CURS NR. 13
Analiză matematică, AIA

2. Integrale duble
2.0. **Domenii de integrare în $\mathbb{R}^2$**

Definiţia 2.0.1. O mulţime $E \subseteq \mathbb{R}^2$ are *măsura Lebesgue nulă* (sau *este neglijabilă în sens Lebesgue*), şi se notează $m(E) = 0$, dacă

$\forall \varepsilon > 0$, există o familie finită sau numărabilă de interioare de dreptunghiuri

$\{]a_i, b_i[\times]c_i, d_i[\,; i \in I\text{-mulţime de indici}\}$ a.î

$E \subseteq \bigcup\limits_i]a_i, b_i[\times]c_i, d_i[$ şi $\sum\limits_i \sqrt{(b_i - a_i)^2 + (c_i - d_i)^2} < \varepsilon$.

Exemplul 2.0.1. Mulţimi din $\mathbb{R}^2$ cu măsura Lebesgue nulă sunt

-mulţimile finite, de exemplu $\{(2,3), (1,5)\}$

-mulţimile numărabile, de exemplu $\left\{\left(\frac{1}{n}, \frac{n}{n+1}\right); n \in \mathbb{N}^*\right\}$

Există şi mulţimi nenumărabile din $\mathbb{R}^2$ care au măsura Lebesgue nulă- a se vedea mai jos.

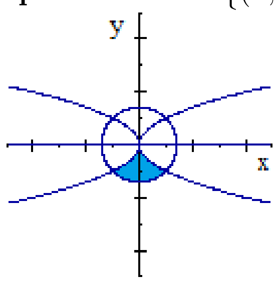
Definiţia 2.0.2. O mulţime $D \subseteq \mathbb{R}^2$ se numeşte *domeniu de integrare plan* dacă

(i) D este mulţime mărginită în $\mathbb{R}^2$;

(ii) $m(\operatorname{Fr} D) = 0$.

Observaţia 2.0.1. Se poate arăta că dacă $D \subseteq \mathbb{R}^2$ este mulţime mărginită în $\mathbb{R}^2$ şi $\operatorname{Fr} D$ este o curbă simplă (injectivă) închisă netedă pe porţiuni, atunci $m(\operatorname{Fr} D) = 0$, adică D este domeniu de integrare.

Exemplul 2.0.2.$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \le 2, x \le y^2, x \ge -y^2, y \le 0\right\}$



•$x^2 + y^2 = 2$ este cercul cu centrul $(0,0)$ cu raza $\sqrt{2}$

$x^2 + y^2 \le 2 \Rightarrow ...$

•$y^2 = x$ este parabola ce trece prin $O(0,0), A_1(1,1)$ şi $B_1(1,-1)$

$x \le y^2 \Rightarrow ...$

•$y^2 = -x$ este parabola ce trece prin $O(0,0), A_2(-1,1)$ şi $B_2(-1,-1)$

$x \ge -y^2 \Rightarrow ...$

•$y = 0$ este dreapta Ox

$y \le 0 \Rightarrow ...$

$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2 \\ y^2 = x \end{cases} \Rightarrow A_1(1,1)$ şi $B_1(1,-1)$; $\begin{cases} x^2 + y^2 = 2 \\ y^2 = -x \end{cases} \Rightarrow A_2(-1,1)$ şi $B_2(-1,-1)$

Deci D este domeniul mărginit de arcele de parabolă $\left[\overset{\frown}{OB_2}\right]$, $\left[\overset{\frown}{OB_1}\right]$ şi arcul de cerc $\left[\overset{\frown}{B_1B_2}\right]$.

D este domeniu de integrare deoarece

$\begin{cases} \text{-}D \text{ este mulţime mărginită, } D \subsetneq [-1,1] \times \left[-\sqrt{2}, 0\right] \\ \text{- Fr } D \text{ este curbă simplă, închisă, netedă pe 3 porţiuni.} \end{cases}$

Exemplul 2.0.3. Sunt domenii de integrare mulţimile

-$D = D_{xy} = [a,b] \times [c,d] = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2; a \le x \le b, c \le y \le d\right\}$

un dreptunghi cu interior, cu laturile paralele cu axele; se numeşte şi *domeniu compact simplu în raport cu ambele axe.*

-$D = D_y = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2; a \le x \le b, g_1(x) \le y \le g_2(x)\right\}$,

unde $g_1, g_2 : [a,b] \to \mathbb{R}$ sunt funcţii continue; se numeşte şi *domeniu compact simplu în raport cu* Oy.

-$D = D_x = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; c \leq y \leq d, h_1(y) \leq x \leq h_2(y)\right\}$,
unde $h_1, h_2 : [c, d] \to \mathbb{R}$ sunt funcţii continue; se numeşte şi *domeniu compact simplu în raport cu* Ox.

A se vedea explicitări în raport cu y, respectiv cu x de reprezentanţi de curbe clasice în plan la seminar la tablă (segmente de drepte oblice, de parabole, de cercuri, de elipse, de hiperbole ş.a.m.d.).

Definiţia 2.0.3. Fie D_1 şi D_2 domenii de integrare din $\mathbb{R}^2$ cu proprietatea că $\operatorname{int} D_1 \cap \operatorname{int} D_2 = \emptyset$ şi $D_1 \cup D_2$ este tot domeniu de integrare. Se numeşte *juxtapunerea domeniului* D_1 *cu domeniul* D_2 domeniul $D_1 \cup D_2$.

Definiţia 2.0.4. Fie D o mulţime mărginită din $\mathbb{R}^2$. Fie $[a, b] \times [c, d]$ dreptunghi cu interior a.î. $D \subseteq [a, b] \times [c, d]$. Fie $\Delta_1 \in \mathcal{D}([a, b])$ o diviziune oarecare a intervalului $[a, b]$ şi $\Delta_2 \in \mathcal{D}([c, d])$ o diviziune oarecare a intervalului $[c, d]$,

$\Delta_1 : a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b, \Delta_2 : c = y_0 < y_1 < ... < y_m = d.$

Atunci $\Delta = \Delta_1 \times \Delta_2$ este o diviziune a dreptunghiului cu interior $[a, b] \times [c, d]$, $\Delta \in \mathcal{D}([a, b] \times [c, d])$.
Dreptunghiul cu interior $[a, b] \times [c, d]$ se poate scrie ca o reuniune de dreptunghiuri cu interior $\Delta_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$, adică

$$[a, b] \times [c, d] = \bigcup_{i=1}^{n} \bigcup_{j=1}^{m} \Delta_{ij}.$$

Norma diviziunii Δ este $\|\Delta\| = \max\{\|\Delta_1\|, \|\Delta_2\|\}$ iar aria unui dreptunghi cu interior din diviziune este

$$\text{aria}(\Delta_{ij}) = (x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})$$

Fie $(\xi, \eta) = \left(\xi_i, \eta_j\right)_{i=\overline{1,n}, j=\overline{1,m}}$ un sistem de puncte intermediare corespunzătoare diviziunii Δ, din $[a, b] \times [c, d]$,

$x_{i-1} \leq \xi_i \leq x_i, y_{j-1} \leq \eta_j \leq y_j$.

Fie funcţia $\chi_D : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ funcţia mărginită pe D:

$$\chi_D : [a, b] \times [c, d] \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \chi_D(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{dacă } (x, y) \in D \\ 0, & \text{dacă } (x, y) \in ([a, b] \times [c, d]) \setminus D \end{cases}$$

Se defineşte numărul real

$$\boxed{S(\chi_D, \Delta, (\xi, \eta)) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \chi_D\left(\xi_i, \eta_j\right) \cdot (x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1}).}$$

Mulţimea mărginită D are *aria* $m(D) = \text{aria}(D)$ (este *mulţime măsurabilă Jordan,* chiar măsurabilă Lebesgue-măsura Lebesgue generalizează măsura Jordan pentru o clasă mai amplă de mulţimi) dacă există un numărul real aria(D) cu proprietatea că
$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$ astfel încât $\forall \Delta \in \mathcal{D}([a, b] \times [c, d])$ cu $\|\Delta\| < \delta$ şi $\forall (\xi, \eta) = \left(\xi_i, \eta_j\right)_{i=\overline{1,n}, j=\overline{1,m}} \in \mathcal{P}(\Delta)$, să rezulte $|S(\chi_D, \Delta, (\xi, \eta)) - \text{aria}(D)| < \varepsilon$.
Numărul real aria(D), dacă există, este şi unic şi se notează (A se vedea secţiunea 2.1)

$\text{aria}(D) = \iint_D 1 dxdy.$

Observaţia 2.0.2. Fie D o mulţime mărginită din $\mathbb{R}^2$.

a) Folosind rezultate din teoria măsurii, se poate arăta că definiţia anterioară este corectă, adică aria(D) nu depinde de alegerea dreptunghiului cu interior $[a, b] \times [c, d]$ care include D, şi nici de funcţia χ_D construită.

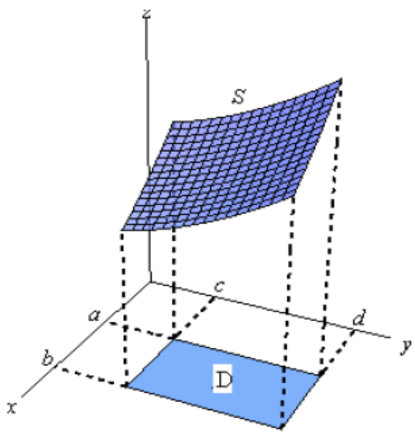
b) Se poate arăta că o mulţime mărginită D din $\mathbb{R}^2$ are arie dacă şi numai dacă este domeniu de integrare.

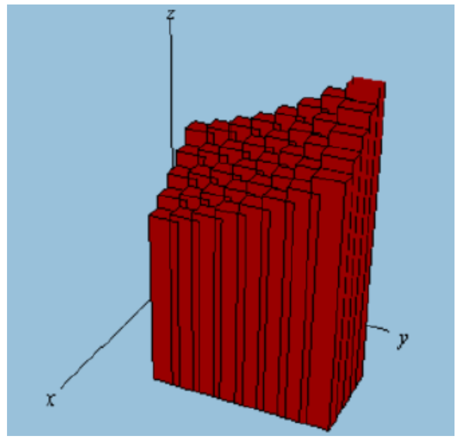
Propoziţia 2.0.1. Dacă $D = D_1 \cup D_2$ este domeniu de integrare din $\mathbb{R}^2$ obţinut prin juxtapunerea domeniilor de integrare D_1 şi D_2 atunci

$\text{aria}(D_1 \cup D_2) = \text{aria}(D_1) + \text{aria}(D_2).$

Observaţia 2.0.3. Teoreme de reprezentare integrală pentru domenii de integrare se pot enunţa şi demonstra numai pentru domenii de tip dreptunghi sau de tip simplu în raport cu una din axe.

2.1. Integrale duble proprii





A se vedea Eugene Khutoryansky, "Double integrals and Polar integrals: Explained with 3D visualizations",

https://www.youtube.com/watch?v=GHBMiscPE-g

Definiţia 2.1.1. Fie $D \subseteq \mathbb{R}^2$ un domeniu de integrare plan şi fie $[a,b] \times [c,d]$ astfel încât $D \subseteq [a,b] \times [c,d]$. Fie $\Delta_1 \in \mathcal{D}([a,b])$ o diviziune oarecare a intervalului $[a,b]$ şi $\Delta_2 \in \mathcal{D}([c,d])$ o diviziune oarecare a intervalului $[c,d]$

$\Delta_1 : a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b; \Delta_2 : c = y_0 < y_1 < ... < y_m = d.$

Atunci $\Delta = \Delta_1 \times \Delta_2$ este o diviziune a dreptunghiului cu interior $[a,b] \times [c,d]$, $\Delta \in \mathcal{D}([a,b] \times [c,d])$.
Dreptunghiul cu interior $[a,b] \times [c,d]$ se poate scrie ca o reuniune de dreptunghiuri cu interior $\Delta_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$, adică

$$[a,b] \times [c,d] = \bigcup_{i=1}^{n} \bigcup_{j=1}^{m} \Delta_{ij}.$$

Norma diviziunii Δ este $\|\Delta\| = \max\{\|\Delta_1\|, \|\Delta_2\|\}$.
Fie $(\xi, \eta) = \left(\xi_i, \eta_j\right)_{i=\overline{1,n}, j=\overline{1,m}}$ un sistem de puncte intermediare corespunzătoare diviziunii Δ, din $[a,b] \times [c,d]$,

$x_{i-1} \leq \xi_i \leq x_i, y_{j-1} \leq \eta_j \leq y_j.$

Fie funcţia $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mărginită pe D. Se construieşte funcţia

$$\widetilde{f} : [a,b] \times [c,d] \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ \widetilde{f}(x,y) = \begin{cases} f(x,y), & \text{dacă } (x,y) \in D \\ 0, & \text{dacă } (x,y) \in ([a,b] \times [c,d]) \setminus D \end{cases}$$

a) Se numeşte *suma Riemann asociată funcţiei* f, *diviziunii* Δ *şi sistemului de puncte intermediare* (ξ, η) numărul real

$$\boxed{S(f, \Delta, (\xi, \eta)) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \widetilde{f}\left(\xi_i, \eta_j\right) \cdot (x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1}).}$$

b) Funcţia f se numeşte *integrabilă Riemann pe domeniul* D dacă există un număr real $\mathcal{I}_f$ cu proprietatea că

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$ astfel încât $\forall \Delta \in \mathcal{D}([a,b] \times [c,d])$ cu $\|\Delta\| < \delta$ şi $\forall (\xi, \eta) = \left(\xi_i, \eta_j\right)_{i=\overline{1,n}, j=\overline{1,m}} \in \mathcal{P}(\Delta)$, să rezulte $|S(f, \Delta, (\xi, \eta)) - \mathcal{I}_f| < \varepsilon$.

Se notează cu $\mathcal{R}(D)$ mulţimea tuturor funcţiilor integrabile Riemann pe domeniu D. Numărul

$\mathcal{I}_f$ dacă există, este unic, şi se numeşte *integrala dublă pe domeniul* D, *a funcţiei* f. Se notează $\mathcal{I}_f = \iint_D f(x,y)\,dxdy$.

Observaţia 2.1.1. Folosind rezultate din teoria măsurii, se poate arăta că definiţia anterioară este corectă, adică $\mathcal{I}_f$ nu depinde de alegerea dreptunghiului cu interior $[a,b]\times[c,d]$ care include D, şi nici de funcţia $\widetilde{f}$ construită.

Propoziţia 2.1.1.(**de liniaritate în raport cu integrantul a integralei duble**)
Fie $D \subseteq \mathbb{R}^2$ un domeniu de integrare plan. Fie $f,g : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mărginite pe D.şi $\alpha \in \mathbb{R}$. Dacă $f,g \in \mathcal{R}(D)$ atunci funcţiile $f+g \in \mathcal{R}(D)$ şi $\alpha f \in \mathcal{R}(D)$ şi

(**aditivitatea** în raport cu funcţia integrant) $\boxed{\iint_D (f+g)(x,y)\,dxdy = \iint_D f(x,y)\,dxdy + \iint_D g(x,y)\,dxdy;}$

(**omogeneitatea** în raport cu funcţia integrant) $\boxed{\iint_D (\alpha f)(x,y)\,dxdy = \alpha \iint_D f(x,y)\,dxdy.}$

Propoziţia 2.1.2.(**de aditivitate a integralei duble în raport cu domeniul**)
Fie $D \subseteq \mathbb{R}^2$ un domeniu de integrare plan. Fie $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mărginită pe D. Se presupune că $D = D_1 \cup D_2$ prin juxtapunere. Dacă $f \in \mathcal{R}(D_1)$ şi $f \in \mathcal{R}(D_2)$ atunci $f \in \mathcal{R}(D_1 \cup D_2)$ şi

$$\boxed{\iint_D f(x,y)\,dxdy = \iint_{D_1} f(x,y)\,dxdy + \iint_{D_2} f(x,y)\,dxdy.}$$

Teorema 2.1.1.(**de reducere a unei integrale duble la integrale Riemann**)

a) Fie $D = [a,b]\times[c,d]$.

$D_y = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2; a \le x \le b, c \le y \le d\right\}$ sau $D_x = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2; c \le y \le d, a \le x \le b\right\}$ un dreptunghi cu interior, cu laturile paralele cu axele; este *domeniu compact simplu în raport cu ambele axe*;

Fie $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă.

Atunci $f \in \mathcal{R}(D)$ şi $\boxed{\iint_D f(x,y)\,dxdy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,dy\right) dx \overset{\text{Fubini}}{=} \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\,dx\right) dy.}$

b) Fie $D = D_y = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2; a \le x \le b, g_1(x) \le y \le g_2(x)\right\}$, unde $g_{1,2} : [a,b] \to \mathbb{R}$ sunt funcţii continue; este *domeniu compact simplu în raport cu* Oy;

Fie $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă.

Atunci $f \in \mathcal{R}(D)$ şi $\boxed{\iint_D f(x,y)\,dxdy = \int_a^b \left(\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\,dy\right) dx.}$

c) Fie $D = D_x = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2; c \le y \le d, h_1(y) \le x \le h_2(y)\right\}$, unde $h_{1,2} : [c,d] \to \mathbb{R}$ sunt funcţii continue; este *domeniu compact simplu în raport cu* Ox;

Fie $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă.

Atunci $f \in \mathcal{R}(D)$ şi $\boxed{\iint_D f(x,y)\,dxdy = \int_c^d \left(\int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y)\,dx\right) dy.}$

Exemplul 2.1.1. Se calculează

a) $\mathcal{I} = \iint_D \dfrac{y^2}{1+x^2}\,dxdy$,

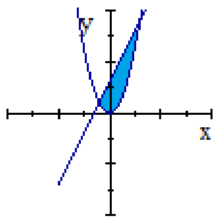
unde D este dreptunghiul cu interior mărginit de $x = \frac{1}{\sqrt{3}}, x = \sqrt{3}, y = 0, y = 1$.

Rezolvare. -A se vedea Seminar, cu interpretare geometrică.

b) $\iint_D (xy)\,dxdy$, unde $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2; y \ge x^2, y \le 2x+3\right\}$.

Rezolvare. etapa 1. Se studiază domeniul D.

•Se reprezintă grafic domeniul



•$y = x^2$ este parabola ce trece prin $O(0,0), A(-1,1), D(1,1)$
$y \geq x^2 \Rightarrow ...$
•$y = 2x + 3$ este dreapta ce trece prin $C(0,3)$ şi $\left(\frac{-3}{2}, 0\right)$
$y \leq 2x + 3 \Rightarrow ...$

parabola∩dreapta$\begin{cases} y = x^2 \\ y = 2x + 3 \end{cases} \Rightarrow A(-1,1)$ şi $B(3,9)$.

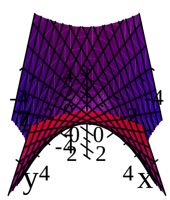
Deci D este domeniul mărginit de segmentul $\left[\overrightarrow{AB}\right]$ şi arcul de parabolă $\left[\overset{\frown}{AOB}\right]$.

•Se studiază dacă D este domeniu de integrare. Este, deoarece
$\begin{cases} \text{-}D \text{ este mulţime mărginită, } D \subsetneq [-1,3] \times [0,9] \\ \text{- Fr } D \text{ este curbă simplă, închisă, netedă pe porţiuni.} \end{cases}$

etapa 2. Se studiază integrantul f.

$f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(x,y) = xy.$

f este câmp scalar bine definit şi continuu pe D de la etapa 1. Graficul pe $\mathbb{R}^2$ are ca reprezentare un paraboloid hiperbolic.



etapa 3. Se calculează integrala $\mathcal{I}$, aplicând T1.

modul 1. Se observă că D nu este dreptunghi cu interior, cu laturile paralele cu axele.-NU

modul 2. Se studiază dacă D este domeniu compact simplu în raport cu Oy. Se explicitează curbele care mărginesc domeniul în raport cu y.

Fie $(x,y) \in D$ un punct oarecare din domeniu. Se consideră paralele la Oy prin punctul (x,y) şi se observă că toate aceste paralele au ecuaţiile $\widetilde{x} = x$, cu $-1 \leq x \leq 3$ atunci când $(x,y) \in D$. Mai mult, când (x,y) variază în D pe o astfel de paralelă, y-ul variază între y-ul de pe arcul de parabolă $\left[\overset{\frown}{AOB}\right]$ şi y-ul de pe segmentul $\left[\overrightarrow{AB}\right]$, adică $x^2 \leq y \leq 2x + 3$.

$$D = D_y = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2; -1 \leq x \leq 3, \underbrace{x^2}_{y\text{-ul de pe } \left[\overset{\frown}{AOB}\right]} \leq y \leq \underbrace{2x+3}_{y\text{-ul de pe } \left[\overrightarrow{AB}\right]} \right\}$$

Conform Teoremei de reducere, b)⇒

$$\mathcal{I} = \iint_D (xy)\, dxdy = \int_{-1}^{3} \underbrace{\left(\int_{x^2}^{2x+3} (xy)\, dy \right)}_{\mathcal{I}(x)} dx.$$

$$\mathcal{I}(x) = \int_{x^2}^{2x+3} (xy)\, dy = \left(x \cdot \frac{y^2}{2} \right) \Bigg|_{y=x^2}^{y=2x+3} = x \cdot \frac{(2x+3)^2 - \left(x^2\right)^2}{2}.$$

$$\mathcal{I} = \int_{-1}^{3} x \cdot \frac{(2x+3)^2 - \left(x^2\right)^2}{2} \overset{x \text{ este var.}}{\underset{\text{de integrare}}{=}} \frac{160}{3}.$$

<u>modul 3.</u> Se studiază dacă D este domeniu compact simplu în raport cu Ox. Se explicitează curbele care mărginesc domeniul în raport cu x.

Fie $(x, y) \in D$ un punct oarecare din domeniu. Se consideră paralele la Ox prin punctul (x, y) şi se observă că toate aceste paralele au ecuaţiile $\widetilde{y} = y$, cu $0 \le y \le 9$ atunci când $(x, y) \in D$. Mai mult, când (x, y) variază în D pe o astfel de paralelă, x-ul variază între x-ul de pe arcul de parabolă $\left[\overset{\frown}{AO}\right]$, adică $x = -\sqrt{y}$ juxtapus cu x-ul de pe segmentul $\left[\overrightarrow{AB}\right]$, adică $x = \dfrac{y-3}{2}$ şi x-ul de pe arcul de parabolă $\left[\overset{\frown}{OB}\right]$, adică $x = \sqrt{y}$. S-a împărţit domeniul D ca juxtapunere de două domenii simple în raport cu Ox, trasând o paralelă la Ox prin nodul A (în care $\operatorname{Fr} D$ îşi schimbă netezimea).

$$D = D_x^1 \cup D_x^2 = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2; 0 \le y \le 1, \underbrace{-\sqrt{y}}_{x\text{-ul de pe } \left[\overset{\frown}{AO}\right]} \le x \le \underbrace{\sqrt{y}}_{x\text{-ul de pe } \left[\overset{\frown}{OC}\right]} \right\} \cup$$

$$\cup \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2; 1 \le y \le 9, \underbrace{\frac{y-3}{2}}_{x\text{-ul de pe } \left[\overrightarrow{AB}\right]} \le x \le \underbrace{\sqrt{y}}_{x\text{-ul de pe } \left[\overset{\frown}{CB}\right]} \right\}.$$

Conform Teoremei de aditivitate în raport cu domeniul şi Teoremei de reducere, c)⇒

$$\mathcal{I} = \iint_{D_x^1} (xy)\, dxdy + \iint_{D_x^2} (xy)\, dxdy = \int_0^1 \underbrace{\left(\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} (xy)\, dx \right)}_{\mathcal{I}_1(y)} dy + \int_1^9 \underbrace{\left(\int_{\frac{y-3}{2}}^{\sqrt{y}} (xy)\, dx \right)}_{\mathcal{I}_2(y)} dy \overset{x \text{ este var.}}{\underset{\text{de integrare}}{=}}$$

$$= \int_0^1 \left(y \frac{x^2}{2} \right) \Bigg|_{x=-\sqrt{y}}^{x=\sqrt{y}} dy + \int_1^9 \left(\left(y \frac{x^2}{2} \right) \Bigg|_{x=\frac{y-3}{2}}^{x=\sqrt{y}} \right) dy = \int_0^1 \left(y \frac{y}{2} - y \frac{y}{2} \right) dy + \int_1^9 \left(y \frac{y}{2} - y \frac{\left(\frac{y-3}{2}\right)^2}{2} \right) dy =$$

$$= 0 + \frac{160}{3} = \frac{160}{3}.$$

Comentariu. La acest exerciţiu nu se verifică $f(x, y) \ge 0, \forall (x, y) \in D$, pentru a putea interpreta, conform teroremei 2.1.2*b*), că $\iint_D f(x, y)\, dxdy = \operatorname{volum}(\Omega)$,unde Ω este corpul cilindric având generatoarele paralele cu axa Oz, mărginit de-a lungul cotei inferior de domeniul D (desenat în planul xOy) şi superior de suprafaţa de ecuaţie explicită $z = f(x, y)$ (desenată în spaţiu).

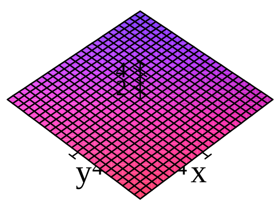
Teorema 2.1.2.a)(o interpretare geometrică a unei integrale duble) Fie D un domeniu de integrare din $\mathbb{R}^2$. Atunci $\boxed{\operatorname{aria}(D) = \iint_D 1 dxdy.}$

Teorema 2.1.2.b)(o interpretare geometrică a integralei duble) Fie D un domeniu de integrare din $\mathbb{R}^2$. Fie $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă a.î. $f(x, y) \ge 0, \forall (x, y) \in D$.
Atunci $f \in \mathcal{R}(D)$ şi $\boxed{\iint_D f(x, y)\, dxdy = \operatorname{volum}(\Omega),}$ unde Ω este corpul cilindric cu generatoarele paralele cu axa Oz, mărginit de-a lungul cotei inferior de domeniul D (în planul xOy) şi superior

de suprafaţa de ecuaţie explicită $z = f(x, y)$.
Teorema 2.1.3.(o interpretare statistică a integralei duble) Fie variabila aleatoare bidimensională $X = (X_1, X_2)$, cu densitatea de probabilitate f_X, şi D un domeniu din $\mathbb{R}^2$. Atunci

$$\boxed{P\left((X_1, X_2) \in D\right) = \iint_D f_X(x, y)\, dxdy.}$$

Exemplul 2.1.2. Să se studieze dacă următorul domeniu are arie, şi dacă da, să se calculeze aria pentru
a) $D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y \geq x^2, y \leq 2x + 3\right\}$.
Rezolvare. Se anticipează că, dacă există, aria $(D) = \iint_D 1dxdy$.
etapa 1. Se studiază domeniul $D-$la exerciţiul anterior.
etapa 2. Se studiază integrantul f.
$f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(x, y) = 1.$
f este câmp scalar bine definit şi continuu pe D de la etapa 1. Graficul pe $\mathbb{R}^2$ are ca reprezentare un plan paralel cu xOy.



etapa 3. Se calculează integrala $\mathcal{I}$, aplicând T1.
modul 2. Direct de la 1.a)$\Rightarrow$

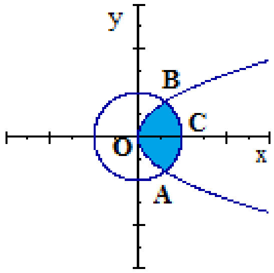
$$D = D_y = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2; -1 \leq x \leq 3, \underbrace{x^2}_{y\text{-ul de pe } \left[A\overset{\frown}{O}B\right]} \leq y \leq \underbrace{2x+3}_{y\text{-ul de pe } \left[\overrightarrow{AB}\right]} \right\}$$

Conform Teoremei de reducere, b)$\Rightarrow$

$$\mathcal{I} = \iint_D 1dxdy = \int_{-1}^{3} \left(\underbrace{\int_{x^2}^{2x+3} 1dy}_{\mathcal{I}(x)} \right) dx = \int_{-1}^{3} \left((y)\Big|_{y=x^2}^{y=2x+3} \right) dx = \int_{-1}^{3} \left(2x + 3 - x^2\right) dx =$$

$$= \left(x^2 + 3x - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{x=-1}^{x=3} = \tfrac{32}{3} > 0\text{!!! ca arie.}$$

Comentariu. f verifică $f(x, y) \geq 0, \forall (x, y) \in D$ şi atunci
$\iint_D 1dxdy = \text{volum}(\Omega)$,
unde Ω este corpul cilindric cu generatoarele paralele cu axa Oz, mărginit de-a lungul cotei inferior de domeniul D (în planul xOy) şi superior de planul de ecuaţie explicită $z = 1$. Pe baza interpretării volumului unui corp cilindric precum un produs dintre aria bazei şi lungimea înălţimii (egală cu 1), se deduce că valoarea numerică a rezultatului reprezintă chiar aria (D).
b) $D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \leq 1, y^2 \leq x\right\}$.
Rezolvare. Se anticipează că, dacă există, aria $(D) = \iint_D 1dxdy$.
etapa 1. Se studiază domeniul D.
•Se reprezintă grafic domeniul



$\bullet x^2+y^2=1$ este cercul cu centrul $O(0,0)$ şi raza 1
$x^2+y^2\leq 1\Rightarrow ...$
$\bullet y^2=x$ este parabola ce trece prin $O(0,0),(1,1)$ şi $(1,-1)$
$y^2\leq x\Rightarrow ...$

cercul$\cap$parabola$\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ y^2=x \end{cases}\Rightarrow A\left(\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2},-\sqrt{\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}}\right)$ şi $B\left(\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2},+\sqrt{\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}}\right)$

Deci D este domeniul mărginit de arcul de parabolă $\left[B\overset{\frown}{O}A\right]$ şi arcul de cerc $\left[A\overset{\frown}{C}B\right]$, cu $C(1,0)$.

$\bullet D$ este domeniu de integrare, deoarece
$\begin{cases} \text{-}D \text{ este mulţime mărginită, } D\subsetneq[0,1]\times[-1,1] \\ \text{- Fr}\,D \text{ este curbă simplă, închisă, netedă pe porţiuni.} \end{cases}$

<u>etapa 2.</u> Se studiază integrantul f.

$f:D\subseteq\mathbb{R}^2\to\mathbb{R},\ f(x,y)=1.$

f este câmp scalar bine definit şi continuu pe D de la etapa 1.

<u>etapa 3.</u> Se calculează integrala $\mathcal{I}$, aplicând T1.

<u>modul 1.</u> Se observă că D nu este dreptunghi cu interior, cu laturile paralele cu axele.-NU

<u>modul 2.</u> Se studiază dacă D este domeniu compact simplu în raport cu Oy. Se explicitează curbele care mărginesc domeniul în raport cu y.

Fie $(x,y)\in D$ un punct oarecare din domeniu. Se consideră paralele la Oy prin punctul (x,y) şi se observă că toate aceste paralele au ecuaţiile $\widetilde{x}=x$, cu $0\leq x\leq 1$ atunci când $(x,y)\in D$. Mai mult, când (x,y) variază în D pe o astfel de paralelă, y-ul variază între y-ul de pe arcul de parabolă $\left[\overset{\frown}{OA}\right]$ şi arcul de parabolă $\left[\overset{\frown}{BO}\right]$, respectiv între arcul de cerc $\left[\overset{\frown}{AC}\right]$ şi arcul de cerc $\left[\overset{\frown}{CB}\right]$. S-a împărţit domeniul D ca juxtapunere de două domenii simple în raport cu Oy, trasând o paralelă la Oy prin nodurile A, B (în care Fr D îşi schimbă netezimea).

$$D=D_y^1\cup D_y^2=$$
$$=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;0\leq x\leq\frac{-1+\sqrt{5}}{2},\quad \underbrace{-\sqrt{x}}_{y\text{-ul de pe }\left[\overset{\frown}{OA}\right]}\leq y\leq \underbrace{\sqrt{x}}_{y\text{-ul de pe }\left[\overset{\frown}{BO}\right]}\right\}\cup$$
$$\cup\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\leq x\leq 1,\quad \underbrace{-\sqrt{1-x^2}}_{y\text{-ul de pe }\left[\overset{\frown}{AC}\right]}\leq y\leq \underbrace{\sqrt{1-x^2}}_{y\text{-ul de pe }\left[\overset{\frown}{CB}\right]}\right\}$$

Conform Teoremei de aditivitate în raport cu domeniul şi Teoremei de reducere, b)$\Rightarrow$

$$\mathcal{I}=\iint_{D_y^1}1dxdy+\iint_{D_y^2}1dxdy=\int_0^{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}\left(\underbrace{\int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}}1dy}_{\mathcal{I}_1(x)}\right)dx+\int_{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}^{1}\left(\underbrace{\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}1dy}_{\mathcal{I}_1(x)}\right)dx\overset{y\text{ este var.}}{\underset{\text{de integrare}}{=}}$$

$= \int_0^{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}} (y)\Big|_{y=-\sqrt{x}}^{y=\sqrt{x}} dx + \int_{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}^{1} \left((y)\Big|_{y=-\sqrt{1-x^2}}^{y=\sqrt{1-x^2}}\right) dx = \int_0^{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}} (2\sqrt{x})\, dx + \int_{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}^{1} \left(2\sqrt{1-x^2}\right) dx \underset{\text{de integrare}}{\overset{x \text{ este var.}}{=}}$

$= \left(\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}}\right)\Big|_{x=0}^{x=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}} + \left(x\sqrt{1-x^2} + \arcsin x\right)\Big|_{x=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}^{x=1} =$

$= \frac{4}{3}\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\sqrt{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}} - 0 + 0 + \arcsin 1 - \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\sqrt{1-\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)^2} - \arcsin\frac{-1+\sqrt{5}}{2}.$

modul 3. Se studiază dacă D este domeniu compact simplu în raport cu Ox. Se explicitează curbele care mărginesc domeniul în raport cu x.

Fie $(x,y) \in D$ un punct oarecare din domeniu. Se consideră paralele la Ox prin punctul (x,y) şi se observă că toate aceste paralele au ecuaţiile $\widetilde{y} = y$, cu $-\sqrt{\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}} \leq y \leq \sqrt{\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}}$ atunci când $(x,y) \in D$. Mai mult, când (x,y) variază în D pe o astfel de paralelă, x-ul variază între x-ul de pe arcul de parabolă $\left[B\overset{\frown}{O}A\right]$ şi x-ul de pe arcul de cerc $\left[A\overset{\frown}{C}B\right]$, adică $y^2 \leq x \leq \sqrt{1-y^2}$.

$$D = D_x = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2; -\sqrt{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}} \leq y \leq \sqrt{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}},\quad \underbrace{y^2}_{x\text{-ul de pe } \left[B\overset{\frown}{O}A\right]} \leq x \leq \underbrace{\sqrt{1-y^2}}_{x\text{-ul de pe } \left[A\overset{\frown}{C}B\right]}\right\}$$

Conform Teoremei de reducere, c)$\Rightarrow$

$$\mathcal{I} = \iint_D 1 dxdy = \int_{-\sqrt{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}}^{\sqrt{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}} \left(\underbrace{\int_{y^2}^{\sqrt{1-y^2}} 1dx}_{\mathcal{I}(y)}\right) dy \underset{\text{de integrare}}{\overset{x \text{ este var.}}{=}} \int_{-\sqrt{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}}^{\sqrt{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}} \left((x)\Big|_{x=y^2}^{x=\sqrt{1-y^2}}\right) dy =$$

$$= \int_{-\sqrt{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}}^{\sqrt{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}} \left(\sqrt{1-y^2} - y^2\right) dy \underset{\text{de integrare}}{\overset{y \text{ este var.}}{=}} \left(\frac{1}{2}y\sqrt{1-y^2} + \frac{1}{2}\arcsin y - \frac{1}{3}y^3\right)\Big|_{y=-\sqrt{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}}^{y=\sqrt{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}} =$$

$= \arcsin\sqrt{\frac{1}{2}\sqrt{5} - \frac{1}{2}} + \frac{1}{3}\sqrt{\sqrt{5}-2} \simeq 1.066\,5 > 0!!!$ ca arie.

Teorema 2.1.4.(de schimbare de "variabile" de integrare în integrala dublă) Fie D un domeniu de integrare din $\mathbb{R}^2$, fie $D_s \subseteq \mathbb{R}^2$. Fie

$F : D_s \subseteq \mathbb{R}^2 \to D \subseteq \mathbb{R}^2$

$(u,v) \in D_s \rightsquigarrow F(u,v) = (x(u,v), y(u,v))$

o funcţie bijectivă. Dacă F este difeomorfism pe $D_s \setminus \operatorname{Fr} D_s$, adică

-F este de clasă $\mathcal{C}^1$ pe $D_s \setminus \operatorname{Fr} D_s$

-$\det J_F(u,v) \neq 0, \forall (u,v) \in D_s \setminus \operatorname{Fr} D_s$

atunci F^{-1} duce bijectiv şi bicontinuu domeniul de integrare D în D_s, care este tot domeniu de integrare. Fie $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ o funcţie. Dacă $f \in \mathcal{R}(D)$ atunci $f \circ F \in \mathcal{R}(D_s)$ şi are loc

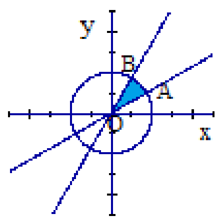
$$\boxed{\iint_D f(x,y)\, dxdy = \iint_{D_s} f(x(u,v), y(u,v))\, |\det J_F(u,v)|\, dudv.}$$

Exemplul 2.1.3. Se calculează:

$\iint_D \dfrac{1}{16-x^2-y^2} dxdy$, unde $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x^2+y^2 \leq 4, 0 \leq x \leq y\sqrt{3}, 0 \leq y \leq x\sqrt{3}\right\}.$

Rezolvare. etapa 1. Se studiază domeniul D.

•Se reprezintă grafic domeniul



$\bullet x^2+y^2=4$ este cercul cu centrul $O\,(0,0)$ şi raza 2
$x^2+y^2\le 4 \Rightarrow ...$
$\bullet x=0$ este axa Oy
$x\ge 0 \Rightarrow ...$
$\bullet x=y\sqrt{3}$ este dreapta ce trece prin $0\,(0,0)\,,A\left(\sqrt{3},1\right)$
$x\le y\sqrt{3} \Rightarrow ...$
$\bullet y=0$ este axa Ox
$y\ge 0 \Rightarrow ...$
$\bullet y=x\sqrt{3}$ este dreapta ce trece prin $O\,(0,0)\,,B\left(1,\sqrt{3}\right)$
$y\le x\sqrt{3} \Rightarrow ...$

Deci D este domeniul mărginit de segmentele $\left[\overrightarrow{OA}\right],\left[\overrightarrow{BO}\right]$ şi arcul de cerc $\left[\overset{\frown}{AB}\right]$.

$\bullet D$ este domeniu de integrare, deoarece

$$\begin{cases} \text{-}D \text{ este mulţime mărginită, } D\subsetneq[0,2]\times[0,2] \\ \text{- Fr}\,D \text{ este curbă simplă, închisă, netedă pe } 3 \text{ porţiuni.}\end{cases}$$

etapa 2. Se studiază integrantul f.

$f:D\subseteq\mathbb{R}^2\to\mathbb{R},\ f\,(x,y)=\dfrac{1}{16-x^2-y^2}.$

f este câmp scalar bine definit şi continuu pe D de la etapa 1.

etapa 3. Se calculează integrala $\mathcal{I}$, aplicând T1-NU.

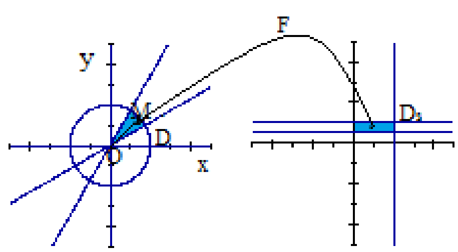
modul 1. Se observă că D nu este dreptunghi cu interior, cu laturile paralele cu axele.-NU

modul 2. Se studiază dacă D este domeniu compact simplu în raport cu Oy-este. Din cauza integrantului, integralele ce apar din teorema de reducere sunt greu de calculat $\Rightarrow$ NU se apelează la acest mod.

modul 3. Se studiază dacă D este domeniu compact simplu în raport cu Ox-este. Din cauza integrantului, integralele ce apar din teorema de reducere sunt greu de calculat $\Rightarrow$ NU se apelează la acest mod.

etapa 4. Se calculează integrala $\mathcal{I}$, aplicând Teorema de schimbare de "variabile".

Studiind forma integrantului şi forma domeniului (x^2+y^2 apare şi în legea de asociere a f şi în ecuaţiile curbelor ce mărginesc D), se face o schimbare de variabile legată de coordonate polare.



Fie (x,y) coordonatele carteziene a unui punct M din D. Fie coordonatele polare ale M :

$$\begin{cases}\rho=\text{dist}\,(O,M)\\ \theta=\mu\left(\widehat{Ox,\overrightarrow{OM}}\right)\end{cases},\ \text{cu}\ \begin{cases}x=\rho\cos\theta\\ \theta=\rho\sin\theta\end{cases}$$

Se observă, având în vedere interpretarea geometrică, că

(x,y) parcurge $D \Leftrightarrow (\rho,\theta)$ parcurge D_s,

unde $D_s=\left\{(\rho,\theta)\in\mathbb{R}^2;0\le\rho\le 2,\frac{\pi}{6}\le\theta\le\frac{\pi}{3}\right\}=[0,2]\times\left[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}\right].$

Alături de reprezentarea domeniului D în xOy, se reprezintă D_s în $\rho O_s\theta$.

Se alege $F : D_s \subseteq \mathbb{R}^2 \to D \subseteq \mathbb{R}^2, F(\rho,\theta) = \left(\underbrace{\rho\cos\theta}_{x(\rho,\theta)}, \underbrace{\rho\sin\theta}_{y(\rho,\theta)}\right)$.
Se observă că că F este difeomorfism pe $D_s \setminus \operatorname{Fr} D_s$, adică

-F este de clasă $\mathcal{C}^1$ pe $D_s \setminus \operatorname{Fr} D_s$

-$\det J_F(\rho,\theta) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho}(\rho,\theta) & \frac{\partial x}{\partial \theta}(\rho,\theta) \\ \frac{\partial y}{\partial \rho}(\rho,\theta) & \frac{\partial y}{\partial \theta}(\rho,\theta) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -\rho\sin\theta \\ \cos\theta & \rho\cos\theta \end{vmatrix} = \rho \neq 0, \forall(\rho,\theta) \in D_s \setminus \operatorname{Fr} D_s$.

Atunci F^{-1} duce bijectiv şi bicontinuu domeniul de integrare D în D_s, care este tot domeniu de integrare. Mai mult

$\mathcal{I} = \iint_D \frac{1}{16 - x^2 - y^2} dxdy = \iint_{D_s} \frac{1}{16 - (\rho\cos\theta)^2 - (\rho\sin\theta)^2} |\rho|\, d\rho d\theta = \iint_{D_s} \frac{\rho}{16 - \rho^2} d\rho d\theta$.

$D_s = \left\{(\rho,\theta) \in \mathbb{R}^2; 0 \le \rho \le 2, \frac{\pi}{6} \le \theta \le \frac{\pi}{3}\right\} = [0,2] \times \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right]$

este un dreptunghi cu interior, cu laturile paralele cu axele de coordonate $O_s\rho, O_s\theta$.

Folosind Teorema de reducere, a) $\Rightarrow$

$$\mathcal{I} = \iint_{D_s} \frac{\rho}{16-\rho^2} d\rho d\theta = \int_0^2 \left(\underbrace{\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\rho}{16-\rho^2} d\theta}_{\mathcal{I}(\rho)}\right) d\rho \overset{\theta \text{ este var.}}{\underset{\text{de integrare}}{=}} \int_0^2 \left(\frac{\rho}{16-\rho^2} \cdot \theta\right)\Big|_{\theta=\frac{\pi}{6}}^{\theta=\frac{\pi}{3}} d\rho =$$

$$= \int_0^2 \frac{\rho}{16-\rho^2} \cdot \frac{\pi}{6} d\rho \overset{\rho \text{ este var.}}{\underset{\text{de integrare}}{=}} \frac{\pi}{6} \cdot \frac{-1}{2} \int_0^2 \frac{(16-\rho^2)'^{\rho}}{16-\rho^2} d\rho = \frac{\pi}{6} \cdot \frac{-1}{2} \ln\left(16-\rho^2\right)\Big|_{\rho=0}^{\rho=2} =$$

$$= \frac{-\pi}{12}(\ln 12 - \ln 16) = \frac{-\pi}{12} \ln\frac{3}{4}.$$

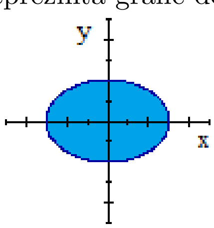
Exemplul 2.1.4. Folosind coordonate polare generalizate în plan, să se calculeze:

$\mathcal{I} = \iint_D \sqrt{2 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} dxdy$, unde $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2; \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \le 0\right\}$

Rezolvare.

etapa 1. Se studiază domeniul D.

•Se reprezintă grafic domeniul



•$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ este elipsa cu centrul $O(0,0)$ şi semiaxele a, b

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \le 1$ este interiorul elipsei anterioare reunit cu elipsa

•D este domeniu de integrare, deoarece

$\begin{cases} \text{-}D \text{ este mulţime mărginită, } D \subsetneq [-a,a] \times [-b,b] \\ \text{-} \operatorname{Fr} D \text{ este curbă simplă, închisă, netedă pe porţiuni.} \end{cases}$

etapa 2. Se studiază integrantul f.

$f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = \sqrt{2 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}$.

f este câmp scalar bine definit şi continuu pe D.

etapa 3. Se calculează integrala $\mathcal{I}$, aplicând T1-NU.

modul 1. Se observă că D nu este dreptunghi cu interior, cu laturile paralele cu axele.-NU

modul 2. Se studiază dacă D este domeniu compact simplu în raport cu $Oy-$ este. Din cauza integrantului integralele ce apar din teorema de reducere sunt greu de calculat $\Rightarrow$ NU se apelează

la acest mod.
<u>modul 3.</u> Se studiază dacă D este domeniu compact simplu în raport cu $Ox-$este. Din cauza integrantului integralele ce apar din teorema de reducere sunt greu de calculat $\Rightarrow$ NU se apelează la acest mod.
<u>etapa 4.</u> Se calculează integrala $\mathcal{I}$, aplicând Teorema de schimbare de "variabile".

Studiind forma integrantului şi forma domeniului ($\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$ apare şi în legea de asociere a f şi în ecuaţia curbei ce mărgineşte D), se face o schimbare de variabile legată de coordonate polare generalizate.

Fie (x,y) coordonatele carteziene a unui punct M din $D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leq 1\right\}$. Fie coordonatele polare generalizate ale M :

$$\left\{\begin{array}{l}\rho=\text{parametru}\\ \theta=\mu\left(Ox,\overset{\frown}{OM}\right)\end{array}\right.,\text{ cu }\left\{\begin{array}{l}x=a\rho\cos\theta\\ y=b\rho\sin\theta\end{array}\right.$$

Se observă, având în vedere interpretarea geometrică, că
(x,y) parcurge $D\Leftrightarrow(\rho,\theta)$ parcurge D_s,
unde $D_s=\left\{(\rho,\theta)\in\mathbb{R}^2;0\leq\rho\leq 1,0\leq\theta\leq 2\pi\right\}=[0,1]\times[0,2\pi]$.
Alături de reprezentarea domeniului D în xOy, se reprezintă D_s în $\rho O_s\theta$.

Se alege $F:D_s\subseteq\mathbb{R}^2\to D\subseteq\mathbb{R}^2, F(\rho,\theta)=\left(\underbrace{a\rho\cos\theta}_{x(\rho,\theta)},\underbrace{b\rho\sin\theta}_{y(\rho,\theta)}\right)$.

Se observă că F este difeomorfism pe $D_s\setminus\operatorname{Fr}D_s$, chiar dacă nu se ştie D_s, adică
-F este de clasă $\mathcal{C}^1$ pe $\mathbb{R}^2$ chiar, deci şi pe $D_s\setminus\operatorname{Fr}D_s$

-$\det J_F(\rho,\theta)=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial\rho}(\rho,\theta) & \frac{\partial x}{\partial\theta}(\rho,\theta)\\ \frac{\partial y}{\partial\rho}(\rho,\theta) & \frac{\partial y}{\partial\theta}(\rho,\theta)\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a\cos\theta & -a\rho\sin\theta\\ b\cos\theta & b\rho\cos\theta\end{vmatrix}=ab\rho\neq 0,\forall(\rho,\theta)\in D_s\setminus\operatorname{Fr}D_s.$

Atunci F^{-1} duce bijectiv şi bicontinuu domeniul de integrare D în D_s, care este tot domeniu de integrare.

Mai mult
$\mathcal{I}=\iint_D\sqrt{2-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}dxdy=\iint_{D_s}\sqrt{2-\rho^2}\,|ab\rho|\,d\rho d\theta=ab\iint_{D_s}\rho\sqrt{2-\rho^2}d\rho d\theta$

$D_s=\left\{(\rho,\theta)\in\mathbb{R}^2;0\leq\rho\leq 1,0\leq\theta\leq 2\pi\right\}=[0,1]\times[0,2\pi]$ este un dreptunghi cu interior, cu laturile paralele cu axele de coordonate O_su,O_sv.

Folosind Teorema de reducere, a)$\Rightarrow$

$$\mathcal{I}=ab\iint_{D_s}\rho\sqrt{2-\rho^2}d\rho d\theta=ab\int_0^1\left(\underbrace{\int_0^{2\pi}\rho\sqrt{2-\rho^2}d\theta}_{\mathcal{I}(\rho)}\right)d\rho\overset{\theta\text{ este var.}}{\underset{\text{de integrare}}{=}}\int_0^1\left(\rho\sqrt{2-\rho^2}\cdot\theta\right)\Big|_{\theta=0}^{\theta=2\pi}d\rho=$$

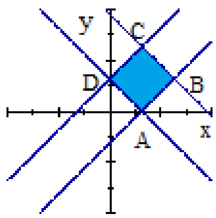
$$=ab\int_0^1\rho\sqrt{2-\rho^2}\cdot(2\pi)\,d\rho=-\pi ab\int_0^1\left(2-\rho^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(2-\rho^2\right)'d\rho\overset{\rho\text{ este var.}}{\underset{\text{de integrare}}{=}}-\pi ab\left.\frac{\left(2-\rho^2\right)^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}\right|_{\rho=0}^{\rho=1}=$$

$$=-\pi ab\frac{(2-1)^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}+\pi ab\frac{(2-0)^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}=\left(-\frac{3}{2}+\frac{3}{2}\sqrt{2^3}\right)\pi ab.$$

Exemplul 2.1.5 Să se calculeze
$\iint_D(x-y)^2\sin^2(x+y)\,dxdy$, unde $D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\pi\leq x+y\leq 3\pi,-\pi\leq x-y\leq\pi\right\}$.

Rezolvare.etapa 1. Se studiază domeniul D.

•Se reprezintă grafic domeniul



•$x+y=\pi$ este dreapta ce trece prin $A(\pi,0), D(0,\pi)$
$x+y\geq\pi\Rightarrow ...$
•$x+y=3\pi$ este dreapta ce trece prin $(3\pi,0),(0,3\pi)$
$x+y\leq 3\pi\Rightarrow ...$
•$x-y=-\pi$ este dreapta ce trece prin $(-\pi,0), D(0,\pi)$
$x-y\geq-\pi\Rightarrow ...$
•$x-y=\pi$ este dreapta ce trece prin $A(\pi,0),(0,-\pi)$
$x-y\leq\pi\Rightarrow ...$

$\begin{cases} x+y=\pi \\ x-y=\pi \end{cases} \Rightarrow A(\pi,0)$; $\begin{cases} x+y=3\pi \\ x-y=\pi \end{cases} \Rightarrow B(2\pi,\pi)$.

$\begin{cases} x+y=3\pi \\ x-y=-\pi \end{cases} \Rightarrow C(\pi,2\pi)$; $\begin{cases} x+y=\pi \\ x-y=-\pi \end{cases} \Rightarrow D(0,\pi)$.

Deci D este domeniul mărginit de segmentele $\left[\overrightarrow{AB}\right], \left[\overrightarrow{BC}\right], \left[\overrightarrow{CD}\right], \left[\overrightarrow{DA}\right]$.

•D este domeniu de integrare, deoarece:

$\begin{cases} \text{-}D \text{ este mulţime mărginită, } D\subsetneq[0,2\pi]\times[0,2\pi] \\ \text{-}\operatorname{Fr}D \text{ este curbă simplă, închisă, netedă pe 4 porţiuni.} \end{cases}$

etapa 2. Se studiază integrantul f.

$f: D\subseteq\mathbb{R}^2\to\mathbb{R},\ f(x,y)=(x-y)^2\sin^2(x+y)$.

f este câmp scalar bine definit şi continuu pe D.

etapa 3. Se calculează integrala $\mathcal{I}$, aplicând T1-NU.

modul 1. Se observă că D este dreptunghi cu interior, dar nu este cu laturile paralele cu axele.-NU

modul 2. Se studiază dacă D este domeniu compact simplu în raport cu Oy-este juxtapunerea a două domenii simple în raport cu Oy (obţinute ducând paralela la Oy prin nodurile A,C, unde $\operatorname{Fr}D$ îşi schimbă netezimea) Din cauza integrantului, integralele ce apar din teorema de reducere sunt greu de calculat $\Rightarrow$ NU se apelează la acest mod.

modul 3. Se studiază dacă D este domeniu compact simplu în raport cu Ox-este juxtapunerea a două domenii simple în raport cu Ox (obţinute ducând paralela la Ox prin nodurile B,D, unde $\operatorname{Fr}D$ îşi schimbă netezimea). Din cauza integrantului, integralele ce apar din teorema de reducere sunt greu de calculat $\Rightarrow$ NU se apelează la acest mod.

etapa 4. Se calculează integrala $\mathcal{I}$, aplicând Teorema de schimbare de "variabile".

Studiind forma integrantului şi forma domeniului ($x-y, x+y$ apare şi în legea de asociere a f şi în ecuaţiile curbelor ce mărginesc D), se face o schimbare de variabile legată de $x-y, x+y$.

Se notează $\begin{cases} x-y=u \\ x+y=v \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{u+v}{2} \\ y=\dfrac{-u+v}{2} \end{cases}$

Nu există interpretări geometrice pentru noile variabile (u,v).

Se alege $F: D_s\subseteq\mathbb{R}^2\to D\subseteq\mathbb{R}^2, F(u,v)=\left(\underbrace{\frac{u+v}{2}}_{x(u,v)}, \underbrace{\frac{-u+v}{2}}_{y(u,v)}\right)$.

Se observă că F este difeomorfism pe $D_s\setminus\operatorname{Fr}D_s$, fără să se ştie D_s, adică

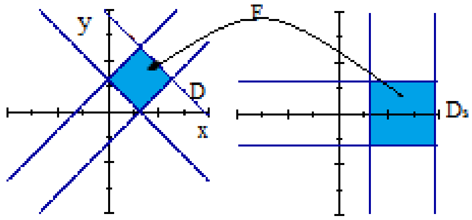
-F este de clasă $\mathcal{C}^1$ pe $\mathbb{R}^2$ chiar, deci şi pe $D_s\setminus\operatorname{Fr}D_s$

-det $J_F(u,v) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u}(u,v) & \dfrac{\partial x}{\partial v}(u,v) \\ \dfrac{\partial y}{\partial u}(u,v) & \dfrac{\partial y}{\partial v}(u,v) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \neq 0, \forall (u,v) \in \mathbb{R}^2$ chiar, deci şi pentru $(u,v) \in D_s \setminus \operatorname{Fr} D_s$.

Atunci F^{-1} duce bijectiv şi bicontinuu domeniul de integrare D în D_s, care este tot domeniu de integrare. Se înlocuiesc x, y cu u, v în ecuaţiile lui $D \Rightarrow$

$D_s = \left\{(u,v) \in \mathbb{R}^2; \pi \leq u \leq 3\pi, -\pi \leq v \leq \pi\right\} = [\pi, 3\pi] \times [-\pi, \pi]$.

Alături de reprezentarea domeniului D în xOy, se reprezintă D_s în uO_sv.



$\mathcal{I} = \iint_D (x-y)^2 \sin^2(x+y)\, dxdy = \iint_{D_s} u^2 \sin^2 v \cdot \left|\frac{1}{2}\right| dudv$.

$D_s = \left\{(u,v) \in \mathbb{R}^2; \pi \leq u \leq 3\pi, -\pi \leq v \leq \pi\right\} = [\pi, 3\pi] \times [-\pi, \pi]$ este un dreptunghi cu interior, cu laturile paralele cu axele de coordonate O_su, O_sv.

Folosind Teorema de reducere, a)$\Rightarrow$

$$\mathcal{I} = \frac{1}{2}\iint_{D_s} u^2 \sin^2 v dudv = \frac{1}{2}\int_\pi^{3\pi} \left(\underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} u^2 \sin^2 v dv}_{\mathcal{I}(u)} \right) du = \frac{1}{2}\int_\pi^{3\pi} \left(\underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} u^2 \frac{1-\cos 2v}{2} dv}_{\mathcal{I}(u)} \right) du =$$

$$\overset{v \text{ este var.}}{\underset{\text{de integrare}}{=}} \frac{1}{2}\int_\pi^{3\pi} \left(u^2 \cdot \left(\frac{v}{2} - \frac{\sin 2v}{4} \right) \right) \Bigg|_{v=-\pi}^{v=\pi} du = \frac{1}{2}\int_\pi^{3\pi} u^2 \cdot \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\sin 2\pi}{4} - \frac{-\pi}{2} + \frac{\sin(-2\pi)}{4} \right) du =$$

$$= \frac{\pi}{2}\int_\pi^{3\pi} u^2 du \overset{u \text{ este var.}}{\underset{\text{de integrare}}{=}} \frac{\pi}{2} \cdot \frac{u^3}{3}\Bigg|_{u=\pi}^{u=3\pi} = \frac{\pi}{2} \cdot \left(\frac{(3\pi)^3}{3} - \frac{\pi^3}{3} \right) = \frac{4\pi^4}{3}.$$

Teorema 2.1.5.(formula Riemann-Green de legătură între integrala dublă şi integrala curbilinie de speţa a 2-a) Fie D un domeniu de integrare din $\mathbb{R}^2$ bordat şi orientat. Fie $P, Q : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ funcţii de clasă $\mathcal{C}^1$ pe D. Atunci

$$\boxed{\int_{FrD} (P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy) = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x,y) \right) dxdy.}$$

Corolar. În ipotezele Teoremei 5 $\Rightarrow$

a) $\boxed{\text{aria}(D) = \iint_D 1dxdy = \frac{1}{2}\int_{FrD}(-ydx + xdy)}$

b) $\boxed{\text{aria}(D) = \iint_D 1dxdy = \int_{FrD}(0dx + xdy)}$

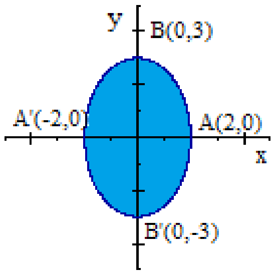
Exemplul 2.1.6. Fie $D = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2; \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} \leq 1 \right\}$.

a) Să se determine aria domeniului D folosind integrala dublă, apoi să se verifice rezultatul folosind Corolarul de la Formula Riemann-Green.

b) Să se calculeze următoarea integrală dublă direct, apoi să se verifice rezultatul cu Formula Riemann-Green:

$\iint_D \left(\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} \right) dxdy$, unde $D = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2; \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} \leq 1 \right\}$.

Rezolvare. a) Se anticipează că, dacă există, aria $(D) = \mathcal{I} = \iint_D 1 dxdy$.
Modul cu integrala dublă.
etapa 1. Se studiază domeniul D.
•Se reprezintă grafic domeniul



• $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ este elipsa cu centrul de simetrie $O(0,0)$ şi semiaxele $a = 2, b = 3$.
$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} \leq 1 \Rightarrow ...$

Deci D este domeniul mărginit de elipsa $\left[AB\overset{\frown}{A'}B'A\right]$.
•D este domeniu de integrare, deoarece
$\begin{cases} \text{-}D \text{ este mulţime mărginită, } D \subsetneq [-2,2] \times [-3,3] \\ \text{- Fr } D \text{ este curbă simplă, închisă, netedă.} \end{cases}$
etapa 2. Se studiază integrantul f.
$f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x,y) = 1.$
f este câmp scalar bine definit şi continuu pe D.
etapa 3. Se calculează integrala $\mathcal{I}$, aplicând T1.
modul 1. Se observă că D nu este dreptunghi cu interior, cu laturile paralele cu axele.-NU
modul 2. Se studiază dacă D este domeniu compact simplu în raport cu Oy. Se explicitează curbele care mărginesc domeniul în raport cu y.

Fie $(x,y) \in D$ un punct oarecare din domeniu. Se consideră paralele la Oy prin punctul (x,y) şi se observă că toate aceste paralele au ecuaţiile $\widetilde{x} = x$, cu $-2 \leq x \leq 2$ atunci când $(x,y) \in D$. Mai mult, când (x,y) variază în D pe o astfel de paralelă, y-ul variază între y-ul de pe arcul de elipsă $\left[A'\overset{\frown}{B'}A\right]$ şi arcul de elipsă $\left[A'\overset{\frown}{B}A\right]$.

$$D = D_y = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2; -2 \leq x \leq 2, \underbrace{-3\sqrt{1 - \frac{x^2}{4}}}_{y\text{-ul de pe } \left[A'\overset{\frown}{B'}A\right]} \leq y \leq \underbrace{+3\sqrt{1 - \frac{x^2}{4}}}_{y\text{-ul de pe } \left[A'\overset{\frown}{B}A\right]} \right\}.$$

Conform Teoremei de reducere, b)⇒

$$\mathcal{I} = \iint_{D_y} 1 dxdy = \int_{-2}^{2} \underbrace{\left(\int_{-3\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}}^{3\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}} 1 dy \right)}_{\mathcal{I}_1(x)} dx \overset{y \text{ este var.}}{\underset{\text{de integrare}}{=}} \int_{-2}^{2} \left((y)\Big|_{y=-3\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}}^{y=-3\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}} \right) dx =$$

$$= \int_{-2}^{2} \left(2 \cdot 3\sqrt{1 - \frac{x^2}{4}} \right) dx = 3\int_{-2}^{2} \sqrt{4 - x^2} dx \overset{x \text{ este var.}}{\underset{\text{de integrare}}{=}} \frac{3}{2} \left(x\sqrt{4 - x^2} + 4 \arcsin \frac{x}{2} \right)\Big|_{x=-2}^{x=2} =$$

6π.
modul 3. Se studiază dacă D este domeniu compact simplu în raport cu Ox. Se explicitează curbele

care mărginesc domeniul în raport cu x.

Fie $(x,y)\in D$ un punct oarecare din domeniu. Se consideră paralele la Ox prin punctul (x,y) şi se observă că toate aceste paralele au ecuaţiile $\widetilde{y}=y$, cu $-3\le y\le 3$ atunci când $(x,y)\in D$. Mai mult, când (x,y) variază în D pe o astfel de paralelă, x-ul variază între x-ul de pe arcul de elipsă $\left[B'\overset{\frown}{A'}B\right]$ şi x-ul de pe arcul de elipsă $\left[B'\overset{\frown}{A}B\right]$.

$$D=D_x=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;-3\le y\le 3,\ \underbrace{-2\sqrt{1-\frac{y^2}{9}}}_{x\text{-ul de pe }\left[B'\overset{\frown}{A'}B\right]}\le x\le \underbrace{+2\sqrt{1-\frac{y^2}{9}}}_{x\text{-ul de pe }\left[B'\overset{\frown}{A}B\right]}\right\}$$

Conform Teoremei de reducere, c)$\Rightarrow$

$$\mathcal{I}=\iint_D 1dxdy=\int_{-3}^{3}\underbrace{\left(\int_{-2\sqrt{1-\frac{y^2}{9}}}^{2\sqrt{1-\frac{y^2}{9}}}1dx\right)}_{\mathcal{I}(y)}dy\ \underset{\text{de integrare}}{\overset{x\text{ este var.}}{=}}\ \int_{-3}^{3}\left((x)\Big|_{x=-2\sqrt{1-\frac{y^2}{9}}}^{x=2\sqrt{1-\frac{y^2}{9}}}\right)dy=$$

$$=\int_{-3}^{3}\left(4\sqrt{1-\frac{y^2}{9}}\right)dy=\frac{4}{3}\int_{-3}^{3}\left(\sqrt{9-y^2}\right)dy\ \underset{\text{de integrare}}{\overset{y\text{ este var.}}{=}}\ \frac{4}{3}\left(y\sqrt{9-y^2}+9\arcsin\frac{y}{3}\right)\Big|_{y=-3}^{y=3}=$$

6π.

etapa 4. Se calculează integrala $\mathcal{I}$, aplicând Teorema de schimbare de "variabile".

Studiind forma integrantului şi forma domeniului ($\frac{x^2}{2^2}+\frac{y^2}{3^2}$ apare în ecuaţia curbei ce mărgineşte D), se face o schimbare de variabile legată de coordonate polare generalizate.

Fie (x,y) coordonatele carteziene a unui punct M din $D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\frac{x^2}{2^2}+\frac{y^2}{3^2}\le 1\right\}$. Fie coordonatele polare generalizate ale M :

$$\begin{cases}\rho=\text{parametru}\\ \theta=\mu\left(\overset{\frown}{Ox,OM}\right)\end{cases},\ \text{cu}\ \begin{cases}x=2\rho\cos\theta\\ y=3\rho\sin\theta\end{cases}$$

Se observă, având în vedere interpretarea geometrică, că

(x,y) parcurge $D\Leftrightarrow(\rho,\theta)$ parcurge D_s,

unde $D_s=\left\{(\rho,\theta)\in\mathbb{R}^2;0\le\rho\le 1,0\le\theta\le 2\pi\right\}=[0,1]\times[0,2\pi]$. Alături de reprezentarea domeniului D în xOy, se reprezintă D_s în $\rho O_s\theta$.

Se alege $F:D_s\subseteq\mathbb{R}^2\to D\subseteq\mathbb{R}^2, F(\rho,\theta)=\left(\underbrace{2\rho\cos\theta}_{x(\rho,\theta)},\underbrace{3\rho\sin\theta}_{y(\rho,\theta)}\right)$.

Se observă că F este difeomorfism pe $D_s\setminus\operatorname{Fr}D_s$, chiar dacă nu se ştie D_s, adică

-F este de clasă $\mathcal{C}^1$ pe $\mathbb{R}^2$ chiar, deci şi pe $D_s\setminus\operatorname{Fr}D_s$

-$\det J_F(\rho,\theta)=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial\rho}(\rho,\theta) & \frac{\partial x}{\partial\theta}(\rho,\theta)\\ \frac{\partial y}{\partial\rho}(\rho,\theta) & \frac{\partial y}{\partial\theta}(\rho,\theta)\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2\cos\theta & -2\rho\sin\theta\\ 3\cos\theta & 3\rho\cos\theta\end{vmatrix}=2\cdot 3\rho\ne 0,\forall(\rho,\theta)\in D_s\setminus\operatorname{Fr}D_s$.

Atunci F^{-1} duce bijectiv şi bicontinuu domeniul de integrare D în D_s, care este tot domeniu de integrare.

$\mathcal{I}=\iint_D 1dxdy=\iint_{D_s}1\left|2\cdot 3\rho\right|d\rho d\theta=6\iint_{D_s}\rho d\rho d\theta$

$D_s = \left\{(\rho,\theta) \in \mathbb{R}^2; 0 \le \rho \le 1, 0 \le \theta \le 2\pi\right\} = [0,1] \times [0,2\pi]$
este un dreptunghi cu interior, cu laturile paralele cu axele de coordonate $O_s u, O_s v$.

Folosind Teorema de reducere, a)$\Rightarrow$

$$\mathcal{I} = 6 \iint_{D_s} \rho d\rho d\theta = 6 \int_0^1 \underbrace{\left(\int_0^{2\pi} \rho d\theta\right)}_{\mathcal{I}(\rho)} d\rho \overset{\theta \text{ este var.}}{\underset{\text{de integrare}}{=}} 6 \int_0^1 \left.(\rho \cdot \theta)\right|_{\theta=0}^{\theta=2\pi} d\rho =$$

$$= 6 \int_0^1 \rho \cdot (2\pi)\, d\rho \overset{\rho \text{ este var.}}{\underset{\text{de integrare}}{=}} 12\pi \cdot \left.\frac{\rho^2}{2}\right|_{\rho=0}^{\rho=1} = 6\pi.$$

Modul cu Corolar a). aria $(D) = \iint_D 1 dxdy = \frac{1}{2} \int_{FrD} \left[-ydx + xdy\right].$

etapa 1. Se studiază curba

•Se parametrizează un reprezentant al curbei, deoarece aceasta nu este dată parametric.

$$\operatorname{Im}\gamma = \left[AB\overset{\frown}{A'}B'A\right] : \begin{cases} x(t) = 2\cos t \\ y(t) = 3\sin t \end{cases}, t \in [0,2\pi], \text{ adică}$$

$$\gamma : [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2, \gamma(t) = \left(\underbrace{2\cos t}_{x(t)}, \underbrace{3\sin t}_{y(t)}\right).$$

•Se studiază dacă γ este curbă netedă. Este, deoarece

$$\begin{cases} \exists \gamma' : [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2, \gamma'(t) = \left(\underbrace{-2\sin t}_{x'(t)}, \underbrace{3\cos t}_{y'(t)}\right). \\ \gamma'\text{- este continuă pe } [0,2\pi] \text{ şi } (x'(t))^2 + (y'(t))^2 \ne 0, \forall t \end{cases}$$

etapa 2. Se studiază forma diferenţială ω

$$\omega(x,y) = \underbrace{\frac{-y}{2}}_{P(x,y)} dx + \underbrace{\frac{x}{2}}_{Q(x,y)} dy.$$

Coeficienţii formei diferenţiale, $P, Q : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sunt câmpuri scalare continue cu $D = \mathbb{R}^2$ şi $\operatorname{Im}\gamma \subseteq D$.

etapa 3. Se determină $\mathcal{I} = \frac{1}{2} \int_\gamma (-y)\, dx + xdy$, aplicând Teorema de reducere, caz $n = 2$.

$$\begin{cases} x(t) = 2\cos t \\ y(t) = 3\sin t \end{cases}, t \in [0,2\pi] \Rightarrow \begin{cases} dx(t) = (-2\sin t)\, dt \\ dy(t) = (3\cos t)\, dt \end{cases}, t \in [0,2\pi].$$

$$\mathcal{I} = \frac{1}{2} \int_\gamma (-y)\, dx + xdy = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} ((-3\sin t)(-2\sin t) + (2\cos t)(3\cos t))\, dt =$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left(6\sin^2 t + 6\cos^2 t\right) dt = 6\pi.$$

Modul cu Corolar b). aria $(D) = \iint_D 1 dxdy = \int_{FrD} (0dx + xdy).$

etapa 1. Se studiază curba-ca la modul Corolar b)

etapa 2. Se studiază forma diferenţială ω

$$\omega(x,y) = \underbrace{0}_{P(x,y)} dx + \underbrace{x}_{Q(x,y)} dy.$$

Coeficienţii formei diferenţiale, $P, Q : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sunt câmpuri scalare continue cu $D = \mathbb{R}^2$ şi $\operatorname{Im}\gamma \subseteq D$.

etapa 3. Se determină $\mathcal{I} = \int_\gamma 0dx + xdy$, aplicând Teorema de reducere, caz $n = 2$.

$$\begin{cases} x(t) = 2\cos t \\ y(t) = 3\sin t \end{cases}, t \in [0,2\pi] \Rightarrow \begin{cases} dx(t) = (-2\sin t)\, dt \\ dy(t) = (3\cos t)\, dt \end{cases}, t \in [0,2\pi]$$

$$\mathcal{I} = \int_\gamma 0dx + xdy = \int_0^{2\pi} (0 + (2\cos t)(3\cos t))\, dt = \int_0^{2\pi} \left(6\cos^2 t\right) dt = 6\pi.$$

b) Fie $\mathcal{I} = \iint_D \left(\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9}\right) dxdy$

Modul cu integrala dublă direct.

etapa 1. Se studiază domeniul D-ca la **a)**.

etapa 2. Se studiază integrantul f.

$f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x,y) = \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9}$.

f este câmp scalar bine definit şi continuu pe D.

etapa 3. Se calculează integrala $\mathcal{I}$, aplicând T1.

modul 1. Se observă că D nu este dreptunghi cu interior, cu laturile paralele cu axele.-NU

modul 2. $D = D_y$ ca la **a)**, dar integralele ce apar de calculat din Teoremei de reducere, b) sunt greu de calculat.

modul 3. $D = D_x$ ca la **a)**, dar integralele ce apar de calculat din Teoremei de reducere, c) sunt greu de calculat.

etapa 4. Se calculează integrala $\mathcal{I}$, aplicând Teorema de schimbare de "variabile".

Studiind forma integrantului şi forma domeniului ($\frac{x^2}{2^2} + \frac{y^2}{3^2}$ apare atât în legea de asociere a lui f, cât şi în ecuaţia curbei ce mărgineşte D), se face o schimbare de variabile legată de coordonate polare generalizate. Se face schimbarea de coordonate de la **a)**$\Rightarrow$

$$\mathcal{I} = \iint_D \left(\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9}\right) dxdy = \iint_{D_s} \left(\frac{(\rho\cos\theta)^2}{4} + \frac{(\rho\cos\theta)^2}{9}\right) |2 \cdot 3\rho|\, d\rho d\theta = 6 \iint_{D_s} \rho^3 d\rho d\theta =$$

$$= 6 \int_0^1 \underbrace{\left(\int_0^{2\pi} \rho^3 d\theta\right)}_{\mathcal{I}(\rho)} d\rho \underset{\text{de integrare}}{\overset{\theta \text{ este var.}}{=}} 6 \int_0^1 \left(\rho^3 \cdot \theta\right)\Big|_{\theta=0}^{\theta=2\pi} d\rho = 6 \int_0^1 \rho^3 \cdot (2\pi)\, d\rho \underset{\text{de integrare}}{\overset{\rho \text{ este var.}}{=}}$$

$$= 12\pi \cdot \left.\frac{\rho^4}{4}\right|_{\rho=0}^{\rho=1} = 3\pi.$$

Modul cu Formula Riemann-Green aplicată în sens indirect.

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x,y)\right) dxdy = \int_{FrD} \left(P(x,y)\, dx + Q(x,y)\, dy\right). \text{ Aici}$$

$$\mathcal{I} = \iint_D \left(\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9}\right) dxdy = \iint_D \left(\frac{\partial}{\partial x}(?) - \frac{\partial}{\partial y}(?)\right) dxdy.$$

Se poate alege $P(x,y) = \dfrac{-1}{9} \cdot \dfrac{y^3}{3}$ şi $Q(x,y) = \dfrac{1}{4} \cdot \dfrac{x^3}{3}$.

Atunci

$$\mathcal{I} = \iint_D \left(\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9}\right) dxdy = \iint_D \left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x^3}{12}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{-y^3}{27}\right)\right) dxdy = \int_{FrD} \left(\left(\frac{-y^3}{27}\right) dx + \left(\frac{x^3}{12}\right) dy\right)$$

etapa 1. Se studiază curba-ca la **a)**.

etapa 2. Se studiază forma diferenţială ω

$$\omega(x,y) = \underbrace{\frac{-y^3}{27}}_{P(x,y)} dx + \underbrace{\frac{x^3}{12}}_{Q(x,y)} dy.$$

Coeficienţii formei diferenţiale, $P, Q : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sunt câmpuri scalare continue cu $D = \mathbb{R}^2$ şi $\operatorname{Im}\gamma \subseteq D$.

etapa 3. Se determină $\mathcal{I} = \int_\gamma \left(\left(\dfrac{-y^3}{27}\right) dx + \left(\dfrac{x^3}{12}\right) dy\right)$, aplicând Teorema de reducere, caz $n = 2$.

$$\left\{\begin{array}{l} x(t) = 2\cos t \\ y(t) = 3\sin t \end{array}\right., t \in [0, 2\pi] \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} dx(t) = (-2\sin t)\, dt \\ dy(t) = (3\cos t)\, dt \end{array}\right., t \in [0, 2\pi].$$

$$\mathcal{I} = \int_\gamma (-y)\, dx + x dy = \int_0^{2\pi} \left(\left(\frac{-(3\sin t)^3}{27} \right) (-2\sin t) + \left(\frac{(2\cos t)^3}{12} \right) (3\cos t) \right) dt =$$
$$= \int_0^{2\pi} \left(2\sin^4 t + 2\cos^4 t \right) dt = 3\pi.$$