Facultatea de Hidrotehnică (2016-2017)

Subiecte examen: MATEMATICI SUPERIOARE I

I. a) Să se studieze monotonia şi mărginirea şirului cu termenul general $x_n = \dfrac{1}{2n+1}$, $n \geq 1$.

b) Să se calculeze limitele:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\sqrt{3}+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(\sqrt{3}+\frac{1}{3}\right)\cdot\ldots\cdot\left(\sqrt{3}+\frac{1}{n}\right)}$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n^2+n-2}{n^2+1}\right)^{2n+1}$$

c) Daţi un exemplu de şir divergent mărginit (cu justificare).

II. Se consideră seria:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(1+\sqrt{5}\right)\cdot\left(2+\sqrt{5}\right)\cdot\ldots\cdot\left(n+\sqrt{5}\right)}{n!\cdot n^2}$$

a) Calculaţi $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_{n+1}}{x_n}$, unde x_n este termenul general al seriei.

b) Studiaţi convergenţa seriei.

III. Să se determine $a,b \in \mathbb{R}$ astfel încât funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} 5^{2x} - a, \ x < 0 \\ 2x^2 + bx, \ x \geq 0 \end{cases}$$

să fie derivabilă în $x_0 = 0$.

IV. Se consideră funcţia:

$$f(x,y) = \frac{x}{y}\cdot \operatorname{arctg} \sqrt{x^2y^2+4} + e^{x+\cos y}\cdot \ln\left(x^2y+2xy\right).$$

Să se calculeze:

a) derivatele parţiale de ordinul întâi ale funcţiei f;

b) diferenţiala de ordinul întâi a acestei funcţii;

c) derivatele parţiale de ordinul al doilea ale funcţiei f;

d) diferenţiala de ordinul al doilea a funcţiei f.

V. Fie funcţia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definită prin

$$f(x,y) = x^3 + y^3 + 3xy.$$

Să se determine punctele critice şi punctele de extrem ale funcţiei f.