

SUBIECTE EXAMEN: ALGEBRĂ

1. Fie vectorii $\overline{f_1} = (1, 0, 1)$, $\overline{f_2} = (-1, -1, 1)$, $\overline{f_3} = (1, 1, 1)$ din \mathbb{R}^3 .

- (a) Arătați că $B = \{\overline{f_1}, \overline{f_2}, \overline{f_3}\}$ formează o bază în \mathbb{R}^3 .
- (b) Determinați componentele vectorului $\overline{x} = (2, 1, 0)$ în această bază B .
- (c) Ortonormați această bază B .

2. Fie aplicația $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dată prin:

$$T(x_1, x_2, x_3) = (-x_1 + 2x_2, -3x_1 + 4x_2, x_3).$$

- (a) Arătați că T este o transformare liniară.
- (b) Scrieți matricea lui T în baza canonică din \mathbb{R}^3 .
- (c) Determinați nucleul și imaginea lui T , defectul și rangul lui T .
- (d) Determinați valorile și vectorii proprii ai lui T .

3. Fie forma pătratică:

$$P : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, P(x_1, x_2, x_3) = 2x_2^2 + 2x_1x_2 + x_1x_3 + \frac{3}{2}x_3^2.$$

Să se determine:

- (a) matricea în baza uzuală din \mathbb{R}^3 ;
- (b) expresia canonică (prin metoda lui Gauss);
- (c) rangul și natura lui P ;
- (d) forma biliniară simetrică din care provine P .

4. Se consideră punctele $A(1, 1, -3)$, $B(2, -1, 1)$, $C(3, 3, 1)$, $D(-1, 4, 2)$. Se cer:

- (a) vectorii \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{AC} și \overrightarrow{BC} , perimetrul triunghiului ABC ;
- (b) produsul vectorial $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$ și aria triunghiului ABC ;
- (c) volumul tetraedrului $ABCD$, lungimea înălțimii din D pe planul ABC ;
- (d) unghiul dintre \overrightarrow{AB} și \overrightarrow{AC} .

5. Produsul mixt a trei vectori. Definiția și expresia analitică.