ANEXA 4
Analiză matematică, AIA

Funcţii $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ elementare: **funcţia polinomială, funcţia raţională, funcţia putere, funcţia radical, funcţia logaritm, funcţia exponenţială, funcţii trigonometrice, funcţii hiperbolice. Definiţii, grafice şi lecturi grafice (intersecţia cu axele, monotonie, semn)**

Se reaminteşte că pentru $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, imaginea şi graficul sunt mulţimile
$f(A) = \{y \in \mathbb{R}; \exists x \in A \text{ a.î. } f(x) = y\}$ şi $G_f = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x \in A \text{ şi } y = f(x)\right\}$.
Geometric, reprezentarea geometrică a mulţimii $f(A)$ este proiecţia pe axa Oy a reprezentării graficului funcţiei, G_f.

1°. Funcţii polinomiale.

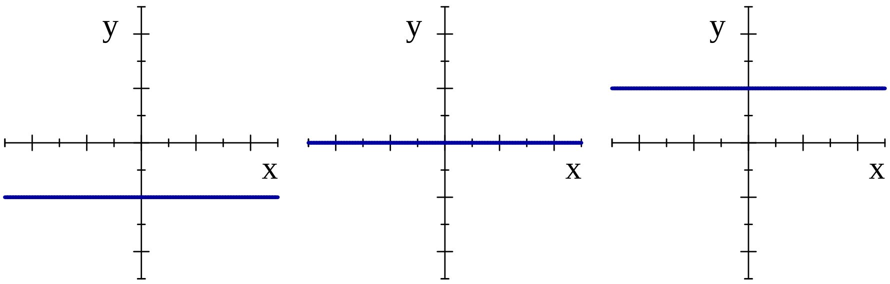
Definiţia 1. Fie $n \in \mathbb{N}$, $a_0, ..., a_n \in \mathbb{R}$, $a_n \neq 0$. Se numeşte *funcţie polinomială* funcţia
$P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $P(x) = a_0 + a_1 x + ... + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n$.
Numărul natural n se numeşte *gradul funcţiei polinomiale.*

Particularizări.

$\boxed{n = 0}$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = a$, unde $a \in \mathbb{R}$.

Graficul funcţiei f reprezintă *o dreaptă* în plan care este paralelă sau coincide cu axa Ox.

$a < 0$	$a = 0$	$a > 0$
$f(x) = -2$	$f(x) = 0$	$f(x) = 2$
$y = -2$	$y = 0$-axa Ox	$y = 2$

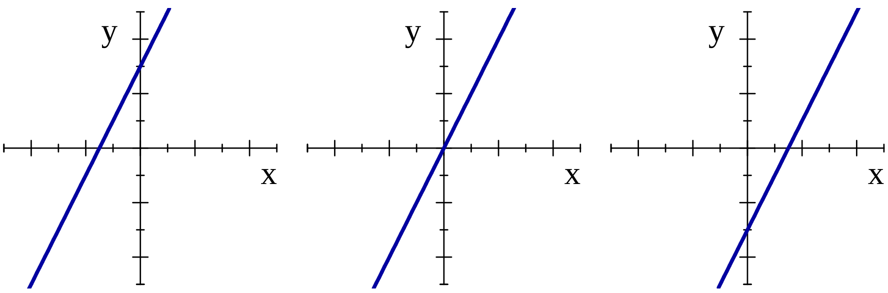


$\boxed{n = 1}$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = ax + b$, unde $a \in \mathbb{R}^*, b \in \mathbb{R}$.

Ecuaţia de gradul 1 : $ax + b = 0 \Rightarrow x = -\dfrac{b}{a} \in \mathbb{R}$.

Graficul funcţiei f reprezintă *o dreaptă* în plan care se intersectează cu axele.

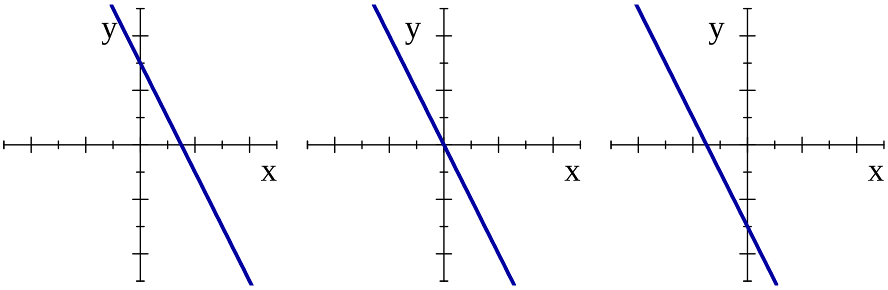
$a > 0, b > 0$	$a > 0, b = 0$	$a > 0, b < 0$
$f(x) = 2x + 3$	$f(x) = 2x$	$f(x) = 2x - 3$
$y = 2x + 3$	$y = 2x$	$y = 2x - 3$



$a<0, b>0$ $\quad f(x)=-2x+3$ $\quad y=-2x+3$

$a<0, b=0$ $\quad f(x)=-2x$ $\quad y=-2x$

$a<0, b<0$ $\quad f(x)=-2x-3$ $\quad y=-2x-3$



Teorema 1.**(monotonie)** Fie $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$, $f(x)=ax+b$, unde $a\in\mathbb{R}^*, b\in\mathbb{R}$.

Dacă $a>0$ atunci f este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$.

Dacă $a<0$ atunci f este strict descrescătoare pe $\mathbb{R}$.

Teorema 2. **(semn)** Fie $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$, $f(x)=ax+b$, unde $a\in\mathbb{R}^*, b\in\mathbb{R}$. Atunci

x	$-\infty$		$-\frac{b}{a}$		$+\infty$
$ax+b$		semn contrar lui a	0	semnul lui a	

$\boxed{n=2}$, $\underline{f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R},\ f(x)=ax^2+bx+c,\text{ unde } a\in\mathbb{R}^*, b,c\in\mathbb{R}.}$

Ecuaţia de gradul al 2-lea: $ax^2+bx+c=0$.

Rezolvare. $f(x)=ax^2+bx+c=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)=a\left(x^2+2x\cdot\frac{b}{2a}+\left(\frac{b}{2a}\right)^2\right)-a\left(\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}=$

$=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-a\frac{b^2-4ac}{4a^2}=a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right).$

Se notează $\Delta=b^2-4ac$.

Dacă $\Delta>0\Rightarrow$ecuaţia are două rădacini reale distincte:

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \text{ şi } x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}.$$

Dacă $\Delta=0\Rightarrow$ecuaţia are două rădacini reale ce coincid:

$$x_{1,2}=\frac{-b}{2a}.$$

Dacă $\Delta<0\Rightarrow$ecuaţia nu are rădăcini reale, are două rădacini complexe conjugate:

$$x_1=\frac{-b+\mathrm{j}\sqrt{-\Delta}}{2a} \text{ şi } x_2=\frac{-b-\mathrm{j}\sqrt{-\Delta}}{2a}.$$

Descompunerea în factori: $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$

Graficul funcţiei f reprezintă *o parabolă* în plan.

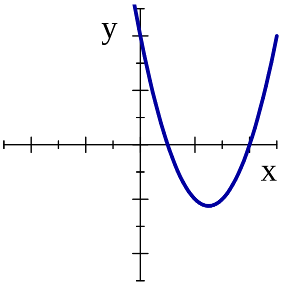
Graficul <u>intersectează axa Oy</u> în punctul $(0,c)$.

$a>0\Rightarrow$ramuri în sus  ; $a<0\Rightarrow$ramuri în jos 

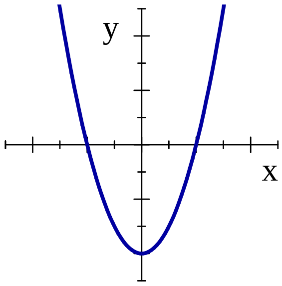
<u>"Varful"</u> $V\left(-\frac{b}{2a},-\frac{\Delta}{4a}\right)$

Dacă $\Delta > 0$ ⇒ parabola intersectează axa Ox în două puncte: $(x_1, 0), (x_2, 0)$.

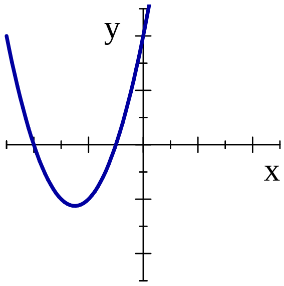
$f(x) = x^2 - 5x + 4$
$y = x^2 - 5x + 4$



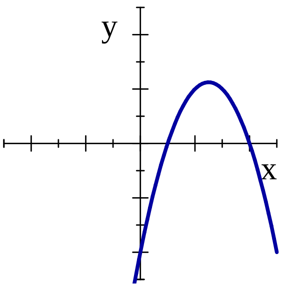
$f(x) = x^2 - 4$
$y = x^2 - 4$



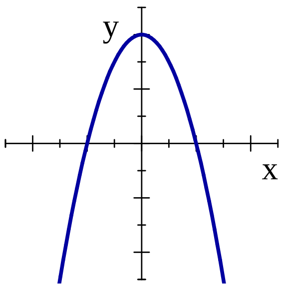
$f(x) = x^2 + 5x + 4$
$y = x^2 + 5x + 4$



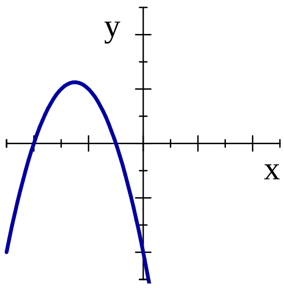
$f(x) = -x^2 + 5x - 4$
$y = -x^2 + 5x - 4$



$f(x) = -x^2 + 4$
$y = -x^2 + 4$

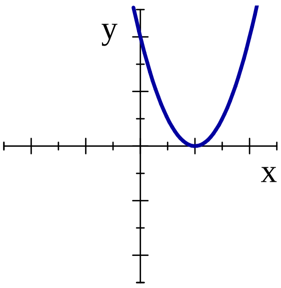


$f(x) = -x^2 - 5x - 4$
$y = -x^2 - 5x - 4$

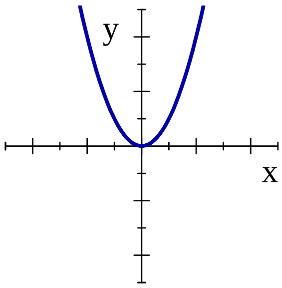


Dacă $\Delta = 0$ ⇒ parabola intersectează axa Ox într-un singur punct: $(x_1, 0)$.

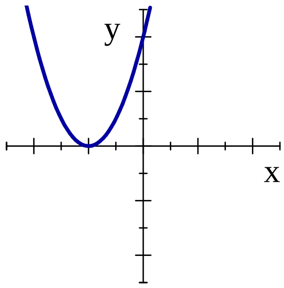
$f(x) = x^2 - 4x + 4$
$y = x^2 - 4x + 4$



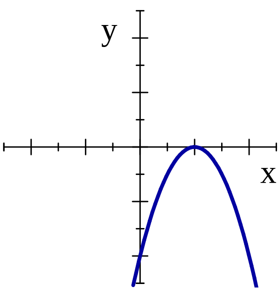
$f(x) = x^2$
$y = x^2$



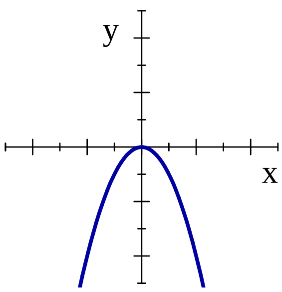
$f(x) = x^2 + 4x + 4$
$y = x^2 + 4x + 4$



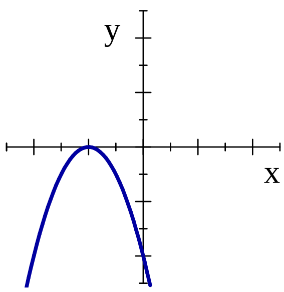
$f(x) = -x^2 + 4x - 4$
$y = -x^2 + 4x - 4$



$f(x) = -x^2$
$y = -x^2$

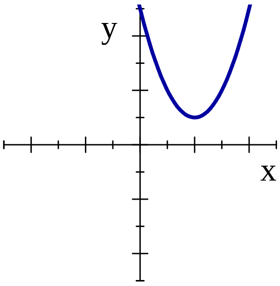


$f(x) = -x^2 - 4x - 4$
$y = -x^2 - 4x - 4$

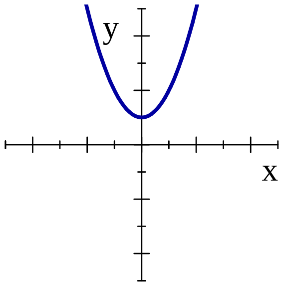


Dacă $\underline{\underline{\Delta < 0}}$ $\Rightarrow$ parabola nu intersectează axa Ox.

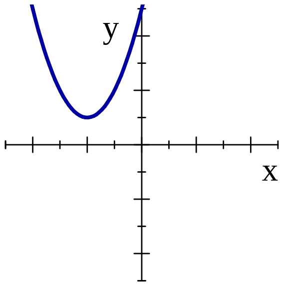
$f(x) = x^2 - 4x + 5$
$y = x^2 - 4x + 5$



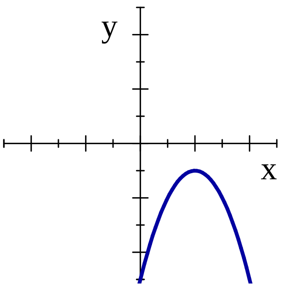
$f(x) = x^2 + 1$
$y = x^2 + 1$



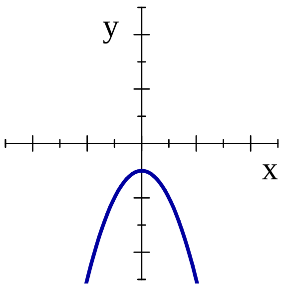
$f(x) = x^2 + 4x + 5$
$y = x^2 + 4x + 5$



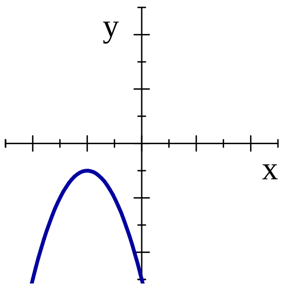
$f(x) = -x^2 + 4x - 5$
$y = -x^2 + 4x - 5$



$f(x) = -x^2 - 1$
$y = -x^2 - 1$



$f(x) = -x^2 - 4x - 5$
$y = -x^2 - 4x - 5$



Teorema 3. **(monotonie)** Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 + bx + c$, unde $a \in \mathbb{R}^*, b, c \in \mathbb{R}$.
Dacă $a > 0$ atunci f este strict descrescătoare pe $\left]-\infty, \frac{-b}{2a}\right]$ şi strict crescătoare pe $\left[\frac{-b}{2a}, +\infty\right[$.

În $x = \frac{-b}{2a}$ funcţia îşi atinge valoarea minimă $f\left(\frac{-b}{2a}\right) = \frac{-\Delta}{4a}$.

Dacă $a < 0$ atunci f este strict crescătoare pe $\left]-\infty, \frac{-b}{2a}\right]$ şi strict descrescătoare pe $\left[\frac{-b}{2a}, +\infty\right[$.

În $x = \frac{-b}{2a}$ funcţia îşi atinge valoarea maximă $f\left(\frac{-b}{2a}\right) = \frac{-\Delta}{4a}$.

Teorema 4. **(semn)** Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 + bx + c$, unde $a \in \mathbb{R}^*, b, c \in \mathbb{R}$.

Dacă $\Delta > 0$ atunci:

x	$-\infty$		x_1/x_2		x_2/x_1		$+\infty$
$ax^2 + bx + c$		semnul lui a	0	semn contrar lui a	0	semnul lui a	

Dacă $\Delta = 0$ atunci:

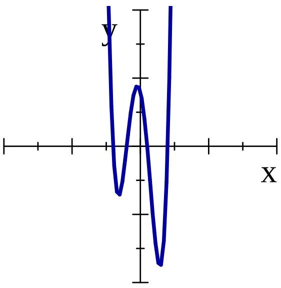
x	$-\infty$		$x_1 = x_2$		$+\infty$
$ax^2 + bx + c$		semnul lui a	0	semnul lui a	

Dacă $\Delta < 0$ atunci:

x	$-\infty$		$+\infty$
$ax^2 + bx + c$		semnul lui a	

$\underline{\underline{\boxed{n \geq 3}}}$

Ecuaţia de gradul al n-lea: -se rezolvă cu metode specifice pentru fiecare ecuaţie în parte.
Exemplu. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x^4 + x^3 - 9x^2 - 4x + 4$.



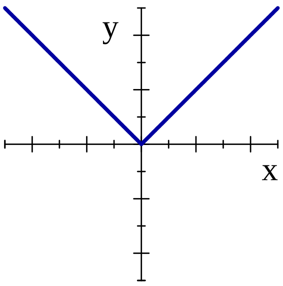
$(*)\, 2x^4 + x^3 - 9x^2 - 4x + 4 = 0;$
$D_2 = \{\pm 1, \pm 2\}\,;$
$2x^4 + x^3 - 9x^2 - 4x + 4 = (x-2)(2x-1)(x+2)(x+1)$
$f(-1) = 0, f(2) = 0, f(-2) = 0 \Rightarrow f(x) \vdots (x+1), f(x) \vdots (x-2), f(x) \vdots (x+2) \Rightarrow$
$f(x) \vdots (x+1)(x-2)(x+2)\,.$
Se efectuează direct împărţirea
$\left(2x^4 + x^3 - 9x^2 - 4x + 4\right) : \left(x^3 + x^2 - 4x - 4\right) = 2x - 1$
sau se foloseşte schema lui Horner şi se obţine

$$(*) \Leftrightarrow 2\left(x - \tfrac{1}{2}\right)^1 (x+2)^1 (x+1)^1 (x-2)^1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2, m(x_1) = 1 \\ x_2 = -1, m(x_2) = 1 \\ x_3 = \frac{1}{2}, m(x_3) = 1 \\ x_4 = 2, m(x_4) = 1 \end{cases}$$

2°. Funcţia modul.
Definiţia 2. Se numeşte *funcţie modul* funcţia

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = |x| = \begin{cases} -x, & \text{dacă } x < 0 \\ 0, & \text{dacă } x = 0 \\ x, & \text{dacă } x > 0 \end{cases}$$

Graficul funcţiei f este reuniunea a două semidrepte.



Teorema 5. **(monotonie)** Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = |x|\,.$
Funcţia f este strict descrescătoare pe $]-\infty, 0]$ şi strict crescătoare pe $[0, +\infty[$.
În $x = 0$ funcţia îşi atinge valoarea minimă $f(0) = 0$.
Teorema 6. **(semn)** Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = |x|$. Atunci

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\lvert x \rvert$		$+++$	0	$+++$	

3°. Funcţii raţionale.
Definiţia 3. Fie $n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{N}, a_0, ..., a_n \in \mathbb{R}, a_n \neq 0$ şi $b_0, ..., b_m \in \mathbb{R}, b_m \neq 0$. Se numeşte *funcţie raţională* funcţia

$$R = \frac{P}{Q} : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}, R(x) = \frac{P}{Q}(x) = \frac{a_0 + a_1 x + ... + a_{n-1}x^{n-1} + a_n x^n}{b_0 + b_1 x + ... + b_{m-1}x^{n-1} + b_m x^m}.$$

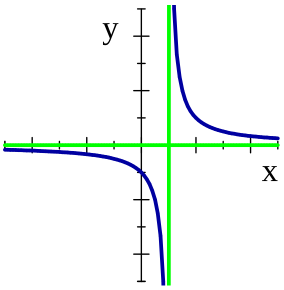
Observaţie. Sunt fracţii simple fracţiile de forma:

a) $\frac{A}{(x-a)^m}$, unde $A \in \mathbb{R}, a \in \mathbb{R}, m \in \mathbb{N}^*$.

Exemple:

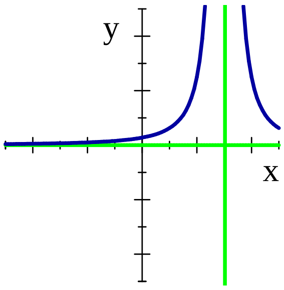
$f(x) = \frac{1}{(x-1)^1}$

$y = \frac{1}{(x-1)^1}$



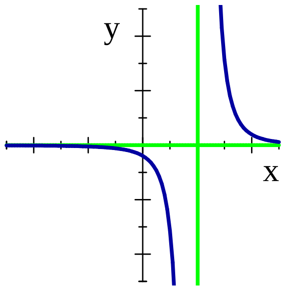
$f(x) = \frac{e}{(x-3)^2}$

$y = \frac{e}{(x-3)^2}$



$f(x) = \frac{\pi}{(x-2)^3}$

$y = \frac{\pi}{(x-2)^3}$

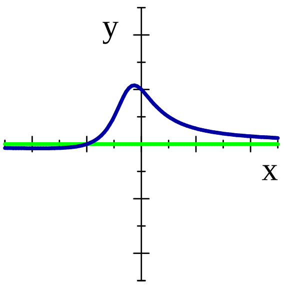


b) $\frac{Ax+B}{(ax^2+bx+c)^m}$, unde $A, B \in \mathbb{R}$ cu $A^2 + B^2 \neq 0, a, b, c \in \mathbb{R}$ cu $a \neq 0$ şi $\Delta < 0, m \in \mathbb{N}^*$.

Exemple:

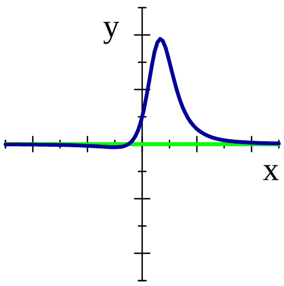
$f(x) = \frac{x+2}{x^2+x+1}$

$y = \frac{x+2}{x^2+x+1}$



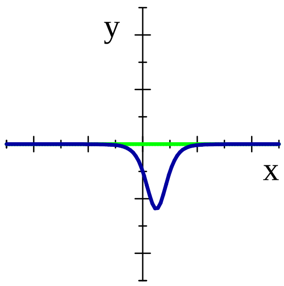
$f(x) = \frac{2x+1}{(x^2-x+1)^2}$

$y = \frac{2x+1}{(x^2-x+1)^2}$



$f(x) = \frac{-1}{(x^2-x+1)^3}$

$y = \frac{-1}{(x^2-x+1)^3}$



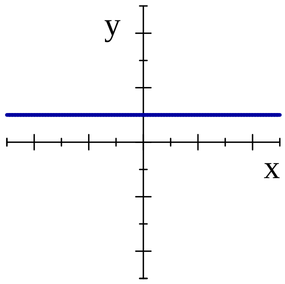
Monotonia şi **semnul** funcţiilor raţionale se studiază pentru fiecare exemplu, corespunzător.

4°. Funcţia putere

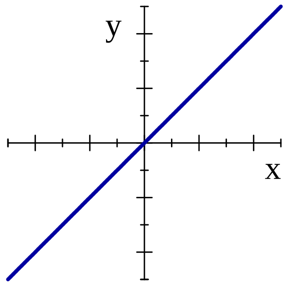
Definiţia 4. Fie $n \in \mathbb{N}$. Se numeşte *funcţie putere de exponent natural* n funcţia polinomială $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^n$.

Exemple:

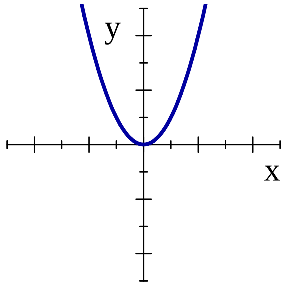
$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=1$
$y=1$



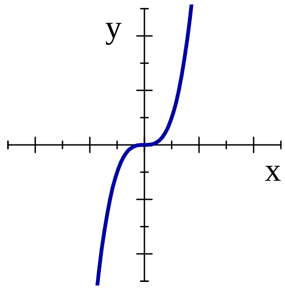
$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x$
$y=x$



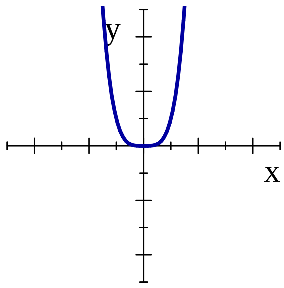
$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^2$
$y=x^2$



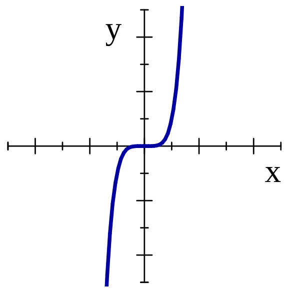
$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^3$
$y=x^3$



$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^4$
$y=x^4$



$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^5$
$y=x^5$



Teorema 7. **(monotonie)** Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^n$, unde $n\in\mathbb{N}^*$.

Dacă n este par atunci f este strict descrescătoare pe $]-\infty,0]$ şi strict crescătoare pe $[0,+\infty[$.În $x=0$ funcţia îşi atinge valoarea minimă $f(0)=0$.

Dacă n este impar atunci f este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$.

Teorema 8. **(semn)** Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^n$, unde $n\in\mathbb{N}^*$.

Dacă n este par, atunci:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
x^n		$+++$	0	$+++$	

Dacă n este impar, atunci:

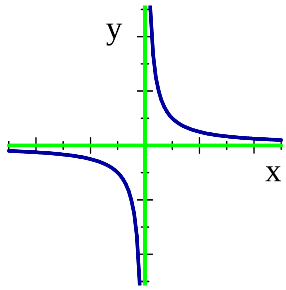
x	$-\infty$		0		$+\infty$
x^n		$---$	0	$+++$	

Definiţia 5. Fie $n\in\mathbb{N}^*$. Se numeşte *funcţie putere de exponent întreg negativ* n funcţia

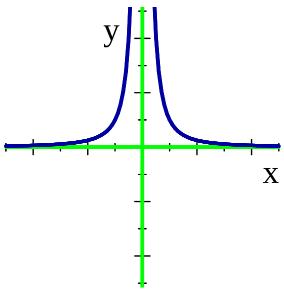
$$f:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}, f(x)=x^{-n}=(x^n)^{-1}=\frac{1}{x^n}.$$

Exemple:

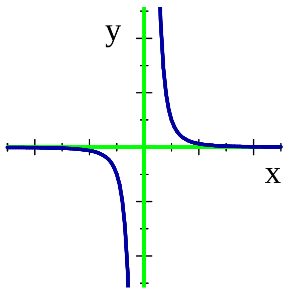
$$f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{x}$$
$$y = \frac{1}{x}$$



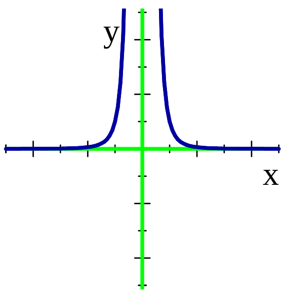
$$f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{x^2}$$
$$y = \frac{1}{x^2}$$



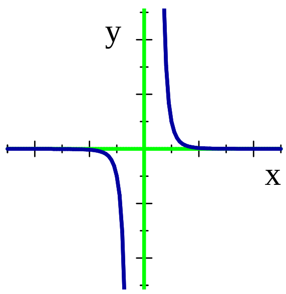
$$f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{x^3}$$
$$y = \frac{1}{x^3}$$



$$f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{x^4}$$
$$y = \frac{1}{x^4}$$



$$f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{x^5}$$
$$y = \frac{1}{x^5}$$



Teorema 9. **(monotonie)** Fie $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}, f(x) = x^{-n}$, unde $n \in \mathbb{N}^*$.

Dacă n este par atunci f este strict crescătoare pe $]-\infty, 0[$ şi strict descrescătoare pe $]0, +\infty[$.

Dacă n este impar atunci f este strict descrescătoare pe $]-\infty, 0[$ şi strict descrescătoare pe $]0, +\infty[$.

Teorema 10. **(semn)** Fie $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}, f(x) = x^{-n}$, unde $n \in \mathbb{N}^*$.

Dacă n este par, atunci:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
x^{-n}		$+++$	0	$+++$	

Dacă n este impar, atunci:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
x^{-n}		$---$	0	$+++$	

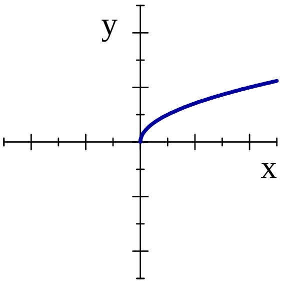
Definiţia 6. Fie $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$.

a) Dacă n este impar atunci se numeşte *funcţie radical de ordin impar n* funcţia
$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\sqrt[n]{x}=x^{\frac{1}{n}}$ definită astfel încât $x^{\frac{1}{n}}=y\Leftrightarrow x=y^n$.

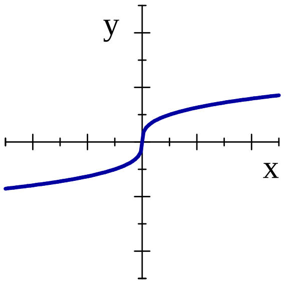
b) Dacă n este par atunci se numeşte *funcţie radical de ordin par n* funcţia
$f:[0,+\infty[\to\mathbb{R}, f(x)=\sqrt[n]{x}=x^{\frac{1}{n}}$ definită astfel încât $x^{\frac{1}{n}}=y\Leftrightarrow x=y^n$.

Graficul funcţiei f este simetric faţă de prima bisectoare cu graficul restricţiei funcţiei putere $f(x)=x^n, n\in\mathbb{N}, n\geq 2$.

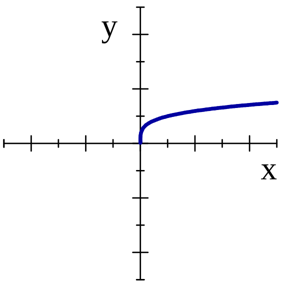
$f:[0,+\infty[\to\mathbb{R}, f(x)=\sqrt{x}$



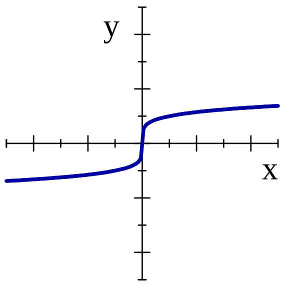
$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\sqrt[3]{x}$

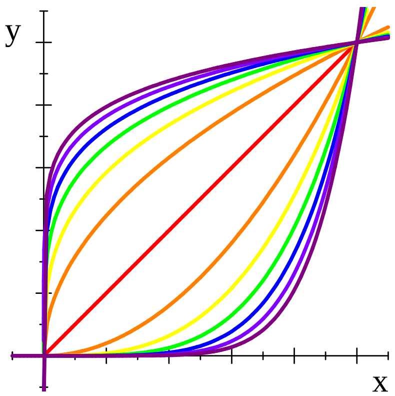


$f:[0,+\infty[\to\mathbb{R}, f(x)=\sqrt[4]{x}$



$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\sqrt[5]{x}$





Teorema 11. **(monotonie)** Fie $n\in\mathbb{N}^*$.
Dacă n este par atunci $f:[0,+\infty[\to\mathbb{R}, f(x)=\sqrt[n]{x}$ este strict crescătoare pe $[0,+\infty[$.
Dacă n este impar atunci $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\sqrt[n]{x}$ este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$.

Teorema 12. **(semn)** Fie $n\in\mathbb{N}^*$.

Dacă n este par, atunci:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\sqrt[n]{x}$		$\vert\vert\vert$	0	$+++$	

Dacă n este impar, atunci:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\sqrt[n]{x}$		$---$	0	$+++$	

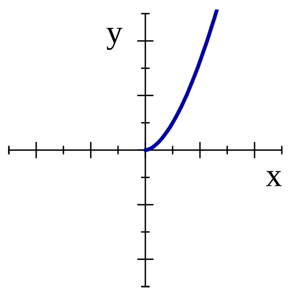
Observaţie. $\boxed{\sqrt[n]{x^m} = x^{\frac{m}{n}}}$

Definiţia 7. Fie $\alpha \in \mathbb{R}$. Se numeşte *funcţie putere de exponent real* α funcţia

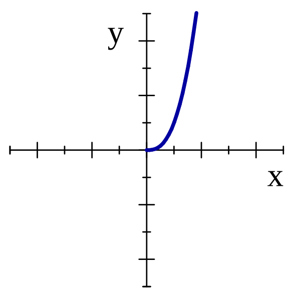
$f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}, f(x) = x^\alpha$ ($y = x^\alpha$ se defineşte prin aproximare).

Grafice-exemple:

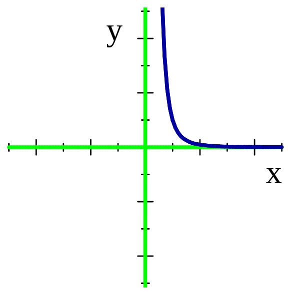
$f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}, f(x) = x^{\sqrt{3}}$



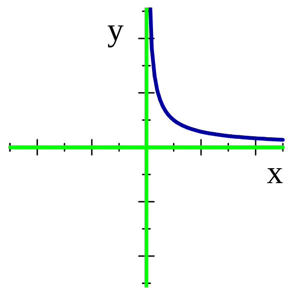
$f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}, f(x) = x^e$



$f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}, f(x) = x^{-\pi}$



$f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}, f(x) = x^{-\frac{\sqrt{10}}{4}}$



Teorema 13. **(monotonie)** Fie $\alpha \in \mathbb{R}$ şi $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}, f(x) = x^\alpha$.

Dacă $\alpha > 0$ atunci f este strict crescătoare pe $]0, +\infty[$.

Dacă $\alpha < 0$ atunci f este strict descrescătoare pe $]0, +\infty[$.

Teorema 14. **(semn)** Fie $\alpha \in \mathbb{R}$ şi $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}, f(x) = x^\alpha$. Atunci:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
x^α		$\vert\vert\vert$	$\vert$	$+++$	

Propoziţia 1. Fie $\alpha \in \mathbb{R}$. Atunci:

a) $\forall x_1, x_2 \in]0, +\infty[: (x_1 \cdot x_2)^\alpha = x_1^\alpha \cdot x_2^\alpha$;**b)** $\forall x_1, x_2 \in]0, +\infty[: \left(\frac{x_1}{x_2}\right)^\alpha = \frac{x_1^\alpha}{x_2^\alpha}$;

c) $\forall x_1, x_2 \in]0, +\infty[: x_1^\alpha = x_2^\alpha \Leftrightarrow x_1 = x_2$.

5°. Funcţia exponenţială

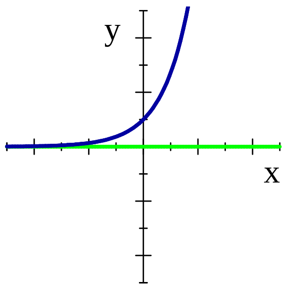
Definiţia 8. Fie $a \in \mathbb{R}, a > 0, a \neq 1$. Se numeşte *funcţie exponenţială de bază* a funcţia

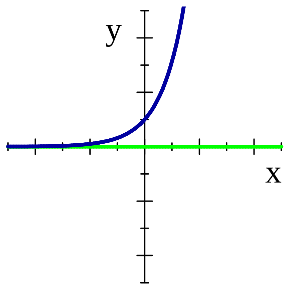
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = a^x$.

($y = a^x$ se defineşte prin aproximare). Este funcţia utilizată în modelarea şi rezolvarea multor ecuaţii diferenţiale. A se vedea EDCO-semestrul al II-lea.

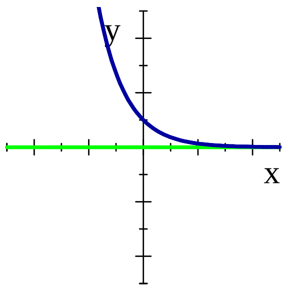
Grafice-exemple:

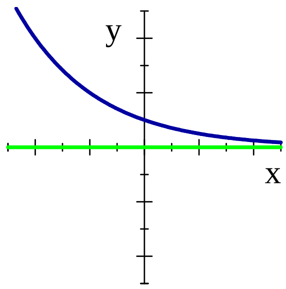
$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=e^x$ $\quad$ $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\pi^x$





$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\left(\frac{1}{e}\right)^x$ $\quad$ $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^x$





Teorema 15. **(monotonie)** Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=a^x$, unde $a\in\mathbb{R}, a>0, a\neq 1$..

Dacă $a>1$ atunci f este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$.

Dacă $0<a<1$ atunci f este strict descrescătoare pe $\mathbb{R}$.

Teorema 16. **(semn)** Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=a^x$, unde $a\in\mathbb{R}, a>0, a\neq 1$. Atunci:

x	$-\infty$		$+\infty$
a^x		$+++$	

Propoziţia 2. Fie $a\in\mathbb{R}, a>0, a\neq 1$. Atunci:

a) $\forall x\in\mathbb{R}, a^x\neq 0$;**b)** $\forall x_1,x_2\in\mathbb{R}: a^{x_1+x_2}=a^{x_1}\cdot a^{x_2}$;**c)** $\forall x_1,x_2\in\mathbb{R}: a^{x_1-x_2}=\dfrac{a^{x_1}}{a^{x_2}}$;

d) $\forall x_1,x_2\in\mathbb{R}: a^{x_1\cdot x_2}=(a^{x_1})^{x_2}=(a^{x_2})^{x_1}$;**e)** $\forall x_1,x_2\in\mathbb{R}: a^{x_1}=a^{x_2}\Leftrightarrow x_1=x_2$.

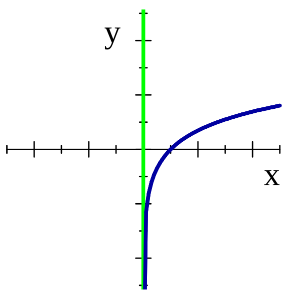
6°. Funcţia logaritmică

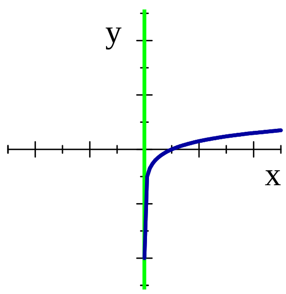
Definiţia 9. Fie $a\in\mathbb{R}, a>0, a\neq 1$. Se numeşte *funcţie logaritmică de bază a* funcţia

$f:]0,+\infty[\to\mathbb{R}, f(x)=\log_a x$ $(y=\log_a x\Leftrightarrow a^y=x)$.

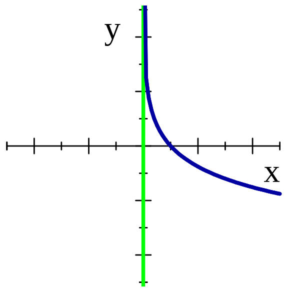
Graficul funcţiei f este simetric faţă de prima bisectoare cu graficul funcţiei exponenţiale de aceeaşi bază.

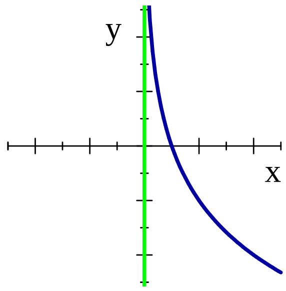
$f:]0,+\infty[\to\mathbb{R}, f(x)=\ln x$ $\quad$ $f:]0,+\infty[\to\mathbb{R}, f(x)=\log_{10}x=\lg x$





$f :]0,+\infty[\rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \log_{\frac{2}{5}} x$ $\qquad$ $f :]0,+\infty[\rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \log_{\frac{\sqrt{2}}{2}} x$





Teorema 17. **(monotonie)** Fie $f :]0,+\infty[\rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \log_a x$, unde $a \in \mathbb{R}, a > 0, a \neq 1$.

Dacă $a > 1$ atunci f este strict crescătoare pe $]0,+\infty[$.

Dacă $0 < a < 1$ atunci f este strict descrescătoare pe $]0,+\infty[$.

Teorema 18. **(semn)** Fie $f :]0,+\infty[\rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \log_a x$, unde $a \in \mathbb{R}, a > 0, a \neq 1$.

Dacă $a > 1$ atunci:

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$\log_a x$		$- - -$	0	$+ + +$	

Dacă $0 < a < 1$ atunci:

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$\log_a x$		$+ + +$	0	$- - -$	

Propoziţia 3. Fie $a \in \mathbb{R}, a > 0, a \neq 1$ şi $\alpha \in \mathbb{R}$. Atunci:

a) $\forall x_1, x_2 \in]0,+\infty[: \log_a (x_1 x_2) = \log_a x_1 + \log_a x_2$;

b) $\forall x_1, x_2 \in]0,+\infty[: \log_a \left(\frac{x_1}{x_2}\right) = \log_a x_1 - \log_a x_2$;

c) $\forall x \in]0,+\infty[: \log_a (x^\alpha) = \alpha \log_a x$;**d)** $\forall x \in]0,+\infty[: \log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$;

e) $\forall x_1, x_2 \in]0,+\infty[: \log_a x_1 = \log_a x_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2$.

Propoziţia 4. Fie $a \in \mathbb{R}, a > 0, a \neq 1$. Atunci:

a) $a^{\log_a x} = x, \forall x \in]0,+\infty[; e^{\ln x} = x, \forall x \in]0,+\infty[$;

b) $\log_a a^x = x, \forall x \in \mathbb{R}; \ln e^x = x, \forall x \in \mathbb{R}$.

7°. Funcţii trigonometrice şi funcţii hiperbolice

Definiţia 10. Se numesc *funcţii trigonometrice reale cosinus, sinus, cotangentă, tangentă, cosecantă, secantă* funcţiile (vezi Anexa 2):

$f_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f_1(x) = \cos x$; $\qquad$ $f_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f_2(x) = \sin x$;

$f_3 : A_3 \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f_3(x) = \operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$; $\qquad$ $f_4 : A_4 \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f_4(x) = \operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$;

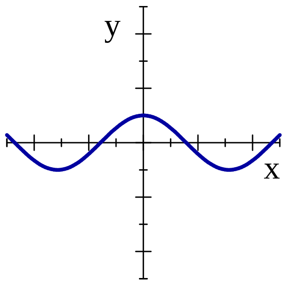
$f_5 : A_3 \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f_5(x) = \operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x}$; $\qquad$ $f_6 : A_4 \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f_6(x) = \sec x = \frac{1}{\cos x}$;

unde $A_3 = \mathbb{R} \setminus \{k\pi; k \in \mathbb{Z}\}, A_4 = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbb{Z}\right\}$.

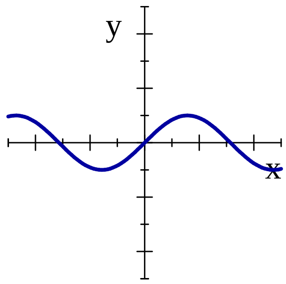
Funcţiile *cosecantă* şi *secantă* se numesc reciproce pentru sinus şi cosinus.

Grafice:

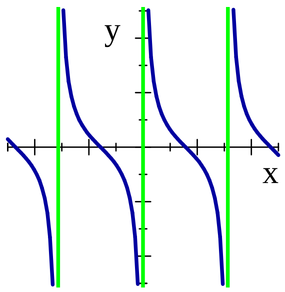
$f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f_1(x) = \cos x$



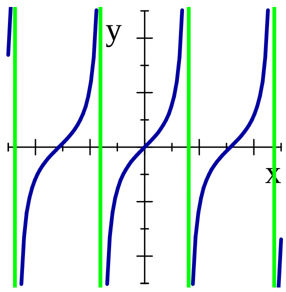
$f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f_2(x) = \sin x$



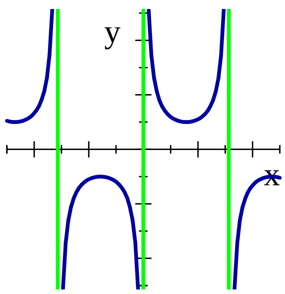
$f_3 : A_3 \to \mathbb{R}, f_3(x) = \operatorname{ctg} x$



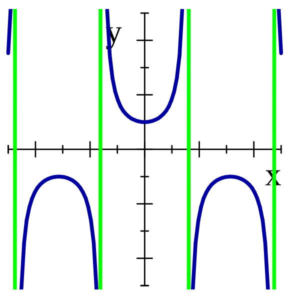
$f_4 : A_4 \to \mathbb{R}, f_4(x) = \operatorname{tg} x :$



$f_5 : A_3 \to \mathbb{R}, f_5(x) = \operatorname{cosec} x$



$f_6 : A_4 \to \mathbb{R}, f_6(x) = \sec x$



Definiţia 11. Se numesc *funcţii hiperbolice reale cosinus hipebolic, sinus hiperbolic, cotangentă hiperbolică, tangentă hiperbolică* funcţiile:

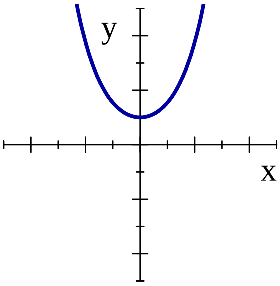
$$f_7 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f_7(x) = \boxed{\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}}; \quad f_8 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f_8(x) = \boxed{\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}};$$

$$f_9 : A_9 \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f_9(x) = \operatorname{cth} x = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}; \quad f_{10} : A_{10} \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f_{10}(x) = \operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x};$$

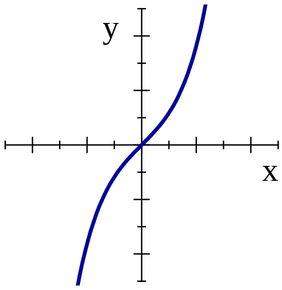
$A_9 = \{x \in \mathbb{R}; \operatorname{sh} x \neq 0\}, A_{10} = \{x \in \mathbb{R}; \operatorname{ch} x \neq 0\}.$

Grafice:

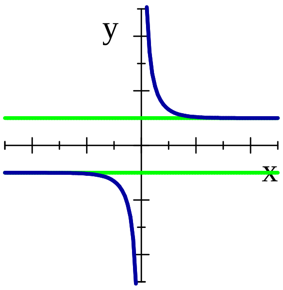
$f_7 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f_7(x) = \operatorname{ch} x$



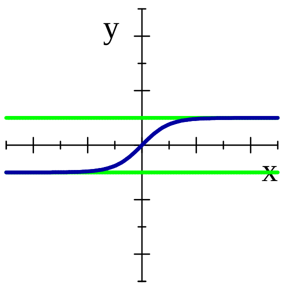
$f_8 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f_8(x) = \operatorname{sh} x$



$f_9 : A_9 \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f_9(x) = \operatorname{cth} x$



$f_{10} : A_{10} \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f_{10}(x) = \operatorname{th} x$



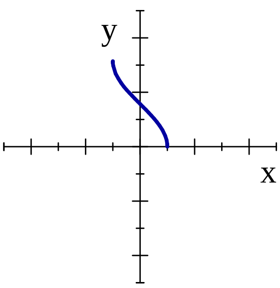
Propoziţia 5. **a)** $\cos^2 x + \sin^2 x = 1, \forall x \in \mathbb{R}$;
b) $\cos(x_1 + x_2) = \cos x_1 \cos x_2 - \sin x_1 \sin x_2, \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$;
$\sin(x_1 + x_2) = \sin x_1 \cos x_2 + \cos x_1 \sin x_2, \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$;
c) $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x, \forall x \in \mathbb{R}; \sin 2x = 2 \sin x \cos x, \forall x \in \mathbb{R}$;
d) $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1, \forall x \in \mathbb{R}$;
e) $\operatorname{ch}(x_1 + x_2) = \operatorname{ch} x_1 \operatorname{ch} x_2 + \operatorname{sh} x_1 \operatorname{sh} x_2, \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$;
$\operatorname{sh}(x_1 + x_2) = \operatorname{sh} x_1 \operatorname{ch} x_2 + \operatorname{ch} x_1 \operatorname{sh} x_2, \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$;
f) $\operatorname{ch} 2x = \operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x, \forall x \in \mathbb{R}; \operatorname{sh} 2x = 2 \operatorname{sh} x \operatorname{ch} x, \forall x \in \mathbb{R}$.

Definiţia 12. Se numesc *funcţii trigonometrice inverse reale arccosinus, arcsinus, arccotangentă, arctangentă, arccosecantă, arcsecantă* funcţiile (a se vedea Anexa 2):

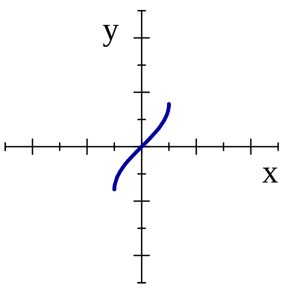
$f_1 : [-1, 1] \to \mathbb{R}, f_1(x) = \arccos x$; $f_2 : [-1, 1] \to \mathbb{R}, f_2(x) = \arcsin x$;
$f_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f_3(x) = \operatorname{arcctg} x$; $f_4 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f_4(x) = \operatorname{arctg} x$;
$f_5 : A_5 \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f_5(x) = \operatorname{arccosec} x$; $f_6 : A_6 \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f_6(x) = \operatorname{arcsec} x$.

Grafice:

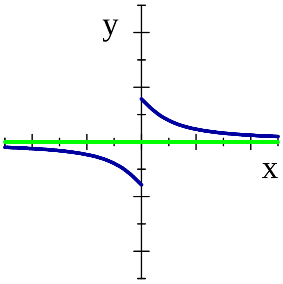
$f_1 : [-1, 1] \to \mathbb{R}, f_1(x) = \arccos x$

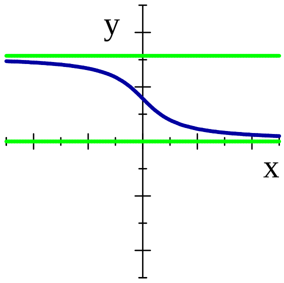


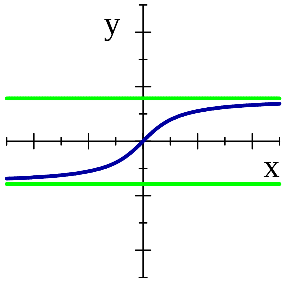
$f_2 : [-1, 1] \to \mathbb{R}, f_2(x) = \arcsin x$



$f_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f_3(x) = \operatorname{arcctg} x$ $\qquad$ $f_4 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f_4(x) = \operatorname{arctg} x$

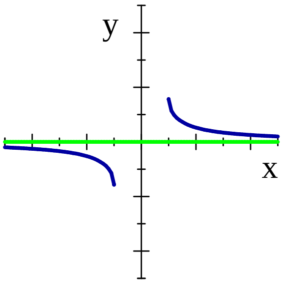


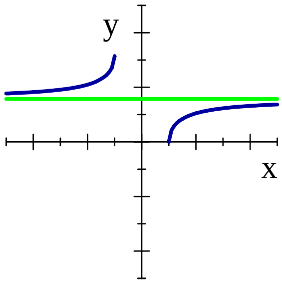




sau

$f_5 : A_5 \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f_5(x) = \operatorname{arccosec} x$ $\qquad$ $f_6 : A_6 \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f_6(x) = \operatorname{arcsec} x$





Definiţia 13. Se numesc *funcţii hiperbolice inverse reale* funcţiile:

$f_7 : [1, \infty[\to \mathbb{R}, f_7(x) = \operatorname{arcch} x = (\operatorname{ch})^{-1} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right);$

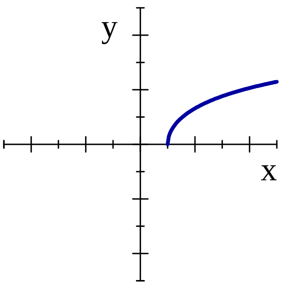
$f_8 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f_8(x) = \operatorname{arcsh} x = (\operatorname{sh})^{-1} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right);$

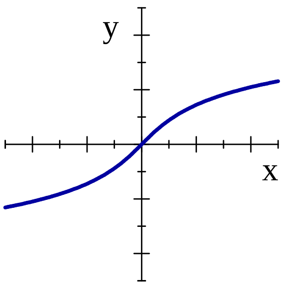
$f_9 : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f_9(x) = \operatorname{arccth} x = (\operatorname{cth})^{-1} x;$

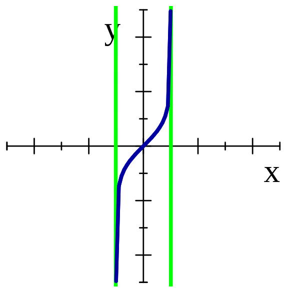
$f_{10} :]-1, 1[\to \mathbb{R}, f_{10}(x) = \operatorname{arcth} x = (\operatorname{th})^{-1} x = \dfrac{1}{2} \ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right).$

Grafice:

$f_7 : [1, \infty[\to \mathbb{R}, f_7(x) = \operatorname{arcch} x$; $f_8 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f_8(x) = \operatorname{arcsh} x$; $f_{10} :]-1, 1[\to \mathbb{R}, f_{10}(x) = \operatorname{arcth} x$







Funcţii $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ elementare: **funcţia polinomială, funcţia raţională, funcţia putere, funcţia radical, funcţia logaritm, funcţia exponenţială, funcţii trigonometrice, funcţii hiperbolice. Ecuaţii şi inecuaţii ataşate, sisteme de ecuaţii şi inecuaţii**

De recapitulat din manualele de liceu.

Exerciţiul 1. Să se rezolve (să se scrie mulţimea tuturor soluţiilor) pentru:

a) $(*)\, 2x + 3 = 0.$

Rezolvare. $(*) \Leftrightarrow 2x = -3 \Leftrightarrow x = \dfrac{-3}{2}; S = \left\{\dfrac{-3}{2}\right\}.$

b) $(*)\, \pi x - e\sqrt{3} = 0.$

Rezolvare. $(*) \Leftrightarrow \pi x = e\sqrt{3} \Leftrightarrow x = \dfrac{e\sqrt{3}}{\pi}; S = \left\{\dfrac{e\sqrt{3}}{\pi}\right\}.$

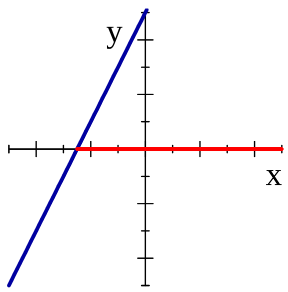
c) $(*)\, 2x = \ln 7.$

Rezolvare. $(*) \Leftrightarrow x = \dfrac{\ln 7}{2}; S = \left\{\dfrac{\ln 7}{2}\right\}.$

d) $(*)\, 2x + 5 > 0.$

Rezolvare. $(*) \Leftrightarrow 2x > -5 \Leftrightarrow x > \dfrac{-5}{2} \Leftrightarrow x \in \left]\dfrac{-5}{2}, +\infty\right[; S = \left]\dfrac{-5}{2}, +\infty\right[.$

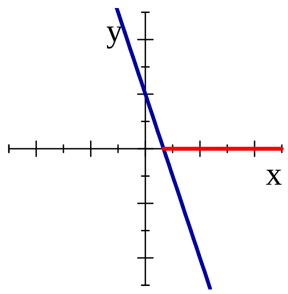
Se poate rezolva şi utilizând reprezentarea grafică a $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x + 5$ (pentru ce x graficul este deasupra axei Ox) sau semnul funcţiei f.



e) $(*) - 3x + 2 \leq 0.$

Rezolvare. $(*) \Leftrightarrow -3x \leq -2 \Leftrightarrow 3x \geq 2 \Leftrightarrow x \geq \dfrac{2}{3} \Leftrightarrow x \in \left[\dfrac{2}{3}, +\infty\right[; S = \left[\dfrac{2}{3}, +\infty\right[.$

Se poate rezolva şi utilizând reprezentarea grafică a $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = -3x + 2$ (pentru ce x graficul este sub axa Ox reunit cu punctul de intersecţie cu axa Ox) sau semnul funcţiei f.



Exerciţiul 2. Să se rezolve (să se scrie mulţimea tuturor soluţiilor) pentru:

a) $(*)\begin{cases} 2x+1\geq 0 \\ 3x-6<0 \end{cases}$

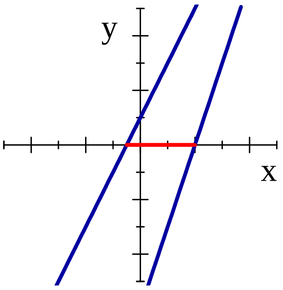
Rezolvare.

$2x+1\geq 0 \Leftrightarrow 2x\geq -1 \Leftrightarrow x\geq \dfrac{-1}{2} \Leftrightarrow x\in \left[\dfrac{-1}{2},+\infty\right[;S_1=\left[\dfrac{-1}{2},+\infty\right[.$

$3x-6<0\Leftrightarrow 3x<6\Leftrightarrow x<2\Leftrightarrow x\in \left]-\infty,2\right[;S_2=\left]-\infty,2\right[.$

$S=S_1\cap S_2=\left[\dfrac{-1}{2},+\infty\right[\cap\left]-\infty,2\right[=\left[\dfrac{-1}{2},2\right[.$

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		2		$+\infty$
$2x+1$	$-$	$- - -$	0	$+ + +$	$+$	$+ + +$	$-$
$3x-6$	$-$	$- - -$	$-$	$- - -$	0	$+ + +$	$-$
S			[	/////////	[		

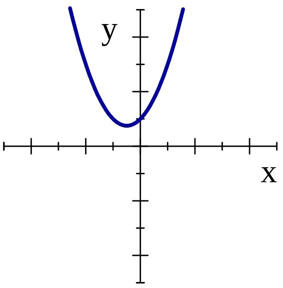


Se poate rezolva şi utilizând reprezentarea grafică a
$f_1:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f_1(x)=2x+1$ şi $f_2:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f_2(x)=3x-6$,
(pentru ce x, G_{f_1} este deasupra axei Ox reunit cu punctul de intersecţie cu axa Ox, simultan cu pentru ce x, G_{f2}este sub axa Ox) sau semnul funcţiilor f_1, f_2.

Exerciţiul 3. Să se determine următoarele mulţimi:

a) $A=\left\{x\in\mathbb{R};x^2+x+1=0\right\};$

Rezolvare. $(*)$ $x^2+x+1=0;\Delta=1^2-4\cdot1\cdot1=-3<0\Rightarrow$
$(*)$ nu are rădăcini reale$\Rightarrow$ $A=\emptyset$.



Graficul funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^2+x+1$ nu intersectează axa Ox.

b) $B=\left\{x\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R};x^2+x+1=0\right\};$

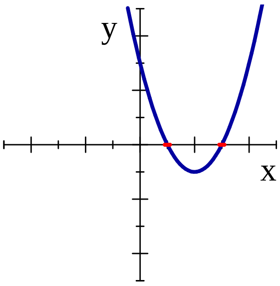
Rezolvare. $(*)$ $x^2+x+1=0;\Delta=1^2-4\cdot1\cdot1=-3<0\Rightarrow$

$x_1=\dfrac{-1+\mathrm{j}\sqrt{3}}{2\cdot 1}$ şi $x_2=\dfrac{-1-\mathrm{j}\sqrt{3}}{2\cdot 1};B=\left\{\dfrac{-1+\mathrm{j}\sqrt{3}}{2},x_2=\dfrac{-1-\mathrm{j}\sqrt{3}}{2}\right\}.$

c) $C=\left\{x\in\mathbb{R};x^2-4x+3=0\right\};$

Rezolvare. $(*)$ $x^2-4x+3=0;\Delta=4^2-4\cdot1\cdot3=4>0\Rightarrow$

$x_1 = \frac{4+\sqrt{4}}{2\cdot 1}$ şi $x_2 = \frac{-4-\sqrt{4}}{2\cdot 1}$.$C = \{3,1\}$.



Graficul funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x) = x^2-4x+3$ intersectează axa Ox în punctele de abscise $x_1 = 3, x_2 = 1$.

d) $D = \left\{x\in\mathbb{R}; x^2-5x+6 \geq 0\right\}$;

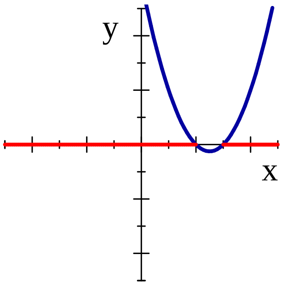
Rezolvare. $(*)$ $x^2-5x+6=0; \Delta = 5^2-4\cdot 1\cdot 6 = 1 > 0 \Rightarrow$

$x_1 = \frac{5+\sqrt{1}}{2\cdot 1} = 3$ şi $x_2 = \frac{5-\sqrt{1}}{2\cdot 1} = 2$.

$1\cdot x^2-5x+6 = 1\cdot(x-2)(x-3)$, cu $a = 1 > 0$.

x	$-\infty$		2		3		$+\infty$
x^2-5x+6		$+++$	0	$---$	0	$+++$	

$D = \left]-\infty, 2\right] \cup \left[3, +\infty\right[$.



Graficul funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x) = x^2-5x+6$ este situat deasupra axei Ox şi intersectează axa Ox corespunzător punctelor cu abscisele $x\in\left]-\infty, 2\right]\cup\left[3,+\infty\right[$.

e) $E = \left\{x\in\mathbb{R}; x^2+2x-4 < 0\right\}$;

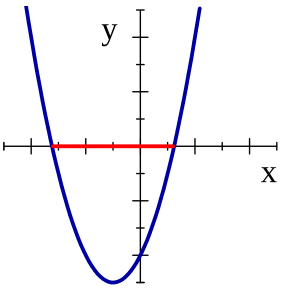
Rezolvare. $(*)$ $x^2+2x-4=0; \Delta = 2^2-4\cdot 1\cdot(-4) = 20 > 0 \Rightarrow$

$x_1 = \frac{-2+\sqrt{20}}{2\cdot 1}$ şi $x_2 = \frac{-2+\sqrt{20}}{2\cdot 1}$.

$a = 1 > 0$.

x	$-\infty$		$-1-\sqrt{5}$		$-1+\sqrt{5}$		$+\infty$
x^2+2x-4		$+++$	0	$---$	0	$+++$	

$E = \left]-1-\sqrt{5}, -1+\sqrt{5}\right[$



Graficul funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^2+2x-4$ este situat sub Ox corespunzător punctelor cu abscisele $x\in\left]-1-\sqrt{5},-1+\sqrt{5}\right[$.

Exerciţiul 4. Să se rezolve (să se scrie toate soluţiile, precizând multiplicitatea lor algebrică) pentru:
a) $(*)\, x^3-2x+1=0.$
Rezolvare. $f(x)=x^3-2x+1$ este funcţie polinomială de gradul 3. Rezolvarea ecuaţiei $(*)$ este legată de descompunerea în factori a polinomului f ataşat funcţiei f.
modul 1. $(*)\Leftrightarrow x^3-x-x+1=0\Leftrightarrow x\left(x^2-1\right)-(x-1)=0\Leftrightarrow (x-1)(x(x+1)-1)=0$

$$\Leftrightarrow (x-1)\left(x^2+x-1\right)=0\Rightarrow\begin{cases} x_1=1, m(x_1)=1\\ x_2=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}, m(x_2)=1\\ x_3=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}, m(x_3)=1\end{cases}$$

$$f(x)=(x-1)\left(x-\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right)\left(x-\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right).$$

modul 2. Se utilizează:

Teorema împărţirii cu rest. Fie $P(X)$ şi $Q(X)$ două polinoame cu $\operatorname{grad} P\geq\operatorname{grad} Q$. Atunci $\exists K(X)$ un polinom şi $\exists R(X)$ un polinom cu $\operatorname{grad} R<\operatorname{grad} Q$ astfel încât

$$P(X)=K(X)\cdot Q(X)+R(X).$$

Teorema Bezout. Fie $P(X)$ un polinom şi $a\in\mathbb{R}$(sau $\in\mathbb{C}$). Atunci restul împărţirii lui $P(X)$ la $X-a$, calculat în a, este şi $P(a)$.
Observaţie. Dacă a este rădăcină a $P(X)$ (adică $P(X)$ se împarte exact la $X-a$) atunci $P(a)=0$ şi reciproc.

$f(x)=x^3-2x+1.$

Cum coeficientul lui x^3 este $1\Rightarrow$ se caută rădăcini întregi ale f printre divizorii termenului liber. $D_1=\{\pm1\}$.

$f(1)=0\Rightarrow 1$ este rădăcină a f.

$f(-1)=2\neq0\Rightarrow -1$ nu este rădăcină a f.

modul 2.1. Cu schema lui Horner.

	x^3	x^2	x^1	x^0
	1	0	-2	1
	x^2	x^1	x^0	
$x=1$	1	1	-1	0

sau

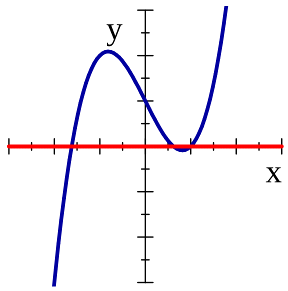
	x^3	x^2	x^1	x^0	
	1	0	-2	1	
$x=1$		1	1	-1	0

$$(*)\, x^3-2x+1=0\Leftrightarrow (x-1)\left(x^2+x-1\right)=0\Rightarrow\begin{cases} x_1=1, m(x_1)=1\\ x_2=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}, m(x_2)=1\\ x_3=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}, m(x_3)=1\end{cases}$$

modul 2.2.

$$\begin{array}{l|l} x^3-2x+1 & \underline{x-1} \\ \underline{-x^3+x^2} & x^2+x-1 \\ /x^2-2x+1 & \\ \underline{-x^2+x} & \\ / \quad -x+1 & \\ \quad \underline{x-1} & \\ \quad / \quad / & \end{array}$$

$$x^3-2x+1=0 \Leftrightarrow (x-1)\left(x^2+x-1\right)=0 \Rightarrow \begin{cases} x_1=1, m(x_1)=1 \\ x_2=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}, m(x_2)=1 \\ x_3=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}, m(x_3)=1 \end{cases}$$



b) $(*)\, x^4-x^3-2x^2+6x-4=0$, ştiind că admite rădăcina $x_1=1+\mathrm{i}$.
Rezolvare. $f(x)=x^4-x^3-2x^2+6x-4$ este o funcţie polinomială de gradul 3, cu coeficienţi reali. Deoarece admite rădăcina complexă $x_1=1+\mathrm{i}$, atunci admite ca rădăcină şi conjugata ei, $x_2=1-\mathrm{i}$.

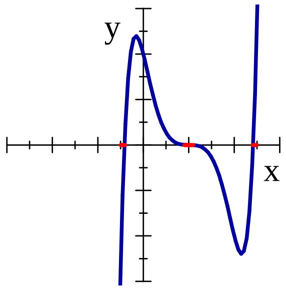
$f(x) \vdots (x-x_1)$ şi $f(x) \vdots (x-x_2) \Rightarrow f(x) \vdots (x-x_1)(x-x_2)$.
$(x-(1+\mathrm{i}))(x-(1-\mathrm{i}))=x^2-2x+2.$

$$\begin{array}{l|l} x^4-x^3-2x^2+6x-4 & \underline{x^2-2x+2} \\ \underline{-x^4+2x^3-2x^2} & x^2+x-2 \\ / \quad x^3-4x^2+6x-4 & \\ \quad \underline{-x^3+2x^2-2x} & \\ \quad\quad /-2x^2+4x-4 & \\ \quad\quad\quad \underline{2x^2-4x+4} & \\ \quad\quad\quad / \quad / \quad / & \end{array}$$

$$(*)\, x^4-x^3-2x^2+6x-4=0 \Leftrightarrow \left(x^2-2x+2\right)\left(x^2+x-2\right)=0 \Rightarrow \begin{cases} x_1=1+\mathrm{i}, m(x_1)=1 \\ x_2=1-\mathrm{i}, m(x_2)=1 \\ x_3=1, m(x_3)=1 \\ x_4=-2, m(x_4)=1 \end{cases}$$

Exerciţiul 5. Să se determine un polinom cu coeficienţi întregi, de grad minim, ce admite rădăcinile $1+\sqrt{2}, 1+\mathrm{i}$ şi rădăcina triplă 1.
Propoziţie. Dacă $P(X)$ are coeficienţi întregi şi admite ca rădăcină numărul $a+b\sqrt{d}$, cu $a,b\in\mathbb{Z}$ şi $\sqrt{d}\notin\mathbb{Z}$ atunci $P(x)$ admite ca rădăcină şi numărul $a-b\sqrt{d}$.
Propoziţie. Dacă $P(X)$ are coeficienţi reali şi admite ca rădăcină numărul $a+b\,\mathrm{i}$, cu $a,b\in\mathbb{R}$ atunci $P(x)$ admite ca rădăcină şi numărul $a-b\,\mathrm{i}$.
Rezolvare. $P(X)$ are coeficienţi întregi şi admite ca rădăcină $x_1=1+\sqrt{2} \Rightarrow$admite ca rădăcină $x_2=1-\sqrt{2}$.

$P(X)$ are coeficienţi reali şi admite ca rădăcină $x_3 = 1 + \mathrm{i} \Rightarrow$admite ca rădăcină $x_4 = 1 - \mathrm{i}$.
Atunci un polinom de grad minim ce verifică cerinţele este
$P(X) = \left(X - \left(1 + \sqrt{2}\right)\right)\left(X - \left(1 - \sqrt{2}\right)\right)(X - (1 + \mathrm{i}))(X - (1 - \mathrm{i}))(X - 1)^3 =$
$= \left(X^2 - 2X - 1\right)\left(X^2 - 2X + 2\right)\left(X^3 - 3X^2 + 3X - 1\right) =$
$= X^7 - 7X^6 + 20X^5 - 30X^4 + 23X^3 - 5X^2 - 4X + 2.$



Exerciţiul 6. Să se expliciteze funcţia
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \left|x^2 - 1\right| + \left|4 - x^2\right| + |x|$.

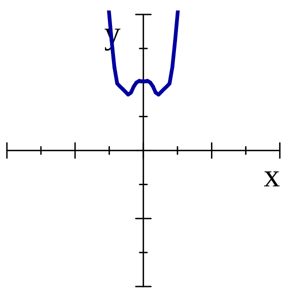
Rezolvare. Se utilizează

$$|u(x)| = \begin{cases} -u(x), & \text{dacă } u(x) < 0 \\ 0, & \text{dacă } u(x) = 0 \\ u(x), & \text{dacă } u(x) > 0 \end{cases}$$

x	$-\infty$		-2		-1		0		1		2		$+\infty$
$u_1(x) = x^2 - 1$		$+++$	$+$	$+++$	0	$---$	$-$	$---$	0	$+++$	$+$	$+++$	
$u_2(x) = 4 - x^2$		$---$	0	$+++$	$+$	$+++$	$+$	$+++$	$+$	$+++$	0	$---$	
$u_3(x) = x$		$---$	$-$	$---$	$-$	$---$	0	$+++$	$+$	$+++$	$+$	$+++$	

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} \left(x^2 - 1\right) - \left(4 - x^2\right) - x, & \text{dacă } x \in]-\infty, -2[\\ 3 + 0 + 2, & \text{dacă } x = -2 \\ \left(x^2 - 1\right) + \left(4 - x^2\right) - x, & \text{dacă } x \in]-2, -1[\\ 0 + 3 + 1, & \text{dacă } x = -1 \\ -\left(x^2 - 1\right) + \left(4 - x^2\right) - x, & \text{dacă } x \in]-1, 0[\\ 1 + 4 + 0, & \text{dacă } x = 0 \\ -\left(x^2 - 1\right) + \left(4 - x^2\right) + x, & \text{dacă } x \in]0, 1[\\ 0 + 3 + 1, & \text{dacă } x = 1 \\ \left(x^2 - 1\right) + \left(4 - x^2\right) + x, & \text{dacă } x \in]1, 2[\\ 3 + 0 + 2, & \text{dacă } x = 2 \\ \left(x^2 - 1\right) - \left(4 - x^2\right) + x, & \text{dacă } x \in]2, +\infty[\end{cases} = \begin{cases} 2x^2 - x - 5, & \text{dacă } x \in]-\infty, -2[\\ 5, & \text{dacă } x = -2 \\ -x + 3, & \text{dacă } x \in]-2, -1[\\ 4, & \text{dacă } x = -1 \\ -2x^2 - x + 3, & \text{dacă } x \in]-1, 0[\\ 5, & \text{dacă } x = 0 \\ -2x^2 + x + 3, & \text{dacă } x \in]0, 1[\\ 4, & \text{dacă } x = 1 \\ x + 3, & \text{dacă } x \in]1, 2[\\ 5, & \text{dacă } x = 2 \\ 2x^2 + x - 5, & \text{dacă } x \in]2, +\infty[\end{cases}.$$



Exercițiul 7. Să se rezolve inecuația (să se scrie mulțimea tuturor soluțiilor) :

$(*)\ |x-2|+|x+1|+|3-x|\le 5$

Rezolvare.

x	$-\infty$		-1		2		3		$+\infty$
$u_1(x)=x-2$		$---$	$-$	$---$	0	$+++$	$+$	$+++$	
$u_2(x)=x+1$		$---$	0	$+++$	$+$	$+++$	$+$	$+++$	
$u_3(x)=3-x$		$+++$	$+$	$+++$	$+$	$+++$	0	$---$	

Dacă $x\in\,]-\infty,-1[$ atunci

$(*)\Leftrightarrow-(x-2)-(x+1)+(3-x)\le 5\Leftrightarrow -3x+4\le 5\Leftrightarrow -3x\le 1\Leftrightarrow x\ge\frac{-1}{3}.$

$S_1=\,]-\infty,-1[\,\cap\left[\frac{-1}{3},+\infty\right[\,=\emptyset.$

Dacă $x=-1$ atunci

$(*)\Leftrightarrow|-1-2|+|-1+1|+|3-(-1)|\le 5\Leftrightarrow 3+0+4\le 5-$fals.

$S_2=\emptyset.$

Dacă $x\in\,]-1,2[$ atunci

$(*)\Leftrightarrow-(x-2)+(x+1)+(3-x)\le 5\Leftrightarrow -x+6\le 5\Leftrightarrow -x\le -1\Leftrightarrow x\ge 1.$

$S_3=\,]-1,2[\,\cap[1,+\infty[\,=[1,2[\,.$

Dacă $x=2$ atunci

$(*)\Leftrightarrow|2-2|+|2+1|+|3-2|\le 5\Leftrightarrow 0+3+1\le 5-$adevărat.

$S_4=\{2\}.$

Dacă $x\in\,]2,3[$ atunci

$(*)\Leftrightarrow+(x-2)+(x+1)+(3-x)\le 5\Leftrightarrow x+2\le 5\Leftrightarrow x\le 3.$

$S_5=\,]2,3[\,\cap\,]-\infty,3]=\,]2,3[\,.$

Dacă $x=3$ atunci

$(*)\Leftrightarrow|3-2|+|3+1|+|3-3|\le 5\Leftrightarrow 1+4+0\le 5-$adevărat.

$S_6=\{3\}.$

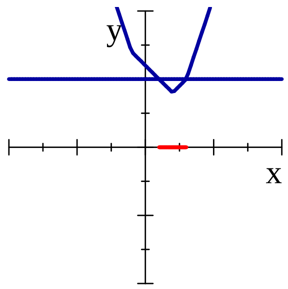
Dacă $x\in\,]3,+\infty[$ atunci

$(*)\Leftrightarrow+(x-2)+(x+1)-(3-x)\le 5\Leftrightarrow 3x-4\le 5\Leftrightarrow 3x\le 9\Leftrightarrow x\le 3.$

$S_7=\,]3,+\infty[\,\cap\,]-\infty,3]=\emptyset.$

Concluzie:

$S=S_1\cup S_2\cup S_3\cup S_4\cup S_5\cup S_6\cup S_7==\emptyset\cup\emptyset\cup[1,2[\,\cup\{2\}\cup\,]2,3[\,\cup\{3\}\cup\emptyset=[1,3]\,.$



Graficul funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=|x-2|+|x+1|+|3-x|$ este situat sub dreapta de ecuație $y=5$ corespunzător punctelor cu abscisele $x\in[1,3]\,.$

Exercițiul 8. Să se descompună următoarele fracții în fracții simple pe un interval $\mathbb{I}$ pe care fracția este definită:

a) $f:\mathbb{I}\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\dfrac{1}{x^2-9}.$

Rezolvare. $P(x)=1,\text{grad}\,P=0.Q(x)=x^2-9,\text{grad}\,Q=2.\,\text{grad}\,P<\text{grad}\,Q.$

$Q(x) = 0 \Leftrightarrow (x-3)(x+3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 3, m(x_1) = 1 \\ x_2 = -3, m(x_2) = 1 \end{cases}.$

Se caută A, B a.î.$(*)\ \dfrac{1}{x^2-9} = \dfrac{A}{x-3} + \dfrac{B}{x+3}, \forall x \in \mathbb{I}.$

modul 1. -se aplică pentru orice fracţie, pentru găsirea tuturor coeficienţilor. Se aduc fracţiile din cei doi mebri ai egalităţii $(*)$ la acelaşi numitor, se elimină numitorul, apoi se identifică coeficienţii polinoamelor care apar.

$(*)\ \dfrac{1}{x^2-9} = \dfrac{^{x+3)}A}{x-3} + \dfrac{^{x-3)}B}{x+3}, \forall x \in \mathbb{I} \Leftrightarrow \dfrac{1}{x^2-9} = \dfrac{A(x+3)+B(x-3)}{(x-3)(x+3)}, \forall x \in \mathbb{I} \Leftrightarrow$

$1 = A(x+3) + B(x-3), \forall x \in \mathbb{I} \Leftrightarrow \begin{matrix} x^1: \\ x^0: \end{matrix} \begin{cases} 0 = A+B \\ 1 = 3A-3B \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = \frac{1}{6} \\ B = \frac{-1}{6} \end{cases}$

modul 2. -se aplică numai pentru găsirea coeficientului lui $\dfrac{1}{x-a}$, atunci când a este rădăcină reală simplă pentru $Q(x)$.

•pentru $A = ?$

$(*)|\cdot(x-3) \Rightarrow \dfrac{1}{x+3} = A + B\dfrac{x-3}{x+3}$

$x \to 3 \Rightarrow \frac{1}{6} = A + 0.$

•pentru $B = ?$

$(*)|\cdot(x+3) \Rightarrow \dfrac{1}{x-3} = A\dfrac{x+3}{x-3} + B$

$x \to -3 \Rightarrow \frac{1}{-6} = 0 + B.$

Concluzie: $\dfrac{1}{x^2-9} = \dfrac{\frac{1}{6}}{x-3} + \dfrac{\frac{-1}{6}}{x+3}, \forall x \in \mathbb{I}.$

b) $f : \mathbb{I} \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \dfrac{1}{x^2+x-2}.$

Rezolvare.$P(x) = 1, \operatorname{grad} P = 0. Q(x) = x^2+x-2, \operatorname{grad} Q = 2. \operatorname{grad} P < \operatorname{grad} Q.$

$Q(x) = 0 \Leftrightarrow x^2+x-2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1, m(x_1) = 1 \\ x_2 = -2, m(x_2) = 1 \end{cases}.$

Se caută A, B a.î.$(*)\ \dfrac{1}{x^2+x-2} = \dfrac{A}{x-1} + \dfrac{B}{x+2}, \forall x \in \mathbb{I}.$

modul 1.$(*)\ \dfrac{1}{x^2+x-2} = \dfrac{^{x+2)}A}{x-1} + \dfrac{^{x-1)}B}{x+2}, \forall x \in \mathbb{I} \Leftrightarrow \dfrac{1}{x^2+x-2} = \dfrac{A(x+2)+B(x-1)}{(x-1)(x+2)}, \forall x \in \mathbb{I} \Leftrightarrow$

$1 = A(x+2) + B(x-1), \forall x \in \mathbb{I} \Leftrightarrow \begin{matrix} x^1: \\ x^0: \end{matrix} \begin{cases} 0 = A+B \\ 1 = 2A-B \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = \frac{1}{3} \\ B = \frac{-1}{3} \end{cases}$

modul 2.

•pentru $A = ?$

$(*)|\cdot(x-1) \Rightarrow \dfrac{1}{x+2} = A + B\dfrac{x-1}{x+2}$

$x \to 1 \Rightarrow \frac{1}{3} = A + 0.$

•pentru $B = ?$

$(*)|\cdot(x+2) \Rightarrow \dfrac{1}{x-1} = A\dfrac{x+2}{x-1} + B$

$x \to -2 \Rightarrow \frac{1}{-3} = 0 + B.$

Concluzie: $\dfrac{1}{x^2+x-2} = \dfrac{\frac{1}{3}}{x-1} + \dfrac{\frac{-1}{3}}{x+2}, \forall x \in \mathbb{I}.$

c) $f : \mathbb{I} \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \dfrac{1}{x^3+1}.$

Rezolvare.$P(x) = 1, \operatorname{grad} P = 0. Q(x) = x^3+1, \operatorname{grad} Q = 3. \operatorname{grad} P < \operatorname{grad} Q.$

$$Q(x) = 0 \Leftrightarrow (x+1)\left(x^2 - x + 1\right) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -1, m(x_1) = 1 \\ x_2 = \frac{1-i\sqrt{3}}{2}, m(x_2) = 1 \\ x_3 = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}, m(x_3) = 1 \end{cases}.$$

Se caută A, B, C a.î. $(*)\ \dfrac{1}{x^3+1} = \dfrac{A}{x+1} + \dfrac{Bx+C}{x^2-x+1}, \forall x \in \mathbb{I}.$

<u>modul 1.</u> $(*)\ \dfrac{1}{x^3+1} = \dfrac{{}^{x^2-x+1)}A}{x+1} + \dfrac{{}^{x+1)}Bx+C}{x^2-x+1}, \forall x \in \mathbb{I} \Leftrightarrow$

$\dfrac{1}{x^3+1} = \dfrac{A\left(x^2-x+1\right) + (Bx+C)(x+1)}{(x+1)(x^2-x+1)}, \forall x \in \mathbb{I} \Leftrightarrow$

$1 = A\left(x^2-x+1\right) + B\left(x^2+x\right) + C(x+1), \forall x \in \mathbb{I} \Leftrightarrow$

$$\begin{matrix} x^2: \\ x^1: \\ x^0: \end{matrix} \begin{cases} 0 = A + B \\ 0 = -A + B + C \\ 1 = A \qquad + C \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = \frac{1}{3} \\ B = \frac{-1}{3} \\ C = \frac{2}{3} \end{cases}$$

<u>modul 2.</u>-se aplică doar parţial

•pentru $A = ?$

$(*)| \cdot (x+1) \Rightarrow \dfrac{1}{x^2-x+1} = A + (Bx+C)\dfrac{x+1}{x^2-x+1}$

$x \to -1 \Rightarrow \frac{1}{3} = A + 0.$

•pentru $B, C = ?$ se înlocuieşte A găsit în sistemul de la modul 1.

Concluzie: $\dfrac{1}{x^3+1} = \dfrac{\frac{1}{3}}{x+1} + \dfrac{\frac{-1}{3}x + \frac{2}{3}}{x+2}, \forall x \in \mathbb{I}.$

Exerciţiul 9. Să se determine domeniul maxim de definiţie pentru funcţiile:

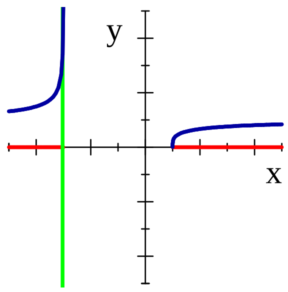
a) $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \sqrt[4]{\dfrac{x-1}{x+3}};$

Rezolvare.

$$C.E. \begin{cases} \dfrac{x-1}{x+3} \geq 0 - \text{pentru radical de ordin par} \\ x+3 \neq 0 - \text{pentru fracţie} \end{cases}$$

x	$-\infty$		-3		1		$+\infty$
$x-1$		$- - -$	$-$	$- - -$	0	$+ + +$	
$x+3$		$- - -$	0	$+ + +$	$+$	$+ + +$	
$\dfrac{x-1}{x+3}$		$+ + +$	$\vert$	$- - -$	0	$+ + +$	

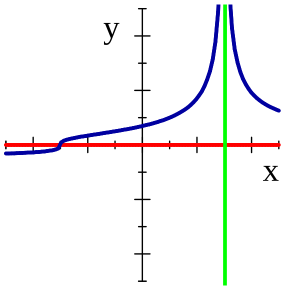
$D =]-\infty, -3[\cup [1, +\infty[.$



b) $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \sqrt[3]{\dfrac{x+3}{x^2-6x+9}};$

Rezolvare. $C.E.\begin{cases} \dfrac{x+3}{x^2-6x+9} - \text{pentru radical de ordin impar nu se impun } C.E. \\ x^2-6x+9 \neq 0 - \text{pentru fracţie} \end{cases}$

$D =]-\infty, 3[\cup]3, +\infty[$.

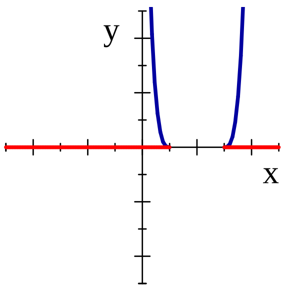


Exerciţiul 10. Să se determine domeniul maxim de definiţie pentru funcţia:

$f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \left(x^2-4x+3\right)^{\sqrt{7}}$;

Rezolvare. $C.E. \left\{ x^2-4x+3 > 0 - \text{pentru funcţia putere de exponent real } \sqrt{7} \right.$

$D =]-\infty, 1[\cup]3, +\infty[$.



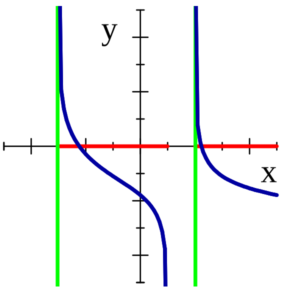
Exerciţiul 11. Să se determine domeniul maxim de definiţie pentru funcţia:

$f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \ln \dfrac{x-1}{x^2+x-6}$;

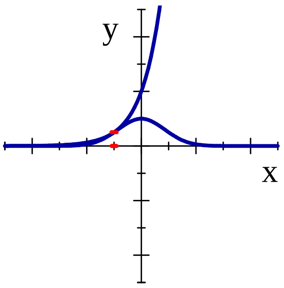
Rezolvare. $C.E.\begin{cases} \dfrac{x-1}{x^2+x-6} > 0 - \text{pentru funcţia logaritm} \\ x^2+x-6 \neq 0 - \text{pentru fracţie} \end{cases}$

x	$-\infty$		-3		1		2		$+\infty$
$x-1$		$---$	$-$	$---$	0	$+++$	$+$	$+++$	
x^2+x-6		$+++$	0	$---$	$-$	$---$	0	$+++$	
$\dfrac{x-1}{x^2+x-6}$		$---$	$\vert$	$+++$	0	$---$	$\vert$	$+++$	

$D =]-3, 1[\cup]2, +\infty[$.



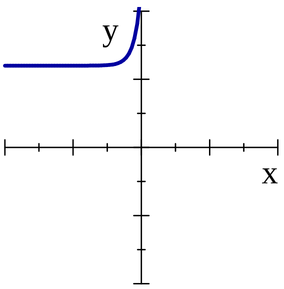
Exerciţiul 12. Să se rezolve (să se scrie mulţimea tuturor soluţiilor) pentru:
a) $(*)\, 2^{2x+1} = 2^{-x^2}$.
Rezolvare. $(*) \overset{\text{funcţia exponenţială cu baza 2}}{\underset{\text{este injectivă}}{\Leftrightarrow}} 2x+1 = -x^2 \Leftrightarrow x = -1; S = \{-1\}$.



b) $(*)\, 7^{2x} + 5 \cdot 7^x + 6 = 0$.
Rezolvare. Se face substituţia: $7^x = t, t > 0$.

$$(*) \Leftrightarrow t^2 + 5t + 6 = 0 \Rightarrow \begin{cases} t_1 = -2 \\ t_2 = -3 \end{cases}$$

Se revine la substituţie: $\begin{cases} 7^x = -2 < 0 - \text{imposibil} \\ 7^x = -3 < 0 - \text{imposibil} \end{cases} \Rightarrow S = \emptyset$.

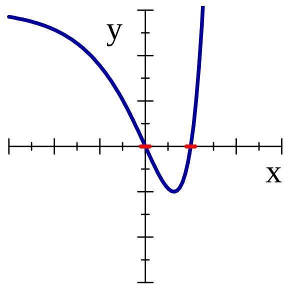


c) $(*)\, 3^{2x} - 4 \cdot 3^x + 3 = 0$.
Rezolvare. Se face substituţia: $3^x = t, t > 0$.

$$(*) \Leftrightarrow t^2 - 4t + 3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} t_1 = 1 \\ t_2 = 3 \end{cases}$$

Se revine la substituţie:

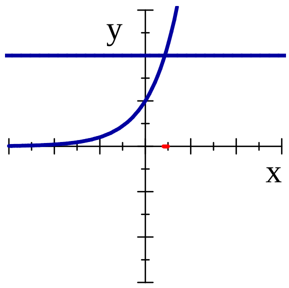
$$\begin{cases} 3^x = 1 \\ 3^x = 3 \end{cases} \overset{\text{funcţia exponenţială cu baza 3}}{\underset{\text{este injectivă}}{\Leftrightarrow}} \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases} \Rightarrow S = \{0, 1\}.$$



d) $(*)\, 5^x = 2$

Rezolvare. modul 1 $(*) \Leftrightarrow x = \log_5 2; S = \{\log_5 2\}$.

modul 2 $(*)| \Leftrightarrow \ln 5^x = \ln 2 \Leftrightarrow x \ln 5 = \ln 2 \Leftrightarrow x = \frac{\ln 2}{\ln 5}; S = \left\{\frac{\ln 2}{\ln 5}\right\}$.



e) $(*)\, 5^x + 5^{x+1} + 5^{x+2} = 7^x + 7^{x+1} + 7^{x+2}$.

Rezolvare. $(*) \Leftrightarrow 5^x\left(1+5+5^2\right) = 7^x\left(1+7+7^2\right) \Leftrightarrow 5^x \cdot 31 = 7^x \cdot 57 \Leftrightarrow$

$$\left(\frac{5}{7}\right)^x = \frac{57}{31}\Big|\ln \Leftrightarrow \ln\left(\frac{5}{7}\right)^x = \ln\frac{57}{31} \Leftrightarrow x\ln\left(\frac{5}{7}\right) = \ln\frac{57}{31} \Leftrightarrow$$

$$x = \frac{\ln 57 - \ln 31}{\ln 5 - \ln 7}; S = \left\{\frac{\ln 57 - \ln 31}{\ln 5 - \ln 7}\right\}.$$

f) $(*)\, 2^{20x+1} < 64$.

Rezolvare. $(*) \Leftrightarrow 2^{20x+1} < 2^6 \underset{\text{este strict crescătoare}}{\overset{\text{f. exponențială de bază } a=2>1}{\Leftrightarrow}} 20x + 1 < 6 \Leftrightarrow x < \frac{5}{20} \Leftrightarrow$

$$x \in \left]-\infty, \frac{1}{4}\right[\Leftrightarrow S = \left]-\infty, \frac{1}{4}\right[.$$

g) $(*)\, 4^x - 2 \cdot 5^{2x} < 10^x$.

Rezolvare. $(*) \Leftrightarrow 2^{2x} - 2 \cdot 5^{2x} < 2^x \cdot 5^x\big| : 5^{2x} \Leftrightarrow \left(\frac{2}{5}\right)^{2x} - \left(\frac{2}{5}\right)^x - 2 < 0.$

Notând $u = \left(\frac{2}{5}\right)^x, u > 0$, inecuaţia devine $u^2 - u - 2 < 0 \Leftrightarrow u \in \left]-1, 2\right[$.

Deci $u \in \left]0, +\infty\right[\cap \left]-1, 2\right[= \left]0, 2\right[$.

Se revine la substituţie $0 < u < 2 \Leftrightarrow 0 < \left(\frac{2}{5}\right)^x < 2$.

- $0 < \left(\frac{2}{5}\right)^x \Leftrightarrow x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow S_1 = \mathbb{R}$.
- $\left(\frac{2}{5}\right)^x < 2 \Leftrightarrow \left(\frac{2}{5}\right)^x < \left(\frac{2}{5}\right)^{\log_{\frac{2}{5}} 2} \underset{\text{este strict descrescătoare}}{\overset{\text{f. exponențială de bază } a=\frac{2}{5}<1}{\Leftrightarrow}}$

$x > \log_{\frac{2}{5}} 2 \Leftrightarrow x \in \left]\log_{\frac{2}{5}} 2, +\infty\right[\Leftrightarrow S_2 = \left]\log_{\frac{2}{5}} 2, +\infty\right[.$

$S = S_1 \cap S_2 = \left]\log_{\frac{2}{5}} 2, +\infty\right[.$

Exercițiul 13. Să se rezolve (să se scrie mulțimea tuturor soluțiilor) pentru:

a) $(*) \log_{x+4}\left(x^2 - 1\right) = \log_{x+4}(5 - x)$.

Rezolvare. Se determină D_E, domeniul maxim de studiu.

$$C.E. \begin{cases} x^2 - 1 > 0 - \text{pentru funcţia logaritm} \\ 5 - x > 0 - \text{pentru funcţia logaritm} \\ x + 4 > 0, x + 4 \neq 1 - \text{pentru funcţia logaritm} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[\\ x \in]-\infty, 5[\\ x \in]-4, -3[\cup]-3, +\infty[\end{cases}$$

$D_E =]-4, -3[\cup]-3, -1[\cup]1, 5[.$

$$(*) \underset{\text{este injectivă}}{\overset{\text{funcţia logaritm cu baza } x+4}{\Leftrightarrow}} x^2 - 1 = 5 - x \Leftrightarrow x^2 + x - 6 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -3 \notin D_E \\ x_2 = 2 \in D_E \end{cases}$$

$S = \{2\}.$

b) $(*) \log_3\left(\dfrac{1 + 2x}{1 + x}\right) < 1.$

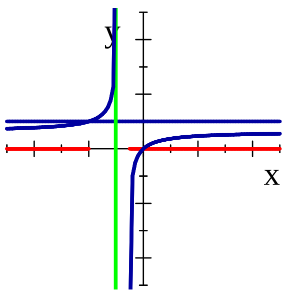
Rezolvare. $$C.E. \begin{cases} \dfrac{1 + 2x}{1 + x} > 0 - \text{pentru funcţia logaritm} \\ 1 + x \neq 0 - \text{pentru funcţia raţională} \end{cases} \Leftrightarrow \left\{ x \in]-\infty, -1[\cup \left]\tfrac{-1}{2}, +\infty\right[\right.$$

$D_E =]-\infty, -1[\cup \left]\frac{-1}{2}, +\infty\right[$

$$(*) \Leftrightarrow \log_3\left(\frac{1 + 2x}{1 + x}\right) < \log_3 3 \underset{\text{este strict crescătoare}}{\overset{\text{f. logaritmică de bază } a=3>1}{\Leftrightarrow}} \frac{1 + 2x}{1 + x} < 3 \Leftrightarrow$$

$$\frac{1 + 2x - 3 - 3x}{1 + x} < 0 \Leftrightarrow \frac{-x - 2}{1 + x} < 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty, -2[\cup]-1, +\infty[.$$

$S = D_E \cap (]-\infty, -2[\cup]-1, +\infty[) =]-\infty, -2[\cup \left]\frac{-1}{2}, +\infty\right[$



Exercițiul 14. Să se rezolve (să se scrie mulțimea tuturor soluțiilor) pentru:

a) $(*) \sin x = 0, x \in [0, 2\pi]$.
$S = \{0, \pi, 2\pi\}$.

b) $(*) \cos x = \frac{1}{2}, x \in [0, \pi]$.
$S = \left\{\frac{\pi}{3}\right\}$

c) $(*) \operatorname{tg} x \leq 1, x \in [0, \pi] \setminus \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$.
$S = \left[0, \frac{\pi}{4}\right] \cup \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right]$.