CURS NR. 3
Analiză matematică, AIA

1.4. Serii de numere reale

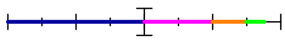
Peste tot în această secţiune fie $m \in \mathbb{N}$ un număr natural fixat şi
$\mathbb{N}_m = \{m, m+1, ..., n, ...\}$ ($\mathbb{N}_0 = \mathbb{N}$ şi $\mathbb{N}_1 = \mathbb{N}^*$).

Definiţia 1.4.1. Fie
$(x_n)_{n\in\mathbb{N}_m} : x_m, x_{m+1}, ..., x_n, ...$
un şir de numere reale. Acestui şir i se ataşează *şirul sumelor parţiale*
$(s_n)_{n\in\mathbb{N}_m} : \underbrace{x_m}_{s_m}, \underbrace{x_m + x_{m+1}}_{s_{m+1}}, ..., \underbrace{x_m + x_{m+1} + ... + x_n}_{s_n}, ...$
cu termenul general
$$s_n = \sum_{k=m}^{n} x_k, \forall n \in \mathbb{N}_m.$$
a) Se numeşte *serie de numere reale, cu termenul general* x_n, perechea de şiruri $\left((x_n)_{n\in\mathbb{N}_m}, (s_n)_{n\in\mathbb{N}_m}\right)$.
b) Seria de numere reale cu termenul general x_n se numeşte *convergentă* dacă şirul sumelor parţiale $(s_n)_{n\in\mathbb{N}_m}$ este convergent şi *divergentă* dacă şirul sumelor parţiale $(s_n)_{n\in\mathbb{N}_m}$ este divergent.
c) Seria de numere reale cu termenul general x_n are *suma* s dacă $\exists \lim_{n\to\infty} s_n = s \in \overline{\mathbb{R}}$. În acest caz se scrie
$$x_m + x_{m+1} + ... + x_n + ... = s \text{ sau } \sum_{n=m}^{\infty} x_n = s.$$

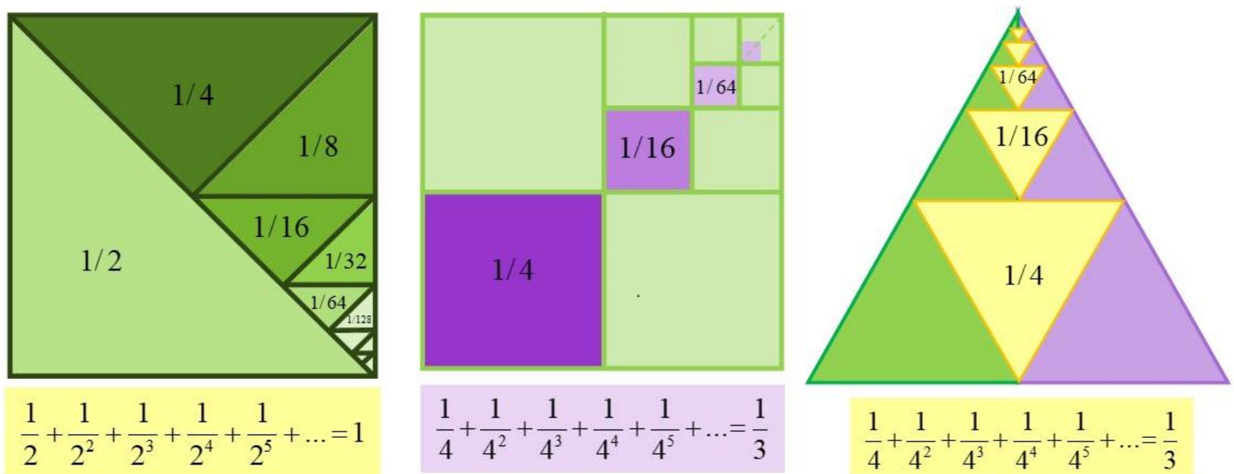
Convenţie. Se notează seria de numere reale cu termenul general x_n cu $\sum\limits_{n=m}^{\infty} x_n$.

Exemplul 1.4.1. Să se studieze, utilizând definiţia, natura şi suma următoarelor serii de numere reale:
a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$;
Termenul general al seriei este:
$x_n = \frac{1}{2^n}, \forall n \in \mathbb{N}^*$, adică
$(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*} : \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, ..., \underbrace{\frac{1}{2^n}}_{x_n}, ...$
Şirul sumelor parţiale are termenul general:
$s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k}, \forall n \in \mathbb{N}^*$, adică
$(s_n)_{n\in\mathbb{N}^*} : \frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \frac{1}{4}, \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}, ..., \underbrace{\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + ... + \frac{1}{2^n}}_{s_n}, ...$
Se determină limita şirului $(s_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, dacă există:
$s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} = \sum\limits_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1}{2}\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n - 1}{\frac{1}{2} - 1} = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n \Rightarrow$
$\lim\limits_{n\to\infty} s_n = 1 \in \mathbb{R}.$
Atunci seria este convergentă şi are suma $s = 1$. Se scrie

$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1}$, adică $\boxed{\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + ... + \frac{1}{2^n} + ... = 1.}$



A se urmări documentarul în patru părţi "Istoria Matematicii", produs de BBC, comentat de **Marcus du Sautoy**, profesor de matematică la Universitatea Oxford din Marea Britanie. Acolo distanţa unitate este parcursă de un matematician indian din Kerala cu barca, întâi jumătate, apoi jumătate din jumătate ş.a.m.d. Pe unele platforme de matematică distractivă apar şi interpretări ale sumelor de serii legate de arii.



Iniţiator în teoria seriilor ar fi fost matematicianul grec Arhimede, care a calculat aria subgraficului unui arc de parabolă prin însumarea unei serii infinite (astăzi integrala) şi care a dat o aproximare remarcabilă pentru π. Matematicienii indieni din Kerala au studiat seriile infinite, în jurul anului 1350. Începând din secolul al $XVII$-lea, James Gregory, Brook Taylor şi Leonhard Euler au dezvoltat teoria.

b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)}$;

Termenul general al seriei este

$x_n = \frac{1}{(n+1)(n+2)}, \forall n \in \mathbb{N}$, adică

$(x_n)_{n\in\mathbb{N}} : \frac{1}{1\cdot 2}, \frac{1}{2\cdot 3}, \frac{1}{3\cdot 4}, ..., \underbrace{\frac{1}{(n+1)(n+2)}}_{x_n}, ...$

Şirul sumelor parţiale are termenul general:

$s_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k+1)(k+2)}, \forall n \in \mathbb{N}$, adică

$(s_n)_{n\in\mathbb{N}} : \frac{1}{1\cdot 2}, \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3}, \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4}, ..., \underbrace{\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + ... + \frac{1}{(n+1)(n+2)}}_{s_n}, ...$

Se determină limita şirului $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$, dacă există:

$s_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2}\right) \overset{\text{operaţii algebrice}}{\underset{\text{cu sume finite}}{=}} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+2} =$
$= \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n+1}\right) - \left(\frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2}\right) = 1 - \frac{1}{n+2} \Rightarrow$
$\lim_{n\to\infty} s_n = 1 \in \mathbb{R}$.

Atunci seria este convergentă şi are suma $s = 1$. Se scrie

$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)} = 1}$, adică $\boxed{\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + ... + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + ... = 1.}$

<u>Comentariu.</u> Conform c), se observă că:

$$\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)}}_{(C),=1} \neq \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1}}_{(D),=\infty} - \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+2}}_{(D),=\infty}$$

Operaţiile algebrice cu serii sunt precizate în Teorema 1.4.1 şi posibil de efectuat între serii convergente sau care au sume pentru care, în urma adunării, conduc la determinare.

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$;

Termenul general al seriei este:

$x_n = \frac{1}{n}, \forall n \in \mathbb{N}^*$, adică

$(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*} : \frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ..., \underbrace{\frac{1}{n}}_{x_n}, ...$.

Şirul sumelor parţiale are termenul general:

$s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}, \forall n \in \mathbb{N}^*$, adică

$(s_n)_{n\in\mathbb{N}^*} : \frac{1}{1}, \frac{1}{1} + \frac{1}{2}, \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}, ..., \underbrace{\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n}}_{s_n}, ...$.

Se determină limita şirului $(s_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$. La "Şiruri Cauhy" s-a demonstrat că şirul $(s_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ nu este şir Cauhy, deci este divergent. Deoarece este strict crescător$\Rightarrow$

$\lim_{n\to\infty} s_n = \infty \Rightarrow$

seria este divergentă şi are suma $s = \infty$. Se scrie

$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty}$, adică $\boxed{\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n} + ... = \infty.}$

Seria se numeşte *serie armonică*, deoarece fiecare termen, începând cu al doilea, este media armonică a termenilor vecini.

Curiozitate amuzantă: "Un matematician organizează o loterie în care câştigul este o sumă infinită de bani. Precizează că metoda de ridicare a câştigului de către "fericit" este: 1€ în prima săptămână de la câştig, $\frac{1}{2}$€ în a doua săptămână, $\frac{1}{3}$€ în a treia săptămână ş.a.m.d. Câştigătorul nu va trăi mai mult de încă 100 de ani, adică 5200 de săptămâni, adică va ridica doar s_{5200}€, $\sum\limits_{n=1}^{5200}\frac{1}{n}=9.1337$€ şi nu un câştig infinit! Matematicianul este cel care câştigă în urma organizării loteriei!"

$\sum\limits_{n=1}^{5200}\frac{1}{n}=9.133\,7$ şi $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=\infty$ cu Scientific WorkPlace

S-ar putea raţiona că suma seriei armonice ar fi un număr finit, deoarece, pe măsură ce se adaugă din ce în ce mai mulţi termeni, se adugă din ce în ce mai puţin la total. Şi printr-un program implementat pe un anumit calculator s-ar putea obţine o sumă finită. Calculatoarele mai vechi gestionau numere până la o anumită dimensiune, 10^{100}, şi considerau $\frac{1}{10^{100}+1}\simeq 0$. Un asfel de calculator spunea că suma seriei armonice ar fi $\sum\limits_{n=1}^{10^{100}}\frac{1}{n}=230.84$, dacă programul era lăsat să ruleze suficient de mult. Cu toate acestea, seria armonică diverge- suma creşte fără a fi mărginită, rezultat demonstrat în urmă cu 600 de ani de un matematician francez medieval, Nichole Oresme. Din acest motiv, în aproximarea sumelor de serii numerice folosind programe pe calculator, se studiază întâi convergenţa seriei (folosind criterii, de exemplu), apoi se rulează programul. Astăzi, programe-interfeţe precum Scientific WorkPlace afişează $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=\infty$ instantaneu.

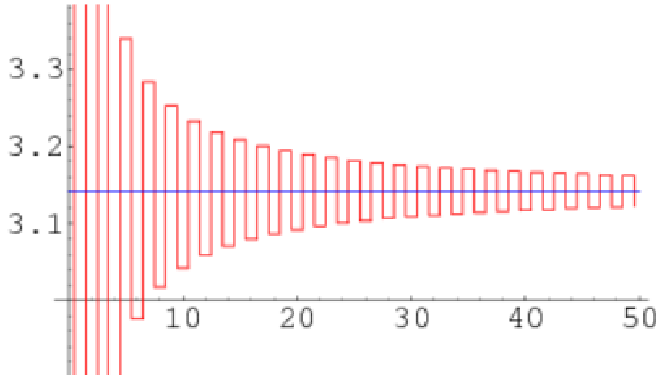
Numele provine de la greci. Pitagora a studiat notele emise de corzi ciupite (analog clape) la diferite lungimi. A constatat armonie în legătură cu notele emise la lungimile $1,\frac{1}{2},\frac{1}{3}$ care sunt în medie armonică $\frac{2}{\frac{1}{1}+\frac{1}{\frac{1}{3}}}=\frac{1}{2}$. Aceste note sunt fundamentale pentru teoria pitagoreică a armoniei, legată de lungimile de coardă, de cvinta perfectă şi de octave. Tot Pitagora a denumit cubul cu 6 vârfuri, 8 feţe şi 12 muchii, precum şi octaedrul cu 6 feţe, 8 vârfuri şi 12 muchii "corpuri armonice", deoarece $\frac{2}{\frac{1}{6}+\frac{1}{12}}=8$.

Seria armonică este cea care este utilizată şi pentru a răspunde câte căderi record de ploaie au avut loc în ultimii 100 de ani, de când sunt înregistrări meteorologice; şi în studiul blocajelor în trafic; şi în testarea rezistenţei la ruperea grinzilor de lemn; şi în amestecarea aleatoare a cărţilor de joc într-un cazino sau într-un joc pe calculator; şi în transferul de combustibil de la un jeep la altul pentru a traversa deşertul. A se vedea "In perfect harmony", de John H. Webb, pe

https://plus.maths.org/content/perfect-harmony

Unele serii armonice generalizate sau alternante generalizate au sume finite. Gregory şi Taylor au arătat că

$\boxed{4\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}=\pi.}$ (utilizată pentru scrierea numărului π cu un număr mare de zecimale exacte înainte de era calculatorului; a se vedea şi https://ro.wikipedia.org/wiki/Pi)



Sunt şi alte serii armonice cu sume finite

$\boxed{\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}=\dfrac{\pi^2}{6},}$ şi $\boxed{\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{n}=\ln 2,}$

ale căror sume se vor descoperi folosind serii Fourier, respectiv serii Taylor.

d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln\dfrac{n+1}{n}$;

Termenul general al seriei este:

$x_n=\ln\frac{n+1}{n}, \forall n\in\mathbb{N}^*$.

Şirul sumelor parţiale are termenul general:

$s_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\ln\frac{k+1}{k}, \forall n\in\mathbb{N}^*$.

Se determină limita şirului $(s_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, dacă există:

$$s_n=\sum_{k=1}^{n}\ln\frac{k+1}{k}=\sum_{k=1}^{n}(\ln(k+1)-\ln(k))\underset{\text{cu sume finite}}{\overset{\text{operaţii algebrice}}{=}}\sum_{k=1}^{n}\ln(k+1)-\sum_{k=1}^{n}\ln(k)=$$
$$=(\ln 2+...+\ln n+\ln(n+1))-(\ln 1+\ln 2+...+\ln n)=\ln(n+1)-\ln 1\Rightarrow$$
$$\lim_{n\to\infty}s_n=+\infty.$$

Atunci seria este divergentă şi are suma $s=+\infty$. Se scrie

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln\frac{n+1}{n}=+\infty$.

e) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n$;

Termenul general al seriei este:

$x_n=(-1)^n, \forall n\in\mathbb{N}^*$.

Şirul sumelor parţiale are termenul general:

$s_n=\sum\limits_{k=1}^{n}(-1)^k, \forall n\in\mathbb{N}^*$.

Se determină limita şirului $(s_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, dacă există:

$$s_n=\sum_{k=1}^{n}(-1)^k=\begin{cases}0, & \text{dacă } n=2\widetilde{k};\widetilde{k}\in\mathbb{N}^*\\ -1, & \text{dacă } n=2\widetilde{k}+1;\widetilde{k}\in\mathbb{N}\end{cases}\Rightarrow$$
$$\nexists\lim_{n\to\infty}s_n.$$

Atunci seria este divergentă şi nu are sumă.

Seria geometrică. Fie $q \in \mathbb{R}$. Seria geometrică $\sum\limits_{n=m}^{\infty} q^n$ este

$$\boxed{\begin{cases} \text{convergentă, cu suma } s = q^m \frac{1}{1-q}, & \text{dacă } q \in \left]-1,1\right[\\ \text{divergentă, cu suma } s = +\infty, & \text{dacă } q \in \left[1,+\infty\right[\\ \text{divergentă şi nu are sumă,} & \text{dacă } q \in \left]-\infty,-1\right]. \end{cases}}$$

Pentru $m = 0$, convenţia este să se noteze $1 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} q^n$, adică

$$\boxed{1 + \sum_{n=1}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}, \text{ dacă } q \in \left]-1,1\right[} \text{ sau } \boxed{1 + q + q^2 + ... + q^n + ... = \frac{1}{1-q}, \text{ dacă } q \in \left]-1,1\right[}$$

Demonstraţie. Fie $q \in \mathbb{R}$.
Termenul general al seriei este

$x_n = q^n, \forall n \in \mathbb{N}_m$, adică

$(x_n)_{n\in\mathbb{N}_m} : q^m, q^{m+1}, ..., \underbrace{q^n}_{x_n}, ...$

Şirul sumelor parţiale are termenul general

$s_n = \sum\limits_{k=m}^{n} q^k, \forall n \in \mathbb{N}_m$, adică

$(s_n)_{n\in\mathbb{N}_m} : q^m, q^m + q^{m+1}, q^m + q^{m+1}, ..., \underbrace{q^m + q^{m+1} + ... + q^n}_{s_n}, ...$

Se determină limita şirului $(s_n)_{n\in\mathbb{N}_m}$, dacă există

$$s_n = \sum_{k=m}^{n} q^k = \begin{cases} q^m \frac{q^{n-m+1}-1}{q-1}, & \text{dacă } q \in \mathbb{R}\setminus\{1\} \\ n - m + 1, & \text{dacă } q = 1. \end{cases}$$

Deoarece

$$\lim_{n\to\infty} q^n = \begin{cases} 0, & \text{dacă } q \in \left]-1,1\right[\\ 1 & \text{dacă } q = 1 \\ +\infty & \text{dacă } q \in \left]1,+\infty\right[\\ \nexists & \text{dacă } q \in \left]-\infty,-1\right] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{dacă } q \in \left]-1,1\right[, \text{ atunci } \exists \lim\limits_{n\to\infty} s_n = q^m \frac{1}{1-q} \\ \text{dacă } q = 1, \text{ atunci } \exists \lim\limits_{n\to\infty} s_n = +\infty \\ \text{dacă } q \in \left]1,+\infty\right[, \text{ atunci } \exists \lim\limits_{n\to\infty} s_n = +\infty \\ \text{dacă } q \in \left]-\infty,-1\right], \text{ atunci } \nexists \lim\limits_{n\to\infty} s_n. \end{cases}$$

Exemple. $q = -\frac{1}{2}, m = 0$. Seria geometrică $1 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n$ este (C) şi

$$1 + \frac{-1}{2} + \frac{1}{4} + ... + \frac{(-1)^n}{2^n} + ... = \frac{1}{1 - \frac{-1}{2}}.$$

$q = \frac{\pi}{2}, m = 0$. Seria geometrică $1 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\pi}{2}\right)^n$ este (D) şi

$$1 + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi^2}{4} + ... + \frac{\pi^n}{2^n} + ... = +\infty.$$

$q = -\sqrt{2}, m = 0$. Seria geometrică $1 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(-\sqrt{2}\right)^n$ este (D) şi nu are sumă.

Exemple. Folosind seria geometrică, să se scrie $0,0\,(2)$ ca fracţie.

Se observă că

$$0,0\,(2) = 0,02 + 0,002 + 0,0002 + ...0,\underbrace{00...0}_{n \text{ zerouri}}2 + ...,$$

adică se poate scrie ca suma unei serii geometrice cu raţia $q = 0,1$ şi primul termen $x_1 = 0,02$. Atunci

$$0,0\,(2) = 0,02 \cdot \frac{1}{1-0,1} = \frac{2}{90}.$$

Teorema 1.4.1.(**operaţii algebrice cu serii convergente**) Fie $\sum\limits_{n=m}^{\infty} x_n$ şi $\sum\limits_{n=m}^{\infty} y_n$ două serii de numere reale şi $\alpha \in \mathbb{R}$. Dacă seriile $\sum\limits_{n=m}^{\infty} x_n$ şi $\sum\limits_{n=m}^{\infty} y_n$ sunt convergente atunci seriile $\sum\limits_{n=m}^{\infty} (x_n + y_n)$ şi $\sum\limits_{n=m}^{\infty} \alpha\,(x_n)$ sunt convergente. În acest caz

$$\sum_{n=m}^{\infty} (x_n + y_n) = \sum_{n=m}^{\infty} x_n + \sum_{n=m}^{\infty} y_n \text{ şi } \sum_{n=m}^{\infty} \alpha\,(x_n) = \alpha \sum_{n=m}^{\infty} x_n.$$

Propoziţia 1.4.1. Dacă se schimbă ordinea unui număr finit de termeni ai unei serii de numere reale, atunci se obţine o nouă serie de numere reale, care are aceeaşi natură (convergentă sau divergentă) cu seria iniţială. În caz de convergenţă, suma noii serii este egală cu suma seriei iniţiale.

Dacă se schimbă ordinea unui număr infinit de termeni, rezultatul anterior nu se mai păstrează.

Propoziţia 1.4.2. Dacă se adăugă / se suprimă un număr finit de termeni ai unei serii de numere reale, atunci se obţine o nouă serie de numere reale, care are aceeaşi natură (convergentă sau divergentă) cu seria iniţială. În caz de convergenţă, suma noii serii este egală cu suma seriei iniţiale la care se adună / se scade suma termenilor adăugaţi / suprimaţi.

Observaţia 1.4.1. Există serii pentru care şirul sumelor parţiale nu poate fi exprimat fară simbolul $\sum$ sau pentru care $\lim\limits_{n\to\infty} s_n$ nu poate fi determinată prin metode elementare. Se va studia natura acestor serii utilizând criterii (criteriile oferă natura, dar nu şi suma seriei).

○**Teorema 1.4.2**. (**Criteriul general CNS al lui Cauchy pentru serii**). Seria de numere reale $\sum\limits_{n=m}^{\infty} x_n$ este convergentă dacă şi numai dacă

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}_m \text{ astfel încât } \forall p \in \mathbb{N}^*, \forall n \in \mathbb{N}_m, n \geq n_\varepsilon \Rightarrow |x_{n+1} + ... + x_{n+p}| < \varepsilon.$$

Teorema 1.4.3.

a) CN de convergenţă. Dacă seria de numere reale $\sum\limits_{n=m}^{\infty} x_n$ este convergentă, atunci $\exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$. Reciproc nu.

b) CS de divergenţă. Dacă $\nexists \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ sau $\exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n \neq 0$, atunci seria de numere reale $\sum\limits_{n=m}^{\infty} x_n$ este divergentă. Reciproc nu.

Obervaţia 1.4.2. La Exemplul 1.4.1, punctul c) cu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln \frac{n+1}{n}$ se observă că $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$, dar seria este divegentă. Condiţia $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ este numai condiţie necesară de convergenţă, nu şi suficientă.

Exemplul 1.4.2. Să se studieze natura seriei

a) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{1+(-1)^n}{2}$;

Termenul general al seriei este:

$x_n = \frac{1+(-1)^n}{2}, \forall n \in \mathbb{N}.$

$$x_n = \begin{cases} 1, & \text{dacă } n = 2\widetilde{k}; \widetilde{k} \in \mathbb{N} \\ 0, & \text{dacă } n = 2\widetilde{k}+1; \widetilde{k} \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Cum $\nexists \lim\limits_{n\to\infty} x_n (\neq 0) \overset{\text{CS de divergenţă}}{\Rightarrow}$ seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1+(-1)^n}{2}$ este divergentă.

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \pi^n \cdot \dfrac{1}{e^n+1}$;

Termenul general al seriei este:

$x_n = \pi^n \cdot \frac{1}{e^n+1}, \forall n \in \mathbb{N}^*.$

Şirul sumelor parţiale este:

$s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \pi^k \cdot \frac{1}{e^k+1}, \forall n \in \mathbb{N}^*.$

Nu se poate exprima s_n fără simbolul $\sum \Rightarrow$nu se va aplica definiţia în studiul convergenţei seriei.

Cum $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} \pi^n \cdot \frac{1}{e^n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{\pi}{e}\right)^n \cdot \dfrac{1}{1+\frac{1}{e^n}} = +\infty \neq 0 \overset{\text{CS de divergenţă}}{\Rightarrow}$

seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \pi^n \cdot \frac{1}{e^n+1}$ este divergentă.

Definiţia 1.4.2. Seria de numere reale $\sum\limits_{n=m}^{\infty} x_n$ se numeşte *serie cu termeni pozitivi* (*cu termeni strict pozitivi*) dacă

$x_n \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}_m (x_n \gneqq 0, \forall n \in \mathbb{N}_m).$

Definiţia 1.4.3. Seria de numere reale $\sum\limits_{n=m}^{\infty} x_n$ se numeşte *absolut convergentă* dacă seria $\sum\limits_{n=m}^{\infty} |x_n|$ este convergentă.

Teorema 1.4.4. Dacă seria de numere reale $\sum\limits_{n=m}^{\infty} x_n$ este absolut convergentă atunci este convergentă.

Definiţia 1.4.4. Seria de numere reale $\sum\limits_{n=m}^{\infty} x_n$ se numeşte *semiconvergentă* dacă este convergentă şi nu este absolut convergentă.

Obervaţia 1.4.3. Se vor enunţa criterii pentru serii cu termeni pozitivi (chiar strict pozitivi). Dacă o serie de numere reale $\sum\limits_{n=m}^{\infty} x_n$ este cu termeni oarecare, atunci se ataşează seria modulelor $\sum\limits_{n=m}^{\infty} |x_n|$, care este o serie cu termeni pozitivi. Se aplică criteriile seriei $\sum\limits_{n=m}^{\infty} |x_n|$, şi, în caz că se obţine convergenţă, se deduce că seria cu termeni oarecare $\sum\limits_{n=m}^{\infty} x_n$ este absolut convergentă.

○**Teorema 1.4.4**. (**Criteriul monotoniei, CNS**). Fie seria de numere reale $\sum\limits_{n=m}^{\infty} x_n$ cu termeni pozitivi, $x_n \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}_m$. Seria este convergentă dacă şi numai dacă şirul sumelor parţiale $(s_n)_{n\in\mathbb{N}_m}$ este mărginit superior

(de menţionat că dacă seria este cu termeni pozitivi, atunci şirul sumelor parţiale este un şir cu termeni pozitivi şi monoton crescător).

Teorema 1.4.5. (**Criteriul comparaţiei cu inegalităţi, CS**). Fie seriile de numere reale $\sum\limits_{n=m}^{\infty} x_n$ şi $\sum\limits_{n=m}^{\infty} y_n$, cu termeni pozitivi.

a) Dacă

$$\underbrace{0 \leq}_{\text{în plus}} x_n \leq y_n, \forall n \in \mathbb{N}_m,$$

şi dacă seria $\sum\limits_{n=m}^{\infty} y_n$ este convergentă, atunci seria $\sum\limits_{n=m}^{\infty} x_n$ este convergentă.

b) Dacă

$$0 \leq y_n \leq x_n, \forall n \in \mathbb{N}_m$$

şi dacă seria $\sum\limits_{n=m}^{\infty} y_n$ este divergentă, atunci seria $\sum\limits_{n=m}^{\infty} x_n$ este divergentă.

○**Teorema 1.4.5′**. (**Criteriul comparaţiei cu raport, CS**). Fie seriile de numere reale $\sum\limits_{n=m}^{\infty} x_n$ şi $\sum\limits_{n=m}^{\infty} y_n$, cu termeni strict pozitivi.

a) Dacă

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} \leq \frac{y_{n+1}}{y_n}, \forall n \in \mathbb{N}_m,$$

şi dacă seria $\sum\limits_{n=m}^{\infty} y_n$ este convergentă atunci seria $\sum\limits_{n=m}^{\infty} x_n$ este convergentă.

b) Dacă

$$\frac{y_{n+1}}{y_n} \geq \frac{x_{n+1}}{x_n}, \forall n \in \mathbb{N}_m$$

şi dacă seria $\sum\limits_{n=m}^{\infty} y_n$ este divergentă atunci seria $\sum\limits_{n=m}^{\infty} x_n$ este divergentă.

Seria armonică generalizată. Fie $\alpha \in \mathbb{R}$. Seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ este divergentă dacă $\alpha \leq 1$ şi convergentă (chiar absolut convergentă) dacă $\alpha > 1$.

○**Demonstraţie.** Fie $\alpha \in \mathbb{R}$. Termenul general al seriei este

$$x_n = \frac{1}{n^\alpha}, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Şirul sumelor parţiale are termenul general

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha}, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Nu se poate exprima s_n fără simbolul $\sum$ $\Rightarrow$nu se va aplica definiţia în studiul convergenţei seriei.

•Cum $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^\alpha} = \begin{cases} +\infty, & \text{dacă } \alpha < 0, \\ 0, & \text{dacă } \alpha > 0, \\ 1, & \text{dacă } \alpha = 0. \end{cases}$

$\overset{\text{CS de divergenţă}}{\Rightarrow}$Seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ este divergentă pentru $\alpha \leq 0$.

•Rămâne să se studieze natura seriei pentru $\alpha > 0$.

$-$Pentru $\boxed{\alpha = 1}$ **seria armonică** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ este divergentă deoarece şirul sumelor parţiale este divergent (a se vedea Exemplul 1.4.1, c)) sau direct, cu Criteriul Cauchy de la serii.
$-$Pentru $\boxed{0 < \alpha < 1} \Rightarrow n^{\alpha} < n, \forall n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow \frac{1}{n^{\alpha}} > \frac{1}{n}, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Se aplică criteriul comparaţiei cu seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ şi rezultă că seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^{\alpha}}$ este divergentă.
$-$Pentru $\boxed{\alpha > 1,}$ se utilizează că

•Şirul $(s_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este şir monoton crescător, deoarece
$s_{n+1} - s_n = \frac{1}{(n+1)^{\alpha}} > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$.Atunci $s_n \leq s_{2^n}, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

•Se arată că şirul $(s_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este şir mărginit. Într-adevăr

$$0 < s_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^{\alpha}} \leq s_{2^n} = 1 + \tfrac{1}{2^{\alpha}} + \underbrace{\left(\frac{1}{3^{\alpha}} + \frac{1}{4^{\alpha}}\right)}_{2 \text{ termeni}} +$$
$$+ \underbrace{\left(\frac{1}{5^{\alpha}} + \frac{1}{6^{\alpha}} + \frac{1}{7^{\alpha}} + \frac{1}{8^{\alpha}}\right)}_{2^2 \text{ termeni}} + \ldots + \underbrace{\left(\frac{1}{(2^{n-1}+1)^{\alpha}} + \ldots + \frac{1}{(2^{n-1}+2^{n-1})^{\alpha}}\right)}_{2^{n-1}\text{ termeni}} <$$
$$< 1 + \tfrac{1}{2^{\alpha}} + 2\cdot\tfrac{1}{2^{\alpha}} + 4\cdot\tfrac{1}{4^{\alpha}} + \ldots + 2^{n-1}\cdot\tfrac{1}{(2^{n-1})^{\alpha}} = 1 + \tfrac{1}{2^{\alpha}} + \tfrac{1}{2^{\alpha-1}} + \tfrac{1}{(2^2)^{\alpha-1}} + \ldots + \tfrac{1}{(2^{n-1})^{\alpha-1}} =$$
$$= 1 + \tfrac{1}{2^{\alpha}} + \left(\tfrac{1}{2^{\alpha-1}} + \tfrac{1}{(2^{\alpha-1})^2} + \ldots + \tfrac{1}{(2^{\alpha-1})^{n-1}}\right) = 1 + \tfrac{1}{2^{\alpha}} + \tfrac{1}{2^{\alpha-1}}\cdot\frac{1-\frac{1}{(2^{\alpha-1})^{n-1}}}{1-\frac{1}{2^{\alpha-1}}} <$$
$$< 1 + \tfrac{1}{2^{\alpha}} + \tfrac{1}{2^{\alpha-1}}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{2^{\alpha-1}}}, \forall n \in \mathbb{N}^*$$

$\Rightarrow$ şirul $(s_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este mărginit.

•Deoarece şirul $(s_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este monoton crescător şi mărginit, rezultă că este convergent$\Rightarrow$pentru $\alpha > 1$, seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^{\alpha}}$ este convergentă.

Exemple. Fie $\alpha = 1$. Seria armonică
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} \;/\; 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots \text{este } (D).$$
Fie $\alpha = -\frac{3}{2}$. Seria armonică generalizată
$$\sum_{n=1}^{\infty} n\sqrt{n} \;/\; 1 + 2\sqrt{2} + 3\sqrt{3} + \ldots + n\sqrt{n} + \ldots \text{este } (D).$$
Fie $\alpha = \frac{1}{2}$. Seria armonică generalizată
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}} \;/\; 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} + \ldots \text{este } (D).$$
Fie $\alpha = \frac{3}{2}$. Seria armonică generalizată
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{n}} \;/\; 1 + \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{n\sqrt{n}} + \ldots \text{este } (AC).$$
Fie $\alpha = 2$. Seria armonică generalizată
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} \;/\; 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} + \ldots \text{este } (AC).$$

Exemplul 1.4.3. Să se studieze natura următoarelor serii de numere reale

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3+n^2+n+1}$;

Etapa 1. Se studiază dacă $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

Termenul general al seriei este

$x_n = \frac{1}{n^3+n^2+n+1}, \forall n \in \mathbb{N}^*$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0 \Rightarrow$seria *poate fi* convergentă.

Etapa 2. Se studiază natura şi suma seriei cu definiţia.

Şirul sumelor parţiale este

$s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k^3+k^2+k+1}, \forall n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow$

Nu se va aplica definiţia în studiul convergenţei seriei.

Etapa 3. Se studiază natura seriei aplicând criterii.

•Criteriul comparaţiei cu inegalităţi. Deoarece şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ are termeni pozitivi şi

$$\left.\begin{array}{l} 0 \lneqq \frac{1}{n^3+n^2+n+1} \leq \frac{1}{n^3}, \forall n \in \mathbb{N}^*. \\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} \text{ este serie convergentă} \\ \qquad \text{ca şi serie armonică cu } \alpha = 7 > 1 \end{array}\right\} \overset{\text{C. comparaţiei}}{\Rightarrow} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3+n^2+n+1} \text{ este serie convergentă.}$$

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n\sqrt{n+1}}$;

Etapa 1. Se studiază dacă $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

Termenul general al seriei este

$x_n = \frac{1}{2^n\sqrt{n+1}}, \forall n \in \mathbb{N}^*$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0 \Rightarrow$seria *poate fi* convergentă.

Etapa 2. Se studiază natura seriei şi suma ei cu definiţia. Şirul sumelor parţiale este

$s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k\sqrt{k+1}}, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Nu se va aplica definiţia în studiul convergenţei seriei.

Etapa 3. Se studiază natura seriei aplicând criterii.

○modul 1. Criteriul Cauchy pentru serii. Se verifică dacă

$\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $\forall p \in \mathbb{N}^*, \forall n \in \mathbb{N}^*, n \geq n_\varepsilon \Rightarrow |x_{n+1} + ... + x_{n+p}| < \varepsilon$.

Fie $\forall \varepsilon > 0$. Se caută $n_\varepsilon \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $\forall p \in \mathbb{N}^*, \forall n \in \mathbb{N}^*, n \geq n_\varepsilon \Rightarrow$

$$|x_{n+1} + ... + x_{n+p}| = \left|\frac{1}{2^{n+1}\sqrt{n+2}} + ... + \frac{1}{2^{n+p}\sqrt{n+p+1}}\right| = \frac{1}{2^{n+1}} \cdot \frac{1}{\sqrt{n+2}} + ... + \frac{1}{2^{n+p}} \cdot \frac{1}{\sqrt{n+p+1}} \leq$$

$$\leq \frac{1}{2^{n+1}} \cdot 1 + ... + \frac{1}{2^{n+p}} \cdot 1 = \frac{1}{2^{n+1}} + ... + \frac{1}{2^{n+p}} = \frac{1}{2^{n+1}} \cdot \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^p - 1}{\frac{1}{2} - 1} = \frac{1}{2^n}\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^p\right) <$$

$$\overset{\text{scăpăm de } p, \text{ rămâne } n}{<} \frac{1}{2^n} \cdot 1 < \varepsilon,$$

adică $\frac{1}{2^n} < \varepsilon \Leftrightarrow n > \frac{\ln\frac{1}{\varepsilon}}{\ln 2}$. Se găseşte $n_\varepsilon = \left[\frac{\ln\frac{1}{\varepsilon}}{\ln 2}\right] + 1$.

$\Rightarrow$este verificat Criteriul Cauchy$\Rightarrow$seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n\sqrt{n+1}}$ este convergentă.

modul 2. Criteriul comparaţiei cu inegalităţi. Deoarece şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ are termeni pozitivi,

Se încearcă:

$$\left.\begin{array}{l} 0 \lneqq \frac{1}{2^n\sqrt{n+1}} \le \frac{1}{\sqrt{n+1}} < \frac{1}{\sqrt{n}}, \forall n \in \mathbb{N}^*. \\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \text{ este serie divergentă} \\ \quad \text{ca şi serie armonică cu } \alpha = \frac{1}{2}. \end{array}\right\} \overset{\text{C. comparaţiei}}{\Rightarrow}$$ nu se poate afirma dacă seria este convergentă sau divergentă.

Se încearcă:

$$\left.\begin{array}{l} 0 \lneqq \frac{1}{2^n\sqrt{n+1}} \le \frac{1}{2^n}, \forall n \in \mathbb{N}^*. \\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n \text{ este serie convergentă} \\ \quad \text{ca şi serie geometrică cu } q = \frac{1}{2} \in \left]-1, 1\right[\end{array}\right\} \overset{\text{C. comparaţiei}}{\Rightarrow} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n\sqrt{n+1}} \text{ este serie convergentă.}$$

c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5^n} \cos n^n$;

Etapa 1. Se studiază dacă $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

Termenul general al seriei este

$$x_n = \underbrace{\frac{1}{5^n}}_{\to 0} \underbrace{\cos n^n}_{\text{mărginit}}, \forall n \in \mathbb{N}^*$$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0 \Rightarrow$seria *poate fi* convergentă.

Etapa 2. Se studiază natura seriei şi suma ei cu cu definiţia. Şirul sumelor parţiale este

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{5^k} \cos k^k, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Nu se va aplica definiţia în studiul convergenţei seriei.

Etapa 3. Se studiază natura seriei aplicând criterii.

○modul 1. Criteriul Cauchy pentru serii. Se verifică dacă

$\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $\forall p \in \mathbb{N}^*, \forall n \in \mathbb{N}^*, n \ge n_\varepsilon \Rightarrow |x_{n+1} + ... + x_{n+p}| < \varepsilon$.

Fie $\forall \varepsilon > 0$. Se caută $n_\varepsilon \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $\forall p \in \mathbb{N}^*, \forall n \in \mathbb{N}^*, n \ge n_\varepsilon \Rightarrow$

$$\begin{aligned} |x_{n+1} + ... + x_{n+p}| &= \left|\tfrac{1}{5^{n+1}} \cos (n+1)^{n+1} + ... + \tfrac{1}{5^{n+p}} \cos (n+p)^{n+p}\right| \le \\ &\le \left|\tfrac{1}{5^{n+1}} \cos (n+1)^{n+1}\right| + ... + \left|\tfrac{1}{5^{n+p}} \cos (n+p)^{n+p}\right| = \\ &\le \tfrac{1}{5^{n+1}} \left|\cos (n+1)^{n+1}\right| + ... + \tfrac{1}{5^{n+p}} \left|\cos (n+p)^{n+p}\right| \le \\ &\le \tfrac{1}{5^{n+1}} + ... + \tfrac{1}{5^{n+p}} = \tfrac{1}{5^{n+1}} \cdot \frac{\left(\frac{1}{5}\right)^p - 1}{\frac{1}{5} - 1} = \tfrac{1}{4 \cdot 5^n}\left(1 - \left(\tfrac{1}{5}\right)^p\right) < \\ &\overset{\text{scăpăm de } p \text{, rămâne } n}{<} \tfrac{1}{4 \cdot 5^n} \cdot 1 < \tfrac{1}{5^n} < \varepsilon, \end{aligned}$$

adică $\frac{1}{5^n} < \varepsilon \Leftrightarrow n > \frac{\ln \frac{1}{\varepsilon}}{\ln 5}$. Se găseşte $n_\varepsilon = \left[\frac{\ln \frac{1}{\varepsilon}}{\ln 5}\right] + 1$.

$\Rightarrow$este verificat Criteriul Cauchy$\Rightarrow$seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5^n} \cos n^n$ este converegentă.

modul 2. Criteriul comparaţiei cu inegalităţi. Deoarece şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ are şi termeni pozitivi şi termeni negativi$\Rightarrow$ nu se poate aplica direct Criteriul comparaţiei. Se va studia absoluta convergenţă a seriei cu termeni oarecare $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5^n} \cos n^n$, adică se va studia dacă seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left|\frac{1}{5^n} \cos n^n\right|$ este convergentă.

$$\left.\begin{array}{l} 0 \le \left|\frac{1}{5^n} \cos n^n\right| \le \frac{1}{5^n}, \forall n \in \mathbb{N}^*. \\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^n \text{ este serie convergentă} \\ \quad \text{ca şi serie geometrică cu } q = \frac{1}{5} \in \left]-1, 1\right[\end{array}\right\} \overset{\text{C. comparaţiei}}{\Rightarrow} \sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{1}{5^n} \cos n^n\right| \text{ este serie convergentă} \Rightarrow$$

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5^n} \cos n^n$ este serie absolut convergentă.

$\bigcirc$**Teorema 1.4.6**. (**Criteriul comparaţiei cu limită, forma tare, CS**). Fie seriile de numere reale $\sum\limits_{n=m}^{\infty} x_n$ şi $\sum\limits_{n=m}^{\infty} y_n$ cu termeni strict pozitivi astfel încât

$\exists \lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = l \in [0, +\infty]$

a) Dacă $0 < l < +\infty$ atunci cele două serii au aceeaşi natură;

b) Dacă $l = 0$ şi seria $\sum\limits_{n=m}^{\infty} y_n$ este convergentă atunci seria $\sum\limits_{n=m}^{\infty} x_n$ este convergentă;

c) Dacă $l = +\infty$ şi seria $\sum\limits_{n=m}^{\infty} y_n$ este divergentă atunci seria $\sum\limits_{n=m}^{\infty} x_n$ este divergentă.

$\bigcirc$**Teorema 1.4.6$'$**. (**Criteriul comparaţiei cu limită, forma slabă, CS**). Fie seriile de numere reale $\sum\limits_{n=m}^{\infty} x_n$ şi $\sum\limits_{n=m}^{\infty} y_n$ cu termeni strict pozitivi astfel încât

$\exists \lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = l \in [0, +\infty]$

a) Dacă $\exists \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \frac{x_n}{y_n} = l^* \in [0, +\infty[$ atunci

- •dacă $\sum\limits_{n=m}^{\infty} y_n$ este convergentă atunci seria $\sum\limits_{n=m}^{\infty} x_n$ este convergentă;
- •dacă $\sum\limits_{n=m}^{\infty} x_n$ este divergentă atunci seria $\sum\limits_{n=m}^{\infty} y_n$ este divergentă;

b) Dacă $\exists \underline{\lim\limits_{n\to\infty}} \frac{x_n}{y_n} = l_* \in]0, +\infty]$ atunci

- •dacă $\sum\limits_{n=m}^{\infty} x_n$ este convergentă atunci seria $\sum\limits_{n=m}^{\infty} y_n$ este convergentă;
- •dacă $\sum\limits_{n=m}^{\infty} y_n$ este divergentă atunci seria $\sum\limits_{n=m}^{\infty} x_n$ este divergentă;

c) Dacă $0 < \underline{\lim\limits_{n\to\infty}} \frac{x_n}{y_n} \leq \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \frac{x_n}{y_n} < +\infty$ atunci $\sum\limits_{n=m}^{\infty} x_n \overset{\text{au aceeaşi natură}}{\sim} \sum\limits_{n=m}^{\infty} y_n$.

$\bigcirc$**Exemplul 1.4.3**. Să se studieze natura următoarelor serii de numere reale

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin \frac{1}{n^2}$;

<u>Etapa 1.</u> Se studiază dacă $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

Termenul general al seriei este

$x_n = \sin \frac{1}{n^2}, \forall n \in \mathbb{N}^*$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0 \Rightarrow$seria *poate fi* convergentă.

<u>Etapa 2.</u> Cu definiţia-NU

<u>Etapa 3.</u> Se studiază natura seriei aplicând criterii.

<u>Criteriul comparaţiei</u> cu limită. Deoarece şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este cu termeni strict pozitivi şi

$$\left.\begin{array}{l} \exists \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sin\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2}} = 1 \in]0,+\infty[\\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \text{ este serie convergentă} \\ \qquad \text{ca şi serie armonică cu } \alpha = 2 \end{array}\right\} \overset{\text{C. comparaţiei}}{\underset{\text{cu limită}}{\Rightarrow}} \sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{1}{n^2} \text{ este serie convergentă.}$$

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3-n^2+11}$;

Etapa 1. Se studiază dacă $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

Termenul general al seriei este

$x_n = \frac{1}{n^3-n^2+11}, \forall n \in \mathbb{N}^*$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0 \Rightarrow$seria *poate fi* convergentă.

Etapa 2. Cu definiţia-NU

Etapa 3. Se studiază natura seriei aplicând criterii.

Criteriul comparaţiei cu limită. Deoarece şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este cu termeni strict pozitivi şi

$$\left.\begin{array}{l} \exists \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n^3-n^2+11}}{\frac{1}{n^2}} = 0 \\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \text{ este serie convergentă} \\ \qquad \text{ca şi serie armonică cu } \alpha = 2 \end{array}\right\} \overset{\text{C. comparaţiei}}{\underset{\text{cu limită}}{\Rightarrow}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3-n^2+11} \text{ este serie convergentă.}$$

c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}}$;

Etapa 1. Se studiază dacă $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

Termenul general al seriei este

$x_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}}, \forall n \in \mathbb{N}^*$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0 \Rightarrow$seria *poate fi* convergentă.

Etapa 2. Cu definiţia-NU

Etapa 3. Se studiază natura seriei aplicând criterii.

Criteriul comparaţiei cu limită. Deoarece şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este cu termeni strict pozitivi şi

$$\left.\begin{array}{l} \exists \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{n+1}}}{\frac{1}{n}} = +\infty \\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{ este serie divergentă} \\ \qquad \text{ca şi serie armonică cu } \alpha = 1 \end{array}\right\} \overset{\text{C. comparaţiei}}{\underset{\text{cu limită}}{\Rightarrow}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}} \text{ este serie divergentă.}$$

○**Teorema 1.4.7**. (**Criteriul în α, CS**). Fie seria de numere reale $\sum\limits_{n=m}^{\infty} x_n$ cu termeni pozitivi.

a) Dacă $\exists \alpha > 1$ a.î. $0 \leq \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} (n^\alpha \cdot x_n) < +\infty$ atunci $\sum\limits_{n=m}^{\infty} x_n$ este convergentă;

b) Dacă $\exists \alpha \leq 1$ a.î. $0 < \underline{\lim\limits_{n\to\infty}} (n^\alpha \cdot x_n) \leq +\infty$ atunci $\sum\limits_{n=m}^{\infty} x_n$ este divergentă.

○**Teorema 1.4.8**. (**Criteriul de condensare Cauchy**). Fie seria de numere reale $\sum\limits_{n=m}^{\infty} x_n$, cu termeni pozitivi $x_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}_m$. Dacă şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_m}$ este monoton descrescător, atunci

$$\sum_{n=m}^{\infty} x_n \overset{\text{are aceeaşi natură}}{\sim} \sum_{n=m}^{\infty} 2^n x_{2^n}.$$

Teorema 1.4.9. (**Criteriul raportului-D'Alembert, forma slabă, CS**). Fie seria de numere reale $\sum_{n=m}^{\infty} x_n$, cu termeni strict pozitivi $x_n \gneqq 0, \forall n \in \mathbb{N}_m$.

a) Dacă $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \frac{x_{n+1}}{x_n} < 1$, atunci seria $\sum_{n=m}^{\infty} x_n$ este convergentă.

b) Dacă $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} \frac{x_{n+1}}{x_n} > 1$, atunci seria $\sum_{n=m}^{\infty} x_n$ este divergentă.

c) Dacă $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \frac{x_{n+1}}{x_n} \geq 1$, sau $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} \frac{x_{n+1}}{x_n} \leq 1$ atunci nu se poate preciza natura seriei.

Dacă $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}$, atunci criteriul anterior se numeşte **forma tare**.

Exemplul 1.4.4. Să se studieze natura următoarelor serii de numere reale

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n!}$;

Etapa 1. Se studiază dacă $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.
Termenul general al seriei este

$x_n = \frac{3^n}{n!}, \forall n \in \mathbb{N}^*$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0 \Rightarrow$seria *poate fi* convergentă.

Etapa 2. Cu definiţia-NU

Etapa 3. Se studiază natura seriei aplicând criterii.

Criteriul raportului, forma tare. Deoarece şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este cu termeni strict pozitivi şi

$$\left.\exists \lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{3^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{3^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{3}{n+1} = 0 < 1 \right\} \underset{\text{forma tare}}{\overset{\text{C. raportului}}{\Rightarrow}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n!} \text{ este serie convergentă.}$$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} n! \left(\frac{2}{n}\right)^n$;

Etapa 3. Se studiază natura seriei aplicând criterii.

Criteriul raportului, forma tare. Deoarece şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este cu termeni strict pozitivi şi

$$\left.\exists \lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim_{n\to\infty} (n+1)! \left(\frac{2}{n+1}\right)^{n+1} \cdot \frac{1}{n!} \cdot \left(\frac{n}{2}\right)^n = \lim_{n\to\infty} 2\frac{n^n}{(n+1)^n} = \frac{2}{e} < 1 \right\} \underset{\text{forma tare}}{\overset{\text{C. raportului}}{\Rightarrow}} \sum_{n=1}^{\infty} n! \left(\frac{2}{n}\right)^n$$

este serie convergentă.

Teorema 1.4.10 (**Criteriul rădăcinii-Cauchy-Hadamard, forma slabă, CS**). Fie seria de numere reale $\sum_{n=m}^{\infty} x_n$, cu termeni strict pozitivi $x_n \gneqq 0, \forall n \in \mathbb{N}_m$.

a) Dacă $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{x_n} < 1$ atunci seria $\sum_{n=m}^{\infty} x_n$ este convergentă.

b) Dacă $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{x_n} > 1$ atunci seria $\sum_{n=m}^{\infty} x_n$ este divergentă.

c) Dacă $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{x_n} = 1$ atunci nu se poate preciza natura seriei.

Dacă $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n}$ atunci criteriul anterior se numeşte **forma tare**.

Observaţia 1.4.2. Dacă $\sum_{n=m}^{\infty} x_n$ este o serie cu termeni oarecare şi $\sum_{n=m}^{\infty} |x_n|$ este divergentă pe baza criteriului raportului sau criteriului rădăcinii atunci $\sum_{n=m}^{\infty} x_n$ este divergentă.

Exemplul 1.4.5. Să se studieze natura următoarelor serii de numere reale

a) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^2}{\left(3+\frac{1}{n}\right)^n}$;

Etapa 1. Se studiază dacă $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$.

Termenul general al seriei este

$x_n = \frac{n^2}{\left(3+\frac{1}{n}\right)^n}, \forall n \in \mathbb{N}_2$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = 0 \Rightarrow$seria *poate fi* convergentă.

Etapa 2. Cu definiţia-NU

Etapa 3. Se studiază natura seriei aplicând criterii.

Criteriul rădăcinii, forma tare. Deoarece şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este cu termeni strict pozitivi şi

$$\left.\exists \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n^2}{\left(3+\frac{1}{n}\right)^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\sqrt[n]{n}\right)^2}{3+\frac{1}{n}} = \frac{1}{3} < 1\right\} \overset{\text{C. rădăcinii}}{\underset{\text{forma tare}}{\Rightarrow}} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^2}{\left(3+\frac{1}{n}\right)^n} \text{ este serie convergentă.}$$

b) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(3+(-1)^n)^n}$;

Etapa 1. Se studiază dacă $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$.

Termenul general al seriei este

$x_n = \frac{1}{(3+(-1)^n)^n}, \forall n \in \mathbb{N}_2$.

Deoarece $\mathbb{N} = \left\{2\widetilde{k}; \widetilde{k} \in \mathbb{N}^*\right\} \cup \left\{2\widetilde{k}+1; \widetilde{k} \in \mathbb{N}^*\right\}$, se explicitează:

$$x_n = \begin{cases} \frac{1}{4^n}, & \text{dacă } n = 2\widetilde{k}; \widetilde{k} \in \mathbb{N}^* \\ \frac{1}{2^n}, & \text{dacă } n = 2\widetilde{k}+1; \widetilde{k} \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

Se determină:

$$\left\{\begin{array}{l} \lim_{\widetilde{k}\to\infty} x_{2\widetilde{k}} = \lim_{\widetilde{k}\to\infty} \frac{1}{4^{2\widetilde{k}}} = 0; \\ \lim_{\widetilde{k}\to\infty} x_{2\widetilde{k}+1} = \lim_{\widetilde{k}\to\infty} \frac{1}{2^{2\widetilde{k}+1}} = 0. \end{array}\right. \Rightarrow \mathcal{L}\left((x_n)_{n\in\mathbb{N}_2}\right) = \{0\} \Rightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{l} \underline{\lim}_{n\to\infty} x_n = 0 \\ \overline{\lim}_{n\to\infty} x_n = 0 \end{array}\right. \Rightarrow \exists \lim_{n\to\infty} x_n = 0 \Rightarrow \text{seria } \textit{poate fi} \text{ convergentă.}$$

Etapa 2. Cu Definiţia-NU.

Etapa 3. Se studiază natura seriei aplicând criterii.

Criteriul raportului.

$x_n \gneqq 0, \forall n \in \mathbb{N}_2$.

$$\underbrace{\frac{x_{n+1}}{x_n}}_{u_n} = \frac{\frac{1}{\left(3+(-1)^{n+1}\right)^{n+1}}}{\frac{1}{(3+(-1)^n)^n}} = \frac{(3+(-1)^n)^n}{\left(3+(-1)^{n+1}\right)^{n+1}} = \begin{cases} \frac{4^n}{2^{n+1}} = 2^{n-1}, & \text{dacă } n = 2\widetilde{k}; \widetilde{k} \in \mathbb{N}^* \\ \frac{2^n}{4^{n+1}} = \frac{1}{2^{n+2}}, & \text{dacă } n = 2\widetilde{k}+1; \widetilde{k} \in \mathbb{N}^*. \end{cases}$$

Se determină

$$\left\{\begin{array}{l} \lim_{\widetilde{k}\to\infty} u_{2\widetilde{k}} = +\infty; \\ \lim_{\widetilde{k}\to\infty} u_{2\widetilde{k}+1} = 0. \end{array}\right. \Rightarrow \mathcal{L}\left(\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right)_{n\in\mathbb{N}_2}\right) = \{+\infty, 0\} \Rightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{l}\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} \frac{x_{n+1}}{x_n}=0\\ \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \frac{x_{n+1}}{x_n}=+\infty\end{array}\right. \Rightarrow \nexists \lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}.$$

Cum $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \frac{x_{n+1}}{x_n}=+\infty>1$ şi $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} \frac{x_{n+1}}{x_n}=0<1 \Rightarrow$ seria $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(3+(-1)^n)^n}$ nu se poate studia cu criteriul raportului.

Criteriul rădăcinii.

$x_n \gneqq 0, \forall n\in\mathbb{N}$.

$$\underbrace{\sqrt[n]{x_n}}_{v_n}=\sqrt[n]{\frac{1}{(3+(-1)^n)^n}}=\frac{1}{(3+(-1)^n)}=\left\{\begin{array}{ll}\frac14, & \text{dacă } n=2\widetilde{k};\widetilde{k}\in\mathbb{N}^*\\ \frac12, & \text{dacă } n=2\widetilde{k}+1;\widetilde{k}\in\mathbb{N}^*\end{array}\right.$$

Se determină

$$\left\{\begin{array}{l}\lim\limits_{\widetilde{k}\to\infty} v_{2\widetilde{k}}=\frac14;\\ \lim\limits_{\widetilde{k}\to\infty} v_{2\widetilde{k}+1}=\frac12.\end{array}\right. \Rightarrow \mathcal{L}\left(\left(\sqrt[n]{x_n}\right)_{n\in\mathbb{N}_2}\right)=\left\{\frac14,\frac12\right\}\Rightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{l}\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{x_n}=\frac14\\ \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{x_n}=\frac12\end{array}\right. \Rightarrow \nexists \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_n}.$$

Cum $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{x_n}=\frac12<1\Rightarrow$ seria $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(3+(-1)^n)^n}$ este convergentă.

Teorema 1.4.11 (**Criteriul Raabe-Duhamel, forma slabă, CS**). Fie seria de numere reale $\sum\limits_{n=m}^{\infty} x_n$, cu termeni strict pozitivi $x_n \gneqq 0, \forall n\in\mathbb{N}_m$.

a) Dacă $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, n\left(\dfrac{x_n}{x_{n+1}}-1\right)>1$, atunci seria $\sum\limits_{n=m}^{\infty} x_n$ este convergentă.

b) Dacă $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, n\left(\dfrac{x_n}{x_{n+1}}-1\right)<1$, atunci seria $\sum\limits_{n=m}^{\infty} x_n$ este divergentă.

c) Dacă $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, n\left(\dfrac{x_n}{x_{n+1}}-1\right)\le 1$ sau $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, n\left(\dfrac{x_n}{x_{n+1}}-1\right)\ge 1$ atunci nuv se poate preciza natura seriei.

Dacă $\exists \lim\limits_{n\to\infty} n\left(\dfrac{x_n}{x_{n+1}}-1\right)$ atunci criteriul anterior se numeşte **forma tare**.

Exemplul 1.4.6. Să se studieze natura următoarelor serii de numere reale

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a^{\sqrt{n}}, a>0;$

Etapa 1. Se studiază dacă $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=0$.

Termenul general al seriei este

$x_n=a^{\sqrt{n}}, \forall n\in\mathbb{N}^*$.

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} x_n=\left\{\begin{array}{ll}0, & \text{dacă } 0<a<1\\ 1, & \text{dacă } a=1\\ +\infty, & \text{dacă } a>1.\end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}\text{dacă } a\ge 1, \text{ atunci seria este divergentă}\\ \text{dacă } a\in\left]0,1\right[, \text{ atunci seria } \textit{poate fi} \text{ convergentă}\end{array}\right.$$

Etapa 2. Cu Definiţia-NU.

Etapa 3. Se aplică criterii atunci când $a\in\left]0,1\right[$.

Criteriul raportului. Deoarece şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este cu termeni strict pozitivi şi

$$\frac{x_{n+1}}{x_n}=a^{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}=a^{\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}}, \forall n\in\mathbb{N}^*.$$

$\exists \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_{n+1}}{x_n} \overset{a\in]0,1[}{=} 1 \Rightarrow$Nu se poate preciza natura seriei.

Criteriul rădăcinii. Deoarece şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este cu termeni strict pozitivi şi

$\sqrt[n]{|x_n|} = a^{\frac{\sqrt{n}}{n}}, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

$\exists \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|x_n|} \overset{a\in]0,1[}{=} 1 \Rightarrow$Nu se poate preciza natura seriei.

Criteriul lui Raabe-Duhamel. Deoarece şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este cu termeni strict pozitivi şi

$$n\left(\frac{x_n}{x_{n+1}} - 1\right) = n\left(a^{-\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} - 1\right) = n\left(a^{\frac{-1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}} - 1\right), \forall n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow$$

$$\exists \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{x_n}{x_{n+1}} - 1\right) = \lim_{n\to\infty} n\left(a^{\frac{-1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}} - 1\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{a^{\frac{-1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}} - 1}{\frac{-1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}} \cdot \frac{-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = (\ln a)(-\infty) \underset{\Rightarrow \ln a<0}{\overset{a\in]0,1[}{=}} +\infty > 1$$

$\Rightarrow$seria este convergentă.

Concluzii:

-dacă $a \in]0,1[\Rightarrow$ seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a^{\sqrt{n}}$ este convergentă.

-dacă $a \geq 1 \Rightarrow$ seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a^{\sqrt{n}}$ este divergentă.

○**Teorema 1.4.12** (**Criteriul Bertrand, forma slabă, CS**). Fie seria de numere reale $\sum\limits_{n=m}^{\infty} x_n$, cu termeni strict pozitivi $x_n \gneqq 0, \forall n \in \mathbb{N}_m$.

a) Dacă $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} \left(n\left(\dfrac{x_n}{x_{n+1}} - 1\right) - 1\right) \ln n > 1$ atunci $\sum\limits_{n=m}^{\infty} x_n$ este convergentă;

b) Dacă $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \left(n\left(\dfrac{x_n}{x_{n+1}} - 1\right) - 1\right) \ln n < 1$ atunci seria $\sum\limits_{n=m}^{\infty} x_n$ este divergentă;

c) Dacă $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} \left(n\left(\dfrac{x_n}{x_{n+1}} - 1\right) - 1\right) \ln n \leq 1$ sau $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \left(n\left(\dfrac{x_n}{x_{n+1}} - 1\right) - 1\right) \ln n \geq 1$ atunci nu se poate preciza natura seriei.

Dacă $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \left(n\left(\dfrac{x_n}{x_{n+1}} - 1\right) - 1\right) \ln n$ atunci criteriul anterior se numeşte **forma tare**.

○**Teorema 1.4.13** (**Criteriul logaritmic, CS**). Fie seria de numere reale $\sum\limits_{n=m}^{\infty} x_n$, cu termeni strict pozitivi $x_n \gneqq 0, \forall n \in \mathbb{N}_m$ a.î.

$\exists \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\ln \frac{1}{x_n}}{\ln n} = l$.

a) Dacă $l > 1$ atunci $\sum\limits_{n=m}^{\infty} x_n$ este convergentă;

b) Dacă $l < 1$ atunci seria $\sum\limits_{n=m}^{\infty} x_n$ este divergentă;

c) Dacă $l = 1$ atunci nu se poate preciza natura seriei.

Teorema 1.4.14 (**Criteriul Abel, CS**). Fie seria de numere reale $\sum\limits_{n=m}^{\infty} \alpha_n u_n$. Dacă

(i) şirul $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}_m}$ este monoton (descrescător) şi mărginit;

(ii) seria $\sum\limits_{n=m}^{\infty} u_n$ este convergentă,

atunci seria $\sum\limits_{n=m}^{\infty} \alpha_n u_n$ este convergentă.

Teorema 1.4.15. (**Criteriul Dirichlet, CS**). Fie seria de numere reale $\sum\limits_{n=m}^{\infty} \alpha_n u_n$. Dacă

(i) şirul $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}_m}$ este monoton descrescător cu $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$;

(ii) seria $\sum\limits_{n=m}^{\infty} u_n$ are şirul sumelor parţiale $s_n^u = \sum\limits_{k=m}^{n} u_k, \forall n \in \mathbb{N}_m$ şir mărginit,

atunci seria $\sum\limits_{n=m}^{\infty} \alpha_n u_n$ este convergentă.

Exemplul 1.4.7. Să se studieze natura următoarelor serii de numere reale

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin an}{n^\alpha}, a \in \mathbb{R}^*$ este fixat şi $\alpha > 0$ este fixat;

Etapa 1. Se studiază dacă $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

Termenul general al seriei este

$$x_n = \underbrace{\frac{1}{n^\alpha}}_{\to 0} \underbrace{\sin an}_{\text{mărginit}}, \forall n \in \mathbb{N}^*$$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0 \Rightarrow$seria *poate fi* convergentă.

Etapa 2. Se studiază natura seriei şi suma ei cu cu definiţia. Şirul sumelor parţiale este

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \tfrac{1}{k^\alpha} \sin ak, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Nu se va aplica definiţia în studiul convergenţei seriei.

Etapa 3. Se studiază natura seriei aplicând criterii. Seria este cu termeni oarecare.

Criteriul Dirichlet. Se aleg:

(i) $\alpha_n = \frac{1}{n^\alpha}, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Se observă că şirul $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este monoton descrescător cu $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$.

(ii) $u_n = \sin an, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Se studiază dacă şirul sumelor parţiale

$$s_n^u = \sum_{k=1}^{n} \sin ak, \forall n \in \mathbb{N}^*$$

este şir mărginit. Se determină s_n^u.

Fie $n \in \mathbb{N}^*$. Se notează $A_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \cos ak$ şi $B_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \sin ak$. Atunci

$$\begin{aligned}
A_n + iB_n &= \sum_{k=1}^{n} \cos ak + i \sum_{k=1}^{n} \sin ak = \sum_{k=1}^{n} (\cos ak + i \sin ak) = \\
&= \sum_{k=1}^{n} (\cos a + i \sin a)^k = (\cos a + i \sin a) \tfrac{(\cos a + i \sin a)^n - 1}{(\cos a + i \sin a) - 1} = \\
&= (\cos a + i \sin a) \tfrac{(\cos an + i \sin an) - 1}{(\cos a + i \sin a) - 1} = (\cos a + i \sin a) \tfrac{{}^{i)} 2\sin^2 \frac{an}{2} - i 2 \sin \frac{an}{2} \cos \frac{an}{2}}{2 \sin^2 \frac{a}{2} - i 2 \sin \frac{a}{2} \cos \frac{a}{2}} = \\
&= (\cos a + i \sin a) \tfrac{\sin \frac{an}{2} \left(\cos \frac{an}{2} + i \sin \frac{an}{2}\right)}{\sin \frac{a}{2} \left(\cos \frac{a}{2} + i \sin \frac{a}{2}\right)} = \tfrac{\sin \frac{an}{2}}{\sin \frac{a}{2}} \left(\cos\left(a + \tfrac{an}{2} - \tfrac{a}{2}\right) + i \sin\left(a + \tfrac{an}{2} - \tfrac{a}{2}\right)\right).
\end{aligned}$$

Deci $A_n = \frac{\sin \frac{an}{2}}{\sin \frac{a}{2}} \cos\left(\frac{an+a}{2}\right)$ şi $B_n = \frac{\sin \frac{an}{2}}{\sin \frac{a}{2}} \sin\left(\frac{an+a}{2}\right)$.

Atunci $\exists M = \frac{1}{\left|\sin\frac{a}{2}\right|} > 0$ astfel încât

$|s_n^u| = \left|\frac{\sin\frac{an}{2}}{\sin\frac{a}{2}}\sin\left(\frac{an+a}{2}\right)\right| \leq \frac{1}{\left|\sin\frac{a}{2}\right|}, \forall n \in \mathbb{N}^*$

$\Rightarrow (s_n^u)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este şir mărginit.

Conform Criteriului Dirichlet, seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin an}{n^\alpha}$ este convergentă.

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)\sin n;$

Indicaţie. $\alpha_n = \ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right), \forall n \in \mathbb{N}^*; u_n = \sin n, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n}{3^n};$

Indicaţie. $\alpha_n = \frac{1}{3^n}, \forall n \in \mathbb{N}^*; u_n = \cos n, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

În acest caz se poate aplica criteriul comparaţiei cu inegalităţi pentru $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{\cos n}{3^n}\right|$.

Teorema 1.4.16 (**Criteriul Leibniz, CS**). Fie şirul de numere reale $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_m}$ cu $a_n \gneqq 0, \forall n \in \mathbb{N}_m$.

Dacă şirul $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_m}$ este monoton descrescător cu $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, atunci seria alternantă $\displaystyle\sum_{n=m}^{\infty}(-1)^n a_n$este convergentă. Rezultatul este valabil şi pentru seria alternantă $\displaystyle\sum_{n=m}^{\infty}(-1)^{n+1} a_n$.

Seria armonică alternantă generalizată. Fie $\alpha \in \mathbb{R}$. Seria $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ este divergentă dacă $\alpha \leq 0$ şi convergentă dacă $\alpha > 0$. Mai mult, pentru $\alpha \in]0,1]$ seria este semiconvergentă, iar pentru $\alpha > 1$ seria este absolut convergentă.

Exemple. Fie $\alpha = -\frac{3}{2}$. Seria armonică alternantă generalizată

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n\sqrt{n} \ / \ -1+2\sqrt{2}-3\sqrt{3}+...+(-1)^n n\sqrt{n}+...\text{este } (D).$$

Fie $\alpha = 1$. Seria armonică alternantă

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n} \ / \ -1+\frac{1}{2}+\frac{-1}{3}+...+\frac{(-1)^n}{n}+...\text{este } (SC).$$

Fie $\alpha = \frac{1}{2}$. Seria armonică alternantă generalizată

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \ / \ -1+\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{3}}+...+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}+...\text{este } (SC).$$

Fie $\alpha = \frac{3}{2}$. Seria armonică alternantă generalizată

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n\sqrt{n}} \ / \ -1+\frac{1}{2\sqrt{2}}-\frac{1}{3\sqrt{3}}+...+\frac{(-1)^n}{n\sqrt{n}}+...\text{este } (AC).$$

Fie $\alpha = 2$. Seria armonică generalizată

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2} \ / \ -1+\frac{1}{2^2}-\frac{1}{3^2}+...+\frac{(-1)^n}{n^2}+...\text{este } (AC).$$

Exemplul 1.4.8. Să se studieze natura următoarelor serii de numere reale

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\,\frac{n}{2^n}$;

Etapa 1. Se studiază dacă $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

Termenul general al seriei este

$$x_n = \underbrace{(-1)^n}_{\text{mărginit}}\cdot\underbrace{\frac{n}{2^n}}_{\to 0},\forall n\in\mathbb{N}^*$$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0 \Rightarrow$seria *poate fi* convergentă.

Etapa 2. Cu definiţia-NU.

Etapa 3. Se studiază natura seriei aplicând criterii.

Criteriul Leibniz. Şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este şir alternant, adică

$$x_n = (-1)^n\underbrace{\frac{n}{2^n}}_{a_n>0,\forall n\in\mathbb{N}^*},\forall n\in\mathbb{N}^*.$$

şi, mai mult, $x_n = (-1)^n\cdot a_n, \forall n\in\mathbb{N}^*$, unde

$$\begin{cases} a_n>0,\forall n\in\mathbb{N}^* \\ (a_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ este şir monoton descrescător} \\ \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0\end{cases} \overset{\text{C. Leibniz}}{\Rightarrow} \text{seria } \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\,\tfrac{n}{2^n} \text{ este convergentă.}$$

Criteriul raportului pentru seria modulelor. Deoarece şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este şir alternant, se poate studia seria modulelor, care este s.t.s.p., cu criteriul raportului:

$$|x_n|>0,\forall n\in\mathbb{N}^*$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|x_{n+1}|}{|x_n|} = \lim_{n\to\infty}\frac{\left|(-1)^{n+1}\,\dfrac{n+1}{2^{n+1}}\right|}{\left|(-1)^n\,\dfrac{n}{2^n}\right|} = \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{2n} = \tfrac{1}{2}<1 \overset{\text{Crit. rap., forma tare, a)}}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow\text{seria } \sum_{n=1}^{\infty}|x_n| \text{ este convergentă} \Rightarrow \text{seria } \sum_{n=1}^{\infty}x_n \text{ este absolut convergentă.}$$

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\,\frac{1}{n^2+4n+5}$;

Etapa 1. Se studiază dacă $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

Termenul general al seriei este

$$x_n = \underbrace{(-1)^{n+1}}_{\text{mărginit}}\cdot\underbrace{\frac{1}{n^2+4n+5}}_{\to 0},\forall n\in\mathbb{N}^*$$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0 \Rightarrow$seria *poate fi* convergentă.

Etapa 2. Cu definiţia-NU.

Etapa 3. Se studiază natura seriei aplicând criterii.

Criteriul Leibniz. Şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este şir alternant, adică

$$x_n = (-1)^{n+1}\underbrace{\frac{1}{n^2+4n+5}}_{a_n>0,\forall n\in\mathbb{N}^*},\forall n\in\mathbb{N}^*.$$

şi, mai mult, $x_n = (-1)^n\cdot a_n, \forall n\in\mathbb{N}^*$, unde

$$\begin{cases} a_n>0,\forall n\in\mathbb{N}^* \\ (a_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ este şir monoton descrescător} \\ \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0\end{cases} \overset{\text{C. Leibniz}}{\Rightarrow} \text{seria } \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\,\tfrac{1}{n^2+4n+5} \text{ este convergentă.}$$

Este chiar absolut convergentă (seria modulelor se studiază cu criteriul comparaţiei).

c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \dfrac{\operatorname{arctg} \frac{1}{n}}{\cos \frac{1}{n}}$;

Etapa 1. Se studiază dacă $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

Termenul general al seriei este

$$x_n = \underbrace{(-1)^n}_{\text{mărginit}} \cdot \underbrace{\frac{\operatorname{arctg} \frac{1}{n}}{\cos \frac{1}{n}}}_{\to 0}, \forall n \in \mathbb{N}^*$$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0 \Rightarrow$seria *poate fi* convergentă.

Etapa 2. Cu definiţia-NU.

Etapa 3. Se studiază natura seriei aplicând criterii.

Criteriul Leibniz. Şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este şir alternant, adică

$$x_n = (-1)^n \underbrace{\frac{\operatorname{arctg} \frac{1}{n}}{\cos \frac{1}{n}}}_{a_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*}, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Se observă că

$$0 < \tfrac{1}{n} \le 1, \forall n \in \mathbb{N}^* \overset{\operatorname{arctg}\ \text{e crescătoare pe }]0,1]}{\Rightarrow} 0 < \operatorname{arctg} \tfrac{1}{n} < \tfrac{\pi}{4}, \forall n \in \mathbb{N}^* \text{ şi}$$

$$0 < \tfrac{1}{n} \le 1, \forall n \in \mathbb{N}^* \overset{\cos\ \text{e descrescătoare pe }]0,1]}{\Rightarrow} \cos 0 > \cos \tfrac{1}{n} > \cos 1 > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$$

Mai mult

$$\tfrac{1}{n+1} < \tfrac{1}{n} \overset{\operatorname{arctg}\ \text{e crescătoare pe }]0,1]}{\Rightarrow} \operatorname{arctg} \tfrac{1}{n+1} < \operatorname{arctg} \tfrac{1}{n} \text{ şi}$$

$$\tfrac{1}{n+1} < \tfrac{1}{n} \overset{\cos\ \text{e descrescătoare pe }]0,1]}{\Rightarrow} \cos \tfrac{1}{n+1} > \cos \tfrac{1}{n} \Rightarrow \tfrac{1}{\cos \frac{1}{n+1}} < \tfrac{1}{\cos \frac{1}{n}}$$

şi deci

$$a_n > a_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Deci $x_n = (-1)^n \cdot a_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$, unde

$$\begin{cases} a_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}^* \\ (a_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ este şir monoton descrescător} \\ \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0 \end{cases} \overset{\text{C. Leibniz}}{\Rightarrow} \text{seria } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \tfrac{\operatorname{arctg} \frac{1}{n}}{\cos \frac{1}{n}} \text{ este convergentă.}$$