\right) \cdot \overline{v} = 0$. Din ultimele două egalităţi din ipoteză obţinem: $\gamma \left(\overline{b} \cdot \overline{v}\right) - \beta (\overline{c} \cdot \overline{v}) = 0$, de unde $\left(\gamma\overline{b} - \beta\overline{c}\right) \cdot \overline{v} = 0$. Deci $\overline{v} \perp \left(\beta\overline{a} - \alpha\overline{b}\right)$ şi $\overline{v} \perp \left(\gamma\overline{b} - \beta\overline{c}\right)$. Prin urmare căutăm $\overline{v}$ de forma

$$\overline{v} = \lambda \left(\beta\overline{a} - \alpha\overline{b}\right) \times \left(\gamma\overline{b} - \beta\overline{c}\right),$$

de unde obţinem

$$\overline{v} = \lambda\beta \left(\gamma\overline{a} \times \overline{b} - \beta\overline{a} \times \overline{c} + \alpha\overline{b} \times \overline{c}\right).$$

Din condiţia $\overline{a} \cdot \overline{v} = \alpha$, $\alpha \neq 0$, obţinem

$$\lambda = \frac{1}{\beta \left(\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}\right)},$$

deci am găsit

$$\overline{v} = \frac{1}{\left(\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}\right)} \left(\gamma\overline{a} \times \overline{b} - \beta\overline{a} \times \overline{c} + \alpha\overline{b} \times \overline{c}\right).$$

Capitolul 8

Planul şi dreapta în spaţiu

1. Să se scrie ecuaţia planului prin $M_0\,(2,-5,1)$ care:

   a) este perpendicular pe vectorul $\overrightarrow{M_0M_1}$, unde $M_1\,(3,-2,-1)$;

   b) este paralel cu planul $P)$ $3x+y-z+2=0$.

   Rezolvare: a) Vom folosi ecuaţia planului $A\,(x-x_0)+B\,(y-y_0)+C\,(z-z_0)=0$, unde $\overline{N}=A\overline{i}+B\overline{j}+C\overline{k}$. În cazul nostru $\overline{N}=\overrightarrow{M_0M_1}=\overline{i}+3\overline{j}-2\overline{k}$, deci ecuaţia planului este $(x-2)+3\,(y+5)-2\,(z-1)=0$, adică $x+3y-2z+15=0$.

   b) Un plan paralel cu planul $P)$ are acelaşi vector normal ca planul $P)$, adică vectorul $\overline{N}=2\overline{i}+\overline{j}-3\overline{k}$. Prin urmare, are ecuaţia $P_\lambda)$ $2x+y-3z+\lambda=0$ $(\lambda\in\mathbb{R})$. Alegem planul care conţine punctul M_0, deci $6-1-6+\lambda=0$, de unde $\lambda=1$. Planul cerut are ecuaţia $2x+y-3z+1=0$.

2. Stabiliţi care dintre perechile de plane sunt paralele:

   a) $P_1)$ $3x-2y-11=0$, $P_2)$ $2x-4y+z+3=0$;

   b) $P_1)$ $4x+2y-6z+5=0$, $P_2)$ $2x+y-3z+1=0$;

   c) $P_1)$ $x-7z+2=0$, $P_2)$ $x-7z+5=0$.

   Rezolvare: Determinăm vectorii normali ai acestor plane. a) $\overline{N}_1=\overline{3i}-2\overline{j}$, $\overline{N}_2=\overline{2i}-4\overline{j}+\overline{k}$, deci $P_1)$ şi $P_2)$ nu sunt paralele.

b) $\overline{N}_1 = 4\overline{i} + \overline{2j} - 6\overline{k} = 2\overline{N}_2$, deci planele sunt paralele.

c) $\overline{N}_1 = \overline{N}_2 = \overline{i} - 7\overline{k}$, deci planele sunt paralele.

3. Să se scrie ecuaţia planului care trece prin punctele $M_1\,(3,-1,0)$, $M_2\,(4,1,1)$ şi $M_3\,(2,0,1)$.

   Rezolvare: Ecuaţia planului determinat de cele trei puncte este:

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ 3 & -1 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

   adică $x - 2y + 3z - 5 = 0$.

4. Se dau punctele $M_1\,(1,3,0)$, $M_2\,(3,-2,1)$, $M_3\,(\alpha,1,-3)$ şi $M_4\,(7,-2,3)$. Să se determine $\alpha \in \mathbb{R}$ astfel încât punctele date să fie coplanare. Să se scrie ecuaţia planului determinat de ele.

   Rezolvare: Punctele date sunt coplanare dacă şi numai dacă

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & -2 & 1 & 1 \\ \alpha & 1 & -3 & 1 \\ 7 & -2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

   de unde obţinem $\alpha = -5$. Planul determinat de aceste puncte are ecuaţia: $17x - 34z - 17 = 0$ sau $x - 2z - 1 = 0$.

5. Să se scrie ecuaţia planului care determină pe axele de coordonate Ox, Oy, Oz segmentele $OA = -1$, $OB = 3$, $OC = -2$.

   Rezolvare: Tăieturile planului pe axe fiind -1, 3, -2, ecuaţia planului va fi $\dfrac{x}{-1} + \dfrac{y}{3} + \dfrac{z}{-2} - 1 = 0$, adică $6x - 2y + 3z + 6 = 0$.

6. Să se determine $\lambda \in \mathbb{R}$ astfel ca planele $P_1)$ $\lambda x + y + 2z + 3 = 0$ şi $P_2)$ $x + \lambda y + (\lambda + 1)\,z + \lambda + 2 = 0$ să fie perpendiculare.

Rezolvare: Planele sunt perpendiculare dacă şi numai dacă vectorii lor normali $\overline{N}_1$ şi $\overline{N}_2$ sunt ortogonali. Calculăm $\overline{N}_1 \cdot \overline{N}_2 = \lambda + \lambda + 2(\lambda + 1) = 0$ şi găsim $\lambda = -1/2$.

7. Să se determine unghiul dintre planele P_1 şi P_2:
   a) $P_1)\ x + y + 2z + 2 = 0$, $P_2)\ 2x - y + 7 = 0$;
   b) $P_1)\ 3x - 2y - z + 5 = 0$, $P_2)\ x - 3y + 9z - 11 = 0$.
   Rezolvare: a) Unghiul celor două plane este unghiul dintre vectorii normali ai celor două plane, $\overline{N}_1 = \overline{i} + \overline{j} + 2\overline{k}$ şi $\overline{N}_2 = 2\overline{i} - \overline{j}$. Deci, $\cos \sphericalangle \left(\overline{N}_1, \overline{N}_2\right) = \dfrac{\overline{N}_1 \cdot \overline{N}_2}{\left\|\overline{N}_1\right\| \left\|\overline{N}_2\right\|} = \dfrac{1}{\sqrt{30}}$.
   b) $\cos \sphericalangle \left(\overline{N}_1, \overline{N}_2\right) = 0$, deci planele sunt perpendiculare.

8. Să se scrie ecuaţia unui plan care:
   a) trece prin punctul $M_0(1, 7, -3)$ şi este paralel cu planul xOy;
   b) trece prin $M_1(2, 1, 3)$ şi este paralel cu vectorii $\overline{a} = 3\overline{i} - 4\overline{j} + 2\overline{k}$ şi $\overline{b} = 3\overline{i} + 4\overline{j} - 2\overline{k}$.
   Rezolvare: a) Un plan paralel cu planul xOy are ecuaţia $z = \lambda$ (un vector normal al planului xOy fiind $\overline{k}$). Cum acesta trece prin punctul M_0, înseamnă că are ecuaţia $z = -3$.
   b) Un plan care trece prin M_1 are ecuaţia $A(x-2) + B(y-1) + C(z-3) = 0$, unde $\overline{N} = (A, B, C)$. Deoarece planul căutat este paralel cu vectorii $\overline{a}$ şi $\overline{b}$ rezultă $\overline{N} \cdot \overline{a} = 0$ şi $\overline{N} \cdot \overline{b} = 0$. Deci $3A - 4B + 2C = 0$, $3A + 4B - 2C = 0$, iar soluţia acestui sistem este $A = 0$ şi $C = 2B$, de unde obţinem ecuaţia planului $B(y-1) + 2B(z-3) = 0$, sau $y + 2z - 7 = 0$.

9. Să se scrie ecuaţia unui plan care:
   a) trece prin $M_0(1, -5, -3)$ şi este perpendicular pe planele $P_1)\ 3x - y + z + 1 = 0$ şi $P_2)\ x + y - z - 2 = 0$;
   b) trece prin $M_1(2, 1, 3)$ şi $M_2(2, 2, 2)$ şi este paralel cu vectorul $\overline{u} =$

$3\overline{i} + \overline{j} - 4\overline{k}$.

Rezolvare: a) Fie $\overline{N}\,(A, B, C)$ vectorul normal al planului căutat P). Deoarece P) este perpendicular pe planele P_1) şi P_2), rezultă $\overline{N} \cdot \overline{N}_1 = 0$ şi $\overline{N} \cdot \overline{N}_2 = 0$, unde $\overline{N}_1\,(3, -1, 1)$, $\overline{N}_2\,(1, 1, -1)$ sunt normalele celor două plane. Deci $3A - B + C = 0$, $A + B - C = 0$. Soluţia acestui sistem este $A = 0$, $B = C$. Prin urmare ecuaţia planului P) este $B\,(y + 5) + B\,(z + 3) = 0$, sau $y + z + 8 = 0$.

b) Ecuaţia planului prin M_1 este $A\,(x - 2) + B(y - 1) + C\,(z - 3) = 0$, cu $\overline{N} = (A, B, C)$. Deoarece planul conţine şi punctul M_2 rezultă $B = C$. Din condiţia de paralelism se obţine $\overline{N} \cdot \overline{u} = 0$, adică $3A + B - 4C = 0$. Planul cerut are ecuaţia $x + y + z - 6 = 0$.

10. Determinaţi mulţimea punctelor egal depărtate de punctele $M_1\,(2, -1, 5)$ şi $M_2\,(0, 1, -1)$.

    Rezolvare: Mulţimea punctelor egal depărtate de punctele M_1 şi M_2 este planul mediator segmentului M_1M_2. Acest plan trece prin mijlocul segmentului AB, adică prin punctul $M_0\,(1, 0, 2)$ şi are normala $\overline{N} = \overrightarrow{M_1M_2} = -2\overline{i} + 2\overline{j} - 6\overline{k}$. Se obţine planul $-x + y - 3z + 7 = 0$.

11. Să se afle distanţa dintre planele P_1) $11x - 2y - 10z - 22 = 0$ şi P_2) $11x - 2y - 10z - 45 = 0$.

    Rezolvare: Se observă că cele două plane sunt paralele (au acelaşi vector normal $\overline{N} = 11\overline{i} - 2\overline{j} - 10\overline{k}$). Fie $M_0\,(2, 0, 0)$ un punct din planul P_1). Avem: $dist(P_1, P_2) = dist\,(M_0, P_2) = \dfrac{|22 - 45|}{\sqrt{121 + 4 + 100}} = \dfrac{23}{15}$.

12. Să se determine parametrii λ şi μ astfel încât planele P_1) $(\lambda + 2)\,x + 3y + z + 2\mu - 1 = 0$ şi P_2) $6\lambda x + (4 - \mu)\,y - \mu z + \lambda + 2 = 0$ să fie paralele.

    Rezolvare: Planele sunt paralele dacă $\dfrac{\lambda + 2}{6\lambda} = \dfrac{3}{4 - \mu} = \dfrac{1}{-\mu}$, de unde obţinem $\mu = -2$ şi $\lambda = 1$.

13. Se dau punctele $A\,(3,-1,3)$, $B\,(5,1,-1)$ şi vectorul $\overline{v}=-3\overline{i}+5\overline{j}-6\overline{k}$. Să se determine:

a) ecuaţiile canonice şi parametrice ale dreptei d) ce trece prin A şi are vectorul director $\overline{v}$, precum şi punctele de intersecţie ale acestei drepte cu planele de coordonate;

b) ecuaţiile canonice ale dreptei AB şi unghiul pe care această dreaptă îl face cu dreapta d).

Rezolvare: a) Ecuaţiile canonice ale dreptei d) sunt: $\dfrac{x-3}{-3}=\dfrac{y+1}{5}=\dfrac{z-3}{-6}$, iar ecuaţiile parametrice sunt:

$$\begin{cases} x=-3\lambda+3 \\ y=5\lambda-1 \\ z=-6\lambda+3,\lambda\in\mathbb{R}. \end{cases}$$

Intersectând dreapta d) cu planul xOy (cu ecuaţia $z=0$) se obţine punctul $M_1(3/2,3/2,0)$, cu planul xOz (cu ecuaţia $y=0$) se obţine $M_2\,(12/5,0,9/5)$, iar cu planul yOz (cu ecuaţia $x=0$) se obţine punctul $M_3\,(0,4,-3)$.

b) Dreapta AB are ecuaţiile $\dfrac{x-x_A}{x_B-x_A}=\dfrac{y-y_A}{y_B-y_A}=\dfrac{z-z_A}{z_B-z_A}$, adică $\dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z-3}{-4}$. Unghiul dintre două drepte este unghiul dintre vectorii directori ai celor două drepte, $\overrightarrow{AB}=2\overline{i}+2\overline{j}-4\overline{k}$ şi $\overline{v}$. Deci $\cos\sphericalangle\left(\overrightarrow{AB},\overline{v}\right)=\dfrac{\overrightarrow{AB}\cdot\overline{v}}{\left\|\overrightarrow{AB}\right\|\,\|\overline{v}\|}=\dfrac{28}{4\sqrt{105}}$.

14. Să se scrie ecuaţiile canonice ale dreptei

$$(d)\quad \begin{cases} x-y+2z-2=0 \\ x+2y+1=0. \end{cases}$$

Rezolvare: Vectorul director al dreptei este $\overline{v}=\overline{N}_1\times\overline{N}_2$, unde $\overline{N}_1=(1,-1,2)$ şi $\overline{N}_2=(1,2,0)$. Obţinem $\overline{v}=-4\overline{i}+2\overline{j}+3\overline{k}$. Punctul

$M_0\,(1,-1,0) \in (d)$. Ecuaţiile canonice ale dreptei (d) sunt: $\dfrac{x-1}{-4} = \dfrac{y+1}{2} = \dfrac{z}{3}$.

15. Să se scrie ecuaţiile dreptei care trece prin punctul $A\,(2,-5,3)$ şi:
a) este paralelă cu dreapta $d_1)$ $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-3}{-2} = \dfrac{z+7}{4}$;
b) este paralelă cu axa Oy;
c) este paralelă cu dreapta $d_2)$ $\begin{cases} 3x - y + 2z + 1 = 0 \\ 3x + 4y - z + 12 = 0 \end{cases}$.
Rezolvare: a) Direcţia dreptei este aceeaşi cu a dreptei $d_1)$, adică $\overline{v}_1 = (1,-2,4)$, astfel că deducem ecuaţiile $\dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y+5}{-2} = \dfrac{z-3}{4}$.
b) Vectorul director al dreptei Oy este $\overline{j}(0,0,1)$, astfel că obţinem dreapta $\dfrac{x-2}{0} = \dfrac{y+5}{1} = \dfrac{z-3}{0}$.
c) Vectorul director al dreptei $d_2)$ este $\overline{v}_2 = \overline{N}_1 \times \overline{N}_2$, unde $\overline{N}_1 = (3,-1,2)$ şi $\overline{N}_2 = (3,4,-1)$. Obţinem $\overline{v}_2 = (-7,9,15)$, deci ecuaţiile dreptei sunt $\dfrac{x-2}{-7} = \dfrac{y+5}{9} = \dfrac{z-3}{15}$.

16. Se dau punctul $M\,(1,2,-1)$, dreapta $d)$ $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-1}{-1} = \dfrac{z}{3}$ şi planul $P)$ $x+y+z-1=0$. Să se determine:
(i) ecuaţiile dreptei care trece prin M şi este perpendiculară pe planul (P);
(ii) ecuaţiile dreptei prin M, paralelă cu dreapta $d)$;
(iii) ecuaţia planului care trece prin M şi este perpendicular pe dreapta (d);
(iv) distanţa de la M la planul $P)$;
(v) distanţa de la M la dreapta $d)$;
(vi) ecuaţia planului ce trece prin M şi conţine dreapta $d)$;
(vii) unghiul dintre dreapta $d)$ şi planul $P)$.
Rezolvare: (i) Vectorul director al dreptei căutate (δ_1) este vectorul normal al planului $(P) : \overline{v}_{\delta_1} = \overline{N}_P = \overline{i} + \overline{j} + \overline{k}$. Atunci dreapta (δ_1) are

ecuaţiile: $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z+1}{1}$.

(ii) Vectorul director al dreptei (δ_2) este $\overline{v}_{\delta_2}=\overline{v}_d=2\overline{i}-\overline{j}+3\overline{k}$. Dreapta (δ_2) are ecuaţiile: $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{-1}=\dfrac{z+1}{3}$.

(iii) Vectorul normal al planului (π_1) perpendicular pe (d) este $\overline{N}_{\pi_1}=\overline{v}_d=2\overline{i}-\overline{j}+3\overline{k}$. Atunci, planul (π_1) are ecuaţia: $2(x-1)-(y-2)+3(z+1)=0$, adică $2x-y+3z+3=0$.

(iv) $dist\,(M,P)=\dfrac{|1+2+-1-1|}{\sqrt{1^2+2^2+(-1)^2}}=\dfrac{1}{\sqrt{6}}$.

(v) Punctul $M_0\,(1,1,0)\in(d)$, $\overrightarrow{M_0M}=\overline{j}-\overline{k}$ şi $\overrightarrow{M_0M}\times\overline{v}_d=2\overline{i}-2\overline{j}-2\overline{k}$. Atunci $dist\,(M,d)=\dfrac{\left\|\overrightarrow{M_0M}\times\overline{v}_d\right\|}{\|\overline{v}\|}=\dfrac{2\sqrt{3}}{\sqrt{14}}$.

(vi) Vectorul normal al planului (π_2) este $\overline{N}_{\pi_2}=\overrightarrow{M_0M}\times\overline{v}_d$. Ecuaţia planului (π_2) este: $x-1-(y-2)-(z+1)=0$, adică $x-y-z=0$.

(vii) Fie φ unghiul dintre dreapta $d)$ şi planul $P)$ şi ϕ unghiul dintre $\overline{v}_d$ şi $\overline{N}_P$. Avem

$$\cos\phi=\frac{\overline{v}_d\cdot\overline{N}_P}{\|\overline{v}_d\|\,\left\|\overline{N}_P\right\|}=\frac{4}{\sqrt{14}\cdot\sqrt{3}}.$$

Pe de altă parte, $\cos\phi=\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\varphi\right)=\sin\varphi$. Deci, $\sin\varphi=\dfrac{4}{\sqrt{14}\cdot\sqrt{3}}$.

17. Se dau punctul $M\,(1,2,3)$, dreapta $d)$ $\dfrac{x-2}{-3}=\dfrac{y+3}{4}=\dfrac{z}{1}$ şi planul $P)$ $x-2y-2z=0$. Să se determine:
(i) coordonatele proiecţiei punctului M pe dreapta $d)$;
(ii) coordonatele simetricului lui M faţă de dreapta $d)$;
(iii) coordonatele proiecţiei punctului M pe planul $P)$;
(iv) coordonatele simetricului lui M faţă de planul $P)$.

Rezolvare: (i) Aflăm mai întâi ecuaţia planului prin M perpendicular pe dreapta (d): $-3(x-1)+4(y-2)+(z-3)=0$, adică $-3x+4y+z-8=0$. Coordonatele proiecţiei M_1 a punctului M pe dreapta (d) se află rezolvând sistemul:

$$\begin{cases} \dfrac{x-2}{-3} = \dfrac{y+3}{4} = \dfrac{z}{1} \\ -3x + 4y + z - 8 = 0. \end{cases}$$

Obţinem $M_1(-1, 1, 1)$.

(ii) Fie M_2 simetricului lui M faţă de dreapta (d). Punctul M_1 este mijlocul segmentului MM_2 şi găsim $M_2(-3, 0, -1)$.

(iii) Fie M_3 proiecţia punctului M pe planul (P). Aflăm ecuaţiile dreptei prin M perpendiculară pe planul (P) : $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-2}{-2} = \dfrac{z-3}{-2}$. Coordonatele punctului M_3 se află rezolvând sistemul:

$$\begin{cases} x - 2y - 2z = 0 \\ \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-2}{-2} = \dfrac{z-3}{-2}. \end{cases}$$

Obţinem $M_3(2, 0, 1)$.

(iv) Fie M_4 simetricului lui M faţă de planul (P). Punctul M_3 este mijlocul segmentului MM_4 şi găsim $M_4(3, -2, -1)$.

18. Fie punctul $M(-1, 2, 1)$. Să se afle coordonatele simetricului lui M faţă de punctul $M'(-1, -2, 3)$, ecuaţia planului prin M paralel cu planul yOz, distanţa de la M la planul xOz şi ecuaţia planului prin M care conţine axa Ox.

    Rezolvare: Fie $M''(x'', y'', z'')$ simetricul punctului M faţă de punctul M'. Atunci $x'' = 2x' - x = -1$, $y'' = 2y' - y = -6$, $z'' = 2z' - z = 5$. Am găsit $M''(-1, -6, 5)$. Ecuaţia planului prin M paralel cu planul yOz este $x + 1 = 0$. Distanţa $dist\,(M, xOz) = 2$ şi ecuaţia planului prin M care conţine axa Ox este: $y - 2z = 0$.

19. Se consideră dreapta $d)$ $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y}{3} = \dfrac{z-7}{-1}$ şi planul $P)$ $2x - y + z - 2 = 0$.

    i) Să se arate că dreapta $d)$ este paralelă cu planul $P)$.

ii) Să se calculeze distanţa de la dreapta $d)$ la planul $P)$.

iii) Să se determine ecuaţiile proiecţiei dreptei $d)$ pe planul $P)$ şi ecuaţiile simetricei dreptei $d)$ faţă de planul $P)$.

Rezolvare: (i) Avem $\overline{v} = 2\overline{i} + 3\overline{j} - \overline{k}$, $\overline{N} = 2\overline{i} - \overline{j} + \overline{k}$ şi $\overline{v} \cdot \overline{N} = 0$, deci dreapta (d) este paralelă cu planul (P).

(ii) Fie $M_0(1,0,7) \in (d)$. Deoarece dreapta (d) este paralelă cu planul (P),

$$dist\,(d,P) = dist\,(M_0,P) = \frac{|2+7-2|}{\sqrt{6}} = \frac{7}{\sqrt{6}}.$$

(iii) Găsim coordonatele proiecţiei $M_1(x_1,y_1,z_1)$ a punctului M_0 pe planul (P). Ecuaţiile proiecţiei dreptei (d) pe planul (P) vor fi

$$\frac{x-x_1}{2} = \frac{y-y_1}{3} = \frac{z-z_1}{-1}.$$

Găsim apoi coordonatele simetricului $M_2(x_2,y_2,z_2)$ al punctului M_0 faţă de planul (P). Ecuaţiile simetricei dreptei (d) faţă de planul (P) vor fi

$$\frac{x-x_2}{2} = \frac{y-y_2}{3} = \frac{z-z_2}{-1}.$$

20. Fiind date punctul $A(1,2,3)$ şi dreapta $d)$ $\begin{cases} x-y-1=0 \\ y-z-2=0 \end{cases}$, să se determine:

a) paralela prin A la dreapta $d)$ şi planul determinat de cele două drepte paralele;

b) simetrica dreptei $d)$ faţă de planul xOy.

Rezolvare: a) Dreapta $d)$ va avea vectorul director $\overline{v} = \overline{N_1} \times \overline{N_2}$, $\overline{N_1}$ şi $\overline{N_2}$ fiind normalele celor două plane, deci $\overline{v} = \overline{i} + \overline{j} + \overline{k}$. Astfel, paralela prin A la dreapta $d)$ va avea ecuaţiile $x-1 = y-2 = z-3$. Din fascicolul de plane ce trece prin dreapta $d)$, $\lambda(x-y-1) + \mu(y-z-2) = 0$ alegem pe acela ce trece prin punctul A, adică $3x - 5y + 2z + 1 = 0$.

b) Intersecţia dreptei $d)$ cu planul xOy este punctul $B(3,2,0)$, iar simetricul punctului $C\,(1,0,-2)$ (aparţinând dreptei d)) faţă de planul xOy este $D\,(1,0,2)$. Dreapta căutată are ecuaţiile $x-1=y=2-z$.

21. Fiind date punctele $A\,(1,2,3)$ şi $B\,(3,1,2)$, se cere:

a) să se arate că triunghiul OAB este isoscel şi să se scrie ecuaţiile dreptei AB;

b) ecuaţia planului ce conţine triunghiul OAB şi ecuaţiile perpendicularei pe acest plan prin centrul de greutate al triunghiului;

c) ecuaţiile planelor prin A paralele cu planele de coordonate precum şi ecuaţiile paralelelor prin A cu axele de coordonate.

Rezolvare: a) $dist\,(O,A)=dist\,(O,B)=\sqrt{14}$, ecuaţiile dreptei AB sunt $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{-1}=\dfrac{z-3}{-1}$.

b) Folosind ecuaţia planului prin trei puncte necoliniare obţinem $x+7y-5z=0$. Coordonatele centrului de greutate G fiind $(4/3,1,5/3)$, ecuaţiile perpendicularei cerute sunt $\dfrac{x-4/3}{1}=\dfrac{y-1}{7}=\dfrac{z-5/3}{-5}$.

c) Ecuaţiile planelor sunt $x=1$ (paralel cu zOy), $y=2$ şi respectiv $z=3$. Paralelele la axe sunt $x=1$, $y=2$ (paralelă cu Oz), $y=2$, $z=3$ şi respectiv $z=3$, $x=1$.

22. Se consideră planul $P)$ $x+y+2z-14=0$ şi dreapta $d)$ $x-1=\dfrac{y-2}{2}=z-3$. Să se determine simetrica dreptei $d)$ faţă de planul $P)$ şi unghiul format de cele două drepte.

Rezolvare: Intersecţia dreptei $d)$ cu planul $P)$ dă punctul $A\,(2,4,4)$. Proiecţia punctului $B\,(1,2,3)$, aparţinând dreptei $d)$, pe planul $P)$ este punctul $C\,(11/6,17/6,14/3)$, iar simetricul lui B faţă de acest punct este $E\,(8/3,11/3,19/3)$. Ecuaţiile dreptei căutate, determinată de punctele A şi E sunt $\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y-4}{-1}=\dfrac{z-4}{7}$. Unghiul dreptei cu planul fiind dat de relaţia $\sin\varphi=\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\varphi\right)=\dfrac{5}{6}$, unghiul cerut este $\alpha=2\arcsin\dfrac{5}{6}$.

23. Fiind date punctele $A\,(1,0,0)$, $B\,(0,2,0)$, $C\,(0,0,-3)$ şi dreapta $d)$ $2x-1=3y=z$, se cer:

a) planul $P)$ determinat de cele trei puncte, cosinusurile directoare ale normalei sale şi distanţa de la origine la acest plan;

b) unghiul axei Oz cu planul $P)$, simetricul lui $P)$ faţă de origine şi planul $Q)$ paralel cu $P)$ şi care împarte distanţa între origine şi acest plan în raportul $1/2$;

c) ecuaţia planului $R)$ ce trece prin centrul de greutate al triunghiului ABC şi este perpendicular pe $d)$ şi simetrica dreptei $d)$ faţă de origine.

Rezolvare: a) Scriem ecuaţia planului prin tăieturi: $P)$ $x+\frac{1}{2}y-\frac{1}{3}z-1=0$. Cosinusurile directoare sunt: $\cos\alpha=\frac{6}{7}$, $\cos\beta=\frac{3}{7}$, $\cos\gamma=-\frac{2}{7}$, iar distanţa de la origine la planul $P)$ este: $dist(O,P)=\frac{6}{7}$.

b) Avem $\varphi=\arcsin\frac{6}{7}$; $x+\frac{1}{2}y-\frac{1}{3}z+1=0$; $Q)$ $6x+3y-2z+1=0$.

c) Centrul de greutate al triunghiului ABC este: $G\,(1/3,2/3,-1)$, $\overline{v}=3\overline{i}+2\overline{j}+6\overline{k}$ şi $R)$ $9x+6y+18z+11=0$; $2x+1=3y=z$.

24. Fiind date dreptele $d_1)$ $x-1=2-y=\frac{z+2}{2}$ şi $d_2)$ $\begin{cases} 2x-z-1=0 \\ 2y+z+3=0 \end{cases}$, să se afle:

a) distanţa dintre cele două drepte şi planul determinat de ele, dacă există;

b) simetricul punctului $A\,(2,-1,2)$ faţă de dreapta $d_1)$, proiecţia dreptei $d_2)$ pe planul xOy şi unghiul acesteia cu axa Oy.

Rezolvare: a) Deoarece un vector director al dreptei $d_2)$ este $\overline{v_2}=2\overline{i}-2\overline{j}+4\overline{k}=2\overline{v_1}$, cele două drepte sunt paralele. Alegând punctul $B\,(0,-1,-1)$ pe $d_2)$ obţinem $dist\,(d_1,d_2)=\frac{5}{\sqrt{3}}$. ($\overrightarrow{CB}=-\overline{i}-3\overline{j}+\overline{k}$). Din fascicolul de plane ce trece prin $d_2)$, adică $\lambda\,(2x-z-1)+\mu\,(2y+z+3)=0$, îl alegem pe acela care trece prin puctul $A\,(1,2,-2)$, adică $5x-3y-4z=0$.

b) Proiecţia punctului A pe dreapta d_1), adică punctul $C\,(3,0,2)$, se află la intersecţia planului $P)$ $x-y+2z-7=0$ (plan ce trece prin A şi este perpendicular pe d_1)) cu această dreaptă. Simetricul lui A faţă de C este $D\,(4,1,2)$. Intersecţia dreptei d_2) cu planul xOy este punctul $E\,(1/2,-3/2,0)$, iar proiecţia lui B pe acelaşi plan este $F\,(0,-1,0)$. Dreapta căutată are ecuaţiile $x+y+1=0,\ z=0$. Vectorul director al axei Oy fiind $\overline{j}\,(0,1,0)$, unghiul căutat este $\varphi=\arccos\left(-1/\sqrt{6}\right)$.

25. Fiind date punctele $A\,(1,2,3)$, $B\,(2,3,4)$, vectorii $\overline{a}=\overline{i}+\overline{j}-\overline{k}$, $\overline{b}=\overline{i}-\overline{j}$ şi planul $P)$ $y=0$, să se determine:
a) vectorul $\overrightarrow{AB}$, ecuaţiile paralelei prin origine la vectorul $\overline{b}$ şi planul mediator al segmentului AB.
b) vectorul $\overline{v}$ paralel cu planul $P)$ pentru care $\overline{v}\times\overline{b}=\overline{a}$.
c) simetricul punctului A faţă de planul $P)$, unghiul format de $\overrightarrow{AB}$ cu planul $P)$, planul $Q)$ ce trece prin A şi este paralel cu vectorii $\overline{a}$ şi $\overline{b}$.
Rezolvare:a) $\overrightarrow{AB}=\overline{i}+\overline{j}+\overline{k}$, paralela prin origine la vectorul $\overline{b}$ are ecuaţiile $x=-y$, $z=0$, iar planul mediator al segmentului AB, adică planul trece prin punctul $C\,(3/2,5/2,7/2)$, mijlocul segmentului AB, are ecuaţia $x+y+z-15/2=0$.
b) Notând $\overline{v}=x\overline{i}+y\overline{j}+z\overline{k}$, din relaţia dată obţinem $z=1$ şi $x+y=1$. Din condiţia de paralelism cu planul $P)$, adică $\overline{v}\cdot\overline{N}=0$ rezultă $y=0$ şi deci $\overline{v}=\overline{i}+\overline{k}$.
c) Simetricul lui A faţă de planul $P)$ este punctul $D\,(1,-2,3)$, iar unghiul format de AB cu planul $P)$ este $\varphi=\arcsin 1/\sqrt{3}$. Planul $Q)$ are ecuaţia $x+y+2z-9=0$.

26. Fiind date punctele $A\,(a,1,0)$, $B\,(b,0,2)$, $C\,(0,1,3)$ şi $D\,(1,1,4)$, să se determine:
a) paralela prin A la Ox, planul prin B perpendicular pe $\overrightarrow{CD}$ şi unghiul vectorilor $\overrightarrow{CB}$ şi $\overrightarrow{CD}$.

b) valorile lui a şi b pentru ca vectorii $\{\overrightarrow{CA},\ \overrightarrow{CB},\ \overrightarrow{CD}\}$ să formeze o bază, iar pentru $a \neq -3$ şi $b = 0$ să se determine volumul tetraedrului $ABCD$.

Rezolvare: a) Ecuaţiile paralelei prin A la Ox sunt $y - 1 = 0$, $z = 0$, vectorul $\overrightarrow{CD} = \bar{i} + \bar{k}$, iar planul prin B perpendicular pe $\overrightarrow{CD}$ are ecuaţia $x + z - b - 2 = 0$. Unghiul vectorilor $\overrightarrow{CD}$ şi $\overrightarrow{CB} = b\bar{i} - \bar{j} - \bar{k}$ este $\varphi = \arccos{(b-1)} / \sqrt{2\left(b^2+2\right)}$.

b) Vectorii $\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{CD}$ şi $\overrightarrow{CA} = a\bar{i} - 3\bar{k}$ formează o bază dacă $a \neq -3$. Volumul tetraedrului este $\mathcal{V} = \dfrac{1}{6}\left|(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CD})\right| = \dfrac{1}{6}\left|a+3\right|.$

27. Fiind date punctele $A(1,0,0)$, $B(0,1,0)$ şi vectorii $\bar{a} = \bar{i} + \bar{j}$ şi $\bar{b} = \bar{k}$, să se afle:

a) ecuaţia planului prin A paralel cu vectorii $\bar{a}$ şi $\bar{b}$, simetrica dreptei AB faţă de Oz şi unghiul acesteia cu Ox;

b) versorul $\bar{v}$ perpendicular pe $\overrightarrow{AB}$ şi satisfăcând ecuaţia $\bar{v} \times \bar{a} = \bar{b}$.

Rezolvare: a) Planul căutat are ecuaţia $x - y - 1 = 0$, iar simetrica lui AB faţă de Oz, $x + y + 1 = 0$, $z = 0$ trece prin punctele $A'(-1,0,0)$ şi $B'(0,-1,0)$. Unghiul lui $\overrightarrow{AB} = -\bar{i} + \bar{j}$ cu Ox este $\varphi = \dfrac{3\pi}{4}$.

b) Întrucât $\bar{b} \cdot \bar{a} = 0$, sistemul $\bar{v} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$, $\bar{v} \times \bar{a} = \bar{b}$ admite soluţia $\bar{i} + \bar{j}$, iar versorul acestuia este $\left(\bar{i} + \bar{j}\right) / \sqrt{2}$.

28. Să se determine ecuaţia dreptei care trece prin punctul $A(1,0,7)$, este paralelă cu planul $3x - y + 2z - 15 = 0$ şi intersectează dreapta $\dfrac{x-1}{4} = \dfrac{y-3}{2} = \dfrac{z}{1}$.

Rezolvare: O dreaptă prin punctul A are ecuaţiile

$$\frac{x-1}{l} = \frac{y}{m} = \frac{z-7}{n}.$$

Condiţia de paralelism cu planul dat este $3l - m + 2n = 0$, iar condiţia de intersecţie (coplanaritate) cu dreapta dată este

$$\begin{vmatrix} 0 & 3 & -7 \\ 4 & 2 & 1 \\ l & m & n \end{vmatrix} = 0.$$

Din aceste două condiţii determinăm parametrii directori ai dreptei şi găsim ecuaţiile dreptei căutate:

$$\frac{x-1}{68} = \frac{y}{70} = \frac{z-7}{-67}.$$

29. Fiind date punctele $A(1,2,3)$, $B(2,3,a)$ şi $C(3,4,b)$, să se determine:
a) ecuaţiile dreptei OA, condiţia de coplanaritate a dreptelor OA şi CB, iar pentru $a = b = 0$ perpendiculara lor comună;
b) planul determinat de punctele O, A şi B pentru $a = 0$, aria triunghiului OAB şi versorul $\overline{u}$ perpendicular pe $\overrightarrow{OA}$ şi paralel cu xOy.
Rezolvare: a) Ecuaţiile dreptelor OA şi CB sunt $\dfrac{x}{1} = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z}{3}$ respectiv $\dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y-3}{1} = \dfrac{z-a}{b-a}$, iar condiţia de coplanaritate a acestora este $b - 2a + 3 = 0$. Direcţia perpendicularei comune fiind $\overline{v} = \overline{v_1} \times \overline{v_2} = -3\overline{i}+3\overline{j}-\overline{k}$, ecuaţiile acesteia sunt $11x+8y-9z = 0$ şi $x-y-6z+1 = 0$.
b) Planul determinat de cele trei puncte este $9x - 6y + z = 0$, iar aria triunghiului OAB este $\mathcal{A} = \dfrac{1}{2}\left\|\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB}\right\| = \sqrt{118}$. Un vector $\overline{v}$ paralel cu Oy are forma $x\overline{i} + y\overline{j}$ care din condiţia de ortogonalitate cu $\overrightarrow{OA} = \overline{i} + 2\overline{j} + 3\overline{k}$ se reduce la $-2\overline{i} + \overline{j}$. Problema admite două soluţii $\dfrac{1}{\sqrt{5}}\left(-2\overline{i} + \overline{j}\right)$ şi $\dfrac{1}{\sqrt{5}}\left(2\overline{i} - \overline{j}\right)$.

30. Fiind date punctele $A(1,0,0)$, $B(0,1,1)$, $C(\alpha,0,\beta)$ şi $O(0,0,0)$ cu α, $\beta \in \mathbb{R}$, să se determine:
a) ecuaţiile dreptei $d)$ ce trece prin A şi este paralelă cu BC, ecuaţiile planelor prin O paralele cu AB şi valorile lui α şi β pentru ca dreptele OA şi BC să fie coplanare;

b) simetrica dreptei BC faţă de punctul O, planul mediator al segmentului BC şi versorul normalei la acest plan;

c) simetricul lui C faţă de planul OAB şi un versor $\overline{v}$ paralel cu xOy şi perpendicular pe AB.

Rezolvare: a) $\overrightarrow{BC} = \alpha\overline{i} - \overline{j} + (\beta - 1)\overline{k}$, iar ecuaţiile dreptei $d)$ sunt $\dfrac{x-1}{\alpha} = \dfrac{y}{-1} = \dfrac{z}{\beta - 1}$, $\overrightarrow{AB} = -\overline{i} + \overline{j} + \overline{k}$ iar normala la planele căutate este $\overline{N} = (\lambda + \mu)\overline{i} + \lambda\overline{j} + \mu\overline{k}$ $(\overline{N} \cdot \overrightarrow{AB} = 0)$. Planele căutate au ecuaţia $(\lambda + \mu)x + \lambda y + \mu z = 0$. Din condiţia de coplanaritate a celor patru puncte rezultă $\beta = 0$ şi $\alpha \in \mathbb{R}$.

b) Simetricele lui B şi C faţă de origine fiind $B'(0, -1, -1)$ şi $C'(-\alpha, 0, -\beta)$, dreapta căutată are ecuaţiile $\dfrac{x}{-\alpha} = \dfrac{y+1}{1} = \dfrac{z+1}{1-\beta}$; mijlocul segmentului BC fiind punctul $D(\alpha/2, 1/2, (\beta+1)/2)$, ecuaţia planului mediator acesteia este $\alpha x - y + (\beta - 1)z - \left(\alpha^2 + \beta^2 - 2\right)/2 = 0$; versorul normalei la plan este $\overline{n} = \left(\alpha\overline{i} - \overline{j} + (\beta - 1)\overline{k}\right)/\sqrt{\alpha^2 + (\beta - 1)^2 + 1}$.

c) Planul determinat de punctele O, A şi B fiind $P)$ $y - z = 0$, intersecţia sa cu perpendiculara prin C pe el $d)$ $x - \alpha = 0$, $y + z - \beta = 0$ este punctul $C'(\alpha, \beta/2, \beta/2)$. Simetricul căutat are coordonatele $(\alpha, \beta, 0)$; din condiţia ca $\overline{v}$ paralel cu xOy avem $\overline{v} = \alpha\overline{i} + \beta\overline{j}$, iar din $\overline{v}$ perpendicular pe $\overrightarrow{AB}$ rezultă $\beta = -\alpha$. Prin urmare există doi versori cu proprietăţile cerute $\overline{v}_0 = \left(\overline{i} - \overline{j}\right)/\sqrt{2}$ şi $\overline{v}_0 = \left(-\overline{i} + \overline{j}\right)/\sqrt{2}$.

31. Se dau dreapta $d)$ $x = y = z$ şi planul $P)$ $x + 2y + z - 5 = 0$ şi se cer:

a) unghiul dreptei $d)$ cu planul $P)$, ecuaţia planului $Q)$ ce conţine $d)$ şi este perpendicular pe $P)$ şi simetrica dreptei $d)$ faţă de planul $P)$;

b) ecuaţiile planelor paralele cu $P)$ la distanţa de două unităţi de aceasta;

c) planul $R)$ prin Ox şi paralel cu $d)$ şi simetrica dreptei $d)$ faţă de axa Oy.

Rezolvare: a) Avem $\overline{v} = \overline{i} + \overline{j} + \overline{k}$ şi $\overline{N} = \overline{i} + 2\overline{j} + \overline{k}$, deci $\varphi =$

arcsin $\left(2\sqrt{2}/3\right)$. Originea aparţine planului Q) şi $\overline{N}_Q \perp \overline{v}$, $\overline{N}_Q \perp \overline{N}$. Astfel obţinem Q) $x - z = 0$. Simetrica dreptei d) faţă de planul P) are ecuaţiile: $x - 5/4 = (y - 5/4)/5 = z - 5/4$.

b) Cele două plane căutate au ecuaţiile: $x + 2y + z - 5 + 2\sqrt{6} = 0$, respectiv $x + 2y + z - 5 - 2\sqrt{6} = 0$.

c) Un plan prin Ox are ecuaţia $By + Cz = 0$ şi fiind paralel cu d) obţinem R) $y - z = 0$. Simetrica dreptei d) faţă de axa Oy are ecuaţiile: $x = -y = z$.

32. Se dau dreapta d) $x - y - 1 = 0$, $2x - z - 2 = 0$ şi punctul $M(1, 0, 1)$ şi se cer:

a) planul P) ce trece prin M şi este perpendicular pe d) şi distanţele de la M la dreapta d) şi la planul yOz;

b) simetricul punctului M faţă de dreapta d) şi ecuaţiile paralelei prin M la axa Ox.

Rezolvare: a) Direcţia lui d) fiind dată de vectorul $\overline{v} = \overline{i} + \overline{j} + 2\overline{k}$, planul P) are ecuaţia $x + y + 2z - 3 = 0$; $dist(M, d) = 1/\sqrt{3}$, $dist(M, yOz) = 1$.

b) Simetricul punctului M faţă de dreapta d) este $M'(5/3, 2/3, 1/3)$, iar paralela prin M la axa Ox are ecuaţiile $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y}{0} = \dfrac{z-1}{0}$, adică $y = z - 1 = 0$.

33. Să se determine parametrul α astfel ca dreptele d_1) $\dfrac{x}{2} = y = z$ şi d_2) $x - 1 = y - 2 = z/\alpha$ să fie concurente. Pentru α obţinut să se scrie ecuaţia planului determinat de cele două drepte.

Rezolvare: Sistemul format cu ecuaţiile celor două drepte este compatibil dacă $\alpha = 1/3$. În acest caz ecuaţia planului căutat este $2x - y - 3z = 0$.

34. Se dau dreptele $d_1)\ \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+1}{1} = \dfrac{z}{-2}$ şi $d_2)\ x + 2z - 1 = 0$, $y + 2z + 1 = 0$. Se cere să se arate că sunt concurente, să se scrie ecuaţiile bisectoarelor unghiurilor şi să se scrie ecuaţia planului determinat de acestea.

Rezolvare: Avem $M_1(1,-1,0) \in d_1) \cap d_2)$; vectorii directori ai bisectoarelor sunt $\overline{u}_1 = \overline{v}_1/\left\|\overline{v}_1\right\| + \overline{v}_2/\left\|\overline{v}_2\right\| = -\overline{j}/3 - \overline{k}/3$ şi $\overline{u}_2 = \overline{v}_1/\left\|\overline{v}_1\right\| - \overline{v}_2/\left\|\overline{v}_2\right\| = 4\overline{i}/3 + \overline{j} - \overline{k}$, iar ecuaţiile acestora $x - 1 = 0$, $y - z + 1 = 0$, respectiv $(x-1)/4 = (y+1)/3 = (1-z)/3$. Planul lor are ecuaţia $3x - 2y + 2z - 5 = 0$.

35. Arătaţi că dreptele $d_1)\ x - 1 = 2 - y = (z+1)/3$ şi $d_2)\ x + y - 1 = 0$, $3y + z - 3 = 0$ sunt coplanare şi scrieţi ecuaţia planului determinat de ele.

Rezolvare: Avem $\overline{v}_1 = \overline{v}_2 = \overline{i} - \overline{j} + 3\overline{k}$, deci dreptele sunt paralele. Ecuaţia planului determinat de acestea este: $x - 2y - z + 2 = 0$.

36. Fie dreptele

$$\frac{x-7}{1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-9}{-1} \text{ şi } \frac{x-3}{-7} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{3}.$$

Scrieţi ecuaţiile perpendicularei lor comune.

Rezolvare: Punctele prin care trec cele două drepte sunt: $M_1(7,3,9)$ şi respectiv $M_2(3,1,1)$. Vectorii directori corespunzători sunt: $\overline{v}_1 = \overline{i} + 2\overline{j} - \overline{k}$ şi respectiv $\overline{v}_2 = -7\overline{i} + 2\overline{j} + 3\overline{k}$. Perpendiculara comună a celor două drepte este intersecţia următoarelor plane: planul determinat de M_1 şi vectorii $\overline{v}_1$, $\overline{v}_1 \times \overline{v}_2$ şi planul determinat de M_2 şi vectorii $\overline{v}_2$ şi $\overline{v}_1 \times \overline{v}_2$. Calculăm

$$\overline{v}_1 \times \overline{v}_2 = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ 1 & 2 & -1 \\ -7 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 8\overline{i} + 4\overline{j} + 16\overline{k}.$$

Atunci, ecuaţiile celor douăplane sunt:

$$\begin{vmatrix} x-7 & y-3 & z-9 \\ 1 & 2 & -1 \\ 8 & 4 & 16 \end{vmatrix} = 0 \text{ şi } \begin{vmatrix} x-3 & y-1 & z-1 \\ -7 & 2 & 3 \\ 8 & 4 & 16 \end{vmatrix} = 0.$$

Efectuând calculele obţinem ecuaţiile perpendicularei comune a celor două drepte:

$$\begin{cases} 3x - 2y - z - 6 = 0 \\ 5x + 34y - 11z - 38 = 0. \end{cases}$$

37. Fiind date dreptele $d_1)\ x = z = 0$ şi $d_2)\ \begin{cases} x - 1 = 0 \\ y = z \end{cases}$, să se determine:

a) ecuaţiile perpendicularei comune $d)$ şi distanţa dintre cele două drepte (lungimea perpendicularei comune);

b) ecuaţiile dreptei $d_1)$ pe planele ce determină dreapta $d_2)$ precum şi unghiul diedru al acestor plane;

c) unghiul dreptelor $d_1)$ şi $d_2)$ şi proiecţia lui $d_2)$ pe planul yOz.

Rezolvare: a) Direcţiile dreptelor $d_1)$ şi $d_2)$ fiind date de $\overline{v}_1 = \overline{j}$ şi $\overline{v}_2 = \overline{N}_1 \times \overline{N}_2 = \overline{j} + \overline{k}$ ($\overline{N}_1$ şi $\overline{N}_2$ fiind normalele planelor ce o determină) un vector director al perpendicularei comune este $\overline{v} = \overline{v}_1 \times \overline{v}_2 = \overline{i}$. Perpendiculara comună o vom prezenta ca intersecţie de două plane. Astfel, din fascicolele de plane ce trec prin $d_1)$ respectiv $d_2)$ adică $P_f)$ $\lambda x + \mu z = 0$ şi $Q_f)\ \lambda (x-1) + \mu (y-z) = 0$ alegem planele paralele cu $\overline{v}$ adică $z = 0$, $y - z = 0$ sau, mai simplu, $y = z = 0$. Întrucât dreapta $d)$ intersectează cele două drepte în $O(0,0,0)$ şi $A(1,0,0)$, distanţa căutată este $OA = 1$.

b) Din fascicolul de plane $P_f)\ \lambda x + \mu z = 0$ alegem planele proiectante pe planele ce determină $d_2)$. Acestea fiind $z = 0$ respectiv $x = 0$, dreptele căutate au ecuaţiile $z = 0$, $x - 1 = 0$ şi $x = 0$, $y - z = 0$. De asemenea, $\cos\varphi = \overline{N}_1 \cdot \overline{N}_2 / \left(\left\|\overline{N}_1\right\| \left\|\overline{N}_2\right\|\right) = 0$ şi deci $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$.

c) $\cos\omega = 1/\sqrt{2}$ şi deci $\omega = \dfrac{\pi}{4}$. Folosind din nou fascicolul de plane ce trece prin d_2), obţinem $x = 0$, $y - z = 0$.

38. Fiind dată dreapta $d)\begin{cases} x + z = 0 \\ y - z - 1 = 0 \end{cases}$, să se determine:

a) proiecţia dreptei d) pe planul xOy şi simetrica ei faţă de origine;

b) perpendiculara comună a dreptelor d) şi Ox, distanţa dintre aceste drepte şi planul prin d) şi origine.

Rezolvare: a) Din fascicolul de plane determinate de dreapta d) se alege acela perpendicular pe xOy astfel că ecuaţiile proiecţiei sunt $z = 0$, $x + y - 1 = 0$. Simetricele punctelor $A\,(0, 1, 0)$ şi $B\,(1, 0, -1)$ (aparţinând dreptei d)) faţă de origine fiind $A'\,(0, -1, 0)$ şi $B'\,(-1, 0, 1)$, dreapta căutată are ecuaţiile $-x = y + 1 = z$.

b) Direcţia dreptei d) fiind dată de vectorul $\overline{v} = -\overline{i} + \overline{j} + \overline{k}$, iar a axei Ox de versorul $\overline{i}$, perpendiculara lor comună va fi paralelă cu vectorul $\overline{w} = \overline{v} \times \overline{i} = \overline{j} - \overline{k}$. Perpendiculara comună va fi din nou prezentată ca intersecţie de două plane ce trec respectiv prin d) şi Ox şi sunt paralele cu $\overline{w}$, adică $y + z = 0$, $2x - 1 = 0$. Distanţa între cele două drepte este $CD = 1/\sqrt{2}$, unde $C\,(1/2, 0, 0)$ şi $D\,(1/2, 1/2, -1/2)$ sunt punctele de intersecţie ale perpendicularei comune cu Ox şi respectiv d). Din fascicolul de plane ce trec prin d), adică $\lambda\,(x + z) + \mu\,(y - z - 1) = 0$ îl alegem pe $x + z = 0$ adică cel ce trece prin origine.

39. Arătaţi că dreptele d_1) $x - 1 = y = z$ şi d_2) $x - z - 3 = 0$, $y = 0$ sunt necoplanare şi determinaţi ecuaţia perpendicularei lor comune.

Rezolvare: Avem $\overline{v}_1 = (1, 1, 1)$, $\overline{v}_2 = (1, 0, 1)$ şi deci dreptele nu sunt paralele. În plus, $\left(\overrightarrow{M_1M_2}, \overline{v}_1, \overline{v}_2\right) = 2 \neq 0$, unde $M_1\,(1, 0, 0) \in d_1$) şi $M_2\,(3, 0, 0) \in d_2$). Perpendiculara comună are ecuaţiile $y = 0$, $x + z - 1 = 0$.

40. Să se scrie ecuaţia planului ce conţine dreapta

$$(d)\quad \begin{cases} x - y - 1 = 0 \\ x - z + 1 = 0 \end{cases}$$

şi este perpendicular pe planul determinat de punctele $A\,(2,0,0)$, $B\,(0,-1,0)$, $C\,(0,0,-1)$.

Rezolvare: Folosind ecuaţia planului prin tăieturi $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}-1=0$, cu $a=2$, $b=-1$ şi $c=-1$, ecuaţia planului determinat de punctele A, B, C este $x-2y-2z-2=0$. Pentru ca planul căutat să conţină dreapta dată, el trebuie să aparţină fascicolului de plane

$$\lambda\,(x-y-1)+\mu\,(x-z+1)=0.$$

Condiţia de perpendicularitate a celor două plane ne dă $\lambda+\mu=0$ sau $\mu=-\lambda$. Înlocuind în ecuaţia fascicolului, obţinem

$$y-z+2=0.$$

41. Se dau planul $P)$ $x-y+z-3=0$ şi punctul $A\,(1,1,0)$ şi se cer:

a) planul ce trece prin A şi este paralel cu $P)$ şi coordonatele simetricului lui A faţă de $P)$;

b) fascicolul de plane ce trece prin A şi este perpendicular pe planul $P)$.

Rezolvare: a) Un plan paralel cu $P)$ are ecuaţia $x-y+z+\lambda=0$ şi dacă trece prin A obţinem $\lambda=0$. Deci, planul căutat are ecuaţia: $x-y+z=0$. Simetricului lui A faţă de $P)$ este: $A'\,(3,-1,2)$.

b) Axa fascicolului $x-z-1=0$, $x+z-1=0$ trece prin A şi este perpendiculară pe $P)$, iar ecuaţia fascicolului este $\lambda\,(x-z-1)+\mu\,(y+z-1)=0$.

42. Determinaţi α, $\beta\in\mathbb{R}$ astfel încât planele $P_1)$ $2x-y+3z-1=0$ şi $P_2)$ $x+2y-z+\beta=0$ şi $P_3)$ $x+\alpha y-\beta z+10=0$ să îndeplinească

condiţiile:

a) să aibă un singur punct comun;

b) să treacă printr-o dreaptă dată;

c) să se intersecteze după trei drepte paralele distincte.

Rezolvare: a) Sistemul format de ecuaţiile celor trei plane este compatibil determinat dacă $\beta - \alpha + 1 \neq 0$. b) $\alpha = \sqrt{106}/2$, $\beta = \left(-2 + \sqrt{106}\right)/2$ şi $\alpha = -\sqrt{106}/2$, $\beta = \left(-2 - \sqrt{106}\right)/2$. c) $\alpha = \beta + 1$ şi $\beta \neq \left(-2 \pm \sqrt{106}\right)/2$.

43. Să se determine ecuaţia planului $Q)$ perpendicular pe $P)$ $x - y + 2z - 5 = 0$ şi care îl intersectează pe acesta după o dreaptă aparţinând planului xOy. Să se scrie apoi sub formă parametrică ecuaţiile dreptei de intersecţie a celor două plane $P)$ şi $Q)$.

Rezolvare: Planul $Q)$ îl alegem din fascicolul de plane $\lambda\,(x - y + 2z - 5) + \mu z = 0$ determinat de $P)$ şi xOy. Astfel, din condiţia de ortogonalitate $\overline{N}_P \cdot \overline{N}_Q = 0$ rezultă $Q)$ $x - y - z - 5 = 0$. Şi deci dreapta de intersecţie $x - y + 2z - 5 = 0$, $x - y - z - 5 = 0$ sau echivalent $x - y - z - 5 = 0$, $z = 0$. O reprezentare parametrică a acestei drepte este $x = t + 5$, $y = t$, $z = 0$.

44. Se consideră trei drepte, date respectiv prin ecuaţiile:

$$(d_1)\ \begin{cases} x = -y + 1 \\ y = 5z + 1 \end{cases},\quad (d_2)\ x - 1 = \frac{2y - 1}{3} = \frac{z}{3},\quad (d_3)\ \begin{cases} x - y - z - 1 = 0 \\ 2x + y + 3z = 0 \end{cases}.$$

Să se scrie ecuaţia planului (P) determinat prin condiţiile:

(i) conţine dreapta (d_1) şi

(ii) proiecţiile ortogonale ale dreptelor (d_2) şi (d_3) pe planul (P) sunt drepte paralele.

Rezolvare: Planul (P) face parte din fascicolul de plane determinat de $x = -y + 1$ şi $y = 5z + 1$, deci ecuaţia lui este: $x + y - 1 + \lambda(y - 5z - 1) = 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Proiecţia ortogonală a lui (d_2) pe planul (P) se află în planul care conţine (d_2) şi normala la planul (P). Ecuaţia acestui plan este

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-\frac{1}{2} & z \\ 1 & 3 & 3 \\ 1 & 1+\lambda & -5\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

45. Să se scrie ecuaţia planului paralel cu planul $P)$ $x+y+2z=0$ şi care trece prin punctul de intersecţie al planelor $2x+y-z-2=0$, $x-3y+z+1=0$ şi $x+y+z-3=0$.

Rezolvare: Folosind ecuaţia snopului de plane ce trec prin punctul de intersecţie al planelor date, adică $\lambda P_1+\mu P_2+\nu P_3=0$, se obţine planul $x+y+2z-4=0$.

Capitolul 9

Sfera

1. Să se scrie ecuaţiile sferelor:

   a) cu centrul în punctul $C(-1,2,1)$ şi raza 3;

   b) cu centrul în punctul $C(1,0,3)$ şi care trece prin punctul $A(1,2,-1)$.

   Rezolvare: a) Ecuaţia sferei este: $(x+1)^2+(y-2)^2+(z-1)^2-9=0$;

   b) Ecuaţia sferei este cu centrul în punctul C este: $(x-1)^2+y^2+(z-3)^2-R^2=0$. Din faptul că A aparţine sferei rezultă că raza sferei este: $R = dist\,(C,A) = \sqrt{(1-1)^2+(2-0)^2+(-1-3)^2} = \sqrt{20}$, deci sfera cerută are ecuaţia: $(x-1)^2+y^2+(z-3)^2-20=0$.

2. Fiind date punctele $A(3,2,-1)$ şi $B(-3,2,7)$, să se determine:

   a) sfera de diametru AB şi punctele de intersecţie ale acesteia cu axa Oy;

   b) planele tangente sferei obţinute în punctele de intersecţie găsite.

   Rezolvare: a) Centrul sferei este mijlocul segmentului AB, adică punctul $C(0,2,3)$, iar raza este $R = dist\,(A,C) = 5$. Deci, ecuaţia sferei căutate este $x^2+(y-2)^2+(z-3)^2-25=0$. Pentru a determina punctele de intersecţie ale acesteia cu axa Oy se rezolvă sistemul

$$\begin{cases} x^2+(y-2)^2+(z-3)^2-25=0 \\ x=0 \\ z=0 \end{cases}$$

şi se obţin $D(0,6,0)$ şi $E(0,-2,0)$;

b) Planul tangent în punctul D este: $P)$ $4y-3z-24=0$, iar cel tangent în punctul E are ecuaţia: $Q)$ $4y+3z+8=0$.

3. Fiind date punctele $A(3,1,2)$ şi $B(-1,3,0)$, să se determine sfera de diametru AB şi planul tangent sferei în punctul A.

   Rezolvare: Sfera de diametru AB are centrul $C(1,2,1)$ şi raza $R=\sqrt{6}$, deci are ecuaţia: $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-1)^2-6=0$, iar planul tangent în punctul A este: $(x-1)(3-1)+(y-2)(1-2)+(z-1)(2-1)-24=0$, adică $2x-y+z-7=0$.

4. Se consideră sfera $S)$ $x^2+y^2+z^2+2x-4y+4z=0$ şi dreapta $d)$ $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z}{-2}$. Să se determine:

   a) centrul şi raza sferei $S)$;

   b) punctele de intersecţie ale sferei cu dreapta $d)$;

   c) planele tangente sferei în punctele de intersecţie găsite.

   Rezolvare: a) Scriem ecuaţia sferei sub formă de pătrate $S)$ $(x+1)^2+(y-2)^2+(z+2)^2-9=0$, deci centrul sferei este $C(-1,2,-2)$, iar raza $R=3$.

   b) Rezolvând sistemul

$$\begin{cases} (x+1)^2+(y-2)^2+(z+2)^2-9=0 \\ \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z}{-2} \end{cases}$$

   obţinem punctele $A(2,2,-2)$ şi $B(1,1,0)$.

   c) Planul tangent sferei în punctul A este: $P_1)$ $(x+1)(2+1)+(y-2)(2-$

$2) + (z+2)(-2+2) - 9 = 0$, adică $3x - 6 = 0$, sau $x - 2 = 0$. Planul tangent în punctul B este: $P_2)\ 2x - y + 2z - 1 = 0$.

5. Fiind dată sfera $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 8 = 0$, să se determine ecuaţia sub formă de pătrate, centrul, raza, precum şi planul tangent sferei în punctul $A(0,2,2)$.

   Rezolvare: Ecuaţia sub formă de pătrate este: $(x-1)^2 + y^2 + z^2 - 9 = 0$, deci centrul sferei este $C(1,0,0)$ şi raza $R = 3$. Planul tangent sferei în punctul A (care aparţine sferei) are ecuaţia: $x - 2y - 2z + 8 = 0$.

6. Să se scrie ecuaţia planului tangent sferei $S)\ x^2 + y^2 + z^2 - x + 2y + z - 5 = 0$ în punctul $M_0(2,1,-1)$.

   Rezolvare: Mai întâi vom scrie ecuaţia sferei $S)$ sub formă de pătrate, anume $S)\ \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + (y+1)^2 + \left(z + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{13}{2} = 0$. Observăm că punctul M_0 aparţine sferei $S)$. Atunci, ecuaţia planului tangent în punctul M_0 la sferă va fi $\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(2 - \frac{1}{2}\right) + (y+1)(1+1) + \left(z + \frac{1}{2}\right)\left(-1 + \frac{1}{2}\right) - \frac{13}{2} = 0$, adică $\frac{3}{2}x + 2y - \frac{1}{2}z - \frac{11}{2} = 0$, sau $3x + 4y - z - 11 = 0$.

7. Să se scrie ecuaţia sferei $S)$ de centru $C(-1,2,-3)$ şi tangentă planului $P)\ 2x - y - 2z + 4 = 0$.

   Rezolvare: Ecuaţia sferei $S)$ cu centrul în C este: $(x+1)^2 + (y-2)^2 + (z+3)^2 - R^2 = 0$, unde raza $R = dist(C,P)$. Folosind formula de calcul a distanţei de la un punct la un plan avem $dist(C,P) = \frac{|2\cdot(-1) - 2 - 2\cdot(-3) + 4|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + (-2)^2}} = \frac{6}{3} = 2$. Deci ecuaţia sferei $S)$ este: $(x+1)^2 + (y-2)^2 + (z+3)^2 - 4 = 0$.

8. Arătaţi că planul $P)\ y - 6 = 0$ este tangent sferei $S)\ (x-1)^2 + (y-1)^2 +$

$(z-2)^2 - 25 = 0$.

Rezolvare: Sfera $S)$ are centrul $C(1,1,2)$ şi raza $R=5$. Planul $P)$ este tangent sferei $S)$ dacă $dist\,(C,P)=R$. Făcând calculul, obţinem $dist\,(C,P)=\dfrac{|1-6|}{1}=5=R$.

9. Să se determine ecuaţia sferei $S)$ de centru $C(2,-1,1)$ tangentă planului $P)$ $2x-y-2z+6=0$. Să se scrie apoi ecuaţia planului tangent sferei $S)$ în punctul $M(1,1,3)$.

   Rezolvare: Calculăm raza sferei $R=dist\,(C,P)=3$, deci $S)$ $(x-2)^2+(y+1)^2+(z-1)^2-9=0$ şi planul tangent sferei în punctul M (de pe sferă) este: $-x+2y+2z-7=0$.

10. Să se determine centrul şi raza sferei $S)$ $x^2+y^2+z^2-6x+4y+z-\dfrac{3}{4}=0$ şi să se scrie ecuaţia planului tangent la sferă în punctul $M\left(1,1,\dfrac{1}{2}\right)$. Să se verifice dacă planul $P)$ $3x-2y-z+\dfrac{1}{2}=0$ este tangent la sferă.

    Rezolvare: Ecuaţia sferei sub formă de pătrate este: $S)$ $(x-3)^2+(y+2)^2+\left(z+\dfrac{1}{2}\right)^2-14=0$, deci $C\left(3,-2,-\dfrac{1}{2}\right)$ şi raza $R=\sqrt{14}$. Planul tangent la sferă în punctul M are ecuaţia $-2x+3y+z-\dfrac{3}{2}=0$. Se obţine $dist\,(C,P)=\sqrt{14}=R$, deci planul $P)$ este tangent sferei.

11. Fiind date punctele $A(1,3,0)$, $B(1,3,4)$, să se determine: ecuaţia sferei de diametru AB, planul tangent sferei în punctul B şi ecuaţiile planelor tangente acesteia paralele cu planul xOy.

    Rezolvare: Centrul sferei este mijlocul segmentului AB, adică punctul $C(1,3,2)$, iar raza este $R=dist\,(A,C)=2$. Deci sfera cerută are ecuaţia $(x-1)^2+(y-3)^2+(z-2)^2-4=0$. Planul tangent în punctul B are ecuaţia $(x-1)(1-1)+(y-3)(3-3)+(z-2)(4-2)-4=0$, adică $z=4$. Planele paralele cu xOy au ecuaţia $z=\lambda$ şi dacă punem condiţia ca acestea să fie tangente sferei obţinem planele $z=0$, $z=4$.

12. Fiind date sfera $S)$ $x^2+y^2+z^2-2x-4y-6z=0$ şi punctul $A(1,1,1)$, să se determine:

a) centrul şi raza sferei $S)$;

b) raza şi ecuaţiile cercului de centru A care se află la intersecţia dintre sferă cu un plan convenabil ales;

Rezolvare: a) Centrul sferei $S)$ este $C(1,2,3)$, iar raza $R=\sqrt{14}$.
b) Calculăm vectorul $\overrightarrow{AC}=\overline{j}+2\overline{k}$ şi norma sa $\left\|\overrightarrow{AC}\right\|=\sqrt{1+4}=\sqrt{5}<R$, deci A este un punct interior sferei. Planul căutat are vectorul normal $\overline{N}=\overrightarrow{AC}$ şi conţine punctul A, deci are ecuaţia $y+2z-3=0$. În concluzie, ecuaţiile cercului sunt

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2-2x+4y-6z=0 \\ y+2z-3=0 \end{cases},$$

iar raza sa este: $r=\sqrt{R^2-AC^2}=3$.

13. Se consideră sfera $S)$ $x^2+y^2+z^2-2x-4y-6z-6=0$, planul $P)$ $x+y+z+3=0$, dreapta $d)$ $x=y=z-1$ şi punctul $M(1,1,1)$. Se cer:

a) ecuaţiile planelor paralele cu planul $P)$ şi tangente sferei $S)$;

b) ecuaţia sferei cu centrul în M şi tangentă dreptei $d)$.

Rezolvare: a) Un plan paralel cu planul $P)$ are ecuaţia $P_\lambda)$ $x+y+z+\lambda=0$ $(\lambda\in\mathbb{R})$. Punem condiţia ca $P_\lambda)$ să fie tangent sferei $S)$ adică $dist(C,P_\lambda)=R$, unde $C(1,2,3)$ este centrul sferei şi $R=\sqrt{20}$ (raza sferei). Obţinem $|1+2+3+\lambda|/\sqrt{3}=2\sqrt{5}$, sau $|6+\lambda|=2\sqrt{15}$, adică $\lambda=-6\pm2\sqrt{15}$. Deci am obţinut planele $x+y+z-6\pm2\sqrt{15}=0$.
b) Fie $A(0,0,1)$ un punct de pe dreapta $d)$ şi $\overline{v}=\overline{i}+\overline{j}+\overline{k}$ vectorul director al dreptei. Raza sferei căutate este $R'=dist(M,d)=\left\|\overrightarrow{MA}\times\overline{v}\right\|/\left\|\overline{v}\right\|=\sqrt{2}/\sqrt{3}$. Deci ecuaţia sferei este $S')$ $(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2-2/3=0$.

14. Fiind date sfera $S)$ $x^2+y^2+z^2+2x-4y-6z-2=0$, planul $P)$

$x+2y+2z-4=0$, dreapta $d)$ $\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y-2}{0}=\dfrac{z+2}{2}$ şi punctul $A(1,1,2)$, să se determine:

a) centrul şi raza sferei S), precum şi raza şi ecuaţiile cercului de centru A care se află la intersecţia dintre sferă cu un plan convenabil ales;

b) ecuaţiile planelor paralele cu planul P) şi tangente sferei S);

c) ecuaţia sferei cu centrul în A şi tangentă dreptei d).

Rezolvare: a) Centrul sferei este $C(-1,2,3)$ şi raza $R=4$. Avem $\overrightarrow{AC}=-2\overline{i}+\overline{j}+\overline{k}$, deci cercul căutat are ecuaţiile:

$$\mathcal{C})\begin{cases} x^2+y^2+z^2+2x-4y-6z-2=0 \\ -2x+y+z-1=0 \end{cases},$$

iar raza sa este $r=\sqrt{R^2-AC^2}=\sqrt{10}$.

b) Planele paralele cu planul P) şi tangente sferei S) sunt: $x+2y+2z+3=0$ şi $x+2y+2z-21=0$.

c) Punctul $M_0(-1,2,-2)$ aparţine dreptei d), iar $\overline{v}=\overline{i}+2\overline{k}$ este vector director al dreptei. Atunci $dist\,(A,d)=1$, deci ecuaţia sferei căutate este $(x-1)^2+(y-1)^2+(z-2)^2-1=0$.

15. Să se determine punctele de intersecţie ale dreptei $d)$ $x-5=\dfrac{y+3}{\sqrt{6}}=\dfrac{z-1}{3}$ cu sfera $S)$ $x^2+y^2+z^2-10x+6y-2z+19=0$, precum şi ecuaţiile planelor tangente sferei şi paralele cu planul $P)$ $3x-y-z+1=0$.

Rezolvare: Scriind sfera sub forma $(x-5)^2+(y+3)^2+(z-1)^2-16=0$ şi intersectând-o cu dreapta d), obţinem punctele $M_1\left(6,\sqrt{6}-3,4\right)$ şi $M_2\left(4,-\sqrt{6}-3,-2\right)$. Cerând planelor $P_\lambda)$ $3x-y-z+\lambda=0$, $\lambda\in\mathbb{R}$, să fie tangente sferei S) obţinem $\lambda=-17\pm4\sqrt{11}$.

16. Să se scrie ecuaţia sferei cu centrul pe dreapta $d)$ $\dfrac{x}{1}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z+2}{1}$, având raza $\sqrt{5}$ şi care trece prin punctul $A(0,2,-1)$.

Rezolvare: Dacă notăm centrul sferei $C(a,b,c)$, atunci ecuaţia sferei este $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=5$. Ştim că C se găseşte pe dreapta $d)$, deci avem $\frac{a}{1}=\frac{b-1}{-1}=\frac{c+2}{1}$. De asemenea, A aparţine sferei, adică $a^2+(2-b)^2+(-1-c)^2=5$. Rezultă un sistem în coordonatele lui C şi rezolvându-l obţinem soluţiile $a=1$, $b=0$, $c=-1$, respectiv $a=-1$, $b=2$, $c=-3$. Sferele cerute sunt $(x-1)^2+y^2+(z+1)^2=5$ şi respectiv $(x+1)^2+(y-2)^2+(z+3)^2=5$.

17. Să se determine ecuaţia sferei $S)$ care are centrul pe dreapta $d)$ $x-1=y+2=\frac{z+1}{2}$, raza 2 şi este tangentă planului $P)$ $2x-2y+z-1=0$.
Rezolvare: Centrul sferei $C\,(a,b,c)$ aparţine dreptei $d)$ şi deci $a-1=b+2=\frac{c+1}{2}$. Punând condiţia $dist\,(C,P)=|2a-2b+c-1|\,/3=2$ obţinem sferele $S_1)$ $(x-2)^2+(y+1)^2+(z-1)^2-4=0$ respectiv $S_2)$ $(x+4)^2+(y+7)^2+(z+11)^2-4=0$.

18. Să se găsească ecuaţia sferei care este tangentă în punctul $M\,(2,3,4)$ la planul $P_1)$ $x+y+z-9=0$ şi care are centrul în planul $P_2)$ $7x-4y+5z-14=0$.
Rezolvare: Centrul sferei $C\,(a,b,c)$ se află la intersecţia planului $P_2)$ cu dreapta $d)$ ce trece prin M şi este perpendiculară pe planul $P_1)$. Ecuaţia dreptei $d)$ este $\frac{x-2}{1}=\frac{y-3}{1}=\frac{z-4}{1}$, deci coordonatele lui C vor fi soluţia sistemului

$$\begin{cases} 7a-4b+5c-14=0 \\ a-2=b-3=c-4 \end{cases}.$$

Se obţine $a=1$, $b=2$, $c=3$, adică $C\,(1,2,3)$. Raza sferei este $R=dist\,(M,C)=\sqrt{3}$. Ecuaţia sferei este $S)$ $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2-3=0$.

19. Să se determine ecuaţia sferei ce trece prin punctele $A\,(1,2,3)$, $B\,(3,-4,5)$

şi are centrul pe dreapta

$$d)\begin{cases} x+y+z=5 \\ 2x+5y+3z=10 \end{cases}.$$

Rezolvare: Centrul sferei $C(a,b,c)$ se găseşte la intersecţia dreptei $d)$ cu planul mediator $P)$ al segmentului AB, adică planul ce trece prin mijlocul segmentului AB şi are ca vector normal $\overline{N}=\overrightarrow{AB}$. Mijlocul segmentului AB este $M(2,-1,4)$, iar $\overline{N}=2\overline{i}-6\overline{j}+2\overline{k}$ şi atunci ecuaţia planului $P)$ este $x-3y+z-9=0$. Astfel obţinem sistemul

$$\begin{cases} a+b+c=5 \\ 2a+5b+3c=10 \\ a-3b+c-9=0 \end{cases},$$

deci $C(3,-1,3)$. Raza este $R=dist(A,C)=\sqrt{4+9}=\sqrt{13}$. Ecuaţia sferei va fi $S)\ (x-3)^2+(y+1)^2+(z-3)^2-13=0$.

20. Să se scrie ecuaţia sferei $S)$ cu centrul în $C(4,5,-2)$, ştiind că este tangentă sferei $S')\ x^2+y^2+z^2-4x-12y+36=0$, iar sfera $S')$ se află în interiorul sferei $S)$.

    Rezolvare: Ecuaţia sferei $S')$ se mai scrie sub forma $(x-2)^2+(y-6)^2+z^2-4=0$, deci are centrul $C'(2,6,0)$ şi raza $R'=2$. Raza sferei căutate este $R=R'+\left\|\overrightarrow{CC'}\right\|=2+\sqrt{4+1+4}=5$. Obţinem ecuaţia $S)$ $(x-4)^2+(y-5)^2+(z+2)^2-25=0$.

21. Se cere ecuaţia sferei $S)$ ce trece prin cercul $\mathcal{C})\ x^2+y^2-11=0,\ z=0$ şi este tangentă planului $P)\ x+y+z-5=0$.

    Rezolvare: Deoarece sfera $S)$ trece prin cercul $\mathcal{C})$, centrul sferei va fi $C(0,0,\alpha)$. Punem condiţia $R^2=d^2+r^2$, unde R este raza sferei $S)$, $r=\sqrt{11}$ este raza cercului $\mathcal{C})$, iar $d=dist(C,C')=|\alpha|$, $C'(0,0,0)$ fiind centrul cercului $\mathcal{C})$. Sfera este tangentă planului $P)$, deci $R=$

$dist\,(C,P) = |\alpha - 5|\,/\sqrt{3}$. Avem $\alpha^2 + 11 = \left(|\alpha - 5|\,/\sqrt{3}\right)^2$. Se obţin soluţiile: $\alpha_1 = -4$, $\alpha_2 = -1$. Deci, sferele corespunzătoare sunt $x^2 + y^2 + (z+4)^2 - 27 = 0$, respectiv $x^2 + y^2 + (z+1)^2 - 12 = 0$.

22. Să se determine ecuaţiile cercului $\mathcal{C})$ care are centrul $C\,(1,6,0)$ şi se află la intersecţia sferei $S)$ $(x-4)^2 + (y-7)^2 + (z+1)^2 - 36 = 0$ cu un plan convenabil ales. Care este raza acestui cerc?

    Rezolvare: Întrucât distanţa de la C la centrul sferei $C'\,(4,7,-1)$ este $d = \sqrt{11}$, mai mică decât raza sferei $R = 6$, punctul C este interior sferei. Cercul $\mathcal{C})$, aflându-se la intersecţia sferei $S)$ cu planul prin C perpendicular pe $\overrightarrow{CC'} = 3\bar{i} + \bar{j} - \bar{k}$, are ecuaţiile

$$\begin{cases} (x-4)^2 + (y-7)^2 + (z+1)^2 - 36 = 0 \\ 3x + y - z - 9 = 0 \end{cases}.$$

    Raza cercului este $r = \sqrt{R^2 - d^2} = 5$.

23. Să se determine ecuaţia sferei $S)$ ce trece prin origine şi prin cercul $\mathcal{C})$ $2x + 2y - z + 4 = 0$, $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4y - 4z - 40 = 0$.

    Rezolvare: Distanţa de la centrul sferei la plan fiind mai mică decât raza sferei, familia de sfere ce trece prin cercul $\mathcal{C})$ este dată de $S_\lambda)$ $\lambda(x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4y - 4z - 40) + 2x + 2y - z + 4 = 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Din condiţia ca originea să aparţină sferei, obţinem $\lambda = 1/10$. Astfel, sfera căutată are ecuaţia $x^2 + y^2 + z^2 + 22x + 16y - 6z = 0$.

24. Determinaţi ecuaţia sferei $S)$ tangentă dreptelor $d_1)$ $x = y = z$ şi $d_2)$ $x + y = 5$, $z = 0$ în punctele $A\,(1,1,1)$, respectiv $B\,(3,2,0)$.

    Rezolvare: Centrul sferei se află pe dreapta de intersecţie a planelor $P)$ $x + y + z - 3 = 0$ (plan prin A perpendicular pe $d_1)$) şi $Q)$ $x - y - 1 = 0$ (plan prin B perpendicular pe $d_2)$). Dacă considerăm un punct curent de pe această dreaptă $C_\lambda\,(\lambda, \lambda - 1, 4 - 2\lambda)$, din condiţia

$dist\,(C_\lambda, A) = dist\,(C_\lambda, B)$ obţinem $\lambda = 2$ şi apoi sfera căutată $S)$ $(x-2)^2 + (y-1)^2 + z^2 - 2 = 0$.

25. Arătaţi că planul tangent sferei $S)$ $x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0$ într-un punct arbitrar al acesteia determină pe axele de coordonate segmente având suma inverselor pătratelor lungimilor constantă.

    Rezolvare: Fie $M\,(\alpha, \beta, \gamma)$ un punct de pe sfera $S)$, deci $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = R^2$. Planul tangent sferei $S)$ în punctul M este $P)$ $\alpha x + \beta y + \gamma z - R^2 = 0$. Intersectând acest plan cu axele de coordonate, obţinem punctele $A\,(R^2/\alpha, 0, 0)$, $B\,(0, R^2/\beta, 0)$ şi $C\,(0, 0, R^2/\gamma)$. Prin urmare, $1/OA^2 + 1/OB^2 + 1/OC^2 = \left(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2\right)/R^4 = 1/R^2$.

26. Fiind date punctele $A\,(1, 0, 0)$, $B\,(0, 2, 0)$, $C\,(0, 0, -2)$ şi $D\,(0, 0, 0)$, să se determine:

    a) ecuaţiile parametrice ale sferei ce trece prin cele patru puncte;

    b) ecuaţiile, centrul şi raza cercului ce trece prin punctele A, B şi C.

    Rezolvare: a) $x = 1/2 + 3/2 \sin\theta\cos\varphi$, $y = 1 + 3/2\sin\theta\sin\varphi$, $z = -1 + 3/2\cos\theta$, $\varphi \in [0, 2\pi)$, $\theta \in [0, \pi]$.

    b) $C)$ $x^2+y^2+z^2-x-2y+2z = 0$, $2x+y-z-2 = 0$, $C'\,(1/6, 5/6, -5/6)$ şi $r = 5/2\sqrt{3}$.

27. Să se determine centrul şi raza cercului de intersecţie dintre sferele $S_1)$ $x^2+y^2+z^2-6x+2y-2z+7 = 0$ şi $S_2)$ $x^2+y^2+z^2-2x-4y+2z-3 = 0$.

    Rezolvare: Centrul cercului căutat $C\,(39/17, 1/17, 5/17)$ se află la intersecţia planului radical $P)$ $4x - 6y + 4z - 10 = 0$ cu dreapta $d)$ $(x-1)/2 = (2-y)/3 = (z+1)/2$ ce trece prin centrul sferei $S_2)$ şi este perpendiculară pe planul $P)$; $r = \sqrt{32}/17$.

28. Să se arate că sferele familiei

$$S_{\lambda\mu}) x^2 + y^2 + z^2 - 2\lambda x - 2\mu y \pm 2\sqrt{4 - \lambda^2 - \mu^2} z + 3 = 0,$$

cu $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ şi $\lambda^2 + \mu^2 \leq 4$, sunt tangente la două sfere fixe $S_1)$ şi $S_2)$.

Rezolvare: Sferele de mai sus au razele egale cu unitatea şi centrele $C_{\lambda\mu}\left(\lambda, \mu, \pm\sqrt{4-\lambda^2-\mu^2}\right)$. Cum locul geometric al centrelor lor este sfera $S)$ $x^2+y^2+z^2-4=0$, rezultă că sferele familiei date sunt tangente sferelor $S_1)$ $x^2+y^2+z^2-1=0$ şi $S_2)$ $x^2+y^2+z^2-9=0$.

29. Arătaţi că familia de plane

$$P_{\lambda\mu})\lambda x + \mu y + z - \lambda - 2\mu - 3 \pm 16\sqrt{\lambda^2 + \mu^2 + 1} = 0,$$

cu $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ este tangentă unei sfere fixe $S)$.

Rezolvare: Distanţa de la punctul $C(a, b, c)$ la planele familiei va fi constantă pentru orice λ şi μ numai dacă $a = 1$, $b = 2$, $c = 3$. Prin urmare, planele familiei respective sunt tangente sferei $S)$ $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 - 16 = 0$.

30. Determinaţi suprafaţa generată de o dreaptă în mişcare ce trece prin punctul $A(1, 4, 3)$ şi rămâne tangentă suprafeţei $S)$ $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2-4=0$. Justificaţi geometric rezultatul.

Rezolvare: O dreaptă arbitrară ce trece prin punctul A, adică

$$(x-1)/\lambda = (y-4)/\mu = z-3,$$

va fi tangentă sferei $S)$ dacă sistemul format cu ecuaţiile lor admite soluţie dublă. Cum acest lucru se întâmplă numai dacă $\mu = 0$ rezultă că suprafaţa căutată este planul $y = 4$. Acest lucru se justifică prin faptul că punctul $A \in S)$, iar planul de mai sus este tocmai planul tangent sferei în acest punct.

31. Să se determine ecuaţia familiei de plane ce trec prin punctul $A(0, 4, 3)$ şi sunt tangente sferei $S)$ $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

Rezolvare: Din familia de plane $x\cos\alpha+(y-4)\cos\beta+(z-3)\cos\gamma =$

0 le alegem pe acelea ce se află la distanţa $d = 1$ de origine. Întrucât $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$ rezultă $4\cos\beta + 3\cos\gamma = 1$ şi deci ecuaţia planelor respective este $x\cos\alpha + y\cos\beta \pm z\sqrt{1 - \cos^2\alpha - \cos^2\beta} - 1 = 0$.

Bibliografie

[1] Gh. Atanasiu, Gh. Munteanu, M. Postolache, *Culegere de probleme de algebră liniară, geometrie analitică, diferenţială şi ecuaţii diferenţiale*, Editura ALL, Bucureşti, 1994.

[2] V. T. Borcea, C. I. Davideanu, C. Forăscu, *Probleme de algebră liniară*, Editura "Gh. Asachi" Iaşi, 2000.

[3] A. Cărăuşu, *Linear Algebra*, Editura MATRIX ROM, Bucureşti, 1999.

[4] S. Chiriţă, *Probleme de matematici superioare*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1989.

[5] Gh. Ciobanu, Gh. Slabu, *Algebră liniară, geometrie analitică şi diferenţială, Culegere de probleme*, vol. I şi II, Rotaprint IPI, 1983.

[6] A. Corduneanu, Culegere de probleme, Iaşi, 1984.

[7] I. Crăciun, Gh. Procopiuc, Al. Neagu, C. Fetecău, *Algebră liniară, geometrie analitică şi diferenţială şi programare*, vol. I şi II, Rotaprint IPI, 1984.

[8] V. Cruceanu, *Elemente de algebră liniară şi geometrie*, Centrul de multiplicare Univ. Iaşi, 1971.

[9] C. Fetecău, *Algebră liniară şi geometrie analitică*, Editura Tehnica-Info, Chişinău, 2006.

[10] C. Fetecău, E. Sîrbu, *Probleme de geometrie analitică şi diferenţială*, Rotaprint IPI, 1993.

[11] C. Mihu, *Sisteme de ecuaţii liniare şi forme pătratice*, Editura

Tehnică, Bucureşti, 1985.

[12] V. Murgescu, Georgeta Teodoru, *Algebră liniară şi geometrie analitică*, Rotaprint IPI, 1980.

[13] Al. Neagu, Veronica Borcea, *Probleme de algebră şi ecuaţii diferenţiale*, Rotaprint , 1993.

[14] N. Papaghiuc, C. Călin, *Algebră liniară şi geometrie*, Editura PERFORMANTICA, Iaşi, 2003.

[15] I. Pop, *Culegere de probleme de algebră liniară*, Rotaprint Univ. "Al. I. Cuza" Iaşi, 1982.

[16] Gh. Procopiuc, *Matematică, teorie şi aplicaţii*, Editura Gh. Asachi Iaşi, 2001.

[17] Gh. Procopiuc, N. Ionescu, *Probleme de algebră liniară şi geometrie*, Editura Tehnica-Info, Chişinău, 2002.

[18] C. Udrişte, C. Radu, C. Dicu, O. Mălăncioiu, *Probleme de algebră, geometrie şi ecuaţii diferenţiale*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1982.

[19] E. Vamanu, N. Negoescu, *Culegere de probleme de algebră liniară şi geometrie analitică şi diferenţială*, Rotaprint IPI, 1982.

[20] A. I. Vieru, C. Fetecău, Probleme de algebră liniară şi geometrie analitică, Editura Tehnica - Info, Chişinău, 2006.