

ANEXA. 2

Analiză matematică, AIA

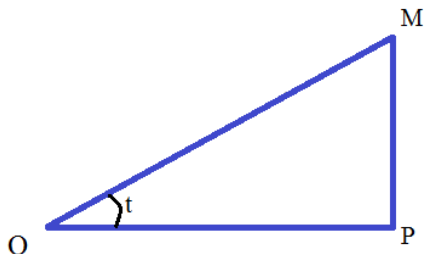
2. TRIGONOMETRIE

2.1. Funcțiile trigonometrice $\cos, \sin$

A se vedea *Trigonometry*, de profesor Eugene Khutoryansky:

<https://www.youtube.com/watch?v=ovLbCvq7FNA&t=16s>

Preliminarii 1.



Fie $\triangle MOP$ dreptunghic și t măsura unghiului POM în grade/ radiani. Se reamintește:
 π radiani ... 180^0 ; $1 \text{ rad} \dots \frac{180^0}{\pi} \simeq 57.3^0$; $1^0 \dots \frac{\pi}{180} \simeq 0.0175 \text{ rad}$.

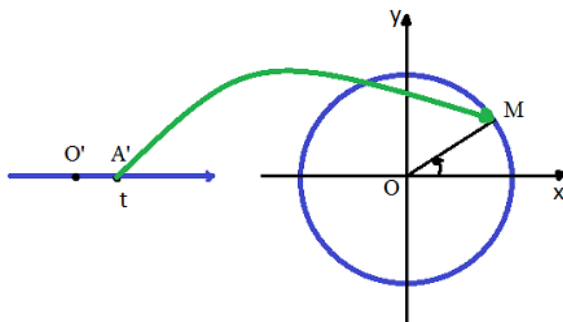
$$\begin{cases} \sin t = \frac{|PM|}{|OM|}; & \operatorname{tg} t = \frac{|PM|}{|OP|}; \\ \cos t = \frac{|OP|}{|OM|}; & \operatorname{ctg} t = \frac{|OP|}{|PM|}. \end{cases}$$

măs. în grade/ radiani	sin	cos	tg	ctg
$0^\circ/0$	0	1	0	$\nexists$ în $\mathbb{R}$
$30^\circ/\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
$45^\circ/\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1
$60^\circ/\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
$90^\circ/\frac{\pi}{2}$	1	0	$\nexists$ în $\mathbb{R}$	0

Preliminarii 2.

Se presupun cunoscute de la ALGA noțiunile din temele "Coordonate în plan" și "Distanța dintre două puncte în plan".

Fie dreapta reală $\mathbb{R}$ și cercul trigonometric $\mathcal{C}((0, 0), 1)$.



Definiție Funcția

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{C}, f(t) = M(x_M, y_M)$$

prin care unui număr real t de pe dreapta reală îi asociem punctul $M(x_M, y_M)$ construit astfel încât unghiul orientat în sens direct $\widehat{xOM}$ (sens trigonometric, al acelor de ceas) să aibă măsura în radiani t se numește *funcția acoperire a cercului unitate*.

Proprietăți

a) Funcția f este periodică, de perioadă principală 2π ,

$$f(t + 2\pi) = f(t), \forall t \in \mathbb{R}.$$

b) Funcția f este surjectivă,

$$\forall M \in \mathcal{C}((0, 0), 1), \exists t \in \mathbb{R} \text{ a.î. } f(t) = M.$$

Definiție. a) Se numește funcția *cosinus* funcția

$$\cos : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \cos t = x_M.$$

b) Se numește funcția *sinus* funcția

$$\sin : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \sin t = y_M.$$

Teoremă. a) Funcțiile $\cos$ și $\sin$ sunt **mărginite**,

$$-1 \leq \cos t \leq 1, \forall t \in \mathbb{R}; -1 \leq \sin t \leq 1, \forall t \in \mathbb{R}.$$

b) $\sin^2 t + \cos^2 t = 1, \forall t \in \mathbb{R}.$

c) Funcțiile $\cos$ și $\sin$ sunt **periodice**, de perioadă principală 2π ,

$$\cos(t + 2\pi) = \cos t, \forall t \in \mathbb{R}; \sin(t + 2\pi) = \sin t, \forall t \in \mathbb{R}.$$

$$\cos(t + 2k\pi) = \cos t, \forall k \in \mathbb{Z}, \forall t \in \mathbb{R}; \sin(t + 2k\pi) = \sin t, \forall k \in \mathbb{Z}, \forall t \in \mathbb{R}.$$

d) Funcția $\cos$ este **pară** pe $\mathbb{R}$ sau pe orice interval simetric centrat în 0 :

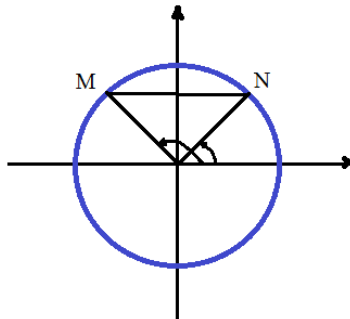
$$\cos(-t) = \cos t, \forall t \in \mathbb{R}.$$

e) Funcția $\sin$ este **impară** pe $\mathbb{R}$ sau pe orice interval simetric centrat în 0 :

$$\sin(-t) = -\sin t, \forall t \in \mathbb{R}.$$

Exemplul 1 (*reducerea la primul cadran*). Să se determine:

a) $\cos \frac{3\pi}{4}, \sin \frac{3\pi}{4}.$



$$\frac{3\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4};$$

Se construiește unghiul orientat $\widehat{xOM}$.

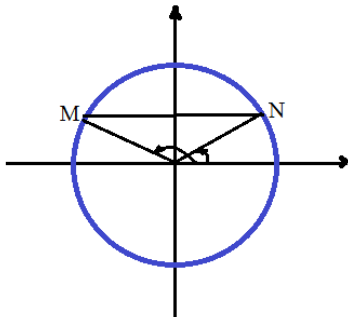
Se observă că M este în cadr. II.

Se construiește N , simetricul lui M față de Oy

$$\cos \frac{3\pi}{4} = x_M = -x_N = -\cos \frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$\sin \frac{3\pi}{4} = y_M = y_N = \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

b) $\cos \frac{5\pi}{6}, \sin \frac{5\pi}{6}.$



$$\frac{5\pi}{6} = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3};$$

Se construiește unghiul orientat $\widehat{xOM}$.

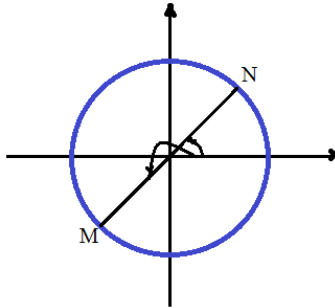
Se observă că M este în cadr. II.

Se construiește N , simetricul lui M față de Oy

$$\cos \frac{5\pi}{6} = x_M = -x_N = -\cos \frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$\sin \frac{5\pi}{6} = y_M = y_N = \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}.$$

c) $\cos \frac{5\pi}{4}, \sin \frac{5\pi}{4}$.



$$\frac{5\pi}{4} = \pi + \frac{\pi}{4};$$

Se construiește unghiul orientat $\widehat{xOM}$.

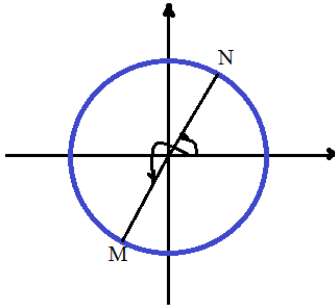
Se observă că M este în cadr. *III*.

Se construiește N , simetricul lui M față de O

$$\cos \frac{5\pi}{4} = x_M = -x_N = -\cos \frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$\sin \frac{5\pi}{4} = y_M = -y_N = -\sin \frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

d) $\cos \frac{4\pi}{3}, \sin \frac{4\pi}{3}$.



$$\frac{4\pi}{3} = \pi + \frac{\pi}{3};$$

Se construiește unghiul orientat $\widehat{xOM}$.

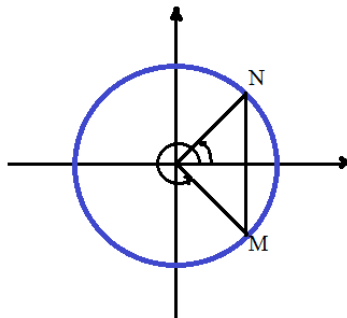
Se observă că M este în cadr. *III*.

Se construiește N , simetricul lui M față de O

$$\cos \frac{4\pi}{3} = x_M = -x_N = -\cos \frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}.$$

$$\sin \frac{4\pi}{3} = y_M = -y_N = -\sin \frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

e) $\cos \frac{7\pi}{4}, \sin \frac{7\pi}{4}$.



$$\frac{7\pi}{4} = \pi + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} = 2\pi - \frac{\pi}{4};$$

Se construiește unghiul orientat $\widehat{xOM}$.

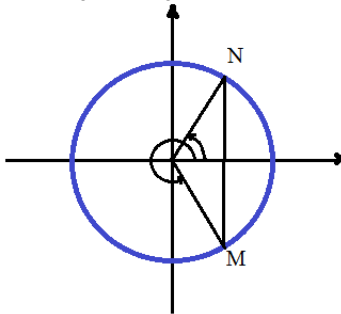
Se observă că M este în cadr. *IV*.

Se construiește N , simetricul lui M față de Ox

$$\cos \frac{7\pi}{4} = x_M = x_N = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$\sin \frac{7\pi}{4} = y_M = -y_N = -\sin \frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

f) $\cos \frac{5\pi}{3}, \sin \frac{5\pi}{3}$.



$$\frac{5\pi}{3} = \pi + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6} = 2\pi - \frac{\pi}{3};$$

Se construiește unghiul orientat $\widehat{xOM}$.

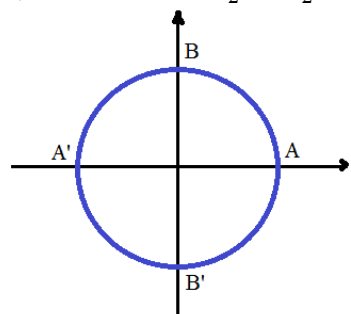
Se observă că M este în cadr. *IV*.

Se construiește N , simetricul lui M față de Ox

$$\cos \frac{5\pi}{3} = x_M = x_N = \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}.$$

$$\sin \frac{5\pi}{3} = y_M = -y_N = -\sin \frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

g) $\cos 0, \sin 0, \cos \frac{\pi}{2}, \sin \frac{\pi}{2}, \cos \pi, \sin \pi, \cos \frac{3\pi}{2}, \sin \frac{3\pi}{2}, \cos 2\pi, \sin 2\pi$.



$$\cos 0 = x_A = 1, \sin 0 = y_A = 0.$$

$$\cos \frac{\pi}{2} = x_B = 0, \sin \frac{\pi}{2} = y_B = 1.$$

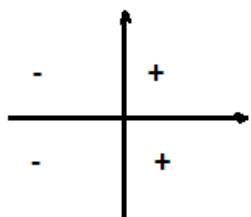
$$\cos \pi = x_{A'} = -1, \sin \pi = y_{A'} = 0.$$

$$\cos \frac{3\pi}{2} = x_{B'} = 0, \sin \frac{3\pi}{2} = y_{B'} = -1.$$

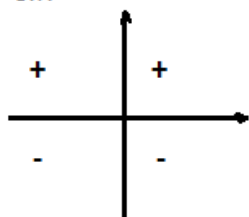
$$\cos 2\pi = x_A = 1, \sin 2\pi = y_A = 0.$$

Observație.

cos



sin



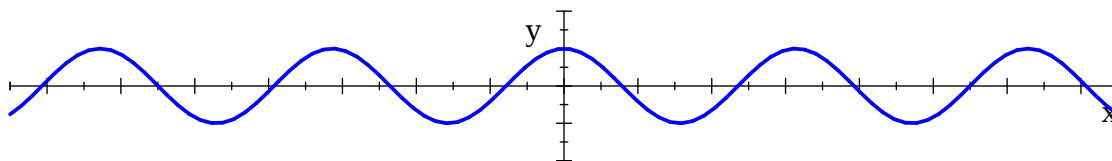
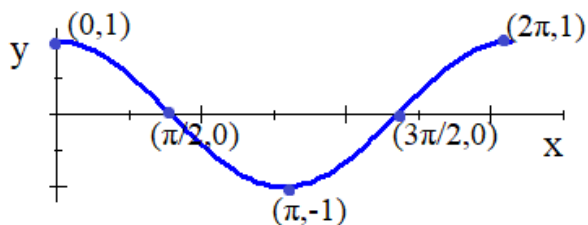
Observație.

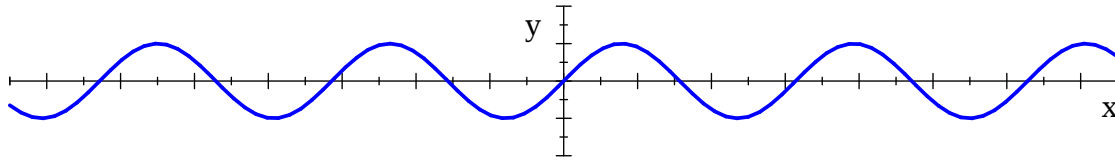
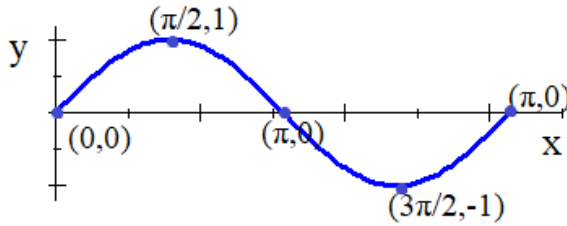
a) $t \in]0, \frac{\pi}{2}[\Rightarrow \begin{cases} \cos t = \sqrt{1 - \sin^2 t} \\ \sin t = \sqrt{1 - \cos^2 t} \end{cases}$; b) $t \in]\frac{\pi}{2}, \pi[\Rightarrow \begin{cases} \cos t = -\sqrt{1 - \sin^2 t} \\ \sin t = \sqrt{1 - \cos^2 t} \end{cases}$;

c) $t \in]\pi, \frac{3\pi}{2}[\Rightarrow \begin{cases} \cos t = -\sqrt{1 - \sin^2 t} \\ \sin t = -\sqrt{1 - \cos^2 t} \end{cases}$; d) $t \in]\frac{3\pi}{2}, 2\pi[\Rightarrow \begin{cases} \cos t = \sqrt{1 - \sin^2 t} \\ \sin t = -\sqrt{1 - \cos^2 t} \end{cases}$.

Grafice (renotând sistemul cartezian de coordonate cu xOy , pentru Anexa 4).

a) $\cos : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$



b) $\sin : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ **Observație** (formule pentru *sume și diferențe* de unghiuri). $\forall a, b \in \mathbb{R}$:

a) $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$; b) $\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$;

c) $\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$; d) $\sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$.

Exemplul 2.

$$\cos \frac{\pi}{12} = \cos \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6} \right) = \cos \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{6} + \sin \frac{\pi}{4} \sin \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}.$$

$$\sin \frac{\pi}{12} = \sin \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6} \right) = \sin \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{6} - \cos \frac{\pi}{4} \sin \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}.$$

Exemplul 3. $\forall t \in \mathbb{R}$:

a) $\cos(\pi - t) = \cos \pi \cos t + \sin \pi \sin t = -\cos t.$

$$\sin(\pi - t) = \sin \pi \cos t - \cos \pi \sin t = \sin t.$$

b) $\cos(\pi + t) = \cos \pi \cos t - \sin \pi \sin t = -\cos t.$

$$\sin(\pi + t) = \sin \pi \cos t + \cos \pi \sin t = -\sin t.$$

c) $\cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = \sin t.$ d) $\sin\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = \cos t.$

Observație (*reducere la primul cadran*). $\forall t \in \mathbb{R}$:

II. $\cos t = \cos(\pi - t)$ $\sin t = \sin(\pi - t)$	I. $\cos t = \text{din tabel}$ $\sin t = \text{din tabel}$
III. $\cos t = -\cos(\pi + t)$ $\sin t = -\sin(\pi + t)$	IV. $\cos t = \cos(2\pi - t)$ $\sin t = -\sin(2\pi - t)$

Exemplul 4 (*unghi dublu, unghi triplu*). $\forall t \in \mathbb{R}$:

a) $\cos(2t) = \cos t \cos t - \sin t \sin t = \cos^2 t - \sin^2 t = 2 \cos^2 t - 1 = 1 - 2 \sin^2 t \Rightarrow$

$$\cos(2t) = \cos^2 t - \sin^2 t = 2 \cos^2 t - 1 = 1 - 2 \sin^2 t.$$

$$\sin(2t) = \sin t \cos t + \cos t \sin t = 2 \sin t \cos t \Rightarrow$$

$$\sin(2t) = 2 \sin t \cos t$$

În plus,

$$\cos^2 t = \frac{1 + \cos 2t}{2}, \sin^2 t = \frac{1 - \cos 2t}{2}.$$

b) $\cos(3t) = \cos 2t \cos t - \sin 2t \sin t = 4 \cos^3 t - 3 \cos t \Rightarrow$

$$\cos(3t) = 4 \cos^3 t - 3 \cos t.$$

$\sin(3t) = \sin 2t \cos t + \cos 2t \sin t = 3 \sin t - 4 \sin^3 t \Rightarrow$

$$\sin(3t) = 3 \sin t - 4 \sin^3 t.$$

În plus,

$$\cos^3 t = \frac{\cos 3t + 3 \cos t}{4}, \quad \sin^3 t = \frac{3 \sin t - \sin 3t}{4}.$$

Observație (transformarea sumelor în produse). $\forall p, q \in \mathbb{R} :$

a) $\sin p + \sin q = 2 \sin \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2};$ b) $\sin p - \sin q = 2 \cos \frac{p+q}{2} \sin \frac{p-q}{2};$

c) $\cos p + \cos q = 2 \cos \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2};$ d) $\cos p - \cos q = -2 \sin \frac{p+q}{2} \sin \frac{p-q}{2}.$

Observație (transformarea produselor în sume). $\forall a, b \in \mathbb{R} :$

a) $\sin a \cos b = \frac{\sin(a+b) + \sin(a-b)}{2};$ b) $\cos a \cos b = \frac{\cos(a+b) + \cos(a-b)}{2};$

c) $\sin a \sin b = \frac{\cos(a-b) - \cos(a+b)}{2}.$

Observație. Se numește *oscilație armonică* orice mișcare descrisă de un parametru de stare de forma "legii sinusului"

$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(t) = A \sin(\omega t + \varphi)$, unde A, ω, φ sunt constante reale date.

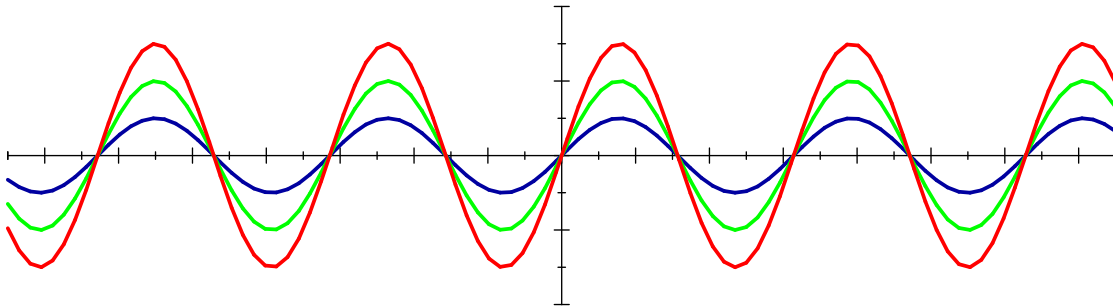
Se poate presupune că $\omega > 0$, deoarece

$$\sin(\omega t + \varphi) = -\sin(-\omega t - \varphi).$$

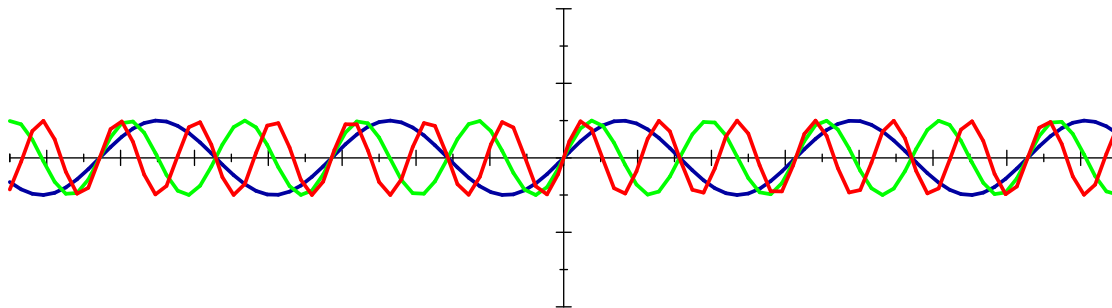
Numărul $A = \max_{t \in \mathbb{R}} |f(t)|$ se numește *amplitudinea oscilației*, iar numărul $T = \frac{2\pi}{\omega}$ se numește *perioada oscilației* (în s). Numărul $\omega = \frac{2\pi}{T}$ se numește *frecvența ciclică, pulsația oscilației* (în rad/s), iar numărul φ *frecvența inițială a oscilației* (în rad).

Amplitudinile oscilațiilor armonice au importanța dată de faptul că energia oscilației depinde de pătratul amplitudinii, iar fazele pentru a observa defazajul dintre diferite oscilații.

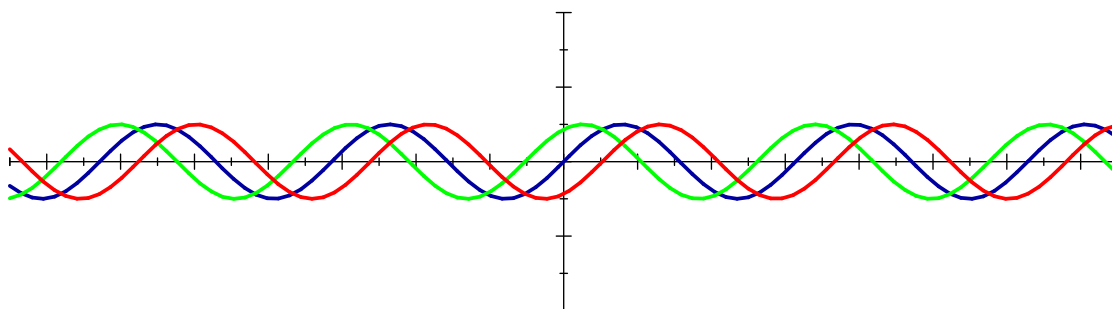
De exemplu, $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(t) = 1 \sin(1t + 0), f(t) = 2 \sin(1t + 0), f(t) = 3 \sin(1t + 0).$



De exemplu, $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(t) = 1 \sin(1t + 0)$, $f(t) = 1 \sin(2t + 0)$, $f(t) = 1 \sin(3t + 0)$.



De exemplu, $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(t) = 1 \sin(1t + 0)$, $f(t) = 1 \sin(1t + \frac{\pi}{3})$, $f(t) = 1 \sin(1t - \frac{\pi}{3})$.



A se vedea *Fourier Transform, Fourier Series, and frequency spectrum*, de profesor Eugene Khutoryansky: <https://www.youtube.com/watch?v=r18Gi8lSkfM>

La EDCO se va studia *ecuația diferențială a oscilațiilor armonice de pulsație ω* ,

$$(*) \quad x''(t) + \omega^2 x(t) = 0, \forall t \in \mathbb{R},$$

și se va arăta că are toate soluțiile de forma

$$x(t) = c_1 \cos(\omega t) + c_2 \sin(\omega t), \forall t \in \mathbb{R}, \forall c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Se pot găsi constantele $A = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}$ și φ din $\tan \varphi = \frac{c_1}{c_2}$ astfel încât

$$c_1 \cos(\omega t) + c_2 \sin(\omega t) = A \sin(\omega t + \varphi), \forall t \in \mathbb{R}.$$

Ecuația modelează *oscilațiile unui resort* ($\omega^2 = \frac{k}{m}$), *oscilațiile mici ale unui pendul matematic* ($\omega^2 = \frac{g}{l}$), *oscilațiile armonice ale unui circuit electric* ($\omega^2 = \frac{1}{LC}$).

2.2. Funcțiile trigonometrice $\cotg$, $\tg$

Definiție. a) Se numește funcția *cotangentă* funcția

$$\cotg : D_1 \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \cotg t = \frac{\cos t}{\sin t}, \text{ unde } D_1 = \mathbb{R} \setminus \{k\pi; k \in \mathbb{Z}\}.$$

b) Se numește funcția *tangentă* funcția

$$\tg : D_2 \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \tg t = \frac{\sin t}{\cos t}, \text{ unde } D_2 = \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbb{Z}\}.$$

Teoremă.

a) Funcțiile $\cotg$ și $\tg$ sunt **periodice**, de perioadă principală π ,

$$\cotg(t + \pi) = \cotg t, \forall t \in D_1; \tg(t + \pi) = \tg t, \forall t \in D_2.$$

b) Funcția ctg este **impară**: $\operatorname{ctg}(-t) = -\operatorname{ctg} t, \forall t \in D_1$.

c) Funcția tg este **impară**: $\operatorname{tg}(-t) = -\operatorname{tg} t, \forall t \in D_2$.

Observație. Pe domeniile corespunzătoare au loc:

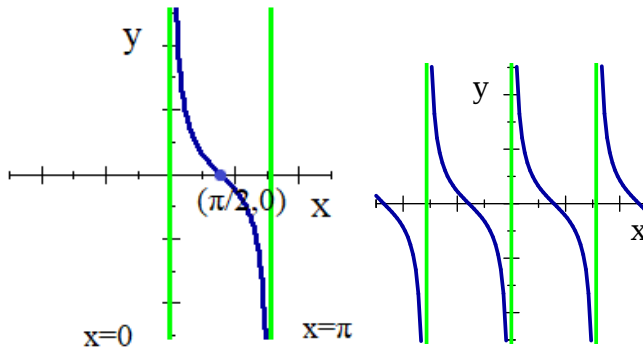
a) $\operatorname{ctg} t = \operatorname{tg}(\frac{\pi}{2} - t)$; b) $\operatorname{tg}(a+b) = \frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{1 - \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b}$; c) $\operatorname{tg}(a-b) = \frac{\operatorname{tg} a - \operatorname{tg} b}{1 + \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b}$;

d) $\operatorname{tg}(2t) = \frac{2 \operatorname{tg} t}{1 - \operatorname{tg}^2 t}$; e) $\operatorname{tg} \frac{t}{2} = \frac{\sin t}{1 + \cos t}$; f) $\cos t = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{t}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{t}{2}}$; g) $\sin t = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{t}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{t}{2}}$;

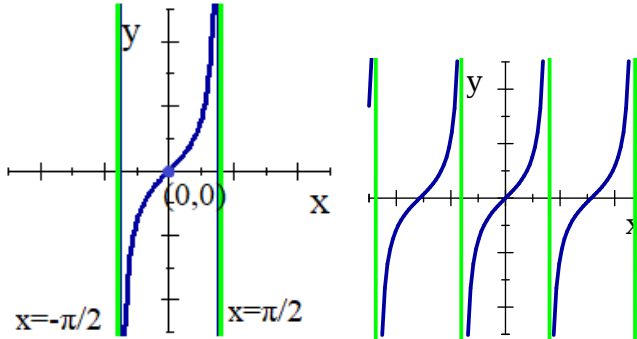
h) $\operatorname{tg} a \pm \operatorname{tg} b = \frac{\sin(a \pm b)}{\cos a \cos b}$.

Grafice (renotând sistemul cartezian de coordonate cu xOy , pentru Anexa 4).

a) $\operatorname{ctg} : D_1 \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \operatorname{ctg} t = \frac{\cos t}{\sin t}$, unde $D_1 = \mathbb{R} \setminus \{k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$.



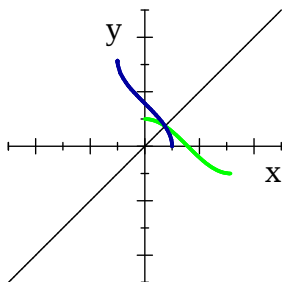
b) $\operatorname{tg} : D_2 \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \operatorname{tg} t = \frac{\sin t}{\cos t}$, unde $D_2 = \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$.



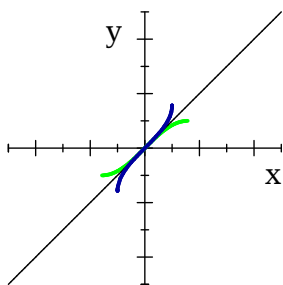
2.3. Funcțiile trigonometrice inverse arccos, arcsin, arcctg, arctg

Definiție și grafice (renotând sistemul cartezian de coordonate cu xOy , pentru Anexa 4).

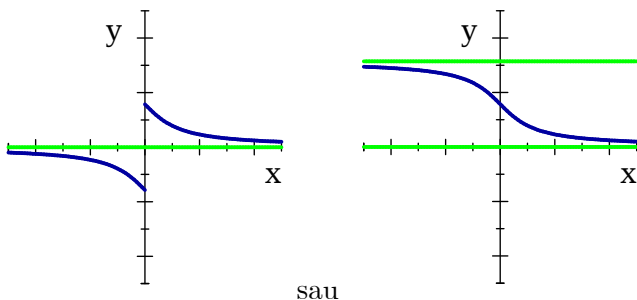
- a) $\cos : [0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$ bijectivă $\rightsquigarrow \arccos : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $\arccos x = y$ a.î. $\cos y = x$.
(graficele arccos și restricției cos sunt simetrice față de prima bisectoare)



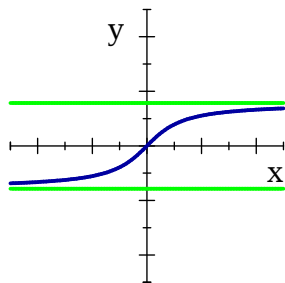
- b) $\sin : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \rightarrow [-1, 1]$ bijectivă $\rightsquigarrow \arcsin : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $\arcsin x = y$ a.î. $\sin y = x$.
(graficele arcsin și restricției sin sunt simetrice față de prima bisectoare)



- c) $\text{ctg} :]0, \pi[\rightarrow \mathbb{R}$ bijectivă $\rightsquigarrow \text{arcctg} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $\text{arcctg} x = y$ a.î. $\text{ctg} y = x$.
(graficele arcctg și restricției ctg sunt simetrice față de prima bisectoare)



- d) $\text{tg} :]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\rightarrow \mathbb{R}$ bijectivă $\rightsquigarrow \text{arctg} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $\text{arctg} x = y$ a.î. $\text{tg} y = x$.
(graficele arctg și restricției tg sunt simetrice față de prima bisectoare)

**Exemplul 5.**

a) $\arccos \frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}$; b) $\arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$; c) $\operatorname{arcctg} 1 = \frac{\pi}{4}$; d) $\operatorname{arctg} \sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$.

Exemplul 6. Să se determine domeniul maximal de definiție pentru funcțiile:

a) $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \arccos 3x$.

Rezolvare. $3x \in [-1, 1] \Leftrightarrow -1 \leq 3x \leq 1 \Leftrightarrow x \in \left[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right]. D = \left[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right]$.

b) $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \arcsin(1 - 2x)$.

Rezolvare. $1 - 2x \in [-1, 1] \Leftrightarrow -1 \leq 1 - 2x \leq 1 \Leftrightarrow x \in [0, 1]. D = [0, 1]$.