Facultatea de Hidrotehnică (2017-2018)

SUBIECTE EXAMEN: ALGEBRĂ

1. Fie vectorii $\overline{f_1} = (1, 0, 1)$, $\overline{f_2} = (-1, -1, 1)$, $\overline{f_3} = (1, 1, 1)$ din $\mathbb{R}^3$.
   (a) Arătaţi că $B = \{\overline{f_1}, \overline{f_2}, \overline{f_3}\}$ formează o bază în $\mathbb{R}^3$.
   (b) Determinaţi componentele vectorului $\overline{x} = (2, 1, 0)$ în această bază B.
   (c) Ortonormaţi această bază B.

2. Fie aplicaţia $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dată prin:
$$T(x_1, x_2, x_3) = (-x_1 + 2x_2, -3x_1 + 4x_2, x_3).$$
   (a) Arătaţi că T este o transformare liniară.
   (b) Scrieţi matricea lui T în baza canonică din $\mathbb{R}^3$.
   (c) Determinaţi nucleul şi imaginea lui T, baze în cele două subspaţii vectoriale, defectul şi rangul lui T. Este T injectivă? (justificaţi)
   (d) Determinaţi valorile şi vectorii proprii ai lui T.

3. Fie forma pătratică:
$$P : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ P(x_1, x_2, x_3) = 2x_2^2 + 2x_1x_2 + x_1x_3 + \frac{3}{2}x_3^2.$$
   Să se determine:
   (a) matricea în baza uzuală din $\mathbb{R}^3$;
   (b) expresia canonică (prin metoda lui Gauss);
   (c) rangul şi natura lui P;
   (d) baza canonică şi matricea lui P în baza canonică;
   (e) forma biliniară simetrică din care provine P.

4. Se consideră punctele $A(1, 1, -3), B(2, -1, 1), C(3, 3, 1), D(-1, 4, 2)$. Se cer:
   (a) vectorii $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ şi $\overrightarrow{BC}$, perimetrul triunghiului ABC, coordonatele mijlocului segmentului AB;
   (b) produsul vectorial $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$ şi aria triunghiului ABC;
   (c) volumul tetraedrului $ABCD$, lungimea înălţimii din D pe planul ABC;
   (d) unghiul dintre $\overrightarrow{AB}$ şi $\overrightarrow{AC}$.