

CURS NR. 4

Analiză matematică, AIA

A se studia Trigonometrie-din Anexa 2 și de la Complemente de Matematică

A se studia Funcții $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ elementare: funcția polinomială, funcția rațională, funcția putere, funcția radical, funcția logaritm, funcția exponențială, funcții trigonometrice, funcții hiperbolice. Definiții, grafice și lecturi grafice (intersecția cu axele, monotonie, semn). Ecuații și inecuații atașate, sisteme de ecuații și inecuații-din Anexa 4 și de la Complemente de Matematică

5.1. Limite de funcții $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ în $a \in A'$

De recapitulat din manualele de liceu.

Se reamintesc unele noțiuni și enunțuri (schită, fără demonstrații).

De menționat că A' este mulțimea punctelor de acumulare a mulțimii A , în $\overline{\mathbb{R}}$.

Definiția 5.1.1. Fie $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in A' \subseteq \mathbb{R}$. Funcția f are limita $l \in \mathbb{R}$ în punctul a și se notează $\lim_{x \rightarrow a, x \in A} f(x) = l$ dacă

$$[\forall V \in \mathcal{V}(l), \exists U = U_V \in \mathcal{V}(a) \text{ a.î. } \forall x \in A \cap U, x \neq a \Rightarrow f(x) \in V].$$

Dacă există, $l \in \overline{\mathbb{R}}$ se numește *limita (globală a) funcției f în a* . Se notează și $l = l(a)$.

Teorema 5.1.1.(criteriul-CNS în limbaj $\varepsilon - \delta$ de existență a limitei)

Fie $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Atunci

a) $\exists \lim_{x \rightarrow -\infty, x \in A} f(x) = -\infty, -\infty \in A' \Leftrightarrow$

$$[\forall \alpha < 0, \exists \beta = \beta(\alpha) < 0 \text{ a.î. } \forall x \in A \text{ cu } x < \beta \Rightarrow f(x) < \alpha].$$

b) $\exists \lim_{x \rightarrow a, x \in A} f(x) = -\infty, a \in A', a \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$

$$[\forall \alpha < 0, \exists \delta = \delta(\alpha) > 0 \text{ a.î. } \forall x \in A \text{ cu } |x - a| < \delta, x \neq a \Rightarrow f(x) < \alpha].$$

c) $\exists \lim_{x \rightarrow +\infty, x \in A} f(x) = -\infty, +\infty \in A' \Leftrightarrow$

$$[\forall \alpha < 0, \exists \beta = \beta(\alpha) > 0 \text{ a.î. } \forall x \in A \text{ cu } \beta < x \Rightarrow f(x) < \alpha].$$

d) $\exists \lim_{x \rightarrow -\infty, x \in A} f(x) = l, -\infty \in A', l \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$

$$[\forall \varepsilon > 0, \exists \beta = \beta(\varepsilon) < 0 \text{ a.î. } \forall x \in A \text{ cu } x < \beta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon].$$

e) $\exists \lim_{x \rightarrow a, x \in A} f(x) = l, a \in A', a \in \mathbb{R}, l \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$

$$[\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \text{ a.î. } \forall x \in A \text{ cu } |x - a| < \delta, x \neq a \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon].$$

f) $\exists \lim_{x \rightarrow +\infty, x \in A} f(x) = l, +\infty \in A', l \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$

$$[\forall \varepsilon > 0, \exists \beta = \beta(\varepsilon) > 0 \text{ a.î. } \forall x \in A \text{ cu } \beta < x \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon].$$

g) $\exists \lim_{x \rightarrow -\infty, x \in A} f(x) = +\infty, -\infty \in A' \Leftrightarrow$

$$[\forall \alpha > 0, \exists \beta = \beta(\alpha) < 0 \text{ a.î. } \forall x \in A \text{ cu } x < \beta \Rightarrow \alpha < f(x)].$$

h) $\exists \lim_{x \rightarrow a, x \in A} f(x) = +\infty, a \in A', a \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$

$$[\forall \alpha > 0, \exists \delta = \delta(\alpha) > 0 \text{ a.î. } \forall x \in A \text{ cu } |x - a| < \delta, x \neq a \Rightarrow \alpha < f(x)].$$

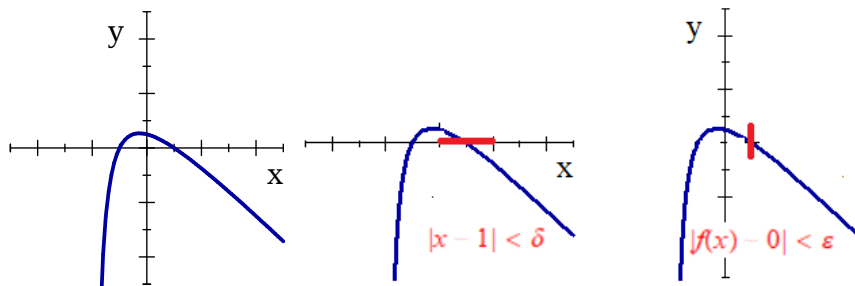
i) $\exists \lim_{x \rightarrow +\infty, x \in A} f(x) = +\infty, +\infty \in A' \Leftrightarrow$

$$[\forall \alpha > 0, \exists \beta = \beta(\alpha) > 0 \text{ a.î. } \forall x \in A \text{ cu } \beta < x \Rightarrow \alpha < f(x)].$$

Exemplul 5.1.1. Se arată că $\exists \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - x^2}{x + 2} = 0$.

Fie $f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{1-x^2}{x+2}, D = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$.

Se alege $A \subseteq D, A =]-2, +\infty[$ a.î. $a = 1 \in A'$.



Se studiază dacă $[x \rightarrow 1 \Rightarrow f(x) \rightarrow 0]$, adică $\exists \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x^2}{x+2} = 0 \Leftrightarrow$
 $[\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \text{ a.î. } \forall x \in A \text{ cu } \underbrace{|x-1| < \delta}_{x \text{ este în o vecinătate a lui } 1} \Rightarrow \underbrace{|f(x)-0| < \varepsilon}_{f(x) \text{ este în o vecinătate a lui } 0}].$

Fie $\forall \varepsilon > 0$. Se caută $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ a.î. $\forall x \in A$ cu $|x-1| < \delta$ să rezulte

$$|f(x) - 0| = \left| \frac{1-x^2}{x+2} - 0 \right| = \left| \frac{x+1}{x+2} \right| |x-1| \stackrel{\text{pentru } x > -2}{\leq} 1 \cdot |x-1| \stackrel{\text{"se scapă" de } x}{<} \varepsilon \quad \text{rămâne } \delta < \varepsilon.$$

Deci se caută $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ a.î. $0 < \delta < \varepsilon$. Din Teorema de densitate a $\mathbb{R}$ în $\mathbb{R}$, între numerele reale 0 și ε există un astfel de δ . Se poate alege, de exemplu, $\delta = \frac{1}{2}\varepsilon$.

Teorema 5.1.2. (criteriul-CNS de existență a limitei cu șiruri)

Fie $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, a \in A' \subseteq \mathbb{R}$ și $l \in \mathbb{R}$. Atunci $\exists \lim_{x \rightarrow a, x \in A} f(x) = l \Leftrightarrow$

$[\forall (x_n)_{n \in \mathbb{N}_m}$ un șir de numere reale din $A \setminus \{a\}$, cu $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = l]$.

Definiția 5.1.2. Fie $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

a) Funcția f are *limita la stânga* $l_s \in \mathbb{R}$ în punctul $a \in A'_s$ și se notează

$$\lim_{x \rightarrow a, x < a, x \in A} f(x) = l_s \text{ dacă}$$

$[\forall V \in \mathcal{V}(l_s), \exists U = U_V \in \mathcal{V}(a) \text{ a.î. } \forall x \in A \cap U, x \neq a, x < a \Rightarrow f(x) \in V]$.

b) Funcția f are *limita la dreapta* $l_d \in \mathbb{R}$ în punctul $a \in A'_d$ și se notează

$$\lim_{x \rightarrow a, x > a, x \in A} f(x) = l_d \text{ dacă}$$

$[\forall V \in \mathcal{V}(l_d), \exists U = U_V \in \mathcal{V}(a) \text{ a.î. } \forall x \in A \cap U, x \neq a, x > a \Rightarrow f(x) \in V]$.

Se notează și

$$l_s(a) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \nearrow a} f(x) = f(a-0); l_d(a) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \searrow a} f(x) = f(a+0).$$

Propoziția 5.1.1. (de caracterizare a existenței limitelor laterale cu șiruri)

Fie $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

a) Fie $a \in A'_s$ și $l_s(a) \in \mathbb{R}$. Atunci $\exists \lim_{x \rightarrow a, x < a, x \in A} f(x) = l_s(a) \Leftrightarrow$

$[\forall (x_n)_{n \in \mathbb{N}_m}$ un șir de numere reale din $A \setminus \{a\}$, cu $x_n < a, \forall n \in \mathbb{N}_m$ și $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = l_s(a)]$.

b) Fie $a \in A'_d$ și $l_d(a) \in \mathbb{R}$. Atunci $\exists \lim_{x \rightarrow a, x > a, x \in A} f(x) = l_d(a) \Leftrightarrow$

$[\forall (x_n)_{n \in \mathbb{N}_m}$ un șir de numere reale din $A \setminus \{a\}$, cu $x_n > a, \forall n \in \mathbb{N}_m$ și $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = l_d(a)]$.

Teorema 5.1.3. (criteriul-CNS de existență a limitei cu limite laterale)

Fie $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, a \in A', a \in \mathbb{R}$ și $l(a) \in \mathbb{R}$. Atunci $\exists \lim_{x \rightarrow a, x \in A} f(x) = l(a) \Leftrightarrow$

$$[\exists \lim_{x \rightarrow a, x < a, x \in A} f(x) = l_s(a), \exists \lim_{x \rightarrow a, x > a, x \in A} f(x) = l_d(a) \text{ și } l_s(a) = l_d(a) = l(a)].$$

Exemplul 5.1.2. a) Fie funcția *Dirichlet*:

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} 1, & \text{dacă } x \in \mathbb{Q} \\ -1, & \text{dacă } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

În nici un punct $a \in \mathbb{R}$, funcția nu are nici limită la stânga, nici limită la dreapta.

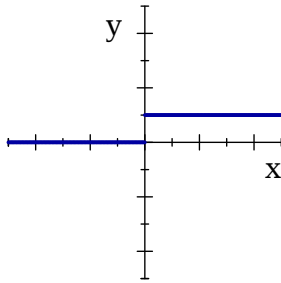
b) Fie funcția *Heaviside* (*treapta unitate*):

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } x < 0 \\ 1, & \text{dacă } x \geq 0 \end{cases}$$

În punctele $a \in]-\infty, 0[$ funcția are limită $l(a) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$.

În punctele $a \in]0, +\infty[$ funcția are limită $l(a) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) = 1$.

În punctul $a = 0$ funcția are limita la stânga $l_s(0) = \lim_{x \rightarrow 0, x < 0} f(x) = 0$ și limita la dreapta $l_d(0) = \lim_{x \rightarrow 0, x > 0} f(x) = 1$. Cum $l_s(0) \neq l_d(0)$, atunci f nu are limită în $a = 0$.



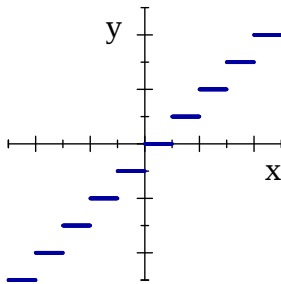
Exemplul 5.1.3. Fie funcția *parte întreagă*:

$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = [x]$, unde $[x] = n \in \mathbb{Z}$, dacă $n \leq x < n+1$, adică

$$f(x) = \begin{cases} \dots \\ -1, & \text{dacă } -1 \leq x < 0 \\ 0, & \text{dacă } 0 \leq x < 1 \\ 1, & \text{dacă } 1 \leq x < 2 \\ 2, & \text{dacă } 2 \leq x < 3 \\ \dots \end{cases}$$

În punctele $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ funcția are limită $l(a) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) = n$, dacă $n < a < n+1$.

În punctele $a = n \in \mathbb{Z}$ funcția are limita la stânga $l_s(a) = \lim_{x \rightarrow n, x < n} f(x) = n-1$ și limita la dreapta $l_d(a) = \lim_{x \rightarrow n, x > n} f(x) = n$. Cum $l_s(a) \neq l_d(a)$, atunci f nu are limită în punctele $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.

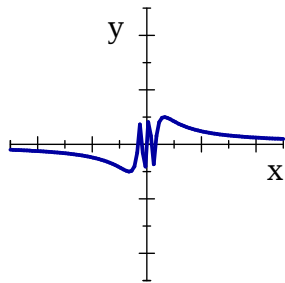


Exemplul 5.1.4. Fie funcția:

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x} & \text{dacă } x \neq 0 \\ 0, & \text{dacă } x = 0 \end{cases}$$

În punctele $a \in]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$ funcția are limită $l(a) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \sin \frac{1}{a}$.

În punctul $a = 0$ funcția nu are limită nici la stânga și nici la dreapta.



Teorema 5.1.4. (proprietatea de unicitate a limitei)

Fie $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in A' \subseteq \mathbb{R}$. Dacă $\exists \lim_{x \rightarrow a, x \in A} f(x)$ atunci aceasta este unică.

Corolar 5.1.1. (criteriul de inexistență a limitei cu șiruri)

Fie $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in A' \subseteq \mathbb{R}$. Dacă

$\exists (x_n)_{n \in \mathbb{N}_m}$ un șir de numere reale din $A \setminus \{a\}$, cu $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$,

$\exists (\tilde{x}_n)_{n \in \mathbb{N}_m}$ un șir de numere reale din $A \setminus \{a\}$, cu $\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{x}_n = a$

astfel încât

•sau unul din șirurile $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}_m}, (f(\tilde{x}_n))_{n \in \mathbb{N}_m}$ nu are limită

•sau ambele șiruri $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}_m}, (f(\tilde{x}_n))_{n \in \mathbb{N}_m}$ au limită, cu

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = l_1, \lim_{n \rightarrow \infty} f(\tilde{x}_n) = l_2 \text{ și } l_1 \neq l_2,$$

atunci $\nexists \lim_{x \rightarrow a, x \in A} f(x)$.

Exemplul 5.1.5. Se arată că $\nexists \lim_{x \rightarrow +\infty} \cos x$. Într-adevăr, fie

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \cos x.$$

Se alege $A = \mathbb{R}$ a.î. $a = +\infty \in A'$. Se observă că

$\exists x_n = 0 + 2n\pi, \forall n \in \mathbb{N}$ un șir de numere reale din $A \setminus \{a\}$, cu $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$,

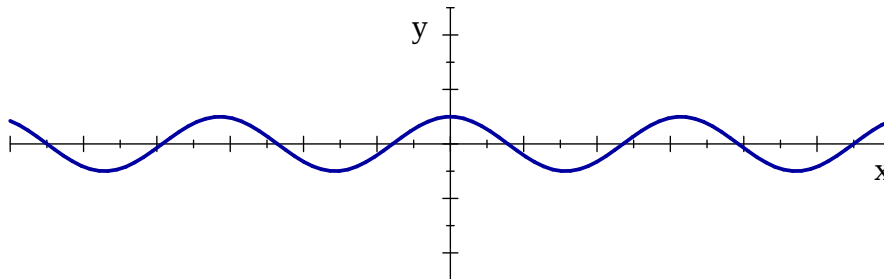
$\exists \tilde{x}_n = \frac{\pi}{2} + 2n\pi, \forall n \in \mathbb{N}$ un șir de numere reale din $A \setminus \{a\}$, cu $\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{x}_n = +\infty$.

Mai mult,

$f(x_n) = \cos(0 + 2n\pi) = \cos 0 = 1, \forall n \in \mathbb{N}$ este un șir de numere reale cu $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = 1$,

$f(\tilde{x}_n) = \cos(\frac{\pi}{2} + 2n\pi) = \cos \frac{\pi}{2} = 0, \forall n \in \mathbb{N}$ este un șir de numere reale cu $\lim_{n \rightarrow \infty} f(\tilde{x}_n) = 0$.

Cum $1 \neq 0 \Rightarrow \nexists \lim_{x \rightarrow +\infty} \cos x$.



Interpretarea geometrică a limitei-asimptote: I. Fie $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in A' \cap \mathbb{R}$.

a) Dreapta $x = a$ se numește *asimptotă verticală la stânga pentru f* dacă

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}} f(x) = +\infty \text{ / } \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}} f(x) = -\infty.$$

b) Dreapta $x = a$ se numește *asimptotă verticală la dreapta pentru f* dacă

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} f(x) = +\infty \text{ / } \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}} f(x) = -\infty.$$

II. a) Fie $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $-\infty \in A'$. Dreapta $y = mx + n$ se numește *asimptotă oblică spre $-\infty$ a funcției f* dacă există și sunt finite limitele

$$m = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} \text{ și } n = \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - mx) \text{ (adică } \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - mx - n) = 0).$$

b) Fie $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $+\infty \in A'$. Dreapta $y = mx + n$ se numește *asimptotă oblică spre $+\infty$ a funcției f* dacă există și sunt finite limitele

$$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} \text{ și } n = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - mx) \text{ (adică } \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - mx - n) = 0).$$

III. a) Fie $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $-\infty \in A'$. Dreapta $y = n$ se numește *asimptotă orizontală spre $-\infty$ a funcției f* dacă există și este finită limita

$$n = \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x)) \text{ (adică } \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - n) = 0).$$

b) Fie $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $+\infty \in A'$. Dreapta $y = n$ se numește *asimptotă orizontală spre $+\infty$ a funcției f* dacă există și este finită limita

$$n = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x)) \text{ (adică } \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - n) = 0).$$

Observație: a) Fie $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ o funcție rațională. Atunci:

- f admite asimptote verticale dacă polinomul Q are rădăcini reale; asimptotele verticale sunt dreptele $x = a_k$, $k \in \{1, 2, \dots, q\}$, unde a_k sunt cele q rădăcini reale distincte;

- f admite asimptotă oblică dacă $\text{grad } P = 1 + \text{grad } Q$; asimptota oblică este $y = mx + n$, unde $mx + n$ este câtul împărțirii lui P la Q ;

- f admite asimptotă orizontală dacă $\text{grad } P \leq \text{grad } Q$; asimptota verticală este $y = n$, unde $n = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}$.

b) O funcție f nu poate admite simultan asimptotă oblică și asimptotă orizontală spre $-\infty / +\infty$.

Example: Conform cu Teorema 5.1.12 ulterioară, se studiază asimptotele pentru:

a) $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{3x+4}{2x+3}$.

$$A =]-\infty, -\frac{3}{2}[\cup]-\frac{3}{2}, +\infty[\text{ în } \mathbb{R}; A' = [-\infty, +\infty] = \overline{\mathbb{R}}.$$

• $-\frac{3}{2} \in A' \Rightarrow$ are sens studiul limitei

$$\lim_{x \rightarrow -\frac{3}{2}} \frac{3x+4}{2x+3} = \frac{3 \cdot \frac{-3}{2} + 4}{0?} = \frac{\frac{-1}{2}}{0?}$$

x	$-\infty$		$-\frac{3}{2}$		$+\infty$
$y_1 = 2x+3$		$- - -$	0	$+ + +$	

$$l_s\left(-\frac{3}{2}\right) = \lim_{x \rightarrow -\frac{3}{2}, x < -\frac{3}{2}} \frac{3x+4}{2x+3} = \frac{\frac{-1}{2}}{0_-} = +\infty \Rightarrow$$

$$\Rightarrow [x \rightarrow -\frac{3}{2}, x < -\frac{3}{2} \Rightarrow f(x) \rightarrow +\infty] \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ dreapta de ecuație $x = -\frac{3}{2}$ este asimptotă verticală la stânga (spre $+\infty$).

$$l_d\left(-\frac{3}{2}\right) = \lim_{x \rightarrow -\frac{3}{2}, x > -\frac{3}{2}} \frac{3x+4}{2x+3} = \frac{\frac{-1}{2}}{0_+} = -\infty \Rightarrow$$

$$\Rightarrow [x \rightarrow -\frac{3}{2}, x > -\frac{3}{2} \Rightarrow f(x) \rightarrow -\infty] \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ dreapta de ecuație $x = -\frac{3}{2}$ este asimptotă verticală la dreapta (spre $-\infty$).

$$l_s\left(-\frac{3}{2}\right) \neq l_d\left(-\frac{3}{2}\right) \Rightarrow \nexists \lim_{x \rightarrow -\frac{3}{2}} f(x).$$

- $-\infty \in A' \Rightarrow$ are sens studiul limitei

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x+4}{2x+3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x(3+\frac{4}{x})}{x(2+\frac{3}{x})} = \frac{3}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow [x \rightarrow -\infty \Rightarrow f(x) \rightarrow \frac{3}{2}] \Rightarrow$$

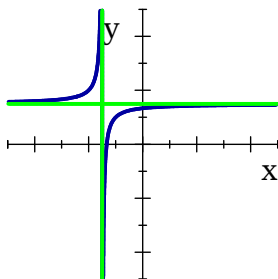
$\Rightarrow$ dreapta de ecuație $y = \frac{3}{2}$ este asimptotă orizontală spre $-\infty$.

- $+\infty \in A' \Rightarrow$ are sens studiul limitei

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x+4}{2x+3} = \frac{3}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow [x \rightarrow +\infty \Rightarrow f(x) \rightarrow \frac{3}{2}] \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ dreapta de ecuație $y = \frac{3}{2}$ este asimptotă orizontală spre $+\infty$.



b) $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{x^2 + 2x + 3}{2x + 3}$.

$$A =]-\infty, -\frac{3}{2}[\cup]-\frac{3}{2}, +\infty[\text{ în } \mathbb{R}; A' = [-\infty, +\infty] = \overline{\mathbb{R}}.$$

- $-\frac{3}{2} \in A' \Rightarrow$ are sens studiul limitei

$$\lim_{x \rightarrow -\frac{3}{2}} \frac{x^2 + 2x + 3}{2x + 3} = \frac{(\frac{-3}{2})^2 + 2 \cdot \frac{-3}{2} + 3}{0_?} = \frac{\frac{9}{4}}{0_?}$$

x	$-\infty$		$-\frac{3}{2}$		$+\infty$
$y_1 = 2x + 3$		- - -	0	+ + +	

$$l_s\left(-\frac{3}{2}\right) = \lim_{x \rightarrow -\frac{3}{2}, x < -\frac{3}{2}} \frac{x^2 + 2x + 3}{2x + 3} = \frac{\frac{9}{4}}{0_-} = -\infty \Rightarrow$$

$$\Rightarrow [x \rightarrow -\frac{3}{2}, x < -\frac{3}{2} \Rightarrow f(x) \rightarrow -\infty] \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ dreapta de ecuație $x = -\frac{3}{2}$ este asimptotă verticală la stânga (spre $-\infty$).

$$l_d\left(-\frac{3}{2}\right) = \lim_{x \rightarrow -\frac{3}{2}, x > -\frac{3}{2}} \frac{x^2 + 2x + 3}{2x + 3} = \frac{\frac{9}{4}}{0_+} = +\infty \Rightarrow$$

$$\Rightarrow [x \rightarrow -\frac{3}{2}, x > -\frac{3}{2} \Rightarrow f(x) \rightarrow +\infty] \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ dreapta de ecuație $x = -\frac{3}{2}$ este asimptotă verticală la dreapta (spre $+\infty$).

$$l_s\left(-\frac{3}{2}\right) \neq l_d\left(-\frac{3}{2}\right) \Rightarrow \nexists \lim_{x \rightarrow -\frac{3}{2}} f(x).$$

- $-\infty \in A' \Rightarrow$ are sens studiul limitei

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 2x + 3}{2x + 3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2(1 + \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2})}{x(2 + \frac{3}{x})} = \frac{1}{2}(-\infty)^{2-1} = -\infty \Rightarrow$$

$$\Rightarrow [x \rightarrow -\infty \Rightarrow f(x) \rightarrow -\infty] \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ nu există asimptotă orizontală spre $-\infty$.

$$m = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 2x + 3}{x(2x + 3)} = \frac{1}{2}; n = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^2 + 2x + 3}{2x + 3} - \frac{1}{2}x \right) = \frac{1}{4} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ dreapta de ecuație $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}$ este asimptotă oblică spre $-\infty$.

• $+\infty \in A' \Rightarrow$ are sens studiul limitei

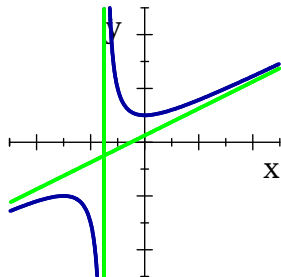
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 2x + 3}{2x + 3} = +\infty \Rightarrow$$

$$\Rightarrow [x \rightarrow +\infty \Rightarrow f(x) \rightarrow +\infty] \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ nu există asimptotă orizontală spre $+\infty$.

$$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 2x + 3}{x(2x + 3)} = \frac{1}{2}; n = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 + 2x + 3}{2x + 3} - \frac{1}{2}x \right) = \frac{1}{4} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ dreapta de ecuație $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}$ este asimptotă oblică spre $+\infty$.



A se vedea Seminar și Complemente de Matematică pentru alte exemple.

Teorema 5.1.5. (trecerea la limită sub modul)

Fie $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in A' \subseteq \overline{\mathbb{R}}$. Dacă $\exists \lim_{x \rightarrow a, x \in A} f(x) = l$ atunci $\exists \lim_{x \rightarrow a, x \in A} |f|(x)$ și

$$\lim_{x \rightarrow a, x \in A} (|f|(x)) = |l|, \text{ adică } \lim_{x \rightarrow a, x \in A} (|f|(x)) = \left| \lim_{x \rightarrow a, x \in A} f(x) \right|.$$

Teorema 5.1.6. (trecerea la limită în inegalități) Fie $f, g : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in A' \subseteq \overline{\mathbb{R}}$. Dacă

(i) $\exists U \in \mathcal{V}(a)$ astfel încât $f(x) \leq g(x), \forall x \in U \cap A, x \neq a$,

(ii) $\exists \lim_{x \rightarrow a, x \in A} f(x), \exists \lim_{x \rightarrow a, x \in A} g(x)$,

atunci $\lim_{x \rightarrow a, x \in A} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow a, x \in A} g(x)$.

Teorema 5.1.7. (trecerea la limită în compunerea de funcții) Fie $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow B \subseteq \mathbb{R}$ și $g : B \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Fie $a \in A' \subseteq \overline{\mathbb{R}}$. Dacă

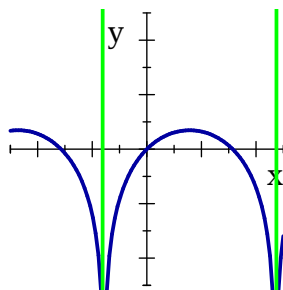
(i) $\exists \lim_{x \rightarrow a, x \in A} f(x) = b, b \in B' \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ și $f(x) \neq b$ pentru $x \neq a$,

(ii) $\exists \lim_{y \rightarrow b, y \in B} g(y) = c$

atunci $\exists \lim_{x \rightarrow a, x \in A} (g \circ f)(x) = c$.

Exemplul 5.1.6. $\lim_{x \rightarrow 0} (\ln(1 + \sin x)) = \ln \left(\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sin x) \right) = \ln 1 = 0$.

Reprezentarea graficului pentru $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \ln(1 + \sin x)$:



○ **Teorema 5.1.8. (criteriul-CNS Cauchy-Bolzano de existență a limitei)** Fie

$f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in A' \subseteq \overline{\mathbb{R}}$. Atunci funcția f are limită finită, $\exists \left(\lim_{x \rightarrow a, x \in A} f(x) \right) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$

$[\forall \varepsilon > 0, \exists U = U_\varepsilon \in \mathcal{V}(a) \text{ a.î. } \forall x' \in A \cap U, x' \neq a, \forall x'' \in A \cap U, x'' \neq a \Rightarrow |f(x') - f(x'')| < \varepsilon]$.

Teorema 5.1.9. (criteriul-CS Weierstrass de existență a limitei) Fie $f, g : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in A' \subseteq \overline{\mathbb{R}}$. Dacă

(i) $\exists l \in \mathbb{R}$ și $\exists U \in \mathcal{V}(a)$ astfel încât $|f(x) - l| \leq g(x), \forall x \in U \cap A, x \neq a$,

(ii) $\exists \lim_{x \rightarrow a, x \in A} g(x) = 0$,

atunci $\exists \lim_{x \rightarrow a, x \in A} f(x) = l$.

Teorema 5.1.10. (criteriul-CS cleștelui de existență a limitei) Fie $f, g, h : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in A' \subseteq \overline{\mathbb{R}}$. Dacă

(i) $\exists U \in \mathcal{V}(a)$ astfel încât $g(x) \leq f(x) \leq h(x), \forall x \in U \cap A, x \neq a$,

(ii) $\exists \lim_{x \rightarrow a, x \in A} g(x) = l, \exists \lim_{x \rightarrow a, x \in A} h(x) = l$

atunci $\exists \lim_{x \rightarrow a, x \in A} f(x) = l$.

Propoziția 5.1.2. (criteriu-CS de existență a limitei) Fie $f, g : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in A' \subseteq \overline{\mathbb{R}}$. Dacă

(i) $\exists U \in \mathcal{V}(a)$ astfel încât $g(x) \leq f(x), \forall x \in U \cap A, x \neq a$,

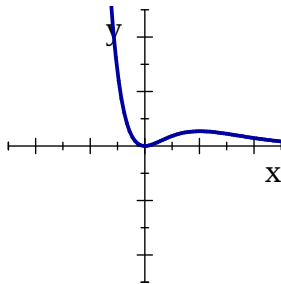
(ii) $\exists \lim_{x \rightarrow a, x \in A} g(x) = +\infty$

atunci $\exists \lim_{x \rightarrow a, x \in A} f(x) = +\infty$.

Exemplul 5.1.7. Fie $\boxed{\forall \alpha \in \mathbb{R}, \alpha > 0}$ dat. Atunci

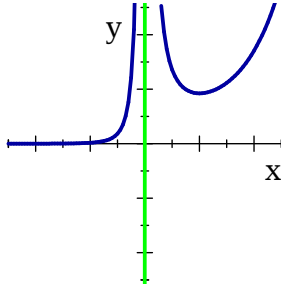
a) $\boxed{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^\alpha}{e^x} = 0}$. Ex: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt[3]{x})^{\frac{2}{7}}}{e^{\sqrt[3]{x}}}$ $\begin{matrix} u(x) = \sqrt[3]{x} \\ \lim_{x \rightarrow 0} u(x) = 0 \end{matrix}$ $\frac{0}{0}$, $\alpha = \frac{2}{7}$.

Reprezentarea graficului pentru $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{x^2}{e^x}$:



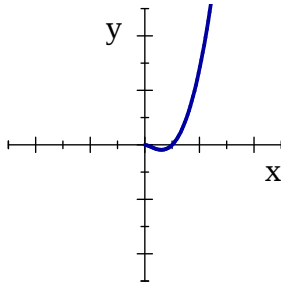
b) $\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^\alpha} = +\infty}$. Ex: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{2x}}{\sqrt{2x}}$ $\begin{matrix} u(x) = 2x \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} u(x) = +\infty \end{matrix}$ $\frac{+\infty}{+\infty}$, $\alpha = \frac{1}{2}$.

Reprezentarea graficului pentru $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{e^x}{x^2}$:



c) $\lim_{x \rightarrow 0, x > 0} x^\alpha \ln x = 0.$ Ex: $\lim_{x \rightarrow 0, x > 0} \sqrt[3]{x} \ln x = 0, \alpha = \frac{1}{3}.$

Reprezentarea graficului pentru $f :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2 \ln x :$



Demonstrație. b) Într-adevăr, fie $f :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{e^x}{x^\alpha}.$

Cum $e^z > z, \forall z \in \mathbb{R}$, atunci

$$f(x) = \frac{e^x}{x^\alpha} = \left(\frac{e^{\frac{x}{2\alpha}}}{x^{\frac{\alpha}{2\alpha}}} \right)^{2\alpha} > \left(\frac{\frac{x}{2\alpha}}{x^{\frac{1}{2}}}} \right)^{2\alpha} = \left(\frac{1}{2\alpha} \right)^{2\alpha} x^\alpha, \forall x \in]0, +\infty[.$$

Dar $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2\alpha} \right)^{2\alpha} x^\alpha = +\infty \xrightarrow{\text{Prop. 5.1.2}} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$

Propoziția 5.1.3. (criteriu-CS de existență a limitei) Fie $f, g : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, a \in A' \subseteq \overline{\mathbb{R}}.$

Dacă

(i) $\exists U \in \mathcal{V}(a)$ astfel încât $f(x) \leq g(x), \forall x \in U \cap A, x \neq a,$

(ii) $\exists \lim_{x \rightarrow a, x \in A} g(x) = -\infty$

atunci $\exists \lim_{x \rightarrow a, x \in A} f(x) = -\infty.$

Teorema 5.1.11. (operații cu limite de funcții) Fie $f, g : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, a \in A' \subseteq \overline{\mathbb{R}}.$ Se presupune că $\exists \lim_{x \rightarrow a, x \in A} f(x), \exists \lim_{x \rightarrow a, x \in A} g(x).$ Atunci

1°. Funcția sumă $f + g$, dacă are sens, are limită în a și

$$\lim_{x \rightarrow a, x \in A} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow a, x \in A} f(x) + \lim_{x \rightarrow a, x \in A} g(x). \text{ Nu se atribuie sens dacă:}$$

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow a, x \in A} f(x) = +\infty \text{ și } \lim_{x \rightarrow a, x \in A} g(x) = -\infty. \text{ b) } \lim_{x \rightarrow a, x \in A} f(x) = -\infty \text{ și } \lim_{x \rightarrow a, x \in A} g(x) = +\infty.$$

2°. Funcția diferență $f - g$, dacă are sens, are limită în a și

$$\lim_{x \rightarrow a, x \in A} (f(x) - g(x)) = \lim_{x \rightarrow a, x \in A} f(x) - \lim_{x \rightarrow a, x \in A} g(x). \text{ Nu se atribuie sens dacă:}$$

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow a, x \in A} f(x) = +\infty \text{ și } \lim_{x \rightarrow a, x \in A} g(x) = +\infty. \text{ b) } \lim_{x \rightarrow a, x \in A} f(x) = -\infty \text{ și } \lim_{x \rightarrow a, x \in A} g(x) = -\infty.$$

3°. Funcția produs $f \cdot g$, dacă are sens, are limită în a și

$$\lim_{x \rightarrow a, x \in A} (f(x) \cdot g(x)) = \left(\lim_{x \rightarrow a, x \in A} f(x) \right) \cdot \left(\lim_{x \rightarrow a, x \in A} g(x) \right). \text{ Nu se atribuie sens dacă:}$$

- a) $\lim_{x \rightarrow a, x \in A} f(x) = 0$ și $\lim_{x \rightarrow a, x \in A} g(x) = \pm\infty$. b) $\lim_{x \rightarrow a, x \in A} f(x) = \pm\infty$ și $\lim_{x \rightarrow a, x \in A} g(x) = 0$.
- 4°. Funcția cât $\frac{f}{g}$, dacă are sens, are limită în a și

$$\lim_{x \rightarrow a, x \in A} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right) = \frac{\lim_{x \rightarrow a, x \in A} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a, x \in A} g(x)}. \text{ Nu se atribuie sens dacă:}$$

- a) $\lim_{x \rightarrow a, x \in A} f(x) = 0$ și $\lim_{x \rightarrow a, x \in A} g(x) = 0$. b) $\lim_{x \rightarrow a, x \in A} f(x) = \pm\infty$ și $\lim_{x \rightarrow a, x \in A} g(x) = \pm\infty$.
- 5°. Funcția putere f^g , dacă are sens, are limită în a și

$$\lim_{x \rightarrow a, x \in A} (f(x))^{g(x)} = \left(\lim_{x \rightarrow a, x \in A} f(x) \right)^{\lim_{x \rightarrow a, x \in A} g(x)}. \text{ Nu se atribuie sens dacă:}$$

- a) $\lim_{x \rightarrow a, x \in A} f(x) = 0$ și $\lim_{x \rightarrow a, x \in A} g(x) = 0$. b) $\lim_{x \rightarrow a, x \in A} f(x) = 1$ și $\lim_{x \rightarrow a, x \in A} g(x) = \pm\infty$.
- c) $\lim_{x \rightarrow a, x \in A} f(x) = \pm\infty$ și $\lim_{x \rightarrow a, x \in A} g(x) = 0$.

Teorema 5.1.12. (limitele unor funcții elementare-cu interpretări pe reprezentările grafice din Anexa 4)

1°. Funcții polinomiale. Fie $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$, $a_n \neq 0$ și

$P: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $P(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n$. Atunci

$$\lim_{x \rightarrow a} P(x) = P(a), \text{ dacă } a \in \mathbb{R}; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} P(x) = a_n \cdot (+\infty)^n; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} P(x) = a_n \cdot (-\infty)^n$$

2°. Funcții raționale. Fie $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$, $a_n \neq 0$ și $b_0, \dots, b_m \in \mathbb{R}$, $b_m \neq 0$

$\frac{P}{Q}: A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $\frac{P}{Q}(x) = \frac{a_0 + a_1x + \dots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n}{b_0 + b_1x + \dots + b_{m-1}x^{m-1} + b_mx^m}$. Atunci

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(a)}{Q(a)}, \text{ dacă } a \in \mathbb{R} \text{ a.î. } Q(a) \neq 0.$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{P(x)}{Q(x)} \text{ se calculează cu } l_s(a), l_d(a), \text{ dacă } a \in \mathbb{R} \text{ a.î. } Q(a) = 0 \text{ și } P(a) \neq 0.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \begin{cases} \frac{a_n}{b_m}, & \text{dacă } m = n \\ 0, & \text{dacă } n < m \\ \left(\frac{a_n}{b_m}\right)(+\infty)^{n-m} & \text{dacă } n > m \end{cases}; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \begin{cases} \frac{a_n}{b_m}, & \text{dacă } m = n \\ 0, & \text{dacă } n < m \\ \left(\frac{a_n}{b_m}\right)(-\infty)^{n-m} & \text{dacă } n > m \end{cases}$$

3°. Funcția radical.

$$\lim_{x \rightarrow a} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{a}, \text{ pentru } n = 2k, k \in \mathbb{N}^*, \text{ dacă } a \in [0, +\infty[.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{x} = +\infty, \text{ pentru } n = 2k, k \in \mathbb{N}^*.$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{a}, \text{ pentru } n = 2k + 1, k \in \mathbb{N}^*, \text{ dacă } a \in \mathbb{R}.$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \sqrt[n]{x} = \pm\infty, \text{ pentru } n = 2k + 1, k \in \mathbb{N}^*.$$

4°. Funcția putere

$$\lim_{x \rightarrow a} x^r = a^r, \text{ pentru } r \in \mathbb{R}, \text{ dacă } a \in]0, +\infty[.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^r = +\infty; \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x^r = 0, \text{ pentru } r \in \mathbb{R}, r > 0;$$

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} x^r = 0, \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x^r = 0, \text{ pentru } r \in \mathbb{R}, r < 0.}$$

Comentariu: Folosind funcția $\ln$ de mai jos $\Rightarrow$

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} x^r = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{r \ln x} = e^{r(+\infty)}, \text{ pentru } r \in \mathbb{R}, \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x^r = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} e^{r \ln x} = e^{r(-\infty)}, \text{ pentru } r \in \mathbb{R}.}$$

5°. Funcția exponențială

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow a} q^x = q^a, \text{ pentru } q \in \mathbb{R}, q > 0, q \neq 1, \text{ dacă } a \in \mathbb{R}.}$$

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow -\infty} q^x = 0; \lim_{x \rightarrow +\infty} q^x = +\infty; \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{q^x} = 0, n \in \mathbb{Z}^*, \text{ pentru } q \in \mathbb{R}, q > 1.}$$

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow -\infty} q^x = +\infty; \lim_{x \rightarrow +\infty} q^x = 0, \text{ pentru } q \in \mathbb{R}, 0 < q < 1.}$$

6°. Funcția logaritmică

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow a} \log_q x = \log_q a, \text{ pentru } q \in \mathbb{R}, q > 0, q \neq 1, \text{ dacă } a \in]0, +\infty[.}$$

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_q x = +\infty; \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \log_q x = -\infty, \text{ pentru } q \in \mathbb{R}, q > 1.}$$

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log_q x}{x^r} = 0, r > 0; \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x^r (\log_q x) = 0, r > 0, \text{ pentru } q \in \mathbb{R}, q > 1,}$$

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_q x = -\infty; \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \log_q x = +\infty, \text{ pentru } q \in \mathbb{R}, 0 < q < 1.}$$

7°. Funcții trigonometrice și funcții hiperbolice

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow a} (\sin x) = \sin a, \text{ dacă } a \in \mathbb{R}. \nexists \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sin x), \nexists \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sin x).}$$

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow a} (\cos x) = \cos a, \text{ dacă } a \in \mathbb{R}. \nexists \lim_{x \rightarrow +\infty} (\cos x), \nexists \lim_{x \rightarrow -\infty} (\cos x).}$$

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow a} \operatorname{tg} x = \operatorname{tg} a, \text{ dacă } a \in \mathbb{R}, a \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}. \lim_{\substack{x \rightarrow \frac{\pi}{2} \\ x < \frac{\pi}{2}}} \operatorname{tg} x = +\infty, \lim_{\substack{x \rightarrow \frac{\pi}{2} \\ x > \frac{\pi}{2}}} \operatorname{tg} x = -\infty.}$$

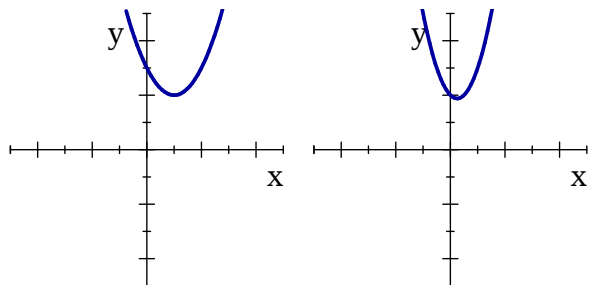
$$\boxed{\lim_{x \rightarrow a} (\operatorname{ctg} x) = \operatorname{ctg} a, \text{ dacă } a \in \mathbb{R}, a \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}. \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} (\operatorname{ctg} x) = -\infty, \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} (\operatorname{ctg} x) = +\infty.}$$

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} (\operatorname{arctg} x) = \frac{\pi}{2}, \lim_{x \rightarrow -\infty} (\operatorname{arctg} x) = -\frac{\pi}{2}.}$$

Observație: Toate formulele au loc cu x înlocuit cu $u(x)$ cu limita corespunzătoare.

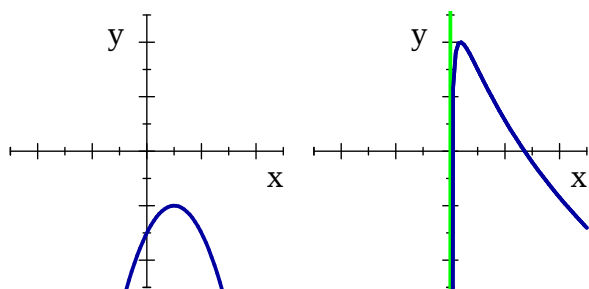
Exemple cu interpretări grafice:

1°. a) $\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 - 2x + 3) = 1^2 - 2 \cdot 1 + 3 = 2$; b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x^2 - x + 2) = 2 \cdot (+\infty)^2 = +\infty$;



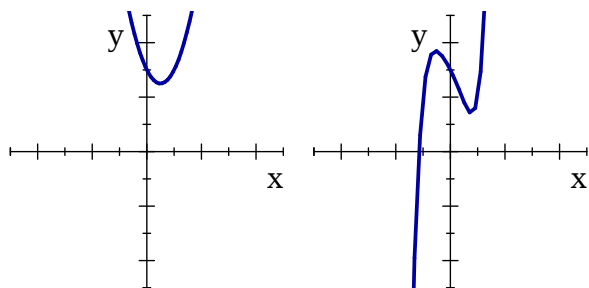
c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-x^2 + 2x - 3) = (-1) \cdot (+\infty)^2 = -\infty$; d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-(\ln x)^2 + 2(\ln x) - 3 \right) \stackrel{u(x)=\ln x}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} u(x) = \infty$

$-\infty$;



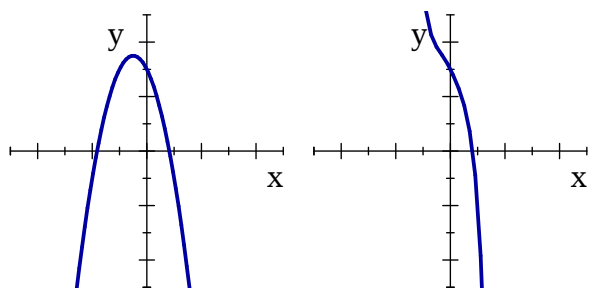
e) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (2x^2 - 2x + 3) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 \left(2 - \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2} \right) = (-\infty)^2 \cdot (2 - 0 + 0) = +\infty$;

f) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (2x^5 - x^2 - 2x + 3) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^5 \left(2 - \frac{1}{x^3} - \frac{2}{x^4} + \frac{3}{x^5} \right) = (-\infty)^5 \cdot (2 - 0 - 0 + 0) = -\infty$;

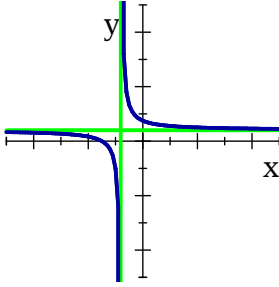


g) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-2x^2 - 2x + 3) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 \left(-2 - \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2} \right) = (-\infty)^2 \cdot (-2 - 0 + 0) = -\infty$;

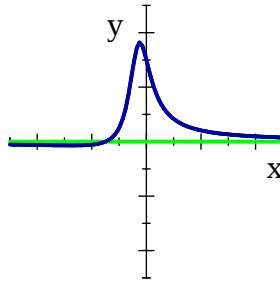
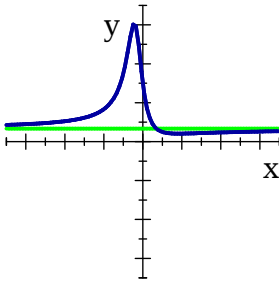
h) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-2x^5 - x^2 - 2x + 3) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^5 \left(-2 - \frac{1}{x^3} - \frac{2}{x^4} + \frac{3}{x^5} \right) = (-\infty)^5 \cdot (-2 - 0 - 0 + 0) = +\infty$;



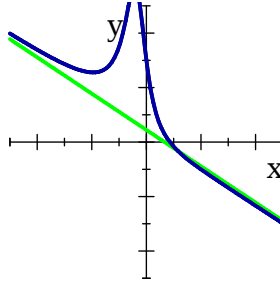
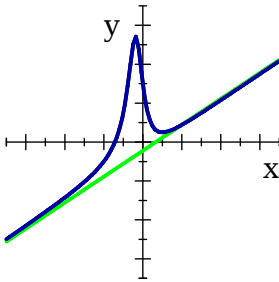
2°. a) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x+3}{5x+4} = \frac{2 \cdot 3 + 3}{5 \cdot 3 + 4} = \frac{9}{19};$
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x+3}{5x+4} = \frac{2}{5}; \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x+3}{5x+4} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x(2 + \frac{3}{x})}{x(5 + \frac{4}{x})} = \frac{2}{5};$
 $\lim_{x \rightarrow \frac{-4}{5}, x < \frac{-4}{5}} \frac{2x+3}{5x+4} = \frac{2 \cdot \frac{-4}{5} + 3}{0_-} = -\infty; \lim_{x \rightarrow \frac{-4}{5}, x > \frac{-4}{5}} \frac{2x+3}{5x+4} = \frac{2 \cdot \frac{-4}{5} + 3}{0_+} = +\infty;$



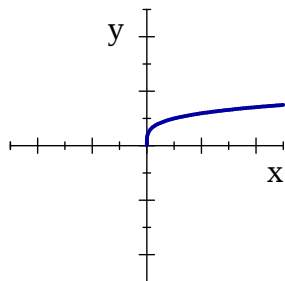
b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 - 2x + 3}{3x^2 + 2x + 1} = \frac{2 \cdot 1^2 - 2 \cdot 1 + 3}{3 \cdot 1^2 + 2 \cdot 1 + 1} = \frac{1}{2}; \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 - 2x + 3}{3x^2 + 2x + 1} = \frac{2}{3}; \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2 - 2x + 3}{3x^2 + 2x + 1} = \frac{2}{3}$
c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x+3}{3x^2 + 2x + 1} = 0; \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x+3}{3x^2 + 2x + 1} = 0;$



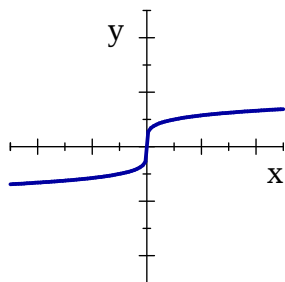
d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3 - 2x + 3}{3x^2 + 2x + 1} = +\infty; \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^3 - 2x + 3}{3x^2 + 2x + 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3(2 - \frac{2}{x^2} + \frac{3}{x^3})}{x^2(3 + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2})} = (-\infty) \cdot \frac{2}{3} = -\infty;$
e) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x^3 - 2x + 3}{3x^2 + 2x + 1} = -\infty; \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2x^3 - 2x + 3}{3x^2 + 2x + 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3(-2 - \frac{2}{x^2} + \frac{3}{x^3})}{x^2(3 + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2})} = (-\infty) \cdot \frac{-2}{3} = +\infty;$



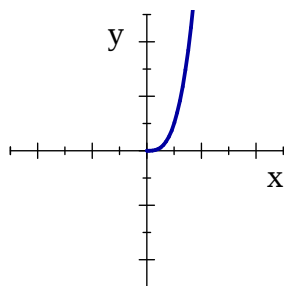
3°. a) $\lim_{x \rightarrow 2} \sqrt[4]{x} = \sqrt[4]{2}; \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[4]{x} = +\infty;$



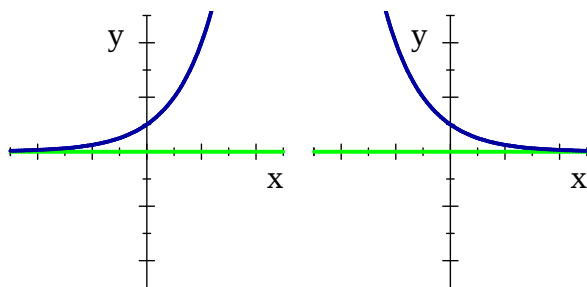
b) $\lim_{x \rightarrow -2} \sqrt[5]{x} = \sqrt[5]{-2}$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[5]{x} = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt[5]{x} = -\infty$;



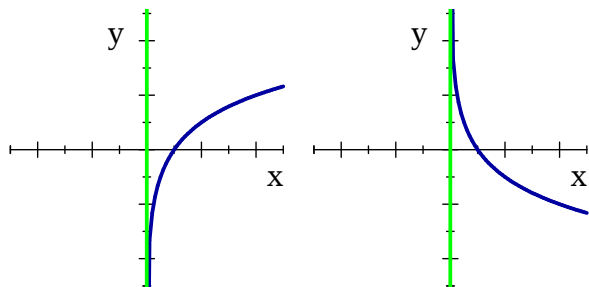
4°. a) $\lim_{x \rightarrow 7} x^\pi = 7^\pi$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^\pi = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\pi \ln x} = e^{\pi(+\infty)} = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow 0, x > 0} x^\pi = \lim_{x \rightarrow 0, x > 0} e^{\pi \ln x} = e^{\pi(-\infty)} = 0$.



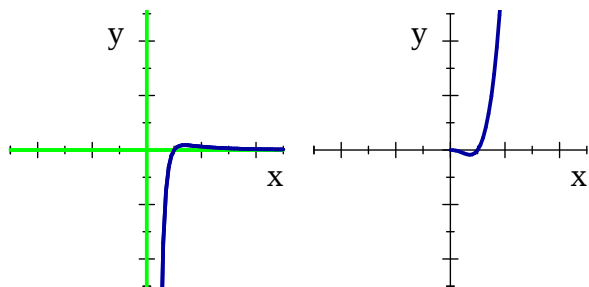
5°. a) $\lim_{x \rightarrow 7} 2^x = 2^7$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} 2^x = 0$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2^x = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^7}{2^x} = 0$, $n = 7 \in \mathbb{Z}$
 b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x = 0$.



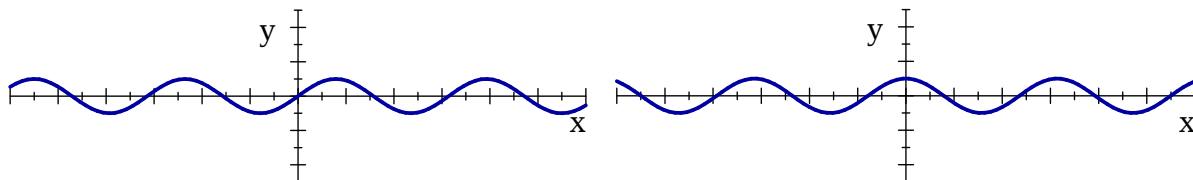
c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{7\pi}{2000}\right)^x = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{7\pi}{2000}\right)^x = 0$.
 6°. a) $\lim_{x \rightarrow 7} (\log_2 x) = \log_2 7$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\log_2 x) = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow 0, x > 0} (\log_2 x) = -\infty$,
 b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\log_{\frac{1}{2}} x\right) = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow 0, x > 0} \left(\log_{\frac{1}{2}} x\right) = +\infty$.



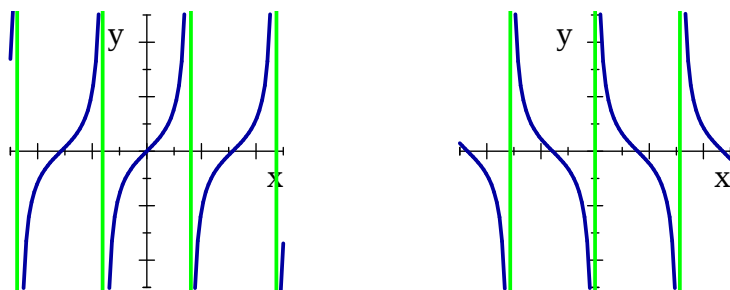
c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log_2 x}{x^3} = 0, r = 3 > 0, \lim_{x \rightarrow 0, x > 0} x^3 (\log_2 x) = 0, r = 3 > 0,$



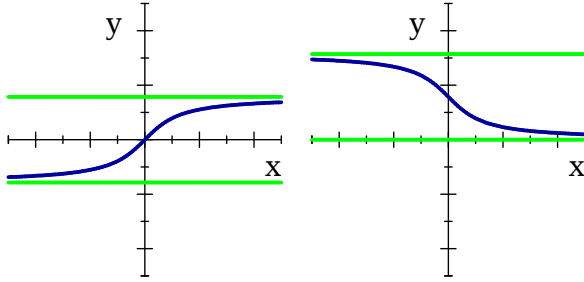
7°. a) $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow \pi} (\sin x) = \sin \pi = 0; \\ \nexists \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sin x), \nexists \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sin x). \end{cases}$ b) $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow \pi} (\cos x) = \cos \pi = -1; \\ \nexists \lim_{x \rightarrow +\infty} (\cos x), \nexists \lim_{x \rightarrow -\infty} (\cos x). \end{cases}$



c) $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow \pi} \operatorname{tg} x = \operatorname{tg} \pi = 0; \\ \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \operatorname{tg} x = +\infty, \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \operatorname{tg} x = -\infty. \end{cases}$ d) $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (\operatorname{ctg} x) = \operatorname{ctg} \frac{\pi}{4} = 1; \\ \lim_{x \rightarrow 0} (\operatorname{ctg} x) = -\infty, \lim_{x \rightarrow 0} (\operatorname{ctg} x) = +\infty. \end{cases}$

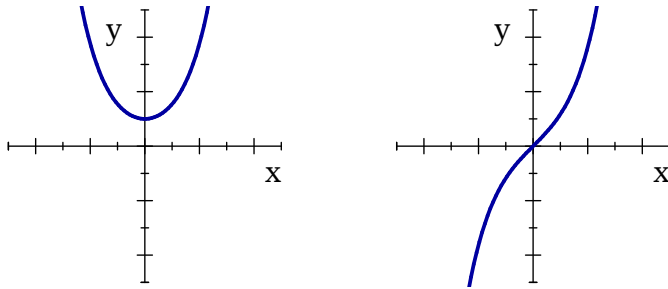


e) $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} (\operatorname{arctg} x) = \frac{\pi}{2}, \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} (\operatorname{arctg} x) = -\frac{\pi}{2}. \end{cases}$ f) $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} (\operatorname{arcctg} x) = 0, \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} (\operatorname{arcctg} x) = \pi. \end{cases}$



f) $\text{ch } x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \text{ch } x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}; \text{sh } x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \text{sh } x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0} (\text{ch } x) = \text{ch } 0 = 1; \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} (\text{ch } x) = +\infty, \lim_{x \rightarrow -\infty} (\text{ch } x) = +\infty. \end{cases} \quad \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0} (\text{sh } x) = \text{sh } 0 = 0; \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} (\text{sh } x) = +\infty, \lim_{x \rightarrow -\infty} (\text{sh } x) = -\infty. \end{cases}$$



Teorema 5.1.13. (limite remarcabile)

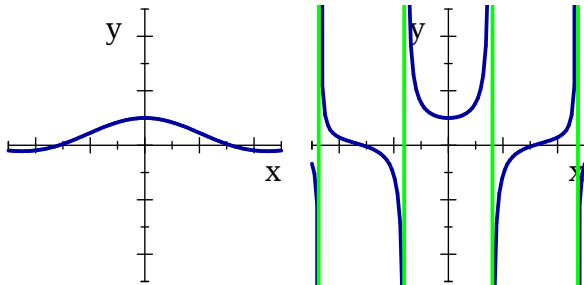
1°. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1; \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin u(x)}{u(x)} = 1, \text{ dacă } \lim_{x \rightarrow a} u(x) = 0.$

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{tg } x}{x} = 1; \lim_{x \rightarrow a} \frac{\text{tg } u(x)}{u(x)} = 1, \text{ dacă } \lim_{x \rightarrow a} u(x) = 0.$

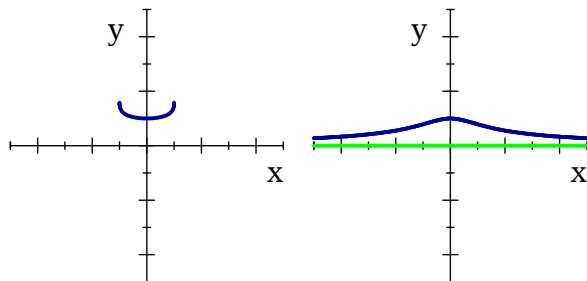
$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1; \lim_{x \rightarrow a} \frac{\arcsin u(x)}{u(x)} = 1, \text{ dacă } \lim_{x \rightarrow a} u(x) = 0.$

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{arctg } x}{x} = 1; \lim_{x \rightarrow a} \frac{\text{arctg } u(x)}{u(x)} = 1, \text{ dacă } \lim_{x \rightarrow a} u(x) = 0.$

$f : A \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{\sin x}{x} : \quad f : A \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{\text{tg } x}{x} :$

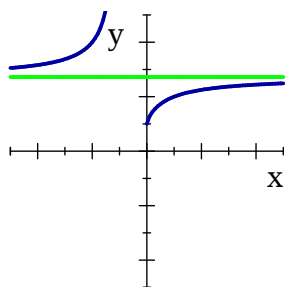


$f : A \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{\arcsin x}{x} : \quad f : A \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{\text{arctg } x}{x} :$



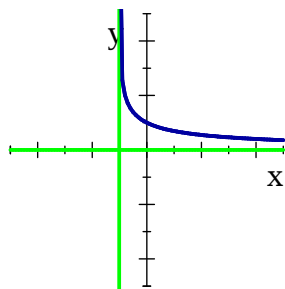
$$2^\circ. \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e; \lim_{x \rightarrow a} \left(1 + \frac{1}{u(x)}\right)^{u(x)} = e, \text{ dacă } \lim_{x \rightarrow a} u(x) = +\infty.$$

$$f : A \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x :$$



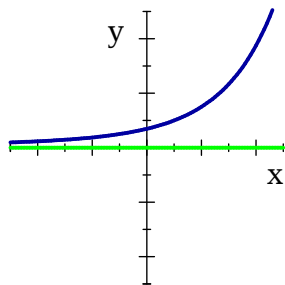
$$3^\circ. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1; \lim_{x \rightarrow a} \frac{\ln(1+u(x))}{u(x)} = 1, \text{ dacă } \lim_{x \rightarrow a} u(x) = 0.$$

$$f : A \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{\ln(1+x)}{x} :$$



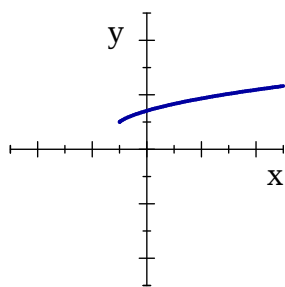
$$4^\circ. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a, a > 0; \lim_{x \rightarrow a} \frac{a^{u(x)} - 1}{u(x)} = \ln a, a > 0, \text{ dacă } \lim_{x \rightarrow a} u(x) = 0.$$

$$f : A \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{2^x - 1}{x} :$$

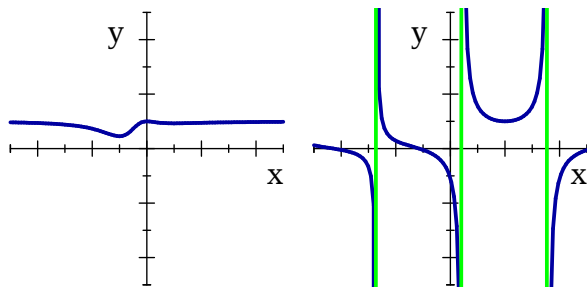


$$5^\circ. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^r - 1}{x} = r, r \in \mathbb{R}; \lim_{x \rightarrow a} \frac{(1+u(x))^r - 1}{u(x)} = r, r \in \mathbb{R}, \text{ dacă } \lim_{x \rightarrow a} u(x) = 0.$$

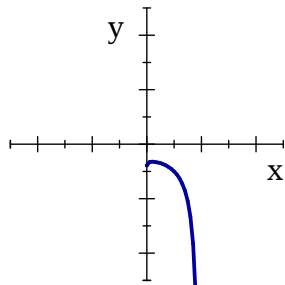
$$f : A \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{(1+x)^{\sqrt{2}} - 1}{x} :$$



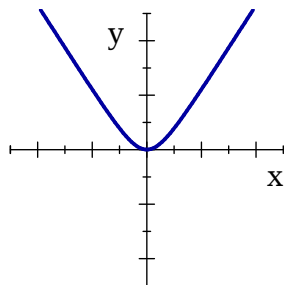
Exemple: 1°. a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin \frac{2x}{x^2+x+1}}{\frac{2x}{x^2+x+1}} = 1$; b) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\operatorname{tg}(x-2)}{x-2} = 1$;



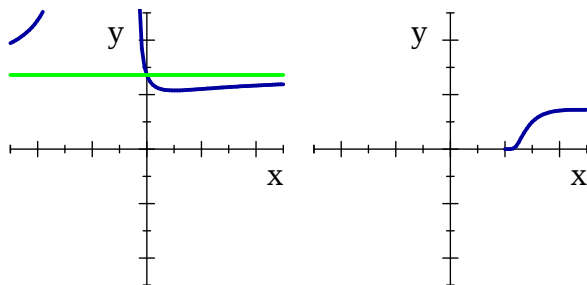
c) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\arcsin(x-1)}{x^2-3x+2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\arcsin(x-1)}{x-1} \cdot \frac{x-1}{(x-1)(x-2)} = 1 \cdot \frac{1}{1-2} = -1$;



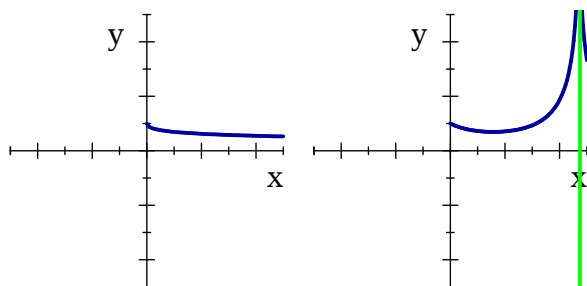
d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\operatorname{arctg} \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = 1.$



$$2^\circ. \text{ a) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{2x}{x^2 + x + 1} \right)^{\frac{x^2 + x + 1}{2x}} = e; \text{ b) } \lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ x > 3}} (1 + (x - 3))^{\frac{1}{x - 3}} = e.$$

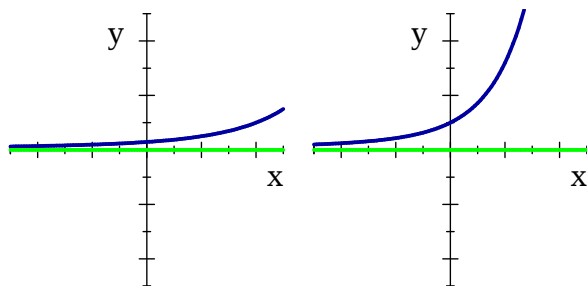


$$3^\circ. \text{ a) } \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{\ln(1 + \sqrt{x})}{\sqrt{x}} = 1. \quad \text{ b) } \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{\ln(1 + \sin x)}{\sin x} = 1$$



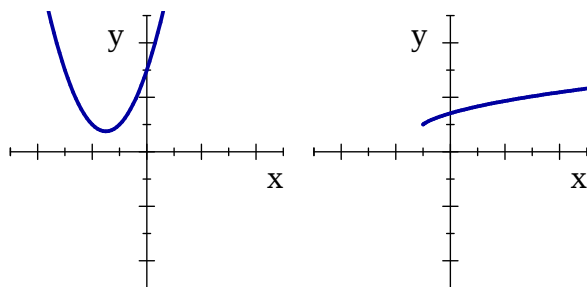
$$\text{c) } \lim_{\substack{x \rightarrow 4 \\ x > 4}} \frac{\ln(x - 3)}{x - 4} = \lim_{\substack{x \rightarrow 4 \\ x > 4}} \frac{\ln(1 + (x - 4))}{x - 4} = 1.$$

$$4^\circ. \text{ a) } \lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ x > 3}} \frac{2^{x-3} - 1}{x - 3} = \ln 2; \quad \text{ b) } \boxed{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = \ln e = 1}$$



$$\text{c) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^{x-x^2} - 1}{x - x^2} = \ln e = 1; \text{ d) } \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(2^{\frac{1}{x}} - 1 \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2^{\frac{1}{x}} - 1}{\frac{1}{x}} = \ln 2;$$

$$5^\circ. \text{ a) } \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{(1+x)^3 - 1}{x} = 3; \quad \text{ b) } \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{(1+x)^{\sqrt{2}} - 1}{x} = \sqrt{2};$$



$$\text{ c) } \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{(1 + \sqrt{x})^7 - 1}{\sqrt{x}} = 7; \quad \text{ d) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(1 + \frac{1}{\ln x})^{\frac{3}{2}} - 1}{\frac{1}{\ln x}} = \frac{3}{2}.$$

6.1. Funcții $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue în $a \in A$

De recapitulat din manualul de liceu.

Se reamintesc unele noțiuni și enunțuri (schiță, fără demonstrații).

Definiția 6.1.1. Fie $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in A$.

a) Funcția f este continuă în punctul a dacă

$$[\forall V \in \mathcal{V}(f(a)), \exists U = U_V \in \mathcal{V}(a) \text{ a.î. } \forall x \in A \cap U \Rightarrow f(x) \in V].$$

b) Funcția f este continuă pe mulțimea A dacă este continuă în fiecare punct a al mulțimii A .

Observația 6.1.1. De menționat câteva deosebiri între definiția limitei unei funcții într-un punct și definiția continuității funcției într-un punct:

a) În definiția limitei unei funcții într-un punct a se impune $x \neq a$, în definiția continuității nu.

b) În definiția limitei unei funcții într-un punct a , $a \in A'$ (este punct de acumulare pentru A), dar a nu aparține în mod necesar mulțimii A . De exemplu, dacă $A =]a, b[$, a și b finite, se poate pune problema existenței limitei în a și în b , dar nu se poate pune problema continuității în aceste puncte. Iar dacă $A =]-\infty, +\infty[$, se poate pune problema existenței limitei în $-\infty$ și în ∞ , dar nu se poate pune problema continuității în aceste puncte.

c) Dacă a este punct izolat în A , problema limitei nu se poate pune, dar problema continuității se poate pune.

Teorema 6.1.1. (legătura dintre continuitate și existența limitei)

Fie $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ și $a \in A$. Atunci f este continuă în $a \Leftrightarrow$

$$\text{-dacă } a \in A \cap A', \exists \lim_{x \rightarrow a, x \in A} f(x) = f(a) \in \mathbb{R};$$

-dacă $a \in A \setminus A'$, adică este punct izolat, f este continuă (deoarece se verifică Definiția).

Teorema 6.1.2. (criteriul-CNS în limbaj $\varepsilon - \delta$ de continuitate)

Fie $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ și $a \in A$. Atunci f este continuă în $a \Leftrightarrow$

$$[\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \text{ a.î. } \forall x \in A \text{ cu } |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon].$$

Teorema 6.1.3. (criteriul-CNS de continuitate cu șiruri)

Fie $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ și $a \in A$. Atunci f este continuă în $a \Leftrightarrow$

$$[\forall (x_n)_{n \in \mathbb{N}_m} \text{ un șir de numere reale din } A, \text{ cu } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(a)].$$

Definiția 6.1.2. Fie $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in A$.

a) Punctul a este punct de continuitate a funcției f , dacă f este continuă în punctul a .

b) Punctul a este punct de discontinuitate a funcției f , dacă f nu este continuă în punctul a .

c) Punctul a este punct de discontinuitate de speța întâi a funcției f , dacă f are limite laterale

finite în a și diferite sau are limite laterale finite și egale dar diferite de $f(a)$.

d) Punctul a este *punct de discontinuitate de speța a doua a funcției* f , dacă a este punct de discontinuitate pentru f care nu este de speța întâi (în acest caz cel puțin una din limitele laterale nu există sau este infinită).

Exemplul 6.1.1. a) Fie funcția *Dirichlet*:

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} 1, & \text{dacă } x \in \mathbb{Q} \\ -1, & \text{dacă } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

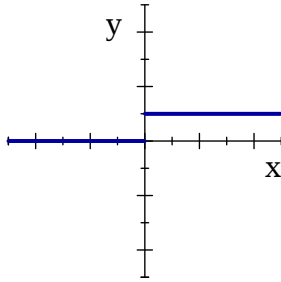
În niciun punct $a \in \mathbb{R}$, funcția f nu este continuă, toate punctele fiind de discontinuitate de speța a doua.

b) Fie funcția *Heaviside*:

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } x < 0 \\ 1, & \text{dacă } x \geq 0 \end{cases}$$

În punctele $a \in]-\infty, 0[$, respectiv $a \in]0, +\infty[$ funcția este continuă.

În punctul $a = 0$ funcția este discontinuă, deoarece are limita la stânga $\lim_{x \rightarrow 0, x < 0} f(x) = 0$ și limita la dreapta $\lim_{x \rightarrow 0, x > 0} f(x) = 1$, cu $0 \neq 1$. Acest punct de discontinuitate este de speța întâi.

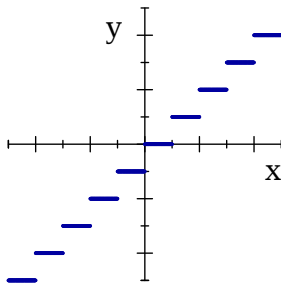


Exemplul 6.1.2. Fie funcția *parte întreagă*:

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = [x].$$

În punctele $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ funcția este continuă $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = n = f(a)$, dacă $n < a < n + 1$.

În punctele $a = n \in \mathbb{Z}$ funcția nu este continuă deoarece are limita la stânga $\lim_{x \rightarrow n, x < n} f(x) = n - 1$ și limita la dreapta $\lim_{x \rightarrow n, x > n} f(x) = n$. Aceste puncte de discontinuitate sunt de speța întâi.

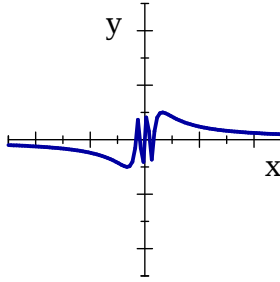


Exemplul 6.1.3. Fie funcția:

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x} & \text{dacă } x \neq 0 \\ 0, & \text{dacă } x = 0 \end{cases}$$

În punctele $a \in]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$ funcția este continuă deoarece $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \sin \frac{1}{a} = f(a)$.

În punctul $a = 0$ funcția nu are limită la stânga și nici la dreapta, $a = 0$ este punct de discontinuitate de speța a doua.



Definiția 6.1.3. Fie $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Fie $\tilde{a} \in A'$ un punct de acumulare astfel încât $\tilde{a} \notin A$ și $\exists \lim_{x \rightarrow \tilde{a}, x \in A} f(x) = l(\tilde{a}) \in \mathbb{R}$. Funcția

$$\tilde{f} : A \cup \{\tilde{a}\} \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{dacă } x \in A \\ l(\tilde{a}) & \text{dacă } x = \tilde{a} \end{cases}$$

se numește *prelungirea funcției f prin continuitate în punctul $\tilde{a}$* .

Exemplul 6.1.4. Fie funcția:

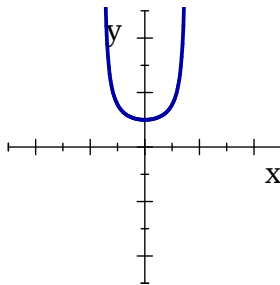
$$f :]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{\operatorname{tg} x}{x}.$$

Cum $0 \in (]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\setminus \{0\})'$, $\exists \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1 \Rightarrow f$ se poate prelunge prin continuitate în $\tilde{a} = 0$.

Prelungirea funcției f ,

$$\tilde{f} :]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \tilde{f}(x) = \begin{cases} \frac{\operatorname{tg} x}{x}, & \text{dacă } x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\setminus \{0\} \\ 1, & \text{dacă } x = 0 \end{cases}$$

este continuă pe $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.



Teorema 6.1.4. (operații cu funcții continue în punct) Fie $f, g : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in A$. Se presupune că funcțiile f și g sunt continue în a . Atunci

1°. Funcția sumă $f + g$ este continuă în a . Mai mult, $\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, funcția $\alpha f + \beta g$ este continuă în a .

2°. Funcția modul $|f|$ este continuă în a .

3°. Funcția produs $f \cdot g$, dacă este definită, este continuă în a .

4°. Funcția cât $\frac{f}{g}$, dacă este definită, este continuă în a .

5°. Funcția putere f^g , dacă este definită, este continuă în a .

6°. Funcțiile $\max(f, g)$, $\min(f, g)$ sunt continue în a .

Teorema 6.1.5. (operații cu funcții continue pe o mulțime) Fie $f, g : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Se presupune că funcțiile f și g sunt continue pe A . Atunci

1°. Funcția sumă $f + g$ este continuă pe A . Mai mult, $\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, funcția $\alpha f + \beta g$ este continuă pe A .

2°. Funcția modul $|f|$ este continuă pe A .

3°. Funcția produs $f \cdot g$, dacă este definită, este continuă pe A .

4°. Funcția cât $\frac{f}{g}$, dacă este definită, este continuă pe A .

5°. Funcția putere f^g , dacă este definită, este continuă pe A .

6°. Funcțiile $\max(f, g)$, $\min(f, g)$ sunt continue pe A .

Funcțiile continue pe un interval au proprietatea importantă că nu pot trece de la o valoare la alta fără a trece prin toate valorile intermediare, adică dacă iau două valori diferite atunci iau toate valorile cuprinse între ele. Această proprietate a funcțiilor continue se numește proprietatea lui Darboux.

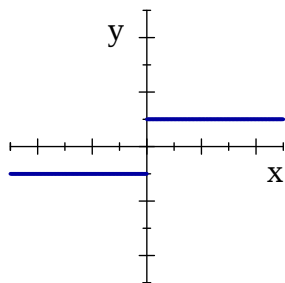
○**Definiția 6.1.3.** Fie $f : \mathbb{I} \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, unde $\mathbb{I}$ este un interval. Funcția f are *proprietatea lui Darboux* pe $\mathbb{I}$ dacă, oricare ar fi punctele $a, b \in \mathbb{I}$, $a < b$, și oricare ar fi numărul λ cuprins între $f(a)$ și $f(b)$, există un punct c_λ cuprins între a și b astfel încât $f(c_\lambda) = \lambda$.

○**Teorema 6.1.6. (Cauchy-Weierstrass-Bolzano)** Fie $f : \mathbb{I} \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, unde $\mathbb{I}$ este un interval. Dacă f este continuă pe $\mathbb{I}$, atunci f are proprietatea lui Darboux pe $\mathbb{I}$.

○**Observația 6.1.3.** Condiția ca funcția să fie definită pe un interval este esențială. Dacă funcția este definită pe o mulțime care este o reuniune de intervale disjuncte, este posibil ca funcția să ia valori diferite, dar să nu aibă nici o valoare intermediară. De exemplu, funcția

$$f :]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} -1, & \text{dacă } x < 0 \\ 1, & \text{dacă } x > 0 \end{cases}$$

este continuă pe domeniul ei de definiție, ia numai valorile -1 și 1 și nu mai ia nici-o valoare intermediară.



○**Observația 6.1.4.** Proprietatea lui Darboux nu este o caracteristică numai a funcțiilor continue. Darboux a dat un exemplu de funcție care are această proprietate și care nu este continuă în nici un punct. Fie un exemplu de funcție discontinuă într-un punct și care are proprietatea lui Darboux:

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x}, & \text{dacă } x \neq 0 \\ 0, & \text{dacă } x = 0 \end{cases}.$$

Teorema 6.1.7. Fie $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ și $a \in A$. Dacă $f(a) \neq 0$ și f este continuă în a , atunci există $U \in \mathcal{V}(a)$ astfel încât

$$f(x) \cdot f(a) > 0, \forall x \in A \cap U.$$

Teorema 6.1.8. Fie $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ și $a \in A$. Dacă f este continuă în a , atunci există $U \in \mathcal{V}(a)$ astfel încât f să fie mărginită pe U .

Teorema 6.1.9. Fie $f : [a, b] \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Dacă f este continuă pe $[a, b]$ și ia valori de semne contrare în capetele, atunci există cel puțin un c , $a < c < b$ astfel încât $f(c) = 0$.

Demonstrație. Afirmatia teoremei rezultă folosind Teorema Cauchy-Weierstrass-Bolzano.

Teorema 6.1.10. Fie $f : [a, b] \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Dacă f este continuă pe $[a, b]$, atunci f este mărginită pe $[a, b]$.

Teorema 6.1.11. (Teorema lui Weierstrass) Fie $f : [a, b] \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Dacă f este continuă pe $[a, b]$, atunci f își atinge marginile pe $[a, b]$, adică $\exists \min_{x \in [a, b]} f(x)$ și $\exists \max_{x \in [a, b]} f(x)$.

Fie $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ și $a \in A$. De precizat că f este continuă pe mulțimea A dacă f este continuă în fiecare punct $a \in A$, adică

$$[\forall a \in A, \forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \delta(\varepsilon, a) > 0 \text{ a.î. } \forall x \in A \text{ cu } |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon].$$

Definiția 6.1.4. Fie $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Funcția f este uniform continuă pe mulțimea A dacă

$$[\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \text{ a.î. } \forall x', x'' \in A \text{ cu } |x' - x''| < \delta \Rightarrow |f(x') - f(x'')| < \varepsilon].$$

Din punct de vedere **geometric**, a spune că f este uniform continuă pe A înseamnă că, dacă Se alege pe axa Ox un interval $\mathbb{I}$ de lungime $< \delta$ oarecare în A , imaginea sa $f(\mathbb{I})$ are lungimea $< \varepsilon$.

Exemplul 6.1.5. Fie funcția

$$f : [1, 3] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2.$$

Funcția f este uniform continuă pe $[1, 3]$. Într-adevăr:

Fie $\varepsilon > 0$. Se caută $\exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$ a.î. $\forall x', x'' \in [1, 3]$ cu $|x' - x''| < \delta$ să rezulte

$$\begin{aligned} |f(x') - f(x'')| &= |(x')^2 - (x'')^2| = |x' + x''| \cdot |x' - x''| \leq \\ &\leq (|x'| + |x''|) |x' - x''| \stackrel{x', x'' \in [1, 3]}{\leq} (3 + 3) |x' - x''| \stackrel{\text{scap de } x', x'', \text{ rămâne } \delta}{<} 6\delta < \varepsilon \end{aligned}$$

Deci se caută δ astfel încât

$$0 < \delta < 6\varepsilon.$$

Din Teorema de densitate a $\mathbb{R}$ în $\mathbb{R}$, între numerele reale 0 și 6ε există un astfel de δ . Se poate alege, de exemplu, $\delta = \frac{1}{2}6\varepsilon = 3\varepsilon$.

Observația 6.1.5. Fie $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Funcția f nu este uniform continuă pe A dacă

$[\exists (x'_n)_{n \in \mathbb{N}_m}, \exists (x''_n)_{n \in \mathbb{N}_m}$ șiruri de numere reale din A , cu $\lim_{n \rightarrow \infty} |x'_n - x''_n| = 0$, dar $\lim_{n \rightarrow \infty} |f(x'_n) - f(x''_n)|$ sau nu există sau este $\neq 0]$.

De exemplu funcția

$$f :]0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sin \frac{1}{x}$$

nu este uniform continuă pe $]0, 1]$. Într-adevăr, se alege

$$x'_n = \frac{1}{(2n + \frac{1}{2})\pi}, n \in \mathbb{N} \text{ și } x''_n = \frac{1}{(2n + \frac{3}{2})\pi}, n \in \mathbb{N},$$

șiruri din $(0, 1]$ cu

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} |x'_n - x''_n| &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{(2n + \frac{1}{2})\pi} - \frac{1}{(2n + \frac{3}{2})\pi} \right| = 0, \text{ dar} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} |f(x'_n) - f(x''_n)| &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \sin \left(2n + \frac{1}{2} \right) \pi - \sin \left(2n + \frac{3}{2} \right) \pi \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} 2 = 2. \end{aligned}$$

Teorema 6.1.12. Fie $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Dacă f este uniform continuă pe A , atunci f este continuă pe A .

Teorema 6.1.13. (Teorema lui Cantor) Fie $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Dacă A este mulțime compactă în $\mathbb{R}$ (mărginită și închisă) f este funcție continuă pe A , atunci f este uniform continuă pe A .