CURS NR. 10
Analiză matematică, AIA

CALCUL INTEGRAL

Teoria integrabilităţii pentru $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

1. Integrala nedefinită (primitive) pentru $f : \mathbb{I} \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

1.1. Definiţii. Exemple. Proprietăţi

A se recapitula din liceu. În continuare, este prezentată o schiţă.

Definiţia 1.1.1. Fie $\mathbb{I} \subseteq \mathbb{R}$ un interval cu interior nevid şi $f : \mathbb{I} \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Funcţia f *admite primitivă pe* $\mathbb{I}$ dacă există o funcţie $F : \mathbb{I} \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ astfel încât

(i) F este derivabilă pe $\mathbb{I}$.

(ii) $F'(x) = f(x), \forall x \in \mathbb{I}$.

Dacă există, funcţia $F : \mathbb{I} \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se numeşte *primitivă (antiderivată) pe intervalul* $\mathbb{I}$ *a funcţiei* f.

Se va reaminti pentru ce funcţii f există primitive F, se va studia unicitatea primitivei unei funcţii f în caz de existenţă şi metodele de determinare a unei primitive F pentru o funcţie f.

Propoziţia 1.1.1. Fie $\mathbb{I} \subseteq \mathbb{R}$ un interval cu interior nevid şi $f : \mathbb{I} \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Dacă $F : \mathbb{I} \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este o primitivă pe intervalul $\mathbb{I}$ a funcţiei f, atunci toate primitivele funcţiei f sunt de forma $F + C$, unde

$C : \mathbb{I} \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $C(x) = c$, $c \in \mathbb{R}$

este o funcţie constantă.

Observaţia 1.1.1. Din Propoziţia 1.1.1 se obţine că, dacă o funcţie f admite primitivă pe un interval, atunci f admite o infinitate de primitive pe un interval. Din acest motiv, se precizează "*f admite primitive*" în loc de "f admite primitivă".

Observaţia 1.1.2. **a)** Definiţia primitivei s-ar putea extinde şi la funcţii definite pe reuniuni finite de intervale disjuncte, deoarece condiţiile din definiţie au sens şi în acest caz, mai general. Însă nu este adevărat că două astfel de primitive diferă diferă printr-o constantă. De exemplu, fie

$f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{x}$.

Atunci funcţiile

$$F, G : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}, F(x) = \begin{cases} \ln(-x), & \text{dacă } x \in \left]-\infty, 0\right[\\ \ln x, & \text{dacă } x \in \left]0, +\infty\right[\end{cases}; G(x) = \begin{cases} \ln(-x) + 1, & \text{dacă } x \in \left]-\infty, 0\right[\\ \ln x + 2, & \text{dacă } x \in \left]0, +\infty\right[\end{cases}$$

sunt derivabile pe $\left]-\infty, 0\right[\cup \left]0, +\infty\right[$ şi verifică

$F'(x) = f(x), \forall x \in \left]-\infty, 0\right[\cup \left]0, +\infty\right[$ şi $G'(x) = f(x), \forall x \in \left]-\infty, 0\right[\cup \left]0, +\infty\right[$.

Totuşi diferenţa este $G(x) - F(x) = \begin{cases} 1, & \text{dacă } x \in \left]-\infty, 0\right[\\ 2, & \text{dacă } x \in \left]0, +\infty\right[\end{cases}$.

$\bigcirc$**Observaţia 1.1.3**. *O funcţie care admite primitive are proprietatea lui Darboux. Reciproc nu, există funcţii care au proprietatea lui Darboux şi totuşi nu au primitive.* De exemplu:

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} \sin \dfrac{1}{x}, & \text{dacă } x \in \left]-\infty, 0\right[\\ \dfrac{1}{2}, & \text{dacă } x = 0 \end{cases}.$$

În exerciţii, se poate folosi că, dacă f nu are proprietatea lui Darboux, atunci f nu admite primitive. De exemplu:

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}-1, & \text{dacă } x\in\,]-\infty,0[\\ 1, & \text{dacă } x\in[0,+\infty[\end{cases}$$

Propoziţia 1.1.2. Fie $\mathbb{I}\subseteq\mathbb{R}$ un interval cu interior nevid. *Dacă $f:\mathbb{I}\to\mathbb{R}$ este continuă pe $\mathbb{I}$ atunci f admite primitive pe $\mathbb{I}$.*

Reciproc nu, există funcţii care nu sunt continue şi totuşi admit primitive.

Observaţia 1.1.4. *Există funcţii $f:\mathbb{I}\to\mathbb{R}$* care *admit primitive pe $\mathbb{I}$, dar aceste primitive nu pot fi exprimate cu funcţii elementare.* De exemplu, integralele nedefinite

$\int e^{-x^2}dx, x\in\mathbb{R}$; $\int\cos x^2dx, x\in\mathbb{R}$; $\int\sin x^2dx, x\in\mathbb{R}$;

$\int\frac{\sin x}{x}dx, x\in\,]0,+\infty[\,$; $\int\frac{\cos x}{x}dx, x\in\,]0,+\infty[\,$; $\int\frac{x}{\ln x}dx, x\in\,]0,+\infty[\,$;

$\int R\left(x,\sqrt{P(x)}\right)dx$, cu grad $P\geq 3$ ş.a.

există, dar nu se pot exprima cu funcţii elementare.

Exemplul 1.1.1. Să se studieze dacă următoarele funcţii admit primitive pe intervalul pe care sunt definite:

a) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}\dfrac{x\cos x}{x-\frac{\pi}{2}}, & \text{dacă } x\neq\frac{\pi}{2}\\ -\frac{\pi}{2}, & \text{dacă } x=\frac{\pi}{2}\end{cases}$;

Rezolvare. *Este un exemplu de funcţie care este continuă pe* $\mathbb{R}$ (şi în $a=0$), *deci admite primitive pe* $\mathbb{R}$. Se studiază dacă f este continuă pe $\mathbb{I}=\mathbb{R}$.

- f este continuă pe $\left]-\infty,\frac{\pi}{2}\right[\cup\left]\frac{\pi}{2},+\infty\right[$;
- f este continuă în $a=\frac{\pi}{2}\in\mathbb{R}\cap\mathbb{R}'\Leftrightarrow\exists\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}f(x)=f\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}f(x)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{x\cos x}{x-\frac{\pi}{2}}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(-x)\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{\frac{\pi}{2}-x}=-\frac{\pi}{2}=f\left(\frac{\pi}{2}\right).$$

Deci f este continuă pe $\mathbb{R}\Rightarrow f$ admite primitive pe $\mathbb{R}$
(dar aceste primitive nu pot fi exprimate cu funcţii elemetare).

b) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}2x\sin\dfrac{1}{x}-\cos\dfrac{1}{x}, & \text{dacă } x\neq 0\\ 0, & \text{dacă } x=0\end{cases}$;

Rezolvare. *Este un exemplu de funcţie care nu este continuă pe* $\mathbb{R}$ (în $a=0$), *dar admite primitive pe* $\mathbb{R}$. Se studiază dacă f este continuă pe $\mathbb{I}=\mathbb{R}$.

- f este continuă pe $]-\infty,0[\,\cup\,]0,+\infty[\,$;
- f este continuă în $a=0\in\mathbb{R}\cap\mathbb{R}'\Leftrightarrow\exists\lim\limits_{x\to0}f(x)=f(0)$.

Cum $\nexists\lim\limits_{x\to0}\cos\dfrac{1}{x}\Rightarrow\nexists\lim\limits_{x\to0}f(x)$.

Deci f nu este continuă pe $\mathbb{R}$. *Nu se poate afirma* dacă f admite sau nu primitive pe $\mathbb{R}$.
Se presupune că există $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ care să fie primitivă pentru f pe $\mathbb{R}$, adică o funcţie care să verifice (i) şi (ii) din Definiţie. Se observă că

$$\left(x^2\sin\frac{1}{x}\right)'=2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x},\forall x\in\,]-\infty,0[\,\cup\,]0,+\infty[\,.$$

Atunci F ar avea legea de asociere

$$F(x)=\begin{cases}x^2\sin\dfrac{1}{x}+c_1, & \text{dacă } x\in\,]-\infty,0[\\ c_2, & \text{dacă } x=0\\ x^2\sin\dfrac{1}{x}+c_3, & \text{dacă } x\in\,]0,+\infty[\end{cases},\text{ cu } c_1\in\mathbb{R},\ c_2\in\mathbb{R},\ c_3\in\mathbb{R}.$$

Se anticipează că mulţimea de primitive va depinde de o singură constantă $c\in\mathbb{R}$. Pentru ca F să fie derivabilă pe $\mathbb{R}$ e necesar să Se impune ca F să fie continuă pe $\mathbb{R}$.

$\bullet F$ este continuă pe $]-\infty,0[\cup]0,+\infty[$;

$\bullet F$ este continuă în $a=0\in\mathbb{R}\cap\mathbb{R}'\Leftrightarrow\exists\lim\limits_{x\to0}F(x)=F(0)$.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to0,x<0}F(x)=\lim\limits_{x\to0,x<0}\left(x^2\sin\dfrac{1}{x}+c_1\right)=0+c_1\\ \lim\limits_{x\to0,x>0}F(x)=\lim\limits_{x\to0,x>0}\left(x^2\sin\dfrac{1}{x}+c_3\right)=0+c_3\\ F(0)=c_2\end{array}\right\}\Rightarrow c_1=c_2=c_3\overset{\text{not}}{=}c\in\mathbb{R}.$$

Se obţine $F(x)=\begin{cases}x^2\sin\dfrac{1}{x}+c, & \text{dacă } x\neq0\\ c, & \text{dacă } x=0\end{cases}$, cu $c\in\mathbb{R}$.

Se impune ca F să fie derivabilă pe $\mathbb{R}$

$\bullet F$ este derivabilă pe $]-\infty,0[\cup]0,+\infty[$; în plus

$F'(x)=2x\sin\dfrac{1}{x}-\cos\dfrac{1}{x}=f(x),\forall x\in]-\infty,0[\cup]0,+\infty[$

$\bullet F$ este derivabilă în $a=0\in\mathbb{R}\cap\mathbb{R}'\Leftrightarrow\exists\lim\limits_{x\to0}\dfrac{F(x)-F(0)}{x-0}$. Într-adevăr

$$\exists\lim_{x\to0}\frac{F(x)-F(0)}{x-0}=\lim_{x\to0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}+c-c}{x-0}=\lim_{x\to0}x\sin\frac{1}{x}=0$$

$\Rightarrow F$ este derivabilă în $a=0$ şi $F'(0)=0$.

Dar $f(0)=0=F'(0)\Rightarrow F$ este primitivă pentru f.

$\bigcirc$**c)** $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},f(x)=\begin{cases}0, & \text{dacă } x\in]-\infty,0]\\ \sin\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x}\cos\dfrac{1}{x}, & \text{dacă } x\in]0,+\infty[\end{cases}$;

Indicaţie: *Este un exemplu de funcţie care nu este continuă pe* $\mathbb{R}$ (în $a=0$) şi *nici nu admite primitive pe* $\mathbb{R}$. Se demonstrează că nu admite primitive analog cu b), încercând

$$F(x)=\begin{cases}c_1, & \text{dacă } x\in]-\infty,0[\\ c_2, & \text{dacă } x=0\\ x\sin\dfrac{1}{x}+c_3, & \text{dacă } x\in]0,+\infty[\end{cases},\ \text{cu } c_1\in\mathbb{R},\ c_2\in\mathbb{R},\ c_3\in\mathbb{R}.$$

Definiţia 1.1.2. Fie $\mathbb{I}\subseteq\mathbb{R}$ un interval cu interior nevid şi $f:\mathbb{I}\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. Dacă există, mulţimea tuturor primitivelor pe intervalul $\mathbb{I}$ ale funcţiei f,

$\{F+C;F$ este o primitivă pe intervalul $\mathbb{I}$ a funcţiei f şi $C:\mathbb{I}\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R},C(x)=c,c\in\mathbb{R}\}$

se numeşte *integrala nedefinită a funcţiei* f *pe intervalul* $\mathbb{I}$ şi se notează $\boxed{\int f(x)\,dx}$.

Operaţia de determinare a primitivelor unei funcţii (care admite primitive) se numeşte *integrare.*

În exerciţii se utilizează notaţia clasică

$\boxed{\int f(x)\,dx=F(x)+c=F(x;c)\,,}\forall x\in\mathbb{I}$ (variabila primitivei sau variabilă de integrare), $\forall c\in\mathbb{R}$ (constantă de indexare a mulţimii de primitive).

Observaţia 1.1.5. Dacă $g:\mathbb{I}\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ este derivabilă pe $\mathbb{I}$, atunci ea este o primitivă pentru funcţia derivată $g':\mathbb{I}\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, adică

$\boxed{\int g'(x)\,dx=g(x)+c,}\forall x\in\mathbb{I}$ (variabila primitivei sau variabila de integrare), $\forall c\in\mathbb{R}$ (constantă).

De exemplu,

$\int 2\sin x\cos x dx=\int\left((\sin x)^2\right)'dx=(\sin x)^2+c,\forall x\in\mathbb{R},\forall c\in\mathbb{R}.$

$\int\dfrac{1}{1+x^2}dx=\int(\operatorname{arctg}x)'\,dx=\operatorname{arctg}x+c,\forall x\in\mathbb{R},\forall c\in\mathbb{R}.$

Teorema 1.1.2.(**de liniaritate a integralei nedefinite**) Fie $\mathbb{I}\subseteq\mathbb{R}$ un interval cu interior nevid şi $f,g:\mathbb{I}\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. Fie $\alpha\in\mathbb{R}$. Dacă f şi g admit primitive pe $\mathbb{I}$ atunci funcţiile $f+g$ şi αf admit primitive pe $\mathbb{I}$ şi

$\int(f+g)(x)\,dx=\int f(x)\,dx+\int g(x)\,dx,\forall x\in\mathbb{I}$; $\int(\alpha\cdot f)(x)\,dx=\alpha\int f(x)\,dx,\forall x\in\mathbb{I}$.

Demonstraţie. Rezultă imediat din Definiţia 1.1.1. Se menţionează că

$\int f(x)\,dx=\int f(x)\,dx+c,\forall x\in\mathbb{I},c\in\mathbb{R}$.

Se anticipează secţiunea 1.3 şi se prezintă în comun pentru funcţii simplu şi compus definite:

Teorema 1.1.1.(**integrale nedefinite ale funcţiilor elementare**) Fie $u:\mathbb{I}\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ o funcţie derivabilă pe $\mathbb{I}$ cu derivata continuă, unde $\mathbb{I}$ este interval cu interior nevid din $\mathbb{R}$.

1°. •Pentru $n\in\mathbb{N}$ fixat $\Rightarrow$

$$\boxed{\int x^n dx=\frac{1}{n+1}x^{n+1}+c,\forall x\in\mathbb{R},c\in\mathbb{R}.}$$

$$\boxed{\int u^n(x)\cdot u'(x)\,dx=\frac{1}{n+1}u^{n+1}(x)+c,\forall x\in\mathbb{I},c\in\mathbb{R}.}$$

Exemple: a) $\int x^{2020}dx=\dfrac{1}{2021}x^{2021}+c,\forall x\in\mathbb{R},c\in\mathbb{R}$.

b) $\int\left(5x^7+3x+2\right)^{2020}\cdot\left(35x^6+3\right)dx=\dfrac{1}{2021}\left(5x^7+3x+2\right)^{2021}+c,\forall x\in\mathbb{R},c\in\mathbb{R}$.

c) $\int(\sin x)^{2020}\cdot(\cos x)\,dx=\dfrac{1}{2021}(\sin x)^{2021}+c,\forall x\in\mathbb{R},c\in\mathbb{R}$.

d) $\int(\operatorname{arctg}x)^{2020}\cdot\left(\dfrac{1}{1+x^2}\right)dx=\dfrac{1}{2021}(\operatorname{arctg}x)^{2021}+c,\forall x\in\mathbb{R},c\in\mathbb{R}$.

•Pentru $m\in\mathbb{Z},m\leq-2$ fixat $\Rightarrow$

$$\boxed{\int x^m dx=\begin{cases}\dfrac{1}{m+1}x^{m+1}+c_1, & \forall x\in\left]-\infty,0\right[,c_1\in\mathbb{R}\\ \dfrac{1}{m+1}x^{m+1}+c_2, & \forall x\in\left]0,+\infty\right[,c_2\in\mathbb{R}\end{cases}.}$$

$$\boxed{\int u^m(x)\cdot u'(x)\,dx=\begin{cases}\dfrac{1}{m+1}u^{m+1}(x)+c_1, & \forall x\in\mathbb{I}\text{ a.î. }u(x)\in\left]-\infty,0\right[,c_1\in\mathbb{R}\\ \dfrac{1}{m+1}u^{m+1}(x)+c_2, & \forall x\in\mathbb{I}\text{ a.î. }u(x)\in\left]0,+\infty\right[,c_2\in\mathbb{R}\end{cases}}$$

Exemple: a) $\int\dfrac{1}{x^7}dx=\int x^{-7}dx=\begin{cases}\frac{1}{-6}x^{-6}+c_1, & \forall x\in\left]-\infty,0\right[,c_1\in\mathbb{R}\\ \frac{1}{-6}x^{-6}+c_2, & \forall x\in\left]0,+\infty\right[,c_2\in\mathbb{R}\end{cases}$

b) $\int\dfrac{1}{(x-3)^2}dx=\int(x-3)^{-2}(x-3)'\,dx=$

$$=\begin{cases}\frac{1}{-1}(x-3)^{-1}+c_1, & \forall x\in\left]-\infty,3\right[,c_1\in\mathbb{R}\\ \frac{1}{-1}(x-3)^{-1}+c_2, & \forall x\in\left]3,+\infty\right[,c_2\in\mathbb{R}\end{cases}=\begin{cases}\dfrac{-1}{x-3}+c_1, & \forall x\in\left]-\infty,3\right[,c_1\in\mathbb{R}\\ \dfrac{-1}{x-3}+c_2, & \forall x\in\left]3,+\infty\right[,c_2\in\mathbb{R}\end{cases}$$

c) $\int\dfrac{1}{(x+1)^3}dx=\int(x+1)^{-3}(x+1)'\,dx=$

$$=\begin{cases}\frac{1}{-2}(x+1)^{-2}+c_1, & \forall x\in\left]-\infty,-1\right[,c_1\in\mathbb{R}\\ \frac{1}{-2}(x+1)^{-2}+c_2, & \forall x\in\left]-1,+\infty\right[,c_2\in\mathbb{R}\end{cases}=\begin{cases}\frac{-1}{2}\dfrac{1}{(x+1)^2}+c_1, & \forall x\in\left]-\infty,-1\right[,c_1\in\mathbb{R}\\ \frac{-1}{2}\dfrac{1}{(x+1)^2}+c_2, & \forall x\in\left]-1,+\infty\right[,c_2\in\mathbb{R}\end{cases}$$

d) $\int\dfrac{2x+1}{(x^2+x+1)^3}dx=\int\left(x^2+x+1\right)^{-3}\left(x^2+x+1\right)'dx=\frac{1}{-2}\left(x^2+x+1\right)^{-2}+c=$

$=\frac{1}{-2}\dfrac{1}{(x^2+x+1)^2}+c,\forall x\in\mathbb{R},c\in\mathbb{R}$;

e) $\int \frac{2x-3}{\left(x^2-3x+2\right)^2}dx = \int \left(x^2-3x+2\right)^{-2}\left(x^2-3x+2\right)' dx =$

$$= \begin{cases} \frac{1}{-1}\left(x^2-3x+2\right)^{-1}+c_1, & \forall x \in \left]-\infty,1\right[, c_1 \in \mathbb{R} \\ \frac{1}{-1}\left(x^2-3x+2\right)^{-1}+c_2, & \forall x \in \left]1,2\right[, c_2 \in \mathbb{R} \\ \frac{1}{-1}\left(x^2-3x+2\right)^{-1}+c_3, & \forall x \in \left]2,+\infty\right[, c_3 \in \mathbb{R} \end{cases} = \begin{cases} \frac{-1}{x^2-3x+2}+c_1, & \forall x \in \left]-\infty,1\right[, c_1 \in \mathbb{R} \\ \frac{-1}{x^2-3x+2}+c_2, & \forall x \in \left]1,2\right[, c_2 \in \mathbb{R} \\ \frac{-1}{x^2-3x+2}+c_3, & \forall x \in \left]2,+\infty\right[, c_3 \in \mathbb{R} \end{cases}$$

f) $\int \frac{1}{\left(x^2-8\right)^2}\cdot(2x)\,dx = \begin{cases} \frac{1}{-1}\left(x^2-8\right)^{-1}+c_1, & \forall x \in \left]-\infty,-2\sqrt{2}\right[, c_1 \in \mathbb{R} \\ \frac{1}{-1}\left(x^2-8\right)^{-1}+c_2, & \forall x \in \left]-2\sqrt{2},2\sqrt{2}\right[, c_2 \in \mathbb{R} \\ \frac{1}{-1}\left(x^2-8\right)^{-1}+c_3, & \forall x \in \left]2\sqrt{2},+\infty\right[, c_3 \in \mathbb{R} \end{cases}$

g) $\int \frac{\sin 2x}{\left(2+\sin^2 x\right)^{20}}dx = \int \left(2+\sin^2 x\right)^{-20}\left(2+\sin^2 x\right)' dx = \frac{1}{-19}\left(2+\sin^2 x\right)^{-19}+c, \forall x \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{R}.$

•Pentru $m=-1 \Rightarrow$

$$\boxed{\int \frac{1}{x}dx = \begin{cases} \ln(-x)+c_1, & \forall x \in \left]-\infty,0\right[, c_1 \in \mathbb{R} \\ \ln x + c_2, & \forall x \in \left]0,+\infty\right[, c_2 \in \mathbb{R} \end{cases}}$$

$$\boxed{\int \frac{1}{u(x)}u'(x)\,dx = \begin{cases} \ln(-u(x))+c_1, & \forall x \in \mathbb{I} \text{ a.î. } u(x) \in \left]-\infty,0\right[, c_1 \in \mathbb{R} \\ \ln u(x)+c_2, & \forall x \in \mathbb{I} \text{ a.î. } u(x) \in \left]0,+\infty\right[, c_2 \in \mathbb{R} \end{cases}}$$

Exemple: a) $\int \frac{1}{x-3}dx = \int \frac{1}{x-3}(x-3)' dx = \begin{cases} \ln(-x+3)+c_1, & \forall x \in \left]-\infty,3\right[, c_1 \in \mathbb{R} \\ \ln(x-3)+c_2, & \forall x \in \left]3,+\infty\right[, c_2 \in \mathbb{R} \end{cases}$

b) $\int \frac{1}{x+1}dx = \int \frac{1}{x+1}(x+1)' dx = \begin{cases} \ln(-x-1)+c_1, & \forall x \in \left]-\infty,-1\right[, c_1 \in \mathbb{R} \\ \ln(x+1)+c_2, & \forall x \in \left]-1,+\infty\right[, c_2 \in \mathbb{R} \end{cases}$

c) $\int \frac{1}{2x^2+x+2}\cdot(4x+1)\,dx = \ln\left(2x^2+x+2\right)+c, \forall x \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{R}$

d) $\int \frac{1}{x^2-5x+6}\cdot(2x-5)\,dx = \begin{cases} \ln\left(x^2-5x+6\right)+c_1, & \forall x \in \left]-\infty,2\right[, c_1 \in \mathbb{R} \\ \ln\left(-x^2+5x-6\right)+c_2, & \forall x \in \left]2,3\right[, c_2 \in \mathbb{R} \\ \ln\left(x^2-5x+6\right)+c_3, & \forall x \in \left]3,+\infty\right[, c_3 \in \mathbb{R} \end{cases}$

e) $\int \frac{\sin 2x}{2+\sin^2 x}dx = \int \frac{1}{2+\sin^2 x}\left(2+\sin^2 x\right)' dx = \ln\left(2+\sin^2 x\right)+c, \forall x \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{R}$

•Pentru $\alpha \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$ fixat $\Rightarrow$

$$\boxed{\int x^\alpha dx = \frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}+c, \forall x \in \left]0,+\infty\right[, c \in \mathbb{R}.}$$

$$\boxed{\int u^\alpha(x)\cdot u'(x)\,dx = \frac{1}{\alpha+1}u^{\alpha+1}(x)+c, \forall x \in \mathbb{I} \text{ a.î. } u(x) \in \left]0,+\infty\right[, c \in \mathbb{R}.}$$

Exemple: a) $\int \sqrt{x}dx = \int x^{\frac{1}{2}}dx = \frac{1}{\frac{1}{2}+1}x^{\frac{1}{2}+1}+c, \forall x \in \left]0,+\infty\right[, c \in \mathbb{R}.$

b) $\int \frac{1}{\sqrt[3]{x^7}}dx = \int x^{-\frac{7}{3}}dx = \frac{1}{\frac{-7}{3}+1}x^{\frac{-7}{3}+1}+c, \forall x \in \left]0,+\infty\right[, c \in \mathbb{R}.$

c) $\int \frac{1}{x^\pi}dx = \int x^{-\pi}dx = \frac{1}{-\pi+1}x^{-\pi+1}+c, \forall x \in \left]0,+\infty\right[, c \in \mathbb{R}.$

d) $\int x^e dx = \frac{1}{e+1}x^{e+1}+c, \forall x \in \left]0,+\infty\right[, c \in \mathbb{R}.$

e) $\int x\sqrt{x^2+1}dx = \frac{1}{2}\int \left(x^2+1\right)^{\frac{1}{2}}(2x)\,dx = \frac{1}{2}\frac{1}{\frac{1}{2}+1}\left(x^2+1\right)^{\frac{1}{2}+1}+c, \forall x \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{R}.$

f) $\int \frac{1}{\sqrt{3x-x^2-2}}\cdot(3-2x)\,dx = \frac{1}{-\frac{1}{2}+1}\left(3x-x^2-2\right)^{-\frac{1}{2}+1}+c, \forall x \in \left]1,2\right[, c \in \mathbb{R}.$

g) $\int \frac{1}{\sqrt[3]{(11x^2+20x+20)^2}} \cdot (22x+20)\,dx = \frac{1}{-\frac{2}{3}+1}\left(11x^2+20x+20\right)^{-\frac{2}{3}+1} + c, \forall x \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{R}.$

h) $\int \frac{\sin 2x}{\sqrt{2+\cos^2 x}}dx = -\int \frac{1}{\sqrt{2+\cos^2 x}} \cdot \left(2+\cos^2 x\right)'dx = \frac{1}{-\frac{1}{2}+1}\left(2+\cos^2 x\right)^{-\frac{1}{2}+1} + c,$
$\forall x \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{R}.$

2°. •Pentru $a \in \left]0,+\infty\right[$ fixat $\Rightarrow$

$$\boxed{\int \frac{1}{x^2+a^2}dx = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + c, \forall x \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{R}.}$$

$$\boxed{\int \frac{1}{u^2(x)+a^2}\cdot u'(x)\,dx = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{u(x)}{a} + c, \forall x \in \mathbb{I}, c \in \mathbb{R}.}$$

Exemple: a) $\int \frac{1}{x^2+5}dx = \frac{1}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{5}} + c, \forall x \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{R}.$

b) $\int \frac{1}{4x^2+4x+7}dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{(2x+1)^2+\left(\sqrt{6}\right)^2}\cdot(2x+1)'dx = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{6}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{6}} + c, \forall x \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{R}.$

c) $\int \frac{\cos x}{3+\sin^2 x}dx = \int \frac{1}{(\sin x)^2+\left(\sqrt{3}\right)^2}\cdot(\sin x)'dx = \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{\sin x}{\sqrt{3}} + c, \forall x \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{R}.$

c) $\int \frac{1}{3+\ln^2 x}\cdot\frac{1}{x}dx = \int \frac{1}{(\ln x)^2+\left(\sqrt{3}\right)^2}\cdot(\ln x)'dx = \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{\ln x}{\sqrt{3}} + c, \forall x \in \left]0,+\infty\right[, c \in \mathbb{R}.$

•Pentru $a \in \left]0,+\infty\right[$ fixat $\Rightarrow$

$$\boxed{\int \frac{1}{x^2-a^2}dx = \begin{cases} \frac{1}{2a}\ln\frac{x-a}{x+a} + c_1, & \forall x \in \left]-\infty,-a\right[, c_1 \in \mathbb{R} \\ \frac{1}{2a}\ln\frac{a-x}{x+a} + c_2, & \forall x \in \left]-a,a\right[, c_2 \in \mathbb{R} \\ \frac{1}{2a}\ln\frac{x-a}{x+a} + c_3, & \forall x \in \left]a,+\infty\right[, c_3 \in \mathbb{R} \end{cases}.}$$

$$\boxed{\int \frac{1}{u^2(x)-a^2}\cdot u'(x)\,dx = \begin{cases} \frac{1}{2a}\ln\frac{u(x)-a}{u(x)+a} + c_1, & \forall x \in \mathbb{I} \text{ a.î. } u(x) \in \left]-\infty,-a\right[, c_1 \in \mathbb{R} \\ \frac{1}{2a}\ln\frac{a-u(x)}{u(x)+a} + c_2, & \forall x \in \mathbb{I} \text{ a.î. } u(x) \in \left]-a,a\right[, c_2 \in \mathbb{R} \\ \frac{1}{2a}\ln\frac{u(x)-a}{u(x)+a} + c_3, & \forall x \in \mathbb{I} \text{ a.î. } u(x) \in \left]a,+\infty\right[, c_3 \in \mathbb{R} \end{cases}}$$

Exemple: a) $\int \frac{1}{x^2-3}dx = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{3}}\ln\frac{x-\sqrt{3}}{x+\sqrt{3}} + c_1, & \forall x \in \left]-\infty,-\sqrt{3}\right[, c_1 \in \mathbb{R} \\ \frac{1}{2\sqrt{3}}\ln\frac{\sqrt{3}-x}{x+\sqrt{3}} + c_2, & \forall x \in \left]-\sqrt{3},\sqrt{3}\right[, c_2 \in \mathbb{R} \\ \frac{1}{2\sqrt{3}}\ln\frac{x-\sqrt{3}}{x+\sqrt{3}} + c_3, & \forall x \in \left]\sqrt{3},+\infty\right[, c_3 \in \mathbb{R} \end{cases}$

b) $\int \frac{1}{4x^2+4x-2}dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{(2x+1)^2-\left(\sqrt{3}\right)^2}\cdot(2x+1)'dx =$

$$= \begin{cases} \frac{1}{4\sqrt{3}} \ln \frac{(2x+1)-\sqrt{3}}{(2x+1)+\sqrt{3}} + c_1, & \forall x \in \mathbb{I} \text{ a.î. } (2x+1) \in \left]-\infty, -\sqrt{3}\right[, c_1 \in \mathbb{R} \\ \frac{1}{4\sqrt{3}} \ln \frac{\sqrt{3}-(2x+1)}{(2x+1)+\sqrt{3}} + c_2, & \forall x \in \mathbb{I} \text{ a.î. } (2x+1) \in \left]-\sqrt{3}, \sqrt{3}\right[, c_2 \in \mathbb{R} \\ \frac{1}{4\sqrt{3}} \ln \frac{(2x+1)-\sqrt{3}}{(2x+1)+\sqrt{3}} + c_3, & \forall x \in \mathbb{I} \text{ a.î. } (2x+1) \in \left]\sqrt{3}, +\infty\right[, c_3 \in \mathbb{R} \end{cases}$$

3°. •Pentru $a \in]0, +\infty[$ fixat $\Rightarrow$

$$\boxed{\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \arcsin \frac{x}{a} + c, \forall x \in]-a, a[, c \in \mathbb{R}.}$$

$$\boxed{\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - u^2(x)}} \cdot u'(x)\, dx = \arcsin \frac{u(x)}{a} + c, \forall x \in \mathbb{I} \text{ a.î. } u(x) \in]-a, a[, c \in \mathbb{R}.}$$

Exemple:a) $\int \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{3} - x^2}} dx = \arcsin \frac{x}{\sqrt{\frac{2}{3}}} + c, \forall x \in \left]-\sqrt{\frac{2}{3}}, \sqrt{\frac{2}{3}}\right[, c \in \mathbb{R}.$

b) $\int \frac{1}{\sqrt{4 - 4x^2 + 4x}} dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{\sqrt{\left(\sqrt{5}\right)^2 - (2x-1)^2}} \cdot (2x-1)'\, dx =$

$= \frac{1}{2} \arcsin \frac{2x-1}{\sqrt{5}} + c, \forall x \in \left]\frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right[, c \in \mathbb{R}.$

•Pentru $a \in]0, +\infty[$ fixat $\Rightarrow$

$$\boxed{\int \frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}} dx = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + a^2}\right) + c, \forall x \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{R}.}$$

$$\boxed{\int \frac{1}{\sqrt{u^2(x) + a^2}} \cdot u'(x)\, dx = \ln\left(u(x) + \sqrt{u^2(x) + a^2}\right) + c, \forall x \in \mathbb{I}, c \in \mathbb{R}.}$$

Exemple:a) $\int \frac{1}{\sqrt{x^2 + 2\pi}} dx = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 2\pi}\right) + c, \forall x \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{R}.$

b) $\int \frac{1}{\sqrt{9x^2 + 6x + 8}} dx = \frac{1}{3} \int \frac{1}{\sqrt{(3x+1)^2 + \left(\sqrt{7}\right)^2}} \cdot (3x+1)'\, dx =$

$= \frac{1}{3} \ln\left((3x+1) + \sqrt{(3x+1)^2 + \left(\sqrt{7}\right)^2}\right) + c, \forall x \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{R}.$

•Pentru $a \in]0, +\infty[$ fixat $\Rightarrow$

$$\boxed{\int \frac{1}{\sqrt{x^2 - a^2}} dx = \begin{cases} \ln\left(-x - \sqrt{x^2 - a^2}\right) + c_1, & \forall x \in]-\infty, -a[, c_1 \in \mathbb{R} \\ \ln\left(x + \sqrt{x^2 - a^2}\right) + c_2, & \forall x \in]a, +\infty[, c_2 \in \mathbb{R} \end{cases}}$$

$$\boxed{\int \frac{1}{\sqrt{u^2(x) - a^2}} \cdot u'(x)\, dx = \begin{cases} \ln\left(-u(x) - \sqrt{u^2(x) - a^2}\right) + c_1, & \forall x \in \mathbb{I} \text{ a.î. } u(x) \in]-\infty, -a[, c_1 \in \mathbb{R} \\ \ln\left(u(x) + \sqrt{u^2(x) - a^2}\right) + c_2, & \forall x \in \mathbb{I} \text{ a.î. } u(x) \in]a, +\infty[, c_2 \in \mathbb{R} \end{cases}}$$

Exemple: a) $\int \frac{1}{\sqrt{x^2 - e}} dx = \begin{cases} \ln\left(-x - \sqrt{x^2 - e}\right) + c_1, & \forall x \in]-\infty, -\sqrt{e}[, c_1 \in \mathbb{R} \\ \ln\left(x + \sqrt{x^2 - e}\right) + c_2, & \forall x \in]\sqrt{e}, +\infty[, c_2 \in \mathbb{R} \end{cases}$

b) $\int \frac{1}{\sqrt{9x^2 + 6x - 5}} dx = \frac{1}{3} \int \frac{1}{\sqrt{(3x+1)^2 - \left(\sqrt{6}\right)^2}} \cdot (3x+1)'\, dx =$

$$= \begin{cases} \frac{1}{3}\ln\left(-(3x+1)-\sqrt{(3x+1)^2-\left(\sqrt{6}\right)^2}\right)+c_1, & \forall x\in\left]-\infty,\frac{-1-\sqrt{6}}{3}\right[, c_1\in\mathbb{R} \\ \frac{1}{3}\ln\left((3x+1)+\sqrt{(3x+1)^2-\left(\sqrt{6}\right)^2}\right)+c_2, & \forall x\in\left]\frac{-1+\sqrt{6}}{3},+\infty\right[, c_2\in\mathbb{R} \end{cases}$$

4°. •Pentru $a\in\left]0,+\infty\right[\setminus\{1\}$ fixat $\Rightarrow$

$$\boxed{\int a^x dx=\frac{1}{\ln a}a^x+c, \forall x\in\mathbb{R}, c\in\mathbb{R}.}$$

$$\boxed{\int a^{u(x)}\cdot u'(x)\,dx=\frac{1}{\ln a}a^{u(x)}+c, \forall x\in\mathbb{I}, c\in\mathbb{R}.}$$

Exemple: **a)** $\int 3^x dx=\frac{1}{\ln 3}3^x+c, \forall x\in\mathbb{R}, c\in\mathbb{R}.$

b) $\int 7^{x^2+1}\left(x^2+1\right)'dx=\frac{1}{\ln 7}7^{x^2+1}+c, \forall x\in\mathbb{R}, c\in\mathbb{R}.$

•Pentru $a=e\Rightarrow$

$$\boxed{\int e^x dx=e^x+c, \forall x\in\mathbb{R}, c\in\mathbb{R}.}$$

$$\boxed{\int e^{u(x)}\cdot u'(x)\,dx=e^{u(x)}+c, \forall x\in\mathbb{I}, c\in\mathbb{R}, \text{ unde } a,b\in\mathbb{R}^*.}$$

Comentariu: $\boxed{\int e^{ax+b}dx=\frac{e^{ax+b}}{a}+c, \forall x\in\mathbb{R}, c\in\mathbb{R}.}$

Exemple: **a)** $\int e^{2x+3}dx=\frac{1}{2}\int e^{2x+3}\cdot(2x+3)'\,dx=\frac{1}{2}e^{2x+3}+c, \forall x\in\mathbb{R}, c\in\mathbb{R}.$

b) $\int e^{-3x}dx=\frac{1}{-3}\int e^{-3x}\cdot(-3x)'\,dx=\frac{1}{-3}e^{-3x}+c, \forall x\in\mathbb{R}, c\in\mathbb{R}.$

c) $\int e^{\sin x}(\cos x)\,dx=e^{\sin x}+c, \forall x\in\mathbb{R}, c\in\mathbb{R}.$

5°. $\boxed{\int(\cos x)\,dx=\sin x+c, \forall x\in\mathbb{R}, c\in\mathbb{R}; \int(\sin x)\,dx=-\cos x+c, \forall x\in\mathbb{R}, c\in\mathbb{R}.}$

$$\boxed{\int(\cos u(x))\cdot u'(x)\,dx=\sin u(x)+c, \forall x\in\mathbb{I}, c\in\mathbb{R}; \int(\sin u(x))\cdot u'(x)\,dx=-\cos u(x)+c, \forall x\in\mathbb{I}, c\in\mathbb{R}.}$$

Comentariu:

$$\boxed{\int\cos(ax+b)\,dx=\frac{\sin(ax+b)}{a}+c, \forall x\in\mathbb{R}, c\in\mathbb{R}, \text{ unde } a,b\in\mathbb{R}^*.}$$

$$\boxed{\int\sin(ax+b)\,dx=\frac{-\cos(ax+b)}{a}+c, \forall x\in\mathbb{R}, c\in\mathbb{R}, \text{ unde } a,b\in\mathbb{R}^*.}$$

Exemple: **a)** $\int\cos(3x+2)\,dx=\frac{1}{3}\int(\cos(3x+2))\cdot 3dx=\frac{1}{3}\sin(3x+2)+c, \forall x\in\mathbb{R}, c\in\mathbb{R}.$

b) $\int\frac{\cos(\ln x)}{x}dx=\sin(\ln x)+c, \forall x\in\left]0,+\infty\right[, c\in\mathbb{R}.$

c) $\int\sin(5x+7)\,dx=\frac{1}{5}\int(\sin(5x+7))\cdot 5dx=\frac{1}{5}(-\cos(5x+7))+c, \forall x\in\mathbb{R}, c\in\mathbb{R}.$

d) $\int\frac{\sin(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}dx=-\cos(\sqrt{x})+c, \forall x\in\left]0,+\infty\right[, c\in\mathbb{R}.$

$$\boxed{\int(\operatorname{tg}x)\,dx=\left\{-\ln|\cos x|+c_k, k\in\mathbb{Z}, \forall x\in\left]k\pi-\frac{\pi}{2},k\pi+\frac{\pi}{2}\right[, c_k\in\mathbb{R}\right.}$$

$$\boxed{\int\frac{1}{\cos^2 x}dx=\left\{\operatorname{tg}x+c_k, k\in\mathbb{Z}, \forall x\in\left]k\pi-\frac{\pi}{2},k\pi+\frac{\pi}{2}\right[, c_k\in\mathbb{R}\right.}$$

$$\boxed{\int\left(1+\operatorname{tg}^2 x\right)dx=\left\{\operatorname{tg}x+c_k, k\in\mathbb{Z}, \forall x\in\left]k\pi-\frac{\pi}{2},k\pi+\frac{\pi}{2}\right[, c_k\in\mathbb{R}\right.}$$

$$\boxed{\int(\operatorname{ctg}x)\,dx=\{\ln|\sin x|+c_k, k\in\mathbb{Z}, \forall x\in\left]k\pi,k\pi+\pi\right[, c_k\in\mathbb{R}}$$

$$\boxed{\int\frac{1}{\sin^2 x}dx=\{-\operatorname{ctg}x+c_k, k\in\mathbb{Z}, \forall x\in\left]k\pi,k\pi+\pi\right[, c_k\in\mathbb{R}}$$

$$\boxed{\int\left(1+\operatorname{ctg}^2 x\right)dx=\{-\operatorname{ctg}x+c_k, k\in\mathbb{Z}, \forall x\in\left]k\pi,k\pi+\pi\right[, c_k\in\mathbb{R}}$$

$\boxed{\int (\operatorname{tg} u(x)) \cdot u'(x)\, dx = \left\{ -\ln |\cos u(x)| + c_k, k \in \mathbb{Z}, \forall x \in \mathbb{I} \text{ a.î. } u(x) \in \left] k\pi - \frac{\pi}{2}, k\pi + \frac{\pi}{2} \right[, c_k \in \mathbb{R} \right.}$

$\boxed{\int \frac{1}{\cos^2 u(x)} \cdot u'(x)\, dx = \left\{ \operatorname{tg} u(x) + c_k, k \in \mathbb{Z}, \forall x \in \mathbb{I} \text{ a.î. } u(x) \in \left] k\pi - \frac{\pi}{2}, k\pi + \frac{\pi}{2} \right[, c_k \in \mathbb{R} \right.}$

$\boxed{\int \left(1 + \operatorname{tg}^2 u(x)\right) \cdot u'(x)\, dx = \left\{ \operatorname{tg} u(x) + c_k, k \in \mathbb{Z}, \forall x \in \mathbb{I} \text{ a.î. } u(x) \in \left] k\pi - \frac{\pi}{2}, k\pi + \frac{\pi}{2} \right[, c_k \in \mathbb{R} \right.}$

$\boxed{\int (\operatorname{ctg} u(x)) \cdot u'(x)\, dx = \{ \ln |\sin u(x)| + c_k, k \in \mathbb{Z}, \forall x \in \mathbb{I} \text{ a.î. } u(x) \in]k\pi, k\pi + \pi[, c_k \in \mathbb{R}}$

$\boxed{\int \frac{1}{\sin^2 u(x)} \cdot u'(x)\, dx = \{ -\operatorname{ctg} u(x) + c_k, k \in \mathbb{Z}, \forall x \in \mathbb{I} \text{ a.î. } u(x) \in]k\pi, k\pi + \pi[, c_k \in \mathbb{R}}$

$\boxed{\int \left(1 + \operatorname{ctg}^2 u(x)\right) \cdot u'(x)\, dx = \{ -\operatorname{ctg} u(x) + c_k, k \in \mathbb{Z}, \forall x \in \mathbb{I} \text{ a.î. } u(x) \in]k\pi, k\pi + \pi[, c_k \in \mathbb{R}}$

Exemple: a) $\int \frac{\cos(2x)}{\cos^2 x \cdot \sin^2 x} dx = \int \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos^2 x \cdot \sin^2 x} dx = \int \frac{1}{\sin^2 x} dx - \int \frac{1}{\cos^2 x} dx =$
$= -\operatorname{ctg} x - \operatorname{tg} x + c_k, \forall x \in \mathbb{I}_k, c_k \in \mathbb{R}$

b) $\int 2x \operatorname{tg}\left(x^2\right) dx = \left\{ -\ln \left|\cos x^2\right| + c_k, k \in \mathbb{Z}, \forall x \in \mathbb{R} \text{ a.î. } x^2 \in \left] k\pi - \frac{\pi}{2}, k\pi + \frac{\pi}{2} \right[, c_k \in \mathbb{R} \right.$

c) $\int \frac{1}{\cos^2 x^3} \cdot 3x^2 dx = \left\{ \operatorname{tg} x^3 + c_k, k \in \mathbb{Z}, \forall x \in \mathbb{R} \text{ a.î. } x^3 \in \left] k\pi - \frac{\pi}{2}, k\pi + \frac{\pi}{2} \right[, c_k \in \mathbb{R} \right.$

6°. Pentru $\boxed{\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \forall x \in \mathbb{R}}$ şi $\boxed{\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \forall x \in \mathbb{R}}$ se obţine:

$\boxed{\int (\operatorname{ch} x)\, dx = \operatorname{sh} x + c, \forall x \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{R}; \int (\operatorname{sh} x)\, dx = \operatorname{ch} x + c, \forall x \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{R}.}$

$\boxed{\int (\operatorname{ch} u(x)) \cdot u'(x)\, dx = \operatorname{sh} u(x) + c, \forall x \in \mathbb{I}, c \in \mathbb{R}; \int (\operatorname{sh} u(x)) \cdot u'(x)\, dx = \operatorname{ch} u(x) + c, \forall x \in \mathbb{I}, c \in \mathbb{R}.}$

Exemplul 1.1.3. Să se calculeze

a) $\int 2^x e^x dx, x \in \mathbb{R}$.

Rezolvare. etapa 1. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 2^x e^x$.

f este continuă pe $\mathbb{R} \Rightarrow f$ admite primitive pe $\mathbb{R}$.

etapa 2. Se aplică tabelul cu primitive

$\int 2^x e^x dx = \int (2e)^x dx = \frac{1}{\ln(2e)} (2e)^x + c, \forall x \in \mathbb{R}, \forall c \in \mathbb{R}.$

$F(x; c) = \frac{2^x \cdot e^x}{1 + \ln 2} + c, \forall x \in \mathbb{R}$ (variabilă), $\forall c \in \mathbb{R}$ (constantă)

sunt toate primitivele funcţiei f pe $\mathbb{I} = \mathbb{R}$, familia de primitive fiind indexată după constanta $c \in \mathbb{R}$.

b) $\int x(x+1)(x+2)\, dx, x \in \mathbb{R}$.

Rezolvare. etapa 1.$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x(x+1)(x+2)$

f este continuă pe $\mathbb{R} \Rightarrow f$ admite primitive pe $\mathbb{R}$.

etapa 2. Se aplică teorema de liniaritate şi tabelul cu primitive

$\int x(x+1)(x+2)\, dx = \int \left(x^3 + 3x^2 + 2x\right) dx = \frac{x^4}{4} + x^3 + x^2 + c, \forall x \in \mathbb{R}, \forall c \in \mathbb{R}.$

$F(x; c) = \frac{x^4}{4} + x^3 + x^2 + c, \forall x \in \mathbb{R}$ (variabilă), $\forall c \in \mathbb{R}$ (constantă)

sunt toate primitivele funcţiei f pe $\mathbb{I} = \mathbb{R}$, familia de primitive fiind indexată după constanta $c \in \mathbb{R}$.

c) $\int \left(\sqrt[3]{x} + \frac{1}{x\sqrt[3]{x}}\right)^2 dx, x \in]0, +\infty[$-A se vedea Seminar.

1.2. Integrale nedefinite determinate cu formula integrării prin părţi

Teorema 1.2.1.(de integrare prin părţi pentru integrala nedefinită) Fie $\mathbb{I} \subseteq \mathbb{R}$ un interval cu interior nevid. Dacă $u, v : \mathbb{I} \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sunt derivabile pe $\mathbb{I}$ şi funcţia $u' \cdot v$ admite primitive pe $\mathbb{I}$, atunci funcţia $u \cdot v'$ admite primitive pe $\mathbb{I}$ şi

$$\boxed{\int u(x) v'(x) dx = u(x) v(x) - \int u'(x) v(x) dx, \forall x \in \mathbb{I}.} \quad (1)$$

Demonstraţie. Deoarce u şi v sunt derivabile pe $\mathbb{I} \Rightarrow u \cdot v$ este derivabilă pe $\mathbb{I}$ şi
$(u \cdot v)'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x), \forall x \in \mathbb{I}.$
Cum funcţia $u' \cdot v$ admite primitive pe $\mathbb{I} \Rightarrow$Se consideră H o primitivă a funcţiei $u' \cdot v$.

Conform formulei de derivare a $u \cdot v$, conform observaţiei 1.1.2 şi Teoremei 1.1.2 $\Rightarrow u \cdot v'$ admite primitive pe $\mathbb{I}$ şi $u \cdot v - H$ este o astfel de primitivă, de unde rezultă şi formula de calcul din enunţ.

Exemplul 1.2.1. Să se calculeze:
a) $\int x^2 \cos x dx, x \in \mathbb{R};$
Rezolvare. etapa 1.$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2 \cos x$
f este continuă pe $\mathbb{R} \Rightarrow f$ admite primitive pe $\mathbb{R}$.
etapa 2. Se aplică de două ori formula integrării prin părţi, apoi tabelul

$$\int x^2 \cos x dx = \int x^2 (\sin x)' dx = x^2 \sin x - \int 2x \sin x dx = x^2 \sin x + 2 \int x (\cos x)' dx$$
$$= x^2 \sin x + 2 \left(x \cos x - \int 1 \cos x dx\right) = x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \sin x + c,$$
$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall c \in \mathbb{R}.$$

$F(x; c) = x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \sin x + c, \forall x \in \mathbb{R}$ (variabilă), $\forall c \in \mathbb{R}$ (constantă)
sunt toate primitivele funcţiei f pe $\mathbb{I} = \mathbb{R}$, familia de primitive fiind indexată după constanta $c \in \mathbb{R}$.
b) $\int x e^{-2x} dx, x \in \mathbb{R}$-A se vedea seminar.
REGULĂ: Calculul primitivelor de tipul

$$\boxed{\int P(x) \cdot \cos(ax + b) dx; \int P(x) \cdot \sin(ax + b) dx; \int P(x) \cdot e^{ax+b} dx}$$

se poate face cu formula integrării prin părţi, alegând
$u(x) = P(x); v'(x) = \cos(ax + b) / \sin(ax + b) / e^{ax+b}.$
Formula integrării prin părţi se aplică de un număr de ori egal cu gradul polinomului, pană se ajunge la calculul unei integrale pe baza unei formule din tabel.
c) $\int \left(\cos^2 x\right) dx, x \in \mathbb{R}.$
Rezolvare. etapa 1.$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \cos^2 x$
f este continuă pe $\mathbb{R} \Rightarrow f$ admite primitive pe $\mathbb{R}$.
etapa 2. modul 1. Se aplică formula integrării prin părţi şi tabelul

$$\int \cos x \cos x dx = \int (\cos x)(\sin x)' dx = \cos x \sin x - \int \sin x \sin x dx = \cos x \sin x + \int \left(1 - \cos^2 x\right) dx =$$
$$= \cos x \sin x + \int 1 dx - \int \left(\cos^2 x\right) dx = \cos x \sin x + x - \int \left(\cos^2 x\right) dx, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow$$

$$\boxed{\int \left(\cos^2 x\right) dx = \frac{1}{2}(x + \sin x \cos x) + c, \forall x \in \mathbb{R}, \forall c \in \mathbb{R}.}$$

$F(x; c) = \frac{1}{2}(x + \sin x \cos x) + c, \forall x \in \mathbb{R}$ (variabilă), $\forall c \in \mathbb{R}$ (constantă)
sunt toate primitivele funcţiei f pe $\mathbb{I} = \mathbb{R}$, familia de primitive fiind indexată după constanta $c \in \mathbb{R}$.
modul 2. Se aplică formula $\boxed{\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}, \forall x \in \mathbb{R}}$ şi tabelul

$$\int \left(\cos^2 x\right) dx = \frac{1}{2}(x + \sin x \cos x) + c, \forall x \in \mathbb{R}, \forall c \in \mathbb{R}.$$

Analog cu c), modul 1 sau modul 2, cu $\boxed{\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}, \forall x \in \mathbb{R}} \Rightarrow$

$\boxed{\int \left(\sin^2 x\right) dx = \frac{1}{2}\left(x - \sin x \cos x\right) + c, \forall x \in \mathbb{R}, \forall c \in \mathbb{R}.}$

REGULĂ: Calculul primitivelor de tipul

$\boxed{\int e^{ax} \cdot \cos(bx)\, dx, \int e^{ax} \cdot \sin(bx)\, dx,}$

$\boxed{\int \sin(ax) \cdot \cos(bx)\, dx, \int \sin(ax) \cdot \sin(bx)\, dx, \int \cos(ax) \cdot \cos(bx)\, dx,}$

se face cu formula integrării prin părţi, aplicată de două ori, alegând iniţial

$u(x) = e^{ax}; v'(x) = \cos(bx) / \sin(bx).$

$u(x) = \sin(ax) / \cos(ax); v'(x) = \cos(bx) / \sin(bx).$

Pentru cele cu produs de funcţii trigonometrice, se pot folosi formulele de transformare a produselor în sume.

$$\boxed{\sin x \cos y = \frac{\sin(x+y) + \sin(x-y)}{2}, \forall x, y \in \mathbb{R}}$$

$$\boxed{\cos x \cos y = \frac{\cos(x+y) + \cos(x-y)}{2}, \forall x, y \in \mathbb{R}}$$

$$\boxed{\sin x \sin y = \frac{-\cos(x+y) + \cos(x-y)}{2}, \forall x, y \in \mathbb{R}}$$

d) $\int e^{ax} \cos(bx)\, dx, x \in \mathbb{R}$, unde $a, b \in \mathbb{R}^*$;

Rezolvare. <u>etapa 1.</u> $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = e^{ax} \cos(bx)\, dx$

f este continuă pe $\mathbb{R} \Rightarrow f$ admite primitive pe $\mathbb{R}$.

<u>etapa 2.</u> Se aplică de două ori formula integrării prin părţi

$$\underline{\int e^{ax} \cos(bx)\, dx} = \int e^{ax} \left(\frac{\sin(bx)}{b}\right)' dx = e^{ax} \cdot \frac{\sin(bx)}{b} - \int e^{ax} \cdot a \cdot \frac{\sin(bx)}{b} dx =$$

$$= \tfrac{1}{b} e^{ax} \sin(bx) - \tfrac{a}{b} \int e^{ax} \sin(bx)\, dx = \tfrac{1}{b} e^{ax} \sin(bx) - \tfrac{a}{b} \int e^{ax} \left(\frac{\cos(bx)}{-b}\right)' dx =$$

$$= \tfrac{1}{b} e^{ax} \sin(bx) - \tfrac{a}{b} \left(e^{ax} \cdot \frac{\cos(bx)}{-b} - \int e^{ax} \cdot a \cdot \frac{\cos(bx)}{-b} dx\right) =$$

$$= \tfrac{1}{b} e^{ax} \sin(bx) + \tfrac{a}{b^2} e^{ax} \cos(bx) - \tfrac{a^2}{b^2} \underline{\int e^{ax} \cos(bx)\, dx} \Rightarrow$$

$$\left(1 + \tfrac{a^2}{b^2}\right) \int e^{ax} \cos(bx)\, dx = \tfrac{1}{b} e^{ax} \sin(bx) + \tfrac{a}{b^2} e^{ax} \cos(bx) \Rightarrow$$

$$\boxed{\int e^{ax} \cos(bx)\, dx = \frac{b e^{ax} \sin(bx) + a e^{ax} \cos(bx)}{a^2 + b^2} + c, \forall x \in \mathbb{R}, \forall c \in \mathbb{R}.}$$

$$F(x; c) = \frac{e^{ax}\left(b \sin(bx) + a \cos(bx)\right)}{a^2 + b^2} + c, \forall x \in \mathbb{R} \text{ (variabilă)}, \forall c \in \mathbb{R} \text{ (constantă)}$$

sunt toate primitivele funcţiei f pe $\mathbb{I} = \mathbb{R}$, familia de primitive fiind indexată după constanta $c \in \mathbb{R}$.

Analog,

$$\boxed{\int e^{ax} \sin(bx)\, dx = \frac{a e^{ax} \sin(bx) - b e^{ax} \cos(bx)}{a^2 + b^2} + c, \forall x \in \mathbb{R}, \forall c \in \mathbb{R}.}$$

e) $\int \cos(\ln x)\, dx, x \in \left]0, +\infty\right[.$

Rezolvare. <u>etapa 1.</u> $f : \left]0, +\infty\right[\to \mathbb{R}, f(x) = \cos(\ln x).$

f este continuă pe $\left]0, +\infty\right[\Rightarrow f$ admite primitive pe $\left]0, +\infty\right[$.

<u>etapa 2.</u> Se aplică formula integrării prin părţi

$$\int \cos(\ln x)\, dx = \int (\cos(\ln x)) \cdot (x)'\, dx = (\cos(\ln x)) \cdot (x) - \int (-1 \sin(\ln x)) \left(\frac{1}{x}\right) \cdot x dx$$

$$= x \cos(\ln x) + \int \sin(\ln x)\, dx = x \cos(\ln x) + \int (\sin(\ln x)) \cdot (x)'\, dx =$$

$= x\cos(\ln x) + (\sin(\ln x))\cdot(x) - \int (\cos(\ln x))\left(\frac{1}{x}\right)\cdot x dx =$

$= x\cos(\ln x) + x\sin(\ln x) - \int \cos(\ln x)\, dx \Rightarrow$

$\int \cos(\ln x)\, dx = \frac{x}{2}(\cos(\ln x) + \sin(\ln x)) + c, \forall x \in \left]0, +\infty\right[, \forall c \in \mathbb{R}.$

$F(x; c) = \frac{x}{2}(\cos(\ln x) + \sin(\ln x)) + c, \forall x \in \left]0, +\infty\right[$ (variabilă), $\forall c \in \mathbb{R}$ (constantă)

sunt toate primitivele funcţiei f pe $\mathbb{I} =]0, +\infty[$, familia de primitive fiind indexată după constanta $c \in \mathbb{R}$.

f) $\int \sqrt{x^2+4}dx, x \in \mathbb{R}$.

Rezolvare. etapa 1.$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{x^2+4}$.

f este continuă pe $\mathbb{R} \Rightarrow f$ admite primitive pe $\mathbb{R}$.

etapa 2. modul 1. $\int \sqrt{x^2+4}dx = \int \left(\sqrt{x^2+4}\right) x' dx = \left(\sqrt{x^2+4}\right) x - \int \frac{x}{\sqrt{x^2+4}} \cdot x dx =$

$= x\sqrt{x^2+4} - \int \frac{x^2+4}{\sqrt{x^2+4}}dx + \int \frac{4}{\sqrt{x^2+4}}dx = x\sqrt{x^2+4} - \int \sqrt{x^2+4}dx + 4\ln\left(x + \sqrt{x^2+2^2}\right) \Rightarrow$

$\int \sqrt{x^2+4}dx = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2+4} + 4\ln\left(x + \sqrt{x^2+2^2}\right)\right) + c, \forall x \in \mathbb{R}, \forall c \in \mathbb{R}.$

○modul 2. $\int \sqrt{x^2+4}dx = \int \frac{x^2+4}{\sqrt{x^2+4}}dx = \int \frac{x^2}{\sqrt{x^2+4}}dx + \int \frac{4}{\sqrt{x^2+4}}dx.$

Se foloseşte $\left(\sqrt{x^2+4}\right)' = \frac{x}{\sqrt{x^2+4}}$ şi se aplică formula integrării prin părţi$\Rightarrow$

$\int \sqrt{x^2+4}dx = \int x\left(\sqrt{x^2+4}\right)' dx + \int \frac{4}{\sqrt{x^2+4}}dx = x\left(\sqrt{x^2+4}\right) - \int 1\sqrt{x^2+4}dx + 4\int \frac{1}{\sqrt{x^2+4}}dx$

$= x\sqrt{x^2+4} - \int \sqrt{x^2+4}dx + 4\ln\left(x + \sqrt{x^2+2^2}\right) \Rightarrow$

$\int \sqrt{x^2+4}dx = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2+4} + 4\ln\left(x + \sqrt{x^2+2^2}\right)\right) + c, \forall x \in \mathbb{R}, \forall c \in \mathbb{R}.$

$F(x; c) = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2+4} + 4\ln\left(x + \sqrt{x^2+2^2}\right)\right) + c, \forall x \in \mathbb{R}$ (variabilă), $\forall c \in \mathbb{R}$ (constantă)

sunt toate primitivele funcţiei f pe $\mathbb{I} = \mathbb{R}$, familia de primitive fiind indexată după constanta $c \in \mathbb{R}$.

Observaţia 1.2.1. Procedând ca în Exemplul 1.2.1, f), Tabelul de primitive se poate completa cu:

7°. •Pentru $a \in]0, +\infty[$ fixat $\Rightarrow$

$$\boxed{\int \sqrt{x^2+a^2}dx = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2+a^2} + a^2\ln\left(x + \sqrt{x^2+a^2}\right)\right) + c, \forall x \in \mathbb{R}, \forall c \in \mathbb{R}.}$$

$$\boxed{\int \sqrt{u^2(x)+a^2}u'(x)\,dx = \frac{1}{2}\left(u(x)\sqrt{u^2(x)+a^2} + a^2\ln\left(u(x) + \sqrt{u^2(x)+a^2}\right)\right) + c, \forall x \in \mathbb{I}, \forall c \in \mathbb{R}.}$$

•Pentru $a \in]0, +\infty[$ fixat $\Rightarrow$

$$\boxed{\int \sqrt{x^2-a^2}dx = \begin{cases} \frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2-a^2} + a^2\ln\left(-x - \sqrt{x^2-a^2}\right)\right) + c_1, & \forall x \in \left]-\infty, -a\right[, c_1 \in \mathbb{R} \\ \frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2-a^2} + a^2\ln\left(x + \sqrt{x^2-a^2}\right)\right) + c_2, & \forall x \in \left]a, +\infty\right[, c_2 \in \mathbb{R} \end{cases}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} &\int \sqrt{u^2(x)-a^2}u'(x)\,dx = \\ &= \begin{cases} \frac{1}{2}\left(u(x)\sqrt{u^2(x)-a^2} + a^2\ln\left(-u(x) - \sqrt{u^2(x)-a^2}\right)\right) + c_1, & \forall u(x) \in \left]-\infty, -a\right[, c_1 \in \mathbb{R} \\ \frac{1}{2}\left(u(x)\sqrt{u^2(x)-a^2} + a^2\ln\left(u(x) + \sqrt{u^2(x)-a^2}\right)\right) + c_2, & \forall u(x) \in \left]a, +\infty\right[, c_2 \in \mathbb{R} \end{cases} \end{aligned}}$$

•Pentru $a \in]0, +\infty[$ fixat $\Rightarrow$

$$\boxed{\int \sqrt{a^2-x^2}dx = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{a^2-x^2}+a^2\arcsin\frac{x}{a}\right)+c, \forall x \in \left]-a,a\right[, c\in\mathbb{R}.}$$

$$\boxed{\int \sqrt{a^2-u^2(x)}u'(x)\,dx = \frac{1}{2}\left(u(x)\sqrt{a^2-u^2(x)}+a^2\arcsin\frac{u(x)}{a}\right)+c, \forall u(x) \in \left]-a,a\right[, c\in\mathbb{R}.}$$

Exemple:a) $\int \sqrt{x^2+2}dx = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2+2}+2\ln\left(x+\sqrt{x^2+2}\right)\right)+c, \forall x\in\mathbb{R}, \forall c\in\mathbb{R}.$

b) $\int \sqrt{\underline{x^2+x}+1}dx = \int\sqrt{x^2+2x\cdot\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2+1}dx = \int\sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\cdot\left(x+\frac{1}{2}\right)'dx =$

$= \frac{1}{2}\left(\left(x+\frac{1}{2}\right)\sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}+\frac{3}{4}\ln\left(\left(x+\frac{1}{2}\right)+\sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\right)\right)+c, \forall x\in\mathbb{R}, \forall c\in\mathbb{R}.$

c) $\int\sqrt{x^2-3}dx = \begin{cases} \frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2-3}+3\ln\left(-x-\sqrt{x^2-3}\right)\right)+c_1, & \forall x\in\left]-\infty,-\sqrt{3}\right[, c_1\in\mathbb{R} \\ \frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2-3}+3\ln\left(x+\sqrt{x^2-3}\right)\right)+c_2, & \forall x\in\left]\sqrt{3},+\infty\right[, c_2\in\mathbb{R}\end{cases}$

d) $\int\sqrt{\underline{x^2-5x}+6}dx = \int\sqrt{x^2+2x\cdot\frac{-5}{2}+\left(\frac{-5}{2}\right)^2-\left(\frac{-5}{2}\right)^2+6}dx =$

$= \int\sqrt{\left(x-\frac{5}{2}\right)^2-\frac{1}{4}}\cdot\left(x-\frac{5}{2}\right)'dx =$

$= \begin{cases} \frac{1}{2}\left(\left(x-\frac{5}{2}\right)\sqrt{\left(x-\frac{5}{2}\right)^2-\frac{1}{4}}+\frac{1}{4}\ln\left(-\left(x-\frac{5}{2}\right)-\sqrt{\left(x-\frac{5}{2}\right)^2-\frac{1}{4}}\right)\right)+c_1, & \forall x\in\left]-\infty,2\right[, c_1\in\mathbb{R} \\ \frac{1}{2}\left(\left(x-\frac{5}{2}\right)\sqrt{\left(x-\frac{5}{2}\right)^2-\frac{1}{4}}+\frac{1}{4}\ln\left(\left(x-\frac{5}{2}\right)+\sqrt{\left(x-\frac{5}{2}\right)^2-\frac{1}{4}}\right)\right)+c_2, & \forall x\in\left]3,+\infty\right[, c_2\in\mathbb{R}\end{cases}$

e) $\int\sqrt{\pi-x^2}dx = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{\pi-x^2}+\pi\arcsin\frac{x}{\pi}\right)+c, \forall x\in\left]-\sqrt{\pi},\sqrt{\pi}\right[, c\in\mathbb{R}.$

f) $\int\sqrt{3x-x^2-2}dx = \int\sqrt{-\left(\underline{x^2-3x}+2\right)}dx = \int\sqrt{-\left[x^2+2x\cdot\frac{-3}{2}+\left(\frac{-3}{2}\right)^2-\left(\frac{-3}{2}\right)^2+2\right]}dx =$

$= \int\sqrt{\frac{1}{4}-\left(x-\frac{3}{2}\right)^2}\cdot\left(x-\frac{3}{2}\right)'dx =$

$= \frac{1}{2}\left(\left(x-\frac{3}{2}\right)\sqrt{\frac{1}{4}-\left(x-\frac{3}{2}\right)^2}+\frac{1}{4}\arcsin\frac{x-\frac{3}{2}}{\frac{1}{2}}\right)+c, \forall x\in\left]1,2\right[, c\in\mathbb{R}.$

1.3. Integrale nedefinite determinate cu teoreme de schimbare de variabilă de integrare

Teorema 1.3.1.(teorema 1 de schimbare de variabilă în integrala nedefinită) Fie $f:\mathbb{I}\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ şi $g:\mathbb{J}\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, unde $\mathbb{I}$ şi $\mathbb{J}$ sunt intervale cu interior nevid din $\mathbb{R}$. Fie $u:\mathbb{I}\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{J}\subseteq\mathbb{R}$ o funcţie derivabilă pe $\mathbb{I}$, cu proprietatea că

$f=(g\circ u)\cdot u'$ pe $\mathbb{I}$.

Dacă g admite o primitivă G pe $\mathbb{J}$, atunci f admite $G\circ u$ drept primitivă pe intervalul $\mathbb{I}$, adică

$\int f(x)\,dx = (G\circ u)(x)+c, \forall x\in\mathbb{I}, \forall c\in\mathbb{R}$, adică

$\int g(u(x))\cdot u'(x)\,dx = G(u(x))+c, \forall x\in\mathbb{I}, \forall c\in\mathbb{R}.$

Teorema 1.3.2.(tabel cu integrale nedefinite).Scris şi exemplificat anticipat în Secţiunea 1.1.1.

Exemplul 1.3.1. Să se calculeze

a) $\int\frac{\sin 2x}{1+\sin^2 x}dx, x\in\mathbb{R}$ -A se vedea Seminar

b) $\int\frac{1}{\sin x}dx, x\in\left]0,\pi\right[.$

Rezolvare. etapa 1. $f :]0,\pi[\to \mathbb{R}, f(x) = \dfrac{1}{\sin x}$

f este continuă pe $]0,\pi[\Rightarrow f$ admite primitive pe $]0,\pi[$.

etapa 2. Se determină $F(x;c)$, aplicând prima teoremă de schimbare de variabilă de integrare.

$$\int \frac{1}{\sin x}dx = \int \frac{1}{\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}}dx = \int \frac{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}dx$$

modul 1. Se face schimbarea de variabilă de integrare

$$\begin{cases} \underbrace{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}_{=u(x),x\in]0,\pi[} = t,\ t \in]0,+\infty[\mid \text{se diferenţiază} \\ \left(1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}\right)\cdot\frac{1}{2}dx = dt \end{cases}$$

Se înlocuieşte $\Rightarrow F(t;\widetilde{c}) = \int \frac{dt}{t} = \ln t + \widetilde{c}, \forall t \in]0,+\infty[, \forall \widetilde{c} \in \mathbb{R}.$

Se revine la substituţie $\Rightarrow$

$F(x;c) = \ln\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right) + c, \forall x \in]0,\pi[, \forall c \in \mathbb{R}$

sunt toate primitivele funcţiei f pe $]0,\pi[$, familia de primitive fiind indexată după constanta $c \in \mathbb{R}$.

modul 2. Se determină $F(x;c)$, aplicând Teorema 1.3.2

$$\int \frac{1}{\sin x}dx = \int \frac{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}dx = \int \frac{1}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}\cdot\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)' dx = \ln\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right) + c, \forall x \in]0,\pi[, \forall c \in \mathbb{R}.$$

$F(x;c) = \ln\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right) + c, \forall x \in]0,\pi[, \forall c \in \mathbb{R}$

sunt toate primitivele funcţiei f pe $]0,\pi[$, familia de primitive fiind indexată după constanta $c \in \mathbb{R}$.

c) $\int \sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x}dx, x \in \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$.

Rezolvare. etapa 1. $f : \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x}$

f este continuă pe $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\Rightarrow f$ admite primitive pe $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$.

etapa 2. Se determină $F(x;c)$, aplicând prima teoremă de schimbare de variabilă de integrare.

$$\int \sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x}dx = \int \frac{1+\operatorname{tg}^2 x}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x}}dx$$

modul 1. Se face schimbarea de variabilă de integrare

$$\begin{cases} \underbrace{\operatorname{tg} x}_{=u(x),x\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[} = v,\ t \in \mathbb{R} \mid \text{se diferenţiază} \\ \left(1+\operatorname{tg}^2 x\right)dx = dv \end{cases}$$

Se înlocuieşte $\Rightarrow F(v;\widetilde{c}) = \int \frac{1}{\sqrt{1+v^2}}dt = \ln\left(v+\sqrt{1+v^2}\right) + \widetilde{c}, \forall v \in \mathbb{R}, \forall \widetilde{c} \in \mathbb{R}.$

Se revine la substituţie $\Rightarrow$

$F(x;c) = \ln\left(\operatorname{tg} x + \sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x}\right) + c, \forall x \in \mathbb{I}, \forall c \in \mathbb{R}$

sunt toate primitivele funcţiei f pe $\mathbb{I}$, familia de primitive fiind indexată după constanta $c \in \mathbb{R}$.

modul 2. $\int \sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x}dx = \int \frac{1+\operatorname{tg}^2 x}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x}}dx = \int \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x}}\cdot(\operatorname{tg} x)' dx$

$$= \ln\left(\operatorname{tg} x + \sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x}\right), \forall x \in \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[, \forall c \in \mathbb{R}.$$

$F(x;c) = \ln\left(1+\sin^2 x\right), \forall x \in \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[, \forall c \in \mathbb{R}$

sunt toate primitivele funcţiei f pe $\mathbb{I} = \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$, familia de primitive fiind indexată după constanta $c \in \mathbb{R}$.

Teorema 1.3.2.(**teorema 2 de schimbare de variabilă în integrala nedefinită**) Fie $f : \mathbb{I} \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ şi $g : \mathbb{J} \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, unde $\mathbb{I}$ şi $\mathbb{J}$ sunt intervale cu interior nevid din $\mathbb{R}$. Fie $v : \mathbb{J} \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{I} \subseteq \mathbb{R}$ o funcţie bijectivă şi derivabilă pe $\mathbb{J}$, cu proprietatea că

$v' \neq 0$ pe $\mathbb{J}$ şi $g = (f \circ v) \cdot v'$ pe $\mathbb{J}$.

Dacă g admite o primitivă G pe $\mathbb{J}$, atunci f admite $G \circ v^{-1}$ drept primitivă pe intervalul $\mathbb{I}$, adică

$\int f(x)\,dx = \left(G \circ v^{-1}\right)(x) + c, \forall x \in \mathbb{I}, \forall c \in \mathbb{R}$, adică

$\int f(x)\,dx = G\left(v^{-1}(x)\right) + c, \forall x \in \mathbb{I}, \forall c \in \mathbb{R}$.

Exemplul 1.3.2. Să se calculeze:
a) $\int \sin\sqrt{x}dx, x \in]0, +\infty[$

Rezolvare. etapa 1.$f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}, f(x) = \sin\sqrt{x}$

f este continuă pe $[0, +\infty[\Rightarrow f$ admite primitive pe $\mathbb{I} \subseteq]0, +\infty[$

etapa 2. Se determină $F(x; c)$, aplicând a doua teoremă de schimbare de variabilă de integrare.

Se face schimbarea de variabilă de integrare

$$\begin{cases} \sqrt{x} = t,\ t \in]0, +\infty[\mid \text{se inversează} \\ x = t^2,\ t \in]0, +\infty[\mid \text{se diferenţiază} \\ dx = 2tdt \end{cases}$$

Se înlocuieşte$\Rightarrow F(t; \widetilde{c}) = \int (\sin t)\, 2tdt = -2\int t(\cos t)'\,dt = -2t\cos t + 2\int \cos tdt$
$= -2t\cos t + 2\sin t + \widetilde{c},\ \forall t \in]0, +\infty[\,, \forall \widetilde{c} \in \mathbb{R}$.

Se revine la substituţie$\Rightarrow$

$F(x; c) = -2\sqrt{x}\cos\sqrt{x} + 2\sin\sqrt{x} + c,\ \forall x \in]0, +\infty[\,, \forall c \in \mathbb{R}$

sunt toate primitivele funcţiei f pe $\mathbb{I} =]0, +\infty[$, familia de primitive fiind indexată după constanta $c \in \mathbb{R}$.

1.4. Integrale nedefinite având ca integrant funcţii raţionale în x

Forma generală: $\boxed{\int R(x)\,dx, x \in \mathbb{I},}$ (2)

unde $R : \mathbb{I} \to \mathbb{R}, R(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ este funcţie raţională în x.

Rezolvare: I. Dacă $\operatorname{grad} P \geq \operatorname{grad} Q$ atunci, conform teoremei împărţirii cu rest, există funcţiile polinomiale K, P_1 cu $\operatorname{grad} P_1 < \operatorname{grad} Q$ astfel încât

$$P(x) = K(x) \cdot Q(x) + P_1(x), \forall x \in \mathbb{I} \Rightarrow \boxed{\int R(x)\,dx = \int K(x)\,dx + \int \frac{P_1(x)}{Q(x)}dx, \forall x \in \mathbb{I}.}$$

$\int K(x)\,dx$ se determină folosind, pentru $n \in \mathbb{N}, \int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + c, \forall x \in \mathbb{R}, \forall c \in \mathbb{R}$.

$\int \dfrac{P_1(x)}{Q(x)}dx$ se determină folosind **II.**

II. Dacă $\operatorname{grad} P < \operatorname{grad} Q$ atunci R se descompune în fracţii simple şi se aplică teoria din liceu pentru a calcula

$\boxed{\int \dfrac{A}{(x-a)^m}dx, x \in \mathbb{I}, \text{ unde } A \in \mathbb{R}, a \in \mathbb{R}, m \in \mathbb{N}^*}$ şi

$\boxed{\int \dfrac{Bx + C}{(ax^2 + bx + c)^m}dx, x \in \mathbb{I}, \text{ unde } A, B \in \mathbb{R}, a, b, c \in \mathbb{R} \text{ cu } b^2 - 4ac < 0, m \in \mathbb{N}^*.}$

În descompunerea funcţiei $R(x)$ în fracţii simple apar situaţiile:

-$Q(x)$ are rădăcini reale simple;
-$Q(x)$ are rădăcini reale multiple;
-$Q(x)$ are rădăcini complexe conjugate simple;
-$Q(x)$ are rădăcini complexe conjugate multiple.

Comentariu. Cazurile I şi II din teorie se pot reduce la determinarea directă a coeficienţilor polinomului K cu $\operatorname{grad} K = \operatorname{grad} P - \operatorname{grad} Q$ şi a coeficienţilor descompunerii în fracţii simple pentru $\dfrac{P_1(x)}{Q(x)}$ din relaţia

$R(x) = K(x) + \dfrac{P_1(x)}{Q(x)}, \forall x \in \mathbb{I}.$

Exemplul 1.4.1. Să se calculeze>

a) $\int \dfrac{2x+1}{3x^2+2x+3}dx, x \in \mathbb{R}.$

Rezolvare. etapa 1.$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \dfrac{2x+1}{3x^2+2x+3}$

f este continuă pe $\mathbb{R} \Rightarrow f$ admite primitive pe $\mathbb{R}$

etapa 2. Se determină $F(x;c)$, aplicând teoria.

Se observă că f este de forma (2), cu $P(x) = 2x+1, Q(x) = 3x^2+2x+3$, II.

$$Q(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2+2x+3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{-1+2i\sqrt{2}}{3} \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}, & m(x_1) = 1 \\ x_2 = \frac{-1-2i\sqrt{2}}{3} \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}, & m(x_2) = 1 \end{cases}$$

Cum $\Delta < 0 \Rightarrow f$ este deja fracţie simplă.

Se observă că $\left(3x^2+2x+3\right)' = 6x+2 \neq 3(2x+1)$. Atunci

$$F(x;c) = \frac{1}{3}\int \frac{6x+3}{3x^2+2x+3}dx = \frac{1}{3}\int \frac{6x+2}{3x^2+2x+3}dx + \frac{1}{3}\int \frac{1}{3x^2+2x+3}dx =$$

$$= \frac{1}{3}\int \frac{\left(3x^2+2x+3\right)'}{3x^2+2x+3}dx + \frac{1}{3\cdot 3}\int \frac{\left(x+\frac{1}{3}\right)'}{\left(x+\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)^2}dx =$$

$$= \frac{1}{3}\ln\left(3x^2+2x+3\right) + \frac{1}{3\cdot 3}\cdot\frac{1}{\frac{2\sqrt{2}}{3}}\operatorname{arctg}\frac{x+\frac{1}{3}}{\frac{2\sqrt{2}}{3}} + c, \forall x \in \mathbb{R}, \forall c \in \mathbb{R}$$

sunt toate primitivele funcţiei f pe $\mathbb{R}$, familia de primitive fiind indexată după constanta $c \in \mathbb{R}$.

b) $\int \dfrac{x^2-3x+2}{x^3+2x^2+x}dx, x \in \left]0,+\infty\right[.$

Rezolvare. etapa 1.$f : \left]0,+\infty\right[\to \mathbb{R}, f(x) = \dfrac{x^2-3x+2}{x(x+1)^2}$

f este continuă pe $\left]0,+\infty\right[\Rightarrow f$ admite primitive pe $\left]0,+\infty\right[$

etapa 2. Se determină $F(x;c)$, aplicând teoria. Se observă că

$\left(x^3+2x^2+x\right)' = 3x^2+4x+1 \neq x^2-3x+2.$

Atunci, cum $\operatorname{grad} P < \operatorname{grad} Q$, se descompune f în fracţii simple. Se poate arăta că

$$\frac{x^2-3x+2}{x(x+1)^2} = \frac{2}{x} - \frac{1}{x+1} - \frac{6}{(x+1)^2}, \forall x \in \left]0,+\infty\right[\Rightarrow$$

$$\int \frac{x^2-3x+2}{x^3+2x^2+x}dx = \int\left(\frac{2}{x} - \frac{1}{x+1} - \frac{6}{(x+1)^2}\right)dx = 2\int\frac{1}{x}dx - \int\frac{(x+1)'}{x+1}dx - 6\int\frac{1}{(x+1)^2}dx =$$

$$= 2\ln x + \ln(x+1) - 6\frac{(x+1)^{-1}}{-1} + c, \forall x \in \left]0,+\infty\right[, c \in \mathbb{R}$$

sunt toate primitivele funcţiei f pe $\left]0,+\infty\right[$, indexate după constantele $c \in \mathbb{R}$.

c) $\int \dfrac{1}{x^3+1}dx, x \in \left]-1,+\infty\right[.$

Rezolvare. etapa 1. $f:]-1,+\infty[\to \mathbb{R}, f(x) = \dfrac{1}{x^3+1}$

f este continuă pe $]-1,+\infty[\Rightarrow f$ admite primitive pe $]0,+\infty[$

etapa 2. Se determină $F(x;c)$, aplicând teoria. Se observă că

$\left(x^3+1\right)' = 3x^2 \neq 1.$

Atunci, cum $\operatorname{grad} P < \operatorname{grad} Q$, se descompune f în fracţii simple. Se poate arăta că

$$\frac{1}{x^3+1} = \frac{\frac{1}{3}}{x+1} - \frac{\frac{1}{3}x-\frac{2}{3}}{x^2-x+1}, \forall x \in]-1,+\infty[\Rightarrow$$

$$\int \frac{1}{x^3+1}dx = \int\left(\frac{\frac{1}{3}}{x+1} - \frac{\frac{1}{3}x-\frac{2}{3}}{x^2-x+1}\right)dx = \tfrac{1}{3}\int\frac{1}{x+1}dx - \tfrac{1}{6}\int\frac{2x-4}{x^2-x+1}dx =$$

$$= \tfrac{1}{3}\int\frac{1}{x+1}(x+1)'dx - \tfrac{1}{6}\int\frac{1}{x^2-x+1}\left(x^2-x+1\right)'dx - \tfrac{-3}{6}\int\frac{1}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}\left(x-\tfrac{1}{2}\right)'dx =$$

$$= \tfrac{1}{3}\ln(x+1) - \tfrac{1}{6}\ln\left(x^2-x+1\right) + \tfrac{1}{2}\tfrac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\operatorname{arctg}\frac{x-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} + c, \forall x \in]-1,+\infty[, c \in \mathbb{R}$$

sunt toate primitivele funcţiei f pe $]-1,+\infty[$, indexate după constantele $c \in \mathbb{R}$.

d) $\int \dfrac{1}{x^4+4}dx, x \in \mathbb{R}.$

Rezolvare. etapa 1. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \dfrac{1}{x^4+4}$

f este continuă pe $\mathbb{R} \Rightarrow f$ admite primitive pe $\mathbb{R}$

etapa 2. Se determină $F(x;c)$, aplicând teoria. Se observă că

$\left(x^4+4\right)' = 4x^3 \neq 1.$

Atunci, cum $\operatorname{grad} P < \operatorname{grad} Q$, se descompune f în fracţii simple. Se poate arăta că

$$\frac{1}{x^4+4} = \frac{\frac{1}{8}x+\frac{1}{4}}{x^2+2x+2} - \frac{\frac{1}{8}x-\frac{1}{4}}{x^2-2x+2}, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow$$

$$\int\frac{1}{x^4+4}dx = \int\left(\frac{\frac{1}{8}x+\frac{1}{4}}{x^2+2x+2} - \frac{\frac{1}{8}x-\frac{1}{4}}{x^2-2x+2}\right)dx = \tfrac{1}{16}\int\frac{2x+4}{x^2+2x+2}dx - \tfrac{1}{16}\int\frac{2x-4}{x^2-2x+2}dx =$$

$$= \tfrac{1}{16}\int\frac{2x+2}{x^2+2x+2}dx + \tfrac{1}{16}\int\frac{2}{x^2+2x+2}dx - \tfrac{1}{16}\int\frac{2x-2}{x^2-2x+2}dx - \tfrac{1}{16}\int\frac{-2}{x^2-2x+2}dx =$$

$$= \tfrac{1}{16}\int\frac{1}{x^2+2x+2}\left(x^2+2x+2\right)'dx + \tfrac{1}{8}\int\frac{1}{(x+1)^2+1^2}(x+1)'dx -$$

$$-\tfrac{1}{16}\int\frac{1}{x^2-2x+2}\left(x^2-2x+2\right)'dx + \tfrac{1}{8}\int\frac{1}{(x-1)^2+1^2}(x-1)'dx =$$

$$= \tfrac{1}{16}\ln\left(x^2+2x+2\right) + \tfrac{1}{8}\tfrac{1}{1}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{1} - \tfrac{1}{16}\ln\left(x^2-2x+2\right) + \tfrac{1}{8}\tfrac{1}{1}\operatorname{arctg}\frac{x-1}{1} + c =$$

$$= \tfrac{1}{16}\ln\frac{x^2+2x+2}{x^2-2x+2} + \tfrac{1}{8}\left(\operatorname{arctg}(x+1) + \operatorname{arctg}(x+1)\right) + c, \forall x \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{R}$$

sunt toate primitivele funcţiei f pe $\mathbb{R}$, indexate după constantele $c \in \mathbb{R}$.

Se poate folosi, pentru $u, v \in [0,1[$, $\operatorname{arctg} u + \operatorname{arctg} v = \operatorname{arctg}\dfrac{u+v}{1-uv}$.

e) $\int \dfrac{1}{\left(x^2+1\right)^2}dx, x \in \mathbb{R}.$

Rezolvare. etapa 1. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \dfrac{1}{\left(x^2+1\right)^2}$

f este continuă pe $\mathbb{R} \Rightarrow f$ admite primitive pe $\mathbb{R}$

etapa 2. Se determină $F(x;c)$, aplicând teoria. Se observă că este deja fracţie simplă şi că

$\left(\dfrac{1}{x^2+1}\right)' = \dfrac{-2x}{(x^2+1)^2} \neq \dfrac{1}{(x^2+1)^2}.$

$$\int \frac{1}{(x^2+1)^2}dx = \int \frac{1+x^2-x^2}{(x^2+1)^2}dx = \int \frac{1}{x^2+1}dx - \int \frac{x^2}{(x^2+1)^2}dx =$$
$$= \int \frac{1}{x^2+1}dx + \tfrac{1}{2}\int x \cdot \frac{-2x}{(x^2+1)^2}dx = \int \frac{1}{x^2+1}dx + \tfrac{1}{2}\int x \cdot \left(\frac{1}{x^2+1}\right)' dx =$$
$$= \int \frac{1}{x^2+1}dx + \tfrac{1}{2}\left(x \cdot \frac{1}{x^2+1} - \int 1 \cdot \frac{1}{x^2+1}dx\right) =$$
$$= \tfrac{1}{2}\int \frac{1}{x^2+1}dx + \tfrac{1}{2}\frac{x}{x^2+1} = \tfrac{1}{2}\operatorname{arctg} x + \tfrac{1}{2}\frac{x}{x^2+1} + c, \forall x \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{R}$$

sunt toate primitivele funcţiei f pe $\mathbb{R}$, indexate după constantele $c \in \mathbb{R}$.

1.5. Integrale nedefinite având ca integrant funcţii iraţionale în x, reductibile la cele din Secţiunea 1.4

1.5.1.Forma generală: $\boxed{\int R\left(x, \left(\dfrac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_1}{n_1}}, ..., \left(\dfrac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_p}{n_p}}\right) dx, x \in \mathbb{I},}$ (3)

unde $R : \mathbb{I}_0 \times \mathbb{I}_1 \times ... \times \mathbb{I}_p \to \mathbb{R}, R(y_0, y_1, ..., y_p) = \dfrac{P(y_0, y_1, ..., y_p)}{Q(y_0, y_1, ..., y_p)}$ este funcţie raţională în $y_0 = x, y_1 = \left(\dfrac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_1}{n_1}}, ..., y_p = \left(\dfrac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_p}{n_p}}$, iar $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $m_1, ..., m_p$ sunt numere întregi, $n_1, ..., n_p$ sunt numere întregi nenule astfel încât macar unul din numerele raţionale $\frac{m_i}{n_i}, i \in \{1, ..., p\}$ să nu fie număr întreg.

Rezolvare: Se face schimbarea de variabilă de integrare: $\boxed{\dfrac{ax+b}{cx+d} = t^n,}$ (3′)

unde n este cel mai mic multiplu comun al numerelor $n_1, ..., n_p$, se obţine o integrală ca în Secţiunea 1.4 în variabila t, se calculează şi se revine la substituţie.

Exemplul 1.5.1.1. Să se calculeze:

a) $\int \dfrac{1}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}dx, x \in \mathbb{I}.$

Rezolvare. etapa 1. $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}, f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}.$

f este continuă pe $]0, +\infty[\Rightarrow f$ admite primitive pe $\mathbb{I} =]0, +\infty[$.

etapa 2. Se determină integrala, aplicând teoria. Se observă că $f(x) = \dfrac{1}{x^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{3}}}$ este de forma (3), cu $a = 1$, $b = 0$, $c = 0$, $d = 1$, $m_1 = 1$, $n_1 = 2$, $m_2 = 1$, $n_2 = 3$.

Se face schimbarea de variabilă de integrare: $\begin{cases} x = t^6, t \in]0, +\infty[| \text{ se diferenţiază} \\ dx = 6t^5 dt \end{cases}$

Se înlocuieşte$\Rightarrow \int \dfrac{1}{t^3+t^2}6t^5dt = 6\int \dfrac{t^3+1-1}{t+1}dt = 6\int \left(t^2 - t + 1 - \dfrac{1}{t+1}\right)dt =$

$$= 6\left(\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} + t + \ln(t+1)\right) + \widetilde{c}, \forall t \in]0, +\infty[, \forall \widetilde{c} \in \mathbb{R}.$$

Se revine la substituţie$\Rightarrow$

$\int \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}dx = 6\left(\frac{\sqrt{x}}{3} - \frac{\sqrt[3]{x}}{2} + \sqrt[6]{x} + \ln\left(1+\sqrt[6]{x}\right)\right) + c, \forall x \in \left]0,+\infty\right[, \forall c \in \mathbb{R}$
sunt toate primitivele funcţiei f pe $\mathbb{I} =]0, +\infty[$, familia de primitive fiind indexată după constanta $c \in \mathbb{R}$.

b) $\int \frac{1}{x}\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}dx, x \in \left]1,+\infty\right[.$

Rezolvare. etapa 1. $CE : \begin{cases} x \neq 0 \\ \frac{x+1}{x-1} > 0 \end{cases} \Rightarrow x \in \left]-\infty,-1\right[\cup \left]1,+\infty\right[$

$f : \left]1,+\infty\right[\to \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{x}\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$

f este continuă pe $\left]1,+\infty\right[\Rightarrow f$ admite primitive pe $\mathbb{I} = \left]1,+\infty\right[$

etapa 2. Se determină $F(x;c)$, aplicând teoria.

Se observă că $f(x) = \frac{\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{\frac{1}{2}}}{x^1}$,adică e de forma (3), cu $a = 1$, $b = 1$, $c = 1$, $d = -1$, $m_1 = 1$, $n_1 = 2$. Se face schimbarea de variabilă de integrare

$$\begin{cases} \frac{x+1}{x-1} = t^2, \ t \in \left]1,+\infty\right[| \text{ se inversează} \\ x = \frac{t^2+1}{t^2-1}, \ t \in \left]1,+\infty\right[| \text{ se diferenţiază} \\ dx = \frac{-4t}{\left(t^2-1\right)^2}dt \end{cases}$$

Se înlocuieşte$\Rightarrow$

$$F(t;\widetilde{c}) = \int \frac{t^2-1}{t^2+1} \cdot t \cdot \frac{-4t}{\left(t^2-1\right)^2}dt = \int \frac{-4t^2}{\left(t^2+1\right)\left(t^2-1\right)}dt = \int \left(-2\frac{1}{t^2+1} - 2\frac{1}{t^2-1}\right)dt =$$
$$= -2\operatorname{arctg} t - \ln\frac{t-1}{t+1} + \widetilde{c}, \ \forall t \in \left]1,+\infty\right[, \forall \widetilde{c} \in \mathbb{R}.$$

Se revine la substituţie$\Rightarrow$

$$F(x;c) = -2\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{x+1}{x-1}} - \ln\frac{\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}-1}{\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}+1} + c, \ \forall x \in \left]1,+\infty\right[, \forall c \in \mathbb{R}$$

sunt toate primitivele funcţiei f pe $\mathbb{I} =]10, +\infty[$, familia de primitive fiind indexată după constanta $c \in \mathbb{R}$.

○**1.5.2.Forma generală:** $\boxed{\int \frac{P_m(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx, x \in \mathbb{I},}$ (4)

unde P_m este funcţie polinomială de grad m în variabila x, iar $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Rezolvare: modul 1. (mai ales pentru $m = 0, m = 1, m = 2$) Folosind

- $(m = 0, m = 1, m = 2)$modul de calcul pentru $\int \frac{1}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx, x \in \mathbb{I}$;
- $(m = 1, m = 2)$ $\left(\sqrt{ax^2+bx+c}\right)' = \frac{2ax+b}{2\sqrt{ax^2+bx+c}}$
- $(m = 2)$modul de calcul pentru $\int \sqrt{ax^2+bx+c}dx, x \in \mathbb{I}$;

modul 2. (mai ales pentru $m \geq 2$) Se consideră relaţia

$$\boxed{\int \frac{P_m(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx = Q_{m-1}(x)\cdot\sqrt{ax^2+bx+c} + \lambda\cdot\int\frac{1}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx, x\in\mathbb{I},} \tag{4'}$$

unde Q_{m-1} este funcţie polinomială de grad m în variabila x cu coeficienţi necunoscuţi şi $\lambda \in \mathbb{R}$ este necunoscut. Coeficienţii funcţiei polinomiale Q_{m-1} şi numărul $\lambda \in \mathbb{R}$ se determină derivând relaţia (4′), apoi indentificând coeficienţii polinoamelor ce apar.
modul 3. Folosind substituţiile Euler de mai jos.

Exemplul 1.5.2.1. Să se calculeze:
a) $\int \frac{2x+1}{\sqrt{3x^2-6x+5}}dx, x\in\mathbb{I}.$

Rezolvare. etapa 1. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{2x+1}{\sqrt{3x^2-6x+5}}$

f este continuă pe $\mathbb{R} \Rightarrow f$ admite primitive pe $\mathbb{I}=\mathbb{R}$
etapa 2. Se determină integrala, aplicând teoria. Se observă că f este de forma (4), cu $P_1(x) = 2x+1, m=1$ şi $a=3,\ b=-6,\ c=5$.
modul 1. Se foloseşte $\left(\sqrt{3x^2-6x+5}\right)' = \frac{6x-6}{2\sqrt{3x^2-6x+5}} = \frac{3x-3}{\sqrt{3x^2-6x+5}}$. Atunci

$$\int\frac{2x+1}{\sqrt{3x^2-6x+5}}dx = \frac{1}{3}\int\frac{6x-6+9}{\sqrt{3x^2-6x+5}}dx =$$
$$= \frac{2}{3}\int\left(\sqrt{3x^2-6x+5}\right)'dx + 3\int\frac{1}{\sqrt{3x^2-6x+5}}dx =$$
$$= \frac{2}{3}\int\left(\sqrt{3x^2-6x+5}\right)'dx + \frac{3}{\sqrt{3}}\int\frac{(x-1)'}{\sqrt{(x-1)^2+\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^2}}dx =$$
$$= \frac{2}{3}\sqrt{3x^2-6x+5} + \sqrt{3}\ln\left(x-1+\sqrt{(x-1)^2+\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^2}\right), \forall x\in\mathbb{R}, \forall c\in\mathbb{R}$$

sunt toate primitivele funcţiei f pe $\mathbb{I}=\mathbb{R}$, familia de primitive fiind indexată după constanta $c\in\mathbb{R}$.
modul 3. Cu substituţii Euler.
b) $\int\frac{x^2+x+1}{\sqrt{2x^2-3x+2}}dx, x\in\mathbb{I}.$

Rezolvare. etapa 1.$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{x^2+x+1}{\sqrt{2x^2-3x+2}}$

f este continuă pe $\mathbb{R} \Rightarrow f$ admite primitive pe $\mathbb{I}=\mathbb{R}$
etapa 2. Se determină $F(x;c)$, aplicând teoria.

Se observă că $f(x) = \frac{x^2+x+1}{\sqrt{2x^2-3x+2}}$, adică este de forma (4), cu $P_2(x)=x^2+x+1, m=2$ şi $a=2,\ b=-3,\ c=2$.
modul 1. Se foloseşte $\left(\sqrt{2x^2-3x+2}\right)' = \frac{4x-3}{2\sqrt{2x^2-3x+2}}$. Se obţine:

$$\int\frac{x^2+x+1}{\sqrt{2x^2-3x+2}}dx = \frac{1}{2}\int\frac{2x^2+2x+2}{\sqrt{2x^2-3x+2}}dx = \frac{1}{2}\int\frac{\left(2x^2-3x+2\right)+5x}{\sqrt{2x^2-3x+2}}dx =$$
$$= \frac{1}{2}\int\sqrt{2x^2-3x+2}dx + \frac{5}{2\cdot 4}\int\frac{4x-3}{\sqrt{2x^2-3x+2}}dx + \frac{5\cdot 3}{2\cdot 4}\int\frac{1}{\sqrt{2x^2-3x+2}}dx$$

Se observă că: $2x^2-3x+2 = 2\left(x^2-\frac{3}{2}x+1\right) = 2\left(\left(x-\frac{3}{4}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{7}}{4}\right)^2\right)$.

$$\int\frac{x^2+x+1}{\sqrt{2x^2-3x+2}}dx =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\int\sqrt{\left(x-\frac{3}{4}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{7}}{4}\right)^2}\cdot\left(x-\frac{3}{4}\right)'dx+\frac{5}{2\cdot 2}\int\left(\sqrt{2x^2-3x+2}\right)'dx+$$
$$+\frac{5\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{1}{\sqrt{\left(x-\frac{3}{4}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{7}}{4}\right)^2}}\left(x-\frac{3}{4}\right)'dx=$$
$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{1}{2}\left(\left(x-\frac{3}{4}\right)\sqrt{\left(x-\frac{3}{4}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{7}}{4}\right)^2}+\left(\frac{\sqrt{7}}{4}\right)^2\ln\left(\left(x-\frac{3}{4}\right)+\sqrt{\left(x-\frac{3}{4}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{7}}{4}\right)^2}\right)\right)+$$
$$+\frac{5}{2\cdot 2}\sqrt{2x^2-3x+2}+\frac{5\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left(\left(x-\frac{3}{4}\right)+\sqrt{\left(x-\frac{3}{4}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{7}}{4}\right)^2}\right)+c,\forall x\in\mathbb{R},\forall c\in\mathbb{R}$$

modul 2. Se consideră relaţia

$$(*)\int\frac{x^2+x+1}{\sqrt{2x^2-3x+2}}dx=Q_1(x)\cdot\sqrt{2x^2-3x+2}+\lambda\cdot\int\frac{1}{\sqrt{2x^2-3x+2}}dx,x\in\mathbb{I},$$

unde Q_1 este funcţie polinomială de grad 1 în variabila x cu coeficienţi necunoscuţi, adică $Q_0(x)=a_0+a_1x$ şi $\lambda\in\mathbb{R}$ este necunoscut. Se determină a_0,a_1 şi λ. Se derivează $(*)\Rightarrow$

$$\frac{x^2+x+1}{\sqrt{2x^2-3x+2}}=a_1\cdot\sqrt{2x^2-3x+2}+(a_0+a_1x)\frac{4x-3}{2\sqrt{2x^2-3x+2}}+\lambda\frac{1}{\sqrt{2x^2-3x+2}},x\in\mathbb{I}\Rightarrow$$
$$2\left(x^2+x+1\right)=2a_1\left(2x^2-3x+2\right)+(a_0+a_1x)(4x-3)+2\lambda,x\in\mathbb{I}.$$

Identificarea coeficienţii puterilor lui $x\Rightarrow$

$$\begin{cases}2=4a_1+4a_1\\2=-6a_1-3a_1+4a_0\\2=4a_1-3a_0+2\lambda\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a_1=\frac{1}{4}\\a_0=\dfrac{2+\frac{9}{4}}{4}=\frac{17}{16}\\\lambda=1-\frac{2}{4}+\frac{3\cdot 17}{2\cdot 16}=\frac{67}{32}\end{cases}$$

$$\int\frac{x^2+x+1}{\sqrt{2x^2-3x+2}}dx=\left(\frac{1}{4}+\frac{17}{16}x\right)\sqrt{2x^2-3x+2}+\frac{67}{32}\int\frac{1}{\sqrt{2x^2-3x+2}}dx=$$
$$=\left(\frac{1}{4}+\frac{17}{16}x\right)\sqrt{2x^2-3x+2}+\frac{67}{32\sqrt{2}}\int\frac{\left(x-\frac{3}{4}\right)'}{\sqrt{\left(x-\frac{3}{4}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{7}}{4}\right)^2}}dx=$$
$$=\left(\frac{1}{4}+\frac{17}{16}x\right)\sqrt{2x^2-3x+2}+\frac{67}{32\sqrt{2}}\ln\left(\left(x-\frac{3}{4}\right)+\sqrt{\left(x-\frac{3}{4}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{7}}{4}\right)^2}\right)+c,\forall x\in\mathbb{R},\forall c\in\mathbb{R}$$

sunt toate primitivele funcţiei f pe $\mathbb{I}=\mathbb{R}$, familia de primitive fiind indexată după constanta $c\in\mathbb{R}$.

modul 3. Cu substituţii Euler.

1.5.3. Forma generală: $\boxed{\int\frac{1}{(x-d)^n\sqrt{ax^2+bx+c}}dx,x\in\mathbb{I},}$ (5)

unde $a,b,c,d\in\mathbb{R}$ şi $n\in\mathbb{N}^*$

Rezolvare: modul 1. Se face schimbarea de variabilă de integrare

$$\boxed{\frac{1}{x-d}=t,}\qquad(5')$$

şi se obţine o integrală ca în Secţiunea 1.5.2 în variabila t, se calculează şi se revine la substituţie.

modul 2. Folosind substituţiile Euler de mai jos.

Exemplul 1.5.3.1. Să se calculeze

a) $\int\frac{1}{x^2\sqrt{1+x^2}}dx,x\in\left]-\infty,0\right[$

Rezolvare. etapa 1.$f:]-\infty,0[\to \mathbb{R}, f(x) = \dfrac{1}{x^2\sqrt{1+x^2}}$

f este continuă pe $]-\infty,0[\Rightarrow f$ admite primitive pe $]-\infty,0[$

etapa 2. Se determină $F(x;c)$, aplicând teoria.

Se observă că $f(x) = \dfrac{1}{x^2\sqrt{1+x^2}}$,adică e de forma (5), cu $d=0$, $a=1$, $b=0$, $c=1$, $n=2$. Se face schimbarea de variabilă de integrare

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x} = t, t \in]-\infty,0[| \text{ se inversează} \\ x = \dfrac{1}{t}, t \in]-\infty,0[| \text{ se diferenţiază} \\ dx = \dfrac{-1}{t^2}dt \end{cases}$$

Se înlocuieşte$\Rightarrow$

$$F(t;\widetilde{c}) = \int \frac{1}{\left(\frac{1}{t}\right)^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{1}{t}\right)^2}} \frac{-1}{t^2}dt \underset{|t|=-t}{\overset{t<0}{=}} \int \frac{t^2}{-\sqrt{t^2+1}}(-1)\,dt = \int \frac{t^2}{\sqrt{t^2+1}}dt$$

$$\int \frac{t^2}{\sqrt{t^2+1}}dt = \int t\left(\sqrt{t^2+1}\right)'dt = t\sqrt{t^2+1} - \int \sqrt{t^2+1}dt =$$

$$= t\sqrt{t^2+1} - \int \frac{t^2+1}{\sqrt{t^2+1}}dt = t\sqrt{t^2+1} - \int \frac{t^2}{\sqrt{t^2+1}}dt - \ln\left(t+\sqrt{t^2+1}\right) \Rightarrow$$

$$F(t;\widetilde{c}) = \frac{1}{2}\left(t\sqrt{t^2+1} - \ln\left(t+\sqrt{t^2+1}\right)\right) + \widetilde{c}, \forall t \in]-\infty,0[, \forall \widetilde{c} \in \mathbb{R}.$$

Se revine la substituţie$\Rightarrow$

$$F(x;c) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}\sqrt{\left(\frac{1}{x}\right)^2+1} - \ln\left(\frac{1}{x}+\sqrt{\left(\frac{1}{x}\right)^2+1}\right)\right) + c, \forall x \in]-\infty,0[, \forall c \in \mathbb{R}$$

sunt toate primitivele funcţiei f pe $\mathbb{I} =]-\infty,0[$, familia de primitive fiind indexată după constanta $c \in \mathbb{R}$.

b) $\displaystyle\int \frac{1}{x\sqrt{7x-x^2-12}}dx, x \in \mathbb{I}.$

Rezolvare. etapa 1.$f: \mathbb{I} \to \mathbb{R}, f(x) = \dfrac{1}{x\sqrt{7x-x^2-12}}$

Se impune $CE: \begin{cases} x \neq 0 \\ 7x-x^2-12 \gneqq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in]3,4[.$

f este continuă pe $]3,4[\Rightarrow f$ admite primitive pe $\mathbb{I} =]3,4[$

etapa 2. Se determină $F(x;c)$, aplicând teoria.

Se observă că $f(x) = \dfrac{1}{x\sqrt{-x^2+7x-12}}$,adică e de forma (5), cu $d=0$, $a=-1$, $b=7$, $c=-12$, $n=1$. Se face schimbarea de variabilă de integrare

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x} = t, t \in \left]\frac{1}{4},\frac{1}{3}\right[| \text{ se inversează} \\ x = \dfrac{1}{t}, t \in \left]\frac{1}{4},\frac{1}{3}\right[| \text{ se diferenţiază} \\ dx = \dfrac{-1}{t^2}dt \end{cases}$$

Se înlocuieşte

$$F(t;\widetilde{c}) = \int \frac{t}{\sqrt{-\left(\frac{1}{t}\right)^2+7\frac{1}{t}-12}} \frac{-1}{t^2}dt \underset{|t|=t}{\overset{t>0 \text{ pe } \left]\frac{1}{4},\frac{1}{3}\right[}{=}} \int \frac{-1}{\sqrt{-1+7t-12t^2}}dt =$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{12}}\int \frac{1}{\sqrt{-\frac{1}{12}+\frac{7}{12}t-t^2}}dt = -\frac{1}{\sqrt{12}}\int \frac{1}{\sqrt{-\left(t^2-2\frac{7}{24}t+\left(\frac{7}{24}\right)^2\right)+\left(\frac{7}{24}\right)^2-\frac{1}{12}}}dt =$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{12}}\int \frac{\left(t-\frac{7}{24}\right)'}{\sqrt{\left(\frac{1}{24}\right)^2-\left(t-\frac{7}{24}\right)^2}}dt = -\frac{1}{\sqrt{12}}\arcsin\frac{t-\frac{7}{24}}{\frac{1}{24}}+\widetilde{c},\ \forall t\in\left]\frac{1}{4},\frac{1}{3}\right[,\forall\widetilde{c}\in\mathbb{R}.$$

Se revine la substituţie$\Rightarrow$

$$F(x;c) = -\frac{1}{\sqrt{12}}\arcsin\frac{\frac{1}{x}-\frac{7}{24}}{\frac{1}{24}}+c,\ \forall x\in\left]3,4\right[,\forall c\in\mathbb{R}$$

sunt toate primitivele funcţiei f pe $\mathbb{I} =]3,4[$, familia de primitive fiind indexată după constanta $c\in\mathbb{R}$.

1.5.4. Forma generală: $\boxed{\int R\left(x,\sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx, x\in\mathbb{I},}$ (6)

unde $R:\mathbb{I}_0\times\mathbb{I}_1\to\mathbb{R}, R(y_0,y_1) = \dfrac{P(y_0,y_1)}{Q(y_0,y_1)}$ este funcţie raţională în $y_0 = x, y_1 = \sqrt{ax^2+bx+c}$, iar $a,b,c\in\mathbb{R}$.

Rezolvare: Se face una din schimbarea de variabilă (substituţie Euler)

a) dacă $a>0$:

$$\begin{cases}\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a}x+t \text{ sau } \sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a}x-t\\ \sqrt{ax^2+bx+c} = -\sqrt{a}x+t \text{ sau } \sqrt{ax^2+bx+c} = -\sqrt{a}x-t\end{cases} \qquad (6')$$

b) dacă $c>0$:

$$\begin{cases}\sqrt{ax^2+bx+c} = tx+\sqrt{c} \text{ sau } \sqrt{ax^2+bx+c} = tx-\sqrt{c}\\ \sqrt{ax^2+bx+c} = -tx+\sqrt{c} \text{ sau } \sqrt{ax^2+bx+c} = -tx-\sqrt{c}\end{cases} \qquad (6'')$$

c) dacă $ax^2+bx+c = 0$ are rădăcinile reale x_1,x_2 :

$$\left\{\sqrt{ax^2+bx+c} = t(x-x_1) \text{ sau } \sqrt{ax^2+bx+c} = t(x-x_2)\right. \qquad (6''')$$

pentru x într-un subinterval al $\mathbb{I}$ ce nu conţine x_1, respectiv x_2.

Se obţine o integrală ca în Secţiunea 1.4 în variabila t, se calculează şi se revine la substituţie.

Exemplul 1.5.4.1. Să se calculeze

a) $\displaystyle\int \frac{x+\sqrt{x^2+x+1}}{1+x+\sqrt{x^2+x+1}}dx, x\in\mathbb{I}.$

Rezolvare. etapa 1. $f:\mathbb{I}\to\mathbb{R}, f(x) = \dfrac{x+\sqrt{x^2+x+1}}{1+x+\sqrt{x^2+x+1}}$

Se impune CE : $\left\{1+x+\sqrt{x^2+x+1}\neq 0 \Leftrightarrow x\in\mathbb{R}.\right.$

f este continuă pe $\mathbb{R}\Rightarrow f$ admite primitive pe $\mathbb{I} = \mathbb{R}$

etapa 2. Se determină $F(x;c)$, aplicând teoria. Se observă că $f(x) = \dfrac{x+\sqrt{x^2+x+1}}{1+x+\sqrt{x^2+x+1}}$,adică e de forma (6), cu $R(y_0,y_1) = \dfrac{y_0+y_1}{1+y_0+y_1}$, $a=1$, $b=1$, $c=1$.

Se face schimbarea de variabilă de integrare

$$\begin{cases} \sqrt{x^2+x+1} = -x+t,\ t \in \mathbb{J} | \text{ se exprimă } x \text{ în funcţie de } t \\ x^2+x+1 = x^2-2xt+t^2 \Rightarrow \\ x = \dfrac{t^2-1}{1+2t},\ t \in \mathbb{J} \text{ a.î. } t \neq \frac{-1}{2} \Big| \text{ se diferenţiază} \\ dx = \dfrac{2t(1+2t)-\left(t^2-1\right)(+2)}{(1+2t)^2} dt \Rightarrow \\ dx = \dfrac{2t^2+2t+2}{(1+2t)^2} dt \end{cases}$$

Se observă că

-inecuaţia $\sqrt{x^2+x+1}+x>0$ are ca soluţii $\forall x \in \mathbb{R}$

-inecuaţia $\sqrt{x^2+x+1}+x \leq 0$ nu are soluţii în $\mathbb{R}$.

Deci $\mathbb{J} \subseteq]0,+\infty[$.

Se înlocuieşte formal

$$F(t;\widetilde{c}) = \int \frac{\dfrac{t^2-1}{1+2t} + \left(-\dfrac{t^2-1}{1+2t}+t\right)}{1+\dfrac{t^2-1}{1+2t} + \left(-\dfrac{t^2-1}{1-2t}+t\right)} \frac{2t^2+2t+2}{(1+2t)^2} dt = \int \frac{t}{1+t} \frac{2t^2+2t+2}{(1+2t)^2} dt =$$

$$= 2\int \frac{t\left(t^2+t+1\right)}{(t+1)(1+2t)^2} dt = 2\int \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{t+1} - \frac{3}{2}\frac{1}{2t+1} - \frac{3}{4}\frac{1}{(2t+1)^2}\right) dt =$$

$$= \frac{2}{4}t - 2\ln(t+1) - 3\frac{\ln(1+2t)}{2} - \frac{3}{2}\frac{(1+2t)^{-1}}{2(-1)} + \widetilde{c},\ \forall t \in \mathbb{J}, \forall \widetilde{c} \in \mathbb{R}.$$

Se revine la substituţie$\Rightarrow$

$$F(x;c) = \frac{1}{2}\left(\sqrt{x^2+x+1}+x\right) - 2\ln\left(\sqrt{x^2+x+1}+x+1\right) -$$

$$-3\frac{\ln\left(1+2\sqrt{x^2+x+1}+2x\right)}{2} - \frac{3}{2}\frac{\left(1+2\sqrt{x^2+x+1}+2x\right)^{-1}}{2(-1)} + c,\ \forall x \in \mathbb{I}, \forall c \in \mathbb{R}.$$

sunt toate primitivele funcţiei f pe $\mathbb{I}$, familia de primitive fiind indexată după constanta $c \in \mathbb{R}$.

b) $\int \dfrac{1}{(1+x)\sqrt{x^2+2x+2}} dx,\ x \in]-1,+\infty[$.

Rezolvare. etapa 1. $f:]-1,+\infty[\to \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{1}{(1+x)\sqrt{x^2+2x+2}}$

f este continuă pe $]-1,+\infty[\Rightarrow f$ admite primitive pe $]-1,+\infty[$

etapa 2. Se determină $F(x;c)$, aplicând teoria.

modul 2. Se observă că $f(x) = \dfrac{1}{(1+x)\sqrt{x^2+2x+2}}$, adică e de forma (6), cu $R(y_0,y_1) = \dfrac{1}{(1+y_0)y_1}$, $a=1,\ b=2,\ c=2$.

Se face schimbarea de variabilă de integrare

$$\begin{cases} \sqrt{x^2+2x+2} = x+t,\ t\in\mathbb{J} | \text{ se exprimă } x \text{ în funcţie de } t \\ x^2+2x+2 = x^2+2xt+t^2 \Rightarrow \\ x = \dfrac{t^2-2}{2-2t},\ t\in\mathbb{J} \text{ a.î. } \dfrac{t^2-2}{2-2t} > -1 \\ x = \dfrac{t^2-2}{2-2t},\ t\in\left]2,+\infty\right[| \text{ se diferenţiază} \\ dx = \dfrac{2t(2-2t)-\left(t^2-2\right)(-2)}{(2-2t)^2}dt \Rightarrow \\ dx = \dfrac{-2t^2+4t-4}{(2-2t)^2}dt \end{cases}$$

Se menţionează că

$\dfrac{t^2-2}{2-2t} > -1 \Leftrightarrow \dfrac{t^2-2t}{2-2t} > 0 \Leftrightarrow t\in\left]-\infty,0\right[\cup\left]2,+\infty\right[$

$\sqrt{x^2+2x+2}-x<0$ nu are soluţii în $\mathbb{R}$ (deci $t<0$ este imposibil).

Se înlocuieşte$\Rightarrow$

$$F(t;\widetilde{c}) = \int \frac{1}{\left(1+\dfrac{t^2-2}{2-2t}\right)\left(\dfrac{t^2-2}{2-2t}+t\right)}\frac{-2t^2+4t-4}{(2-2t)^2}dt = \int \frac{(-2)\left(t^2-2t+2\right)}{(t^2-2t)(t^2-2+2t-2t^2)}dt =$$

$$= 2\int \frac{1}{t^2-2t}dt = \int\left(\frac{1}{t-2}-\frac{1}{t}\right)dt = \ln\frac{t-2}{t}+\widetilde{c}, \forall t\in\left]2,+\infty\right[, \widetilde{c}\in\mathbb{R}$$

Se revine la substituţie$\Rightarrow$

$$F(x;c) = \ln\frac{\sqrt{x^2+2x+2}-x-2}{\sqrt{x^2+2x+2}-x} + c,\ \forall x\in\mathbb{I}, \forall c\in\mathbb{R}.$$

sunt toate primitivele funcţiei f pe $\mathbb{I}$, familia de primitive fiind indexată după constanta $c\in\mathbb{R}$.

modul 1. Se observă că $f(x) = \dfrac{1}{(1+x)\sqrt{x^2+2x+2}}$,adică e de forma (5), cu $d=-1$, $a=1$, $b=2$, $c=2$, $n=1$. Se face schimbarea de variabilă de integrare

$$\begin{cases} \dfrac{1}{1+x} = t,\ t\in\mathbb{J} | \text{ se inversează} \\ x = \dfrac{1-t}{t},\ t\in\left]0,+\infty\right[| \text{ se diferenţiază} \\ dx = \dfrac{-1}{t^2}dt \end{cases}$$

Se menţionează că

$\dfrac{1-t}{t} > -1 \Leftrightarrow \dfrac{1}{t} > 0 \Leftrightarrow t\in\left]0,+\infty\right[.$

Se înlocuieşte

$$F(t;\widetilde{c}) = \int \frac{t}{\sqrt{\dfrac{1}{t^2}+1}}\frac{-1}{t^2}dt \overset{t>0 \text{ pe }]0,+\infty[}{\underset{|t|=t}{=}} \int \frac{-1}{\sqrt{t^2+1}}dt = -\ln\left(t+\sqrt{t^2+1}\right)+\widetilde{c},$$

$\forall t\in\left]0,+\infty\right[, \forall\widetilde{c}\in\mathbb{R}$.

Se revine la substituţie$\Rightarrow$

$$F(x;c) = -\ln\left(\frac{1}{1+x}+\sqrt{\frac{1}{(1+x)^2}+1}\right)+c,\ \forall x\in\left]-1,+\infty\right[, \forall c\in\mathbb{R}$$

c) $\displaystyle\int \frac{1}{(2x-3)\sqrt{4x-x^2}}dx, x\in\left]0,\tfrac{3}{2}\right[.$

Rezolvare. etapa 1.$f:\left]0,\frac{3}{2}\right[\to\mathbb{R}, f(x) = \dfrac{1}{(2x-3)\sqrt{4x-x^2}}$

f este continuă pe $\left]0, \frac{3}{2}\right[\Rightarrow f$ admite primitive pe $\left]0, \frac{3}{2}\right[$

etapa 2. Se determină $F(x;c)$, aplicând teoria.

modul 2. Se observă că $f(x) = \dfrac{1}{(2x-3)\sqrt{4x-x^2}}$,adică e de forma (6), cu $R(y_0, y_1) = \dfrac{1}{(2y_0-3)\,y_1}$, $a=-1$, $b=4$, $c=0$.

Se face schimbarea de variabilă de integrare

$$\begin{cases} \sqrt{4x-x^2} = tx,\ t \in \mathbb{J} | \text{ se exprimă } x \text{ în funcţie de } t \\ 4x - x^2 = t^2x^2 \Rightarrow \\ x = \dfrac{4}{t^2+1},\ t \in \mathbb{J} \text{ a.î. } 0 < \dfrac{4}{t^2+1} < \frac{3}{2} \\ x = \dfrac{4}{t^2+1},\ t \in \left]0, \sqrt{\frac{5}{3}}\right[| \text{ se diferenţiază} \\ dx = -4\dfrac{2t}{\left(t^2+1\right)^2}dt \Rightarrow \\ dx = \dfrac{-8t}{\left(t^2+1\right)^2}dt \end{cases}$$

Se menţionează că

$0 < \dfrac{4}{t^2+1} < \frac{3}{2} \Leftrightarrow 8 - 3t^2 - 3 < 0 \Leftrightarrow t \in \left]-\sqrt{\frac{5}{3}}, \sqrt{\frac{5}{3}}\right[$

$\sqrt{4x-x^2} = tx \Rightarrow t > 0.$

Se înlocuieşte$\Rightarrow$

$$F(t;\widetilde{c}) = \int \frac{1}{\left(2\cdot\dfrac{4}{t^2+1}-3\right)\cdot\dfrac{4t}{t^2+1}}\frac{-8t}{\left(t^2+1\right)^2}dt = 2\int\frac{1}{3t^2-5}dt =$$

$$= \frac{2}{3}\int\frac{1}{t^2-\left(\sqrt{\frac{5}{3}}\right)^2}dt = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2\sqrt{\frac{5}{3}}}\cdot\ln\left(-\frac{t-\sqrt{\frac{5}{3}}}{t+\sqrt{\frac{5}{3}}}\right) + \widetilde{c}, \forall t \in \left]0, \sqrt{\frac{5}{3}}\right[, \widetilde{c} \in \mathbb{R}$$

Se revine la substituţie$\Rightarrow$

$$F(x;c) = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2\sqrt{\frac{5}{3}}}\cdot\ln\left(-\frac{\dfrac{\sqrt{4x-x^2}}{x}-\sqrt{\frac{5}{3}}}{\dfrac{\sqrt{4x-x^2}}{x}+\sqrt{\frac{5}{3}}}\right) + c,\ \forall x \in \left]0, \tfrac{3}{2}\right[, \forall c \in \mathbb{R}.$$

sunt toate primitivele funcţiei f pe $\left]0, \frac{3}{2}\right[$, familia de primitive fiind indexată după constanta $c \in \mathbb{R}$.

modul 1. Se observă că $f(x) = \frac{1}{2}\dfrac{1}{\left(x-\frac{3}{2}\right)\sqrt{4x-x^2}}$,adică e de forma (5), cu $d = \frac{3}{2}$, $a=-1$, $b=4$, $c=0$, $n=1$. Se face schimbarea de variabilă de integrare

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x-\frac{3}{2}} = t,\ t \in \mathbb{J} | \text{ se inversează} \\ x = \dfrac{1+\frac{3}{2}t}{t},\ t \in \left]-\infty, -\frac{2}{3}\right[| \text{ se diferenţiază} \\ dx = \dfrac{-1}{t^2}dt \end{cases}$$

Se menţionează că

$0 < \dfrac{1+\frac{3}{2}t}{t} < \frac{3}{2} \Leftrightarrow t \in \left]-\infty, -\frac{2}{3}\right[.$

Se înlocuieşte$\Rightarrow$

$$F(t;\widetilde{c}) = \int \frac{t}{\sqrt{4\frac{1+\frac{3}{2}t}{t} - \left(\frac{1+\frac{3}{2}t}{t}\right)^2}} \frac{-1}{t^2}dt \overset{t<0 \text{ pe } \left]-\infty,-\frac{2}{3}\right[}{\underset{\sqrt{t^2}=|t|=-t}{=}} \int \frac{1}{\sqrt{4t+6t^2-1-3t-\frac{9}{4}t^2}}dt =$$

$$= \int \frac{1}{\sqrt{\frac{15}{4}t^2+t-1}}dt = \frac{2}{\sqrt{15}} \int \frac{1}{\sqrt{t^2+\frac{4}{15}t-\frac{4}{15}}}dt = \frac{2}{\sqrt{15}} \int \frac{\left(t-\frac{2}{15}\right)'}{\sqrt{\left(t-\frac{2}{15}\right)^2 - \left(\frac{8}{15}\right)^2}}dt =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{15}} \ln\left(t - \frac{2}{15} + \sqrt{\left(t-\frac{2}{15}\right)^2 - \left(\frac{8}{15}\right)^2}\right) + \widetilde{c},\ \forall t \in \left]-\infty,-\frac{2}{3}\right[, \forall \widetilde{c} \in \mathbb{R}.$$

Se revine la substituţie$\Rightarrow$

$$F(x;c) = \frac{2}{\sqrt{15}} \ln\left(\frac{1}{x-\frac{3}{2}} - \frac{2}{15} + \sqrt{\left(\frac{1}{x-\frac{3}{2}} - \frac{2}{15}\right)^2 - \left(\frac{8}{15}\right)^2}\right) + c,\ \forall x \in \left]0,\frac{3}{2}\right[, \forall c \in \mathbb{R}$$

d) $\int \frac{1}{1+\sqrt{1-2x-x^2}}dx,\ x \in \left]0,-1+\sqrt{2}\right[.$

Rezolvare. etapa 1.$f : \left]0,-1+\sqrt{2}\right[\to \mathbb{R},\ f(x) = \frac{1}{1+\sqrt{1-2x-x^2}}$

f este continuă pe $\left]0,-1+\sqrt{2}\right[\Rightarrow f$ admite primitive pe $\left]0,-1+\sqrt{2}\right[$

etapa 2. Se determină $F(x;c)$, aplicând teoria. Se observă că $f(x) = \frac{1}{1+\sqrt{1-2x-x^2}}$,adică e de forma (6), cu $R(y_0,y_1) = \frac{1}{1+y_1}$, $a=-1$, $b=-2$, $c=1$.

Se face schimbarea de variabilă de integrare

$$\begin{cases} \sqrt{1-2x-x^2} = tx-1,\ t \in \mathbb{J} | \text{ se exprimă } x \text{ în funcţie de } t \\ 1-2x-x^2 = t^2x^2 - 2tx + 1 \Rightarrow \\ x = \dfrac{2t-2}{t^2+1}, t \in \mathbb{J} \text{ a.î. } 0 < \dfrac{2t-2}{t^2+1} < -1+\sqrt{2} \\ x = \dfrac{2t-2}{t^2+1},\ t \in \mathbb{J} \subset]1,+\infty[| \text{ se diferenţiază} \\ dx = \dfrac{2\left(t^2+1\right) - (2t-2)\,2t}{\left(t^2+1\right)^2}dt \Rightarrow \\ dx = \dfrac{-2t^2+4t+2}{\left(t^2+1\right)^2}dt \end{cases}$$

Se menţionează că

$0 < \frac{2t-2}{t^2+1} < -1+\sqrt{2} \Leftrightarrow ...$

Se înlocuieşte$\Rightarrow$

$$F(t;\widetilde{c}) = \int \frac{1}{1+t\cdot\frac{2t-2}{t^2+1}-1} \cdot \frac{-2t^2+4t+2}{\left(t^2+1\right)^2}dt = \int \frac{-t^2+2t+1}{t(t-1)\left(t^2+1\right)}dt =$$

$$= \int \left(-\frac{1}{t} + \frac{1}{t-1} - \frac{2}{t^2+1}\right)dt =$$

$$= -\ln t + \ln(t-1) - 2\operatorname{arctg} t + \widetilde{c}, \forall t \in \mathbb{J} \subset]1,+\infty[, \widetilde{c} \in \mathbb{R}$$

Se revine la substituţie$\Rightarrow$

$$F(x;c) = -\ln\frac{\sqrt{1-2x-x^2}+1}{x} + \ln\left(\frac{\sqrt{1-2x-x^2}+1}{x} - 1\right) - 2\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{1-2x-x^2}+1}{x} + c,$$

$\forall x \in \left]0,-1+\sqrt{2}\right[, \forall c \in \mathbb{R}$.

sunt toate primitivele funcţiei f pe $\left]0,-1+\sqrt{2}\right[$, familia de primitive fiind indexată după constanta

$c \in \mathbb{R}$.

◯**1.5.5.Forma generală:** $\boxed{\int x^m (ax^n + b)^p \, dx, x \in \mathbb{I},}$ (7)
unde $a, b \in \mathbb{R}$ cu $ab \neq 0, m, n, p \in \mathbb{Q}$.
Rezolvare: Se face una din schimbarea de variabilă (substituţie Cebâşev)
a) dacă $p \in \mathbb{Z}$, atunci integrala (7) este de tip (3), şi se face
$\boxed{x = t^q,}$ (7′)
unde q este cel mai mic multiplu comun al numitorilor lui m şi n.
b) dacă $p \notin \mathbb{Z}$, $p = \dfrac{r}{s}$ ca fracţie ireductibilă cu $r \in \mathbb{Z}$ şi $s \in \mathbb{N}^*$ şi $\dfrac{m+1}{n} \in \mathbb{Z}$ atunci se face
$\boxed{ax^n + b = t^s.}$ (7″)
c) dacă $p \notin \mathbb{Z}$, $p = \dfrac{r}{s}$ ca fracţie ireductibilă cu $r \in \mathbb{Z}$ şi $s \in \mathbb{N}^*$ şi $\dfrac{m+1}{n} \notin \mathbb{Z}$ şi $\dfrac{m+1}{n} + p \in \mathbb{Z}$ atunci se face
$\boxed{\dfrac{ax^n + b}{x^n} = t^s \text{ (sau } a + bx^{-n} = t^s)}$ (7‴)

Se obţine o integrală ca în Secţiunea 1.4 în variabila t, se calculează şi se revine la substituţie.

◯**Exemplul 1.5.5.1**. Să se calculeze
a) $\int \dfrac{\sqrt[3]{1 + \sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}} dx, x \in \mathbb{I}$.

Rezolvare. etapa 1. $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}, f(x) = \dfrac{\sqrt[3]{1 + \sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}$

f este continuă pe $]0, +\infty[\Rightarrow f$ admite primitive pe $\mathbb{I} =]0, +\infty[$
etapa 2. Se determină $F(x; c)$, aplicând teoria.

Se observă că $f(x) = x^{-\frac{1}{2}} \left(1 \cdot x^{\frac{1}{4}} + 1\right)^{\frac{1}{3}}$,adică e de forma (7), cu
$a = 1$, $b = 1$, $m = -\frac{1}{2}$, $n = \frac{1}{4}$, $p = \frac{1}{3}$.
Se poate încerca şi direct schimbarea de variabilă de integrare
$\sqrt[3]{1 + \sqrt[4]{x}} = t$.

Sau, conform teoriei, deoarece $p = \frac{1}{3} \notin \mathbb{Z}$ şi $\dfrac{m+1}{n} = \dfrac{-\frac{1}{2}+1}{\frac{1}{4}} = 2 \in \mathbb{Z} \Rightarrow$Se face schimbarea de variabilă de integrare $1 \cdot x^{\frac{1}{4}} + 1 = t^3$.

$$\begin{cases} 1 \cdot x^{\frac{1}{4}} + 1 = t^3, \ t \in]1, +\infty[\mid \text{se inversează} \\ x = \left(t^3 - 1\right)^4, \ t \in]1, +\infty[\mid \text{se diferenţiază} \\ dx = 4\left(t^3 - 1\right)^3 3t^2 dt \end{cases}$$

Se înlocuieşte$\Rightarrow$

$$F(t; \widetilde{c}) = \int \frac{t}{\left(t^3 - 1\right)^2} 4\left(t^3 - 1\right)^3 3t^2 dt = \int 12\left(t^6 - t^3\right) dt = 12\left(\frac{t^7}{7} - \frac{t^4}{4}\right) + \widetilde{c},$$
$\forall t \in]1, +\infty[, \forall \widetilde{c} \in \mathbb{R}$.

Se revine la substituţie$\Rightarrow$

$$F(x; c) = 2\left(\frac{\left(\sqrt[3]{1 + \sqrt[4]{x}}\right)^7}{7} - \frac{\left(\sqrt[3]{1 + \sqrt[4]{x}}\right)^4}{4}\right) + c, \ \forall x \in]0, +\infty[, \forall c \in \mathbb{R}$$

sunt toate primitivele funcţiei f pe $\mathbb{I} =]0, +\infty[$, familia de primitive fiind indexată după constanta $c \in \mathbb{R}$.

b) $\int \frac{1}{x\sqrt{1-x^3}}dx, x \in \left]0,1\right[.$

Rezolvare. etapa 1.$f : \left]0,1\right[\to \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{x\sqrt{1-x^3}}$

f este continuă pe $\left]0,1\right[\Rightarrow f$ admite primitive pe $\mathbb{I} = \left]0,1\right[$

etapa 2. Se determină $F(x;c)$, aplicând teoria.

Se observă că $f(x) = x^{-1}\left((-1)\cdot x^3+1\right)^{\frac{-1}{2}}$,adică e de forma (7), cu $a=-1$, $b=1$, $m=-1$, $n=3$, $p=\frac{-1}{2}$.

Se poate încerca şi direct schimbarea de variabilă de integrare
$\sqrt{1-x^3} = t$.

Sau, conform teoriei, deoarece $p=\frac{-1}{2}\notin\mathbb{Z}$ şi $\frac{m+1}{n} = \frac{-1+1}{3} = 0 \in \mathbb{Z} \Rightarrow$Se face schimbarea de variabilă de integrare $(-1)\cdot x^3+1 = t^2$.

$$\begin{cases} 1-x^3 = t^2,\ t\in\left]0,1\right[\mid \text{se inversează} \\ x = \left(1-t^2\right)^{\frac{1}{3}},\ t\in\left]0,1\right[\mid \text{se diferenţiază} \\ dx = \frac{1}{3}\left(1-t^2\right)^{\frac{-2}{3}}(-2t)\,dt \end{cases}$$

Se înlocuieşte$\Rightarrow$

$$F(t;\widetilde{c}) = \int \frac{1}{\left(1-t^2\right)^{\frac{1}{3}}\cdot t}\frac{1}{3}\left(1-t^2\right)^{\frac{-2}{3}}(-2t)\,dt = \frac{-2}{3}\int\frac{1}{1-t^2}dt = \frac{-2}{3}\ln\frac{1-t}{1+t}+\widetilde{c},$$

$\forall t\in\left]0,1\right[, \forall\widetilde{c}\in\mathbb{R}$.

Se revine la substituţie$\Rightarrow$

$$F(x;c) = \frac{-2}{3}\ln\frac{1-\sqrt{1-x^3}}{1+\sqrt{1-x^3}}+c,\ \forall x\in\left]0,1\right[, \forall c\in\mathbb{R}$$

sunt toate primitivele funcţiei f pe $\mathbb{I}=\left]0,1\right[$, familia de primitive fiind indexată după constanta $c\in\mathbb{R}$.

c) $\int \frac{1}{x^4\sqrt{1+x^2}}dx, x\in\left]0,+\infty\right[.$

Rezolvare. etapa 1.$f : \left]0,+\infty\right[\to \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{x^4\sqrt{1+x^2}}$

f este continuă pe $\left]0,+\infty\right[\Rightarrow f$ admite primitive pe $\mathbb{I} = \left]0,+\infty\right[$

etapa 2. Se determină $F(x;c)$, aplicând teoria.

Se observă că $f(x) = x^{-4}\left(1\cdot x^2+1\right)^{\frac{-1}{2}}$,adică e de forma (7), cu $a=1$, $b=1$, $m=-4$, $n=2$, $p=\frac{-1}{2}$.

Conform teoriei, deoarece

$$p=\frac{-1}{2}\notin\mathbb{Z} \text{ şi } \frac{m+1}{n} = \frac{-4+1}{2}\notin\mathbb{Z} \text{ şi } \frac{m+1}{n}+p = \frac{-4+1}{2}+\frac{-1}{2}\in\mathbb{Z}$$

$\Rightarrow$Se face schimbarea de variabilă de integrare $\frac{1\cdot x^2+1}{x^2} = t^2$.

$$\begin{cases} 1+\frac{1}{x^2} = t^2,\ t\in\left]1,+\infty\right[\mid \text{se inversează} \\ x^2 = \frac{1}{t^2-1},\ t\in\left]1,+\infty\right[\mid \\ x = \frac{1}{\sqrt{t^2-1}},\ t\in\left]1,+\infty\right[\mid \text{se diferenţiază} \\ dx = \frac{-1}{2}\left(t^2-1\right)^{\frac{-3}{2}}(2t)\,dt \end{cases}$$

Se înlocuieşte, ţinând cont că, pentru $x\in\left]0,+\infty\right[\Rightarrow$

$$\frac{1}{x^4\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{x^5\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}} = \frac{\left(\frac{1}{x^2}\right)^2\left(\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}} \Rightarrow$$

$$F\left(t;\widetilde{c}\right) = \int \frac{\left(t^2-1\right)^2\cdot\sqrt{t^2-1}}{t}\frac{-1}{2}\left(t^2-1\right)^{\frac{-3}{2}}(2t)\,dt = -\int\left(t^2-1\right)dt = -\frac{t^3}{3}+\frac{t^2}{2}+\widetilde{c},$$

$\forall t\in\,]1,+\infty[\,,\forall\widetilde{c}\in\mathbb{R}.$

Se revine la substituţie$\Rightarrow$

$$F(x;c) = -\frac{\left(\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}\right)^3}{3}+\frac{1+\dfrac{1}{x^2}}{2}+c,\ \forall x\in\,]0,+\infty[\,,\forall c\in\mathbb{R}$$

sunt toate primitivele funcţiei f pe $\mathbb{I}=\,]0,+\infty[$, familia de primitive fiind indexată după constanta $c\in\mathbb{R}$.

1.6. Integrale nedefinite (primitive) având ca integrant funcţii raţionale în e^x şi e^{-x}, respectiv în $\operatorname{ch}x$ şi $\operatorname{sh}x$

Forma generală: $\boxed{\int R\left(e^x,e^{-x}\right)dx,\ x\in\mathbb{I}}$, chiar $\boxed{\int R\left(\operatorname{ch}x,\operatorname{sh}x\right)dx,\ x\in\mathbb{I}}$,

unde $R:\mathbb{I}_1\times\mathbb{I}_2\to\mathbb{R}, R(y_1,y_2)=\dfrac{P(y_1,y_2)}{Q(y_1,y_2)}$ este funcţie raţională în $y_1=e^x, y_2=e^{-x}$.

Rezolvare: Se face schimbarea de variabilă

$$\begin{cases}\boxed{e^x=t},\ t\in\mathbb{J}\,|\ \text{se inversează}\\ x=\ln t,\ t\in\mathbb{J}\,|\ \text{se diferenţiază}\\ dx=\frac{1}{t}dt\end{cases}$$

Se obţine o integrală ca în Secţiunea 1.4. în variabila t, se calculează şi se revine la substituţie.

Exemplul 1.6.1. Să se calculeze

a) $\int\dfrac{1+e^x}{1+e^{2x}}dx,\ x\in\mathbb{R}$. - A se vedea Seminar

1.7. Integrale nedefinite având ca integrant funcţii raţionale în $\cos \mathbf{x}$, $\sin \mathbf{x}$, reductibile la cele din Secţiunea 1.4

Forma generală: $\boxed{\int R(\cos x, \sin x)\, dx, x \in \mathbb{I},}$ (8)

unde $R : \mathbb{I}_1 \times \mathbb{I}_2 \to \mathbb{R}, R(y_1, y_2) = \dfrac{P(y_1, y_2)}{Q(y_1, y_2)}$ este funcţie raţională în $y_1 = \cos x, y_2 = \sin x$.

Rezolvare: I. În general, se face schimbarea de variabilă de integrare

$\boxed{\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t, t \in \mathbb{J}}$ (8′)

unde $\mathbb{J}$ este un interval corespunzător ales. Se foloseşte

$$\begin{cases} \operatorname{tg} \frac{x}{2} = t,\ t \in \mathbb{J} | \text{ se inversează} \\ x = 2 \operatorname{arctg} t,\ t \in \mathbb{J} | \text{ se diferenţiază} \\ dx = \dfrac{2}{1+t^2} dt \end{cases} \quad \text{şi} \quad \begin{cases} \cos x = \dfrac{1 - \left(\operatorname{tg} \frac{x}{2}\right)^2}{1 + \left(\operatorname{tg} \frac{x}{2}\right)^2}; \\ \sin x = \dfrac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \left(\operatorname{tg} \frac{x}{2}\right)^2}; \end{cases}$$

II. În anumite situaţii particulare, se fac schimbările de variabilă de integrare:

a) dacă $R(-\cos x, -\sin x) = R(\cos x, \sin x)$, atunci se face

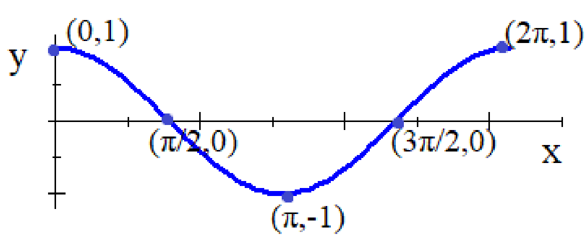
$\boxed{\operatorname{tg} x = t, t \in \mathbb{J}}$ (8″)

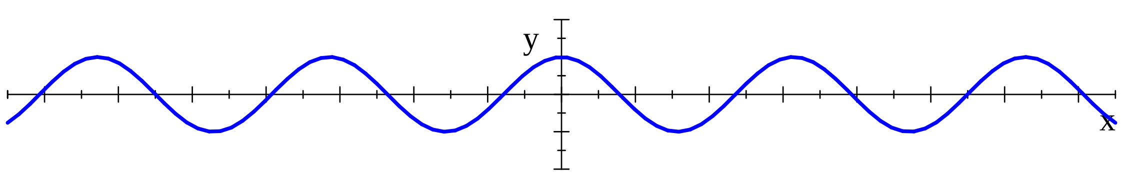
unde $\mathbb{J}$ este un interval corespunzător ales. Se foloseşte

$$\begin{cases} \operatorname{tg} x = t,\ t \in \mathbb{J} | \text{ se inversează} \\ x = \operatorname{arctg} t,\ t \in \mathbb{J} | \text{ se diferenţiază} \\ dx = \dfrac{1}{1+t^2} dt \end{cases} \quad \text{şi} \quad \begin{cases} \cos x = \pm \dfrac{1}{\sqrt{1 + (\operatorname{tg} x)^2}} \\ \sin x = \pm / \mp \dfrac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{1 + (\operatorname{tg} x)^2}}; . \end{cases}$$

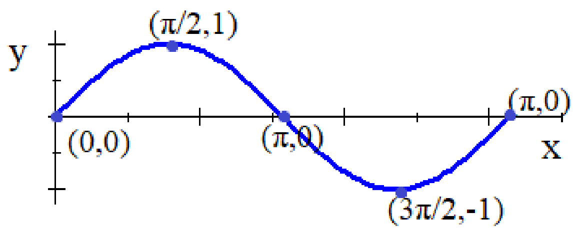
şi unde $\mathbb{J}$ este un interval corespunzător ales; semnele $+$, $-$ se aleg în funcţie de intervalul $\mathbb{I}$ parcurs de x din graficele funcţiilor $\cos$ şi $\sin$.

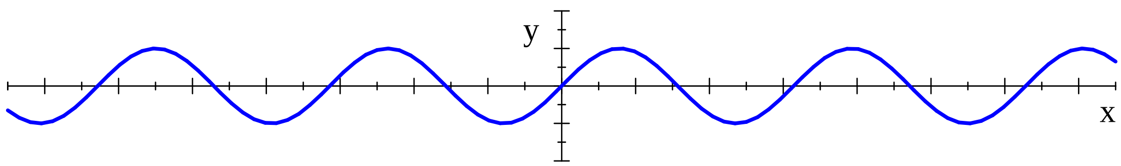
$\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$





$\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$





b) dacă $R(\cos x, -\sin x) = -R(\cos x, \sin x)$, atunci se face

$$\boxed{\begin{cases} \cos x = t,\ t \in \mathbb{J} | \text{ se inversează} \\ x = \arccos t,\ t \in \mathbb{J} | \text{ se diferenţiază} \\ dx = \dfrac{-1}{\sqrt{1-t^2}} dt \end{cases} \text{sau} \begin{cases} \cos x = t,\ t \in \mathbb{J} | \text{ se diferenţiază} \\ -\sin x dx = dt. \end{cases}} \qquad (8''')$$

unde $\mathbb{J}$ este un interval corespunzător ales. Se foloseşte

$$\begin{cases} \sin x = \pm\sqrt{1-(\cos x)^2}; \end{cases}$$

unde semnele $+$, $-$ se aleg în funcţie de intervalul $\mathbb{I}$ parcurs de x.

c) dacă $R(-\cos x, \sin x) = -R(\cos x, \sin x)$, atunci se face

$$\boxed{\begin{cases} \sin x = t,\ t \in \mathbb{J} | \text{ se inversează} \\ x = \arcsin t,\ t \in \mathbb{J} | \text{ se diferenţiază} \\ dx = \dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt \end{cases} \text{sau} \begin{cases} \sin x = t,\ t \in \mathbb{J} | \text{ se diferenţiază} \\ \cos x dx = dt \end{cases}} \qquad (8'''')$$

unde $\mathbb{J}$ este un interval corespunzător ales. Se foloseşte

$$\begin{cases} \cos x = \pm\sqrt{1-(\sin x)^2}; \end{cases}$$

unde semnele $+$, $-$ se aleg în funcţie de intervalul $\mathbb{I}$ parcurs de x.

Se obţine o integrală ca în Secţiunea 1.4 în variabila t, se calculează şi se revine la substituţie.

Exemplul 1.6.1.1. Să se calculeze

a) $\int \dfrac{1}{3+2\sin x} dx, x \in \mathbb{R}$

Rezolvare. etapa 1.$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \dfrac{1}{3+2\sin x}$

f este continuă pe $\mathbb{R} \Rightarrow f$ admite primitive pe $\mathbb{R}$

etapa 2. Se determină $F(x; c)$, aplicând teoria. Se observă că $f(x) = \dfrac{1}{3+2\sin x}$, adică e de forma (8), cu

$$R(y_1, y_2) = \frac{1}{3+2y_2}.$$

Se face schimbarea de variabilă de integrare $\begin{cases} \operatorname{tg} \frac{x}{2} = t,\ t \in \mathbb{J} | \text{ se inversează} \\ x = 2 \operatorname{arctg} t,\ t \in \mathbb{J} | \text{ se diferenţiază} \\ dx = \dfrac{2}{1+t^2} dt \end{cases}$

Se menţionează că $\mathbb{J}$ este un interval ce nu conţine $\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Se înlocuieşte$\Rightarrow F(t; \widetilde{c}) = \int \dfrac{1}{3 + 2\dfrac{2t}{1+t^2}} \dfrac{2}{1+t^2} dt = \int \dfrac{2}{3t^2 + 4t + 3} dt =$

$$= \frac{2}{3} \int \frac{1}{t^2 + \frac{4}{3}t + 1} dt = \frac{2}{3} \int \frac{\left(t + \frac{2}{3}\right)'}{\left(t + \frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^2} dt = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{\frac{\sqrt{5}}{3}} \operatorname{arctg} \frac{t + \frac{2}{3}}{\frac{\sqrt{5}}{3}} + \widetilde{c},\ \forall t \in \mathbb{J}, \forall \widetilde{c} \in \mathbb{R}.$$

Se revine la substituţie$\Rightarrow F(x; c) = \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{1}{\frac{\sqrt{5}}{3}} \operatorname{arctg} \dfrac{\operatorname{tg} \frac{x}{2} + \frac{2}{3}}{\frac{\sqrt{5}}{3}} + c,\ \forall x \in \mathbb{R}, \forall c \in \mathbb{R}$

sunt toate primitivele funcţiei f pe $\mathbb{I} = \mathbb{R}$, familia de primitive fiind indexată după constanta $c \in \mathbb{R}$.

b) $\int \dfrac{\sin^2 x}{\cos^2 x + 2\sin^2 x} dx, x \in \mathbb{R}$- A se vedea Seminar.

c) $\int \dfrac{1}{\sin x \cos^2 x} dx, x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$-A se vedea Seminar.

d) $\int \dfrac{1}{(3 + \cos^2 x) \sin x} dx, x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$

Rezolvare. etapa 1.$f : \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R}, f(x) = \dfrac{1}{(3 + \cos^2 x) \sin x}$

f este continuă pe $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[\Rightarrow f$ admite primitive pe $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$

etapa 2. Se determină integrala, aplicând teoria. Se observă că f este de forma (8), cu

$R(y_1, y_2) = \dfrac{1}{\left(3 + y_1^2\right) \cdot y_2}$.

modul 1. Se face schimbarea de variabilă de integrare:$\begin{cases} \operatorname{tg} \frac{x}{2} = t,\ t \in]0, 1[| \text{ se inversează} \\ x = 2 \operatorname{arctg} t,\ t \in]0, 1[| \text{ se diferenţiază} \\ dx = \dfrac{2}{1+t^2} dt \end{cases}$

Se înlocuieşte$\Rightarrow F(t; \widetilde{c}) = \int \dfrac{1}{\dfrac{2t}{1+t^2} \cdot \left(3 + \dfrac{1-t^2}{1+t^2}\right)^2} \dfrac{2}{1+t^2} dt = \int \dfrac{\left(1+t^2\right)^2}{t\left(4 + 2t^2\right)^2} dt =?$

Se poate, deşi este mult calcul. Indicaţie:

$\dfrac{\left(1+t^2\right)^2}{t\left(4+2t^2\right)^2} = \frac{1}{16} \dfrac{1}{t} + \frac{3}{16} \dfrac{t}{t^2+2} - \frac{1}{8} \dfrac{t}{\left(t^2+2\right)^2}, t \in]0, 1[$

$\int \dfrac{\left(1+t^2\right)^2}{t\left(4+2t^2\right)^2} dt = \frac{1}{16} \ln t + \frac{3}{32} \ln\left(t^2 + 2\right) + \frac{1}{16} \dfrac{1}{t^2+2} + \widetilde{c}, \forall t \in]0, 1[, \forall \widetilde{c} \in \mathbb{R}.$

$\int \dfrac{1}{(3 + \cos^2 x) \sin x} dx = \frac{1}{16} \ln\left(\operatorname{tg} \frac{x}{2}\right) + \frac{3}{32} \ln\left(\left(\operatorname{tg} \frac{x}{2}\right)^2 + 2\right) + \frac{1}{16} \dfrac{1}{\left(\operatorname{tg} \frac{x}{2}\right)^2 + 2} + c,$

$\forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[, \forall c \in \mathbb{R}.$

modul 2. Se observă că:

$\int \dfrac{1}{(3 + \cos^2 x) \sin x} dx = \int \dfrac{1}{(3 + \cos^2 x) \sin^2 x} \sin x dx = \int \dfrac{1}{(3 + \cos^2 x)(1 - \cos^2 x)} \sin x dx,$

Se face schimbarea de variabilă de integrare:$\begin{cases} \cos x = v,\ v \in]0, 1[| \text{ se diferenţiază} \\ -\sin x dx = dv, v \in]0, 1[\end{cases}$

Se înlocuieşte$\Rightarrow F\left(v;\widetilde{c}\right)=\int\frac{1}{\left(3+v^2\right)\left(1-v^2\right)}\left(-1\right)dv=\int\frac{1}{\left(v^2-1\right)\left(v^2+3\right)}dv=$

$=\int\left(\frac{1}{4}\frac{1}{v^2-1}-\frac{1}{4}\frac{1}{v^2+3}\right)dv=$

$=\frac{1}{8}\ln\frac{-v+1}{v+1}-\frac{1}{4}\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{v}{\sqrt{3}}+\widetilde{c},\ \forall v\in\left]0,1\right[,\forall\widetilde{c}\in\mathbb{R}.$

Se revine la substituţie$\Rightarrow$

$F\left(x;c\right)=\frac{1}{8}\ln\frac{-\cos x+1}{\cos x+1}-\frac{1}{4}\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{\cos x}{\sqrt{3}}+c,\ \forall x\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[,\forall c\in\mathbb{R}$

sunt toate primitivele funcţiei f pe $\mathbb{I}=\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$, familia de primitive fiind indexată după constanta $c\in\mathbb{R}$.

Observaţia 1.7.1. Uneori, apar integrale nedefinite cu

a) Forma generală:

$$\boxed{\int R\left(x,\sqrt{a^2-x^2}\right)dx, x\in\mathbb{I},} \tag{9}$$

unde $R:\mathbb{I}_1\times\mathbb{I}_2\to\mathbb{R}, R(y_1,y_2)=\dfrac{P(y_1,y_2)}{Q(y_1,y_2)}$ este funcţie raţională în $y_1=x, y_2=\sqrt{a^2-x^2}$.

Rezolvare: Se face schimbarea de variabilă de integrare

$$\boxed{x=a\sin t, t\in\mathbb{J}} \tag{9'}$$

sau $\boxed{x=a\cos t, t\in\mathbb{J}}$ (9″)

unde $\mathbb{J}$ este un interval corespunzător ales.

b) Forma generală:

$$\boxed{\int R\left(x,\sqrt{a^2+x^2}\right)dx, x\in\mathbb{I},} \tag{10}$$

unde $R:\mathbb{I}_1\times\mathbb{I}_2\to\mathbb{R}, R(y_1,y_2)=\dfrac{P(y_1,y_2)}{Q(y_1,y_2)}$ este funcţie raţională în $y_1=x, y_2=\sqrt{a^2+x^2}$.

Rezolvare: Se face schimbarea de variabilă de integrare

$$\boxed{x=a\,\mathrm{tg}\,t, t\in\mathbb{J}} \tag{10'}$$

unde $\mathbb{J}$ este un interval corespunzător ales.

c) Forma generală:

$$\boxed{\int R\left(x,\sqrt{x^2-a^2}\right)dx, x\in\mathbb{I},} \tag{11}$$

unde $R:\mathbb{I}_1\times\mathbb{I}_2\to\mathbb{R}, R(y_1,y_2)=\dfrac{P(y_1,y_2)}{Q(y_1,y_2)}$ este funcţie raţională în $y_1=x, y_2=\sqrt{x^2-a^2}$.

Rezolvare: Se face schimbarea de variabilă de integrare

$$\boxed{x=a\frac{1}{\cos t}, t\in\mathbb{J}} \tag{11'}$$

sau $\boxed{x=a\dfrac{1}{\sin t}, t\in\mathbb{J}}$ (11″)

unde $\mathbb{J}$ este un interval corespunzător ales.