

CURS NR. 5

Analiză matematică, AIA

7.1. Teoria derivabilității pentru $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ în $a \in A \cap A'$

De recapitulat din manualul de liceu. Se reamintesc unele noțiuni și enunțuri (schiță, fără demonstrații).

De precizat că A' este mulțimea punctelor de acumulare a mulțimii A .

Derivate de ordinul întâi.

Euristică. Au existat două probleme, una fizică (modelarea matematică a noțiunii intuitive de viteză a unui mobil- a se vedea filmul "Calculus", propus de profesor Eugene Khutoryansky,

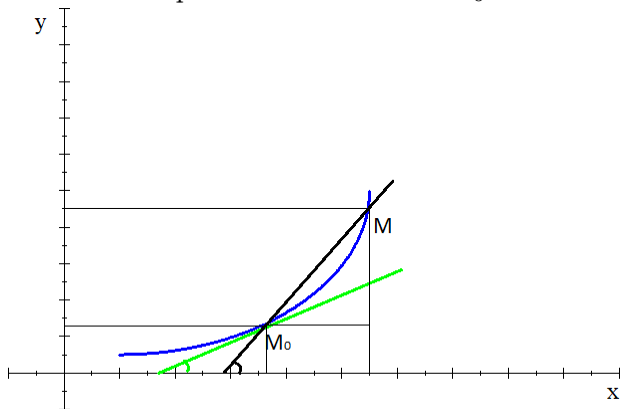
<https://www.youtube.com/watch?v=rjLJIVoQxz4> minutele 0-11.38)

și alta geometrică (determinarea pantei dreptei tangente într-un punct la o curbă plană) care au condus la introducerea noțiunii de derivată.

Geometric: Fie $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continuă în $a \in A$, A fiind un interval. Se reprezintă geometric graficul lui f ,

$$G_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x \in A \text{ și } y = f(x)\},$$

și se notează tot cu G_f reprezentarea sa. Fie $M_0(a, f(a))$ și $M(x, f(x))$ pe $G_f, x \neq a$. Dreapta tangentă la G_f în M_0 este o dreaptă ce trece prin M_0 și intersectează G_f doar în M_0 , obținută intuitiv ca o dreaptă limită a secantei M_0M când M tinde la M_0 .



Secanta M_0M are panta (coeficientul unghiular)

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \Rightarrow \text{dacă există } m = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a},$$

atunci $m = \operatorname{tg} \alpha$ este panta dreptei tangente în M_0 la G_f , de ecuație

$$(d) : y - f(a) = m(x - a).$$

(dacă $m = +\infty$ sau $m = -\infty$, tangenta în M_0 la G_f este verticală).

Definiția 7.1.1. Fie $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in A \cap A'$.

a) Funcția f are derivată în punctul $a \in A \cap A'$ dacă

$$\exists \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \stackrel{\text{not.}}{=} f'(a) \in \overline{\mathbb{R}}.$$

b) Funcția f este derivabilă în punctul $a \in A \cap A'$ dacă există limita anterioară și este finită, $f'(a) \in \mathbb{R}$.

c) Funcția f este derivabilă pe mulțimea $A \cap A'$ dacă este derivabilă în fiecare $a \in A \cap A'$.

Observația 7.1.1. Din definiția 7.1.1, făcând schimbarea de variabilă de trecere la limită $x - a = t \Rightarrow$ dacă există $f'(a)$, atunci

$$f'(a) = \lim_{t \rightarrow 0, a+t \in A} \frac{f(a+t) - f(a)}{t}.$$

Observația 7.1.2. Dacă funcția f este derivabilă pe mulțimea $A_1 \subseteq A \cap A'$, atunci se poate defini o funcție $f' : A_1 \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ care asociază fiecărui $x \in A_1$, numărul real $f'(x)$. Această funcție se numește *funcția derivată a lui f* . Se notează

$$f' = \frac{df}{dx} = \frac{d}{dx}(f).$$

Exemple de utilizare a operatorului de derivare în

a) Mecanică:

$$v = \frac{dx}{dt}, \text{ unde } v = \text{viteza}, x = \text{distanța}, t = \text{timpul};$$

$$a = \frac{dv}{dt}, \text{ unde } a = \text{acelerația}, v = \text{viteza}, t = \text{timpul};$$

$$F = \frac{dW}{dx}, \text{ unde } F = \text{forța}, W = \text{energia utilizată}, x = \text{distanța în direcția forței};$$

$$F = \frac{dp}{dt}, \text{ unde } F = \text{forța}, p = \text{impulsul}, t = \text{timpul};$$

$$P = \frac{dW}{dt}, \text{ unde } P = \text{puterea}, W = \text{energia utilizată}, t = \text{timpul};$$

$$p = \frac{dE}{dv}, \text{ unde } p = \text{impulsul}, E = \text{energia cinetică}, v = \text{viteza};$$

b) Gaze:

$$p = \frac{dW}{dV}, \text{ unde } p = \text{presiunea}, W = \text{energia utilizată pentru o expansiune izotermă}, V = \text{volumul};$$

c) Circuite:

$$I = \frac{dQ}{dt}, \text{ unde } I = \text{intensitatea}, Q = \text{sarcina electrică}, t = \text{timp};$$

$$V = L \frac{dI}{dt}, \text{ unde } V = \text{tensiunea într-un conductor}, L = \text{inductanța}, I = \text{intensitatea}, t = \text{timp};$$

d) Electrostatică:

$$E = -\frac{dV}{dx}, \text{ unde } E = \text{câmpul electric}, V = \text{potențialul}, x = \text{distanța};$$

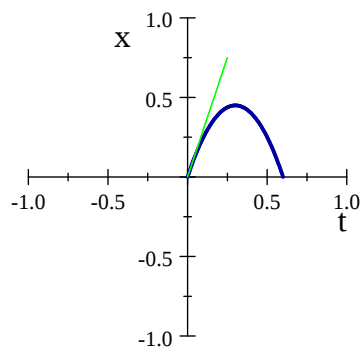
Exemplul 1.7.1. a) O minge este aruncată în aer. Înălțimea ei verifică legea $x(t) = 3t - 5t^2$. Să se determine

-viteza inițială, cu care este aruncată în aer;

-timpul când se întoarce pe pământ;

-viteza finală, când lovește pământul.

Rezolvare. $x(t) = 3t - 5t^2 \Rightarrow v(t) = \frac{dx}{dt}(t) = 3 - 10t$.



-mingea este aruncată în aer la $t = 0$, deci viteza inițială, cu care este aruncată în aer este

$v(0) = 3(m/s)$. Se observă că dreapta care este tangentă la graficul funcției înălțime $x(t)$ în punctul $(t, x) = (0, 0)$ are panta $v(0) = 3 > 0$.

-mingea atinge pământul a doua oară când este la înălțimea $x = 0$, adică

$3t - 5t^2 = 0 \Rightarrow t = 0(s)$ (momentul aruncării) și $t = \frac{3}{5} = 0.6(s)$ (momentul atingerii solului).

-viteza finală, când coboară și lovește pământul este negativă $v(0.6) = -3(m/s)$.

b) O rachetă spațială se deplasează cu viteza $v(t) = 4t^2 + 10000m/s^2$ până iese din atmosfera Pământului. Să se determine accelerația după 2s.

Rezolvare. $v(t) = 4t^2 + 10000 \Rightarrow a(t) = \frac{dv}{dt}(t) = 8t$.

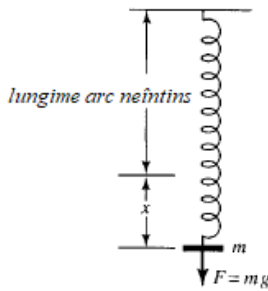
Accelerația după două secunde este $a(2) = 16(m/s^2)$.

c) Energia stocată într-un arc întins de către greutatea unui corp de masă m , cu lungimea x în plus față de lungimea de repaus, este $W(x) = x^2(J)$. Forța exercitată pentru a ține întins arcul cu lungimea x este $F = G = mg$, unde m este masa corpului și $g \simeq 10(m/s^2)$ accelerația gravitațională.

Știind că arcul este întins cu $0.5m$ și că $F = \frac{dW}{dx}$, să se determine masa corpului ce întinde arcul.

Rezolvare. $W(x) = x^2 \Rightarrow F(x) = \frac{dW}{dx}(x) = 2x \Rightarrow F(0.5) = 2 \cdot 0.5 = 1(N)$.

Atunci $mg = 2x \Rightarrow m = \frac{2x}{g} \Rightarrow m = \frac{2 \cdot 0.5N}{10m/s^2} = 0.1kg$.



Definiția 7.1.2. Fie $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

a) Funcția f are are derivată la stânga în punctul $a \in A \cap A'_s$ dacă

$$\exists \lim_{x \rightarrow a, x < a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \stackrel{\text{not.}}{=} f'_s(a) \in \overline{\mathbb{R}}.$$

Funcția f este derivabilă la stânga în punctul $a \in A \cap A'_s$ dacă există limita anterioară și este finită, $f'_s(a) \in \mathbb{R}$.

b) Funcția f are are derivată la dreapta în punctul $a \in A \cap A'_d$ dacă

$$\exists \lim_{x \rightarrow a, x > a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \stackrel{\text{not.}}{=} f'_d(a) \in \overline{\mathbb{R}}.$$

Funcția f este derivabilă la dreapta în punctul $a \in A \cap A'_d$ dacă există limita anterioară și este finită, $f'_d(a) \in \mathbb{R}$.

Teorema 7.1.1. (CNS de existență a derivatei cu derivate laterale)

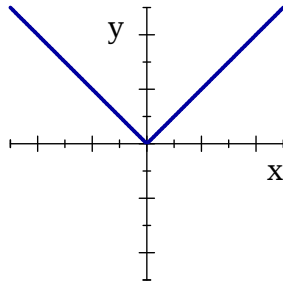
Fie $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in A \cap A'$. Atunci f este derivabilă în $a \in A \cap A'$ și are derivata $f'(a) \Leftrightarrow$

$[f$ este derivabilă la stânga în $a \in A \cap A'$, cu derivata la stânga $f'_s(a)$, f este derivabilă la dreapta în $a \in A \cap A'$, cu derivata la dreapta $f'_d(a)$ și $f'_s(a) = f'_d(a) = f'(a)]$.

Teorema 7.1.2. Fie $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in A \cap A'$. Dacă f este derivabilă în $a \in A \cap A'$ atunci f este continuă în a .

Observația 7.1.3. Există funcții continue într-un punct care nu sunt derivabile în acel punct.

a) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = |x| = \begin{cases} -x, & \text{dacă } x < 0 \\ 0, & \text{dacă } x = 0 \\ x, & \text{dacă } x > 0 \end{cases}$



Se observă că f este continuă în $a = 0$. Dar

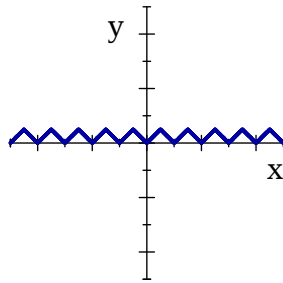
$$\begin{aligned} \exists \lim_{x \rightarrow 0, x < 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} &= \lim_{x \rightarrow 0, x < 0} \frac{-x - 0}{x - 0} = -1 = f'_s(0), \\ \exists \lim_{x \rightarrow 0, x > 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} &= \lim_{x \rightarrow 0, x > 0} \frac{x - 0}{x - 0} = 1 = f'_d(0). \end{aligned}$$

Mai mult, $f'_s(0) \neq f'_d(0) \Rightarrow f$ nu este derivabilă în $a = 0$.

b) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \min_{k \in \mathbb{Z}} |x - k|$. Se observă că:

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{dacă } 0 < x < \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}, & \text{dacă } x = \frac{1}{2} \\ 1 - x, & \text{dacă } \frac{1}{2} < x < 1 \end{cases}$$

$$f(x+1) = f(x), \forall x \in \mathbb{R} \text{ (} f \text{ este periodică de perioadă 1).}$$



Se observă că f este continuă în $a = 0$. Dar

$$\begin{aligned} \exists \lim_{x \rightarrow 0, x < 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} &= \lim_{x \rightarrow 0, x < 0} \frac{-x - 0}{x - 0} = -1 = f'_s(0), \\ \exists \lim_{x \rightarrow 0, x > 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} &= \lim_{x \rightarrow 0, x > 0} \frac{x - 0}{x - 0} = 1 = f'_d(0). \end{aligned}$$

Mai mult, $f'_s(0) \neq f'_d(0) \Rightarrow f$ nu este derivabilă în $a = 0$.

Analog, în $\forall a = k, k \in \mathbb{Z}$, f este continuă, dar f nu este derivabilă

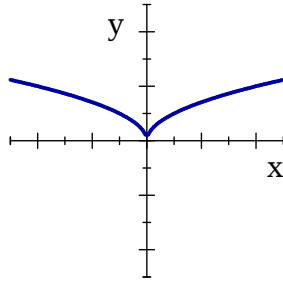
Analog, în $\forall a = k + \frac{1}{2}, k \in \mathbb{Z}$, f este continuă, dar f nu este derivabilă.

Definiția 7.1.3. Fie $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

a) Funcția f are punctul $a \in A \cap A'$ drept *punct de întoarcere* dacă f este continuă în a și $\exists f'_s(a) = +\infty$ și $\exists f'_d(a) = -\infty$ (sau $\exists f'_s(a) = -\infty$ și $\exists f'_d(a) = +\infty$).

b) Funcția f are are punctul $a \in A \cap A'$ drept *punct unghiular* dacă f este continuă în a și $\exists f'_s(a), \exists f'_d(a)$, cel puțin una din derivatele laterale este finită, și $f'_s(a) \neq f'_d(a)$.

Exemplul 7.1.2.a) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{|x|} = \begin{cases} \sqrt{-x}, & \text{dacă } x < 0 \\ 0, & \text{dacă } x = 0 \\ \sqrt{x}, & \text{dacă } x > 0 \end{cases}$



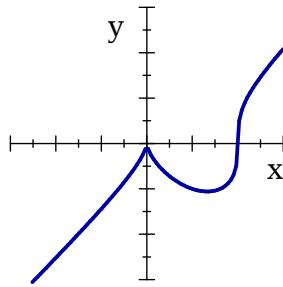
Se observă că f este continuă în $a = 0$. Dar

$$\exists \lim_{x \rightarrow 0, x < 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0, x < 0} \frac{\sqrt{-x} - 0}{x - 0} \stackrel{(\sqrt{-x}) \cdot (\sqrt{-x}) = |x| = -x}{=} \lim_{x \rightarrow 0, x < 0} \left(-\frac{1}{\sqrt{-x}} \right) = -\infty = f'_s(0),$$

$$\exists \lim_{x \rightarrow 0, x > 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0, x > 0} \frac{\sqrt{x} - 0}{x - 0} = +\infty = f'_d(0).$$

Deci $a = 0$ este punct de întoarcere pentru f .

b) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sqrt[3]{x^3 - x^2}$



Se observă că f este continuă în $a_1 = 0$. Dar

$$\exists \lim_{x \rightarrow 0, x < 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0, x < 0} \frac{\sqrt[3]{x^3 - x^2} - 0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0, x < 0} \sqrt[3]{1 - \frac{1}{x}} = +\infty = f'_s(0),$$

$$\exists \lim_{x \rightarrow 0, x > 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0, x > 0} \frac{\sqrt[3]{x^3 - x^2} - 0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0, x > 0} \sqrt[3]{1 - \frac{1}{x}} = -\infty = f'_d(0).$$

Deci $a_1 = 0$ este punct de întoarcere pentru f .

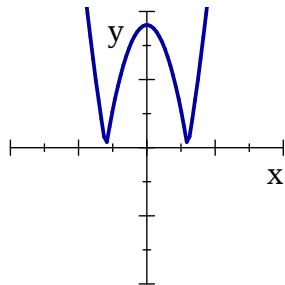
Se observă că f este continuă în $a_2 = 1$. Dar

$$\exists \lim_{x \rightarrow 1, x < 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1, x < 1} \frac{\sqrt[3]{x^3 - x^2} - 0}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1, x < 1} \sqrt[3]{\frac{x^2}{(x-1)^2}} = +\infty = f'_s(0),$$

$$\exists \lim_{x \rightarrow 1, x > 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1, x > 1} \frac{\sqrt[3]{x^3 - x^2} - 0}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1, x > 1} \sqrt[3]{\frac{x^2}{(x-1)^2}} = +\infty = f'_d(0).$$

Deci $\exists f'(1) = +\infty$, dar f nu este derivabilă în $a_2 = 1$. (va fi punct de inflexiune).

c) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = |x^2 - 9| = \begin{cases} x^2 - 9, & \text{dacă } x \in]-\infty, -3[\cup]3, +\infty[\\ 0, & \text{dacă } x = 3 \text{ sau } x = -3 \\ 9 - x^2, & \text{dacă } x \in]-3, 3[\end{cases}$



Se observă că f este continuă în $a_1 = -3$ și $a_2 = 3$. Dar

$$\exists \lim_{x \rightarrow -3, x < -3} \frac{f(x) - f(-3)}{x - (-3)} = \lim_{x \rightarrow -3, x < -3} \frac{x^2 - 9 - 0}{x - (-3)} = \lim_{x \rightarrow -3, x < -3} (x - 3) = -6 = f'_s(-3),$$

$$\exists \lim_{x \rightarrow -3, x > -3} \frac{f(x) - f(-3)}{x - (-3)} = \lim_{x \rightarrow -3, x > -3} \frac{9 - x^2 - 0}{x - (-3)} = \lim_{x \rightarrow -3, x > -3} (3 - x) = 6 = f'_d(-3).$$

Deci $a_1 = -3$ este punct unghiular pentru f . Analog $a_2 = 3$ este punct unghiular pentru f .

Interpretarea geometrică a derivatei, puncte unghiulare, puncte de întoarcere: Fie $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in A \cap A'$. Dacă f este derivabilă în a , atunci există dreapta tangentă în $(a, f(a))$ la graficul funcției, iar $f'(a)$ reprezintă panta dreptei tangente. Vezi Euristică și Definiția 7.1.3, Observația 7.1.3 și Exemplul 7.1.2, Exemplul 7.1.5.

Monotonia funcției f studiată cu derivata-A se vedea Exemplul 7.1.5, manualul de liceu și Compendiul de Matematică.

Teorema 7.1.3. (operații cu funcții derivabile) Fie $f, g : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ funcții derivabile pe mulțimea deschisă A ($A \cap A' = A$). Fie $\alpha \in \mathbb{R}$. Atunci funcțiile $f + g$, αf și $f \cdot g$ sunt derivabile pe mulțimea deschisă A și

a) $(f + g)'(a) = f'(a) + g'(a), \forall a \in A;$

b) $(\alpha \cdot f)'(a) = \alpha f'(a), \forall a \in A;$

c) $(f \cdot g)'(a) = f'(a) \cdot g(a) + f(a) \cdot g'(a), \forall a \in A.$

Dacă, în plus, $g(a) \neq 0, \forall a \in A$ atunci funcția $\frac{f}{g}$ este derivabilă pe mulțimea deschisă A și

d) $\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{1}{g^2(a)} [f'(a) \cdot g(a) - f(a) \cdot g'(a)], \forall a \in A.$

Teorema 7.1.4. (operații cu funcții derivabile) Fie $f_1, f_2, \dots, f_n : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ funcții derivabile pe mulțimea deschisă A ($A \cap A' = A$). Atunci funcțiile $f_1 + f_2 + \dots + f_n$ și $f_1 \cdot f_2 \cdot \dots \cdot f_n$ sunt derivabile pe mulțimea deschisă A și

a) $(f_1 + f_2 + \dots + f_n)'(a) = f'_1(a) + f'_2(a) + \dots + f'_n(a), \forall a \in A;$

b) $(f_1 \cdot f_2 \cdot \dots \cdot f_n)'(a) = f'_1(a) \cdot f_2(a) \cdot \dots \cdot f_n(a) + f_1(a) \cdot f'_2(a) \cdot \dots \cdot f_n(a) + \dots + f_1(a) \cdot f_2(a) \cdot \dots \cdot f'_n(a), \forall a \in A.$

Teorema 7.1.5. (teorema de derivare a funcțiilor compuse) Fie $f : \mathbb{I} \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{J} \subseteq \mathbb{R}$ și $g : \mathbb{J} \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, unde $\mathbb{I}$ și $\mathbb{J}$ sunt intervale din $\mathbb{R}$. Dacă

(i) f este derivabilă în $a \in \mathbb{I}$

(ii) g este derivabilă în $f(a) \in \mathbb{J}$,

atunci funcția $g \circ f : \mathbb{I} \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ este derivabilă în a și

$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a)) \cdot f'(a).$$

Mai mult, dacă f este derivabilă pe $\mathbb{I}$ și g este derivabilă pe $\mathbb{J}$ atunci $g \circ f$ este derivabilă pe $\mathbb{I}$ și

$$(g \circ f)' = (g' \circ f) \cdot f'.$$

Exemplul 7.1.3. După Teorema 7.1.7 ulterioară,

$$\begin{aligned}
& \left(\ln(1 + \sin^4(5x)) \right)' \stackrel{u_1(x)=1+\sin^4(5x)}{=} \frac{1}{1 + \sin^4(5x)} (1 + \sin^4(5x))' \stackrel{(f+g)'=f'+g'}{=} \\
& = \frac{1}{1 + \sin^4(5x)} \left(1' + (\sin^4(5x))' \right) \stackrel{u_2(x)=\sin(5x)}{=} \frac{1}{1 + \sin^4(5x)} (0 + 4 \sin^3(5x) (\sin(5x))') \stackrel{u_3(x)=5x}{=} \\
& = \frac{1}{1 + \sin^4(5x)} (0 + 4 \sin^3(5x) \cdot \cos(5x) \cdot 5) = \frac{20 \sin^3(5x) \cdot \cos(5x)}{1 + \sin^4(5x)}.
\end{aligned}$$

Teorema 7.1.6. (teorema de derivare a funcției inverse) Fie $f : \mathbb{I} \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{J} \subseteq \mathbb{R}$, unde $\mathbb{I}$ și $\mathbb{J}$ sunt intervale din $\mathbb{R}$. Dacă

(i) f este funcție bijectivă,

(ii) f este continuă pe $\mathbb{I}$, și derivabilă în $a \in \mathbb{I}$, cu $f'(a) \neq 0$,

atunci funcția inversă $f^{-1} : \mathbb{J} \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{I} \subseteq \mathbb{R}$ este derivabilă în $b = f(a)$ și

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))}.$$

Teorema 7.1.7. (derivatele unor funcții elementare compuse cu o funcție derivabilă):

Fie $u : B \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție derivabilă pe B , cu $u' : B \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ funcția derivată atașată. Atunci, subînțelegând argumentele funcțiilor de mai jos, se obține că:

1°. Pentru $c \in \mathbb{R}$ constantă fixată, $c' = 0$;

2°. Pentru $n \in \mathbb{N}^*$ fixat, $(u^n)' = nu^{n-1} \cdot u'$;

3°. Pentru $r \in \mathbb{R}^*$ fixat și u a.î. $u > 0$, $(u^r)' = ru^{r-1} \cdot u'$; $(\sqrt[n]{v})' = v^{\frac{m}{n}-1} \cdot v'$

În particular, pentru u a.î. $u > 0$, $(u^{-1})' = \frac{-1}{u^2} \cdot u'$ și $(\sqrt{u})' = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u'$;

4°. Pentru $a > 0, a \neq 1$ fixat, $(a^u)' = a^u (\ln a) \cdot u'$;

În particular, $(e^u)' = e^u \cdot u'$;

5°. Pentru $a > 0, a \neq 1$ fixat și pentru u a.î. $u > 0$, $(\log_a u)' = \frac{1}{u \ln a} \cdot u'$;

În particular, pentru u a.î. $u > 0$, $(\ln u)' = \frac{1}{u} \cdot u'$;

6°. $(\cos u)' = -(\sin u) \cdot u'$; $(\sin u)' = (\cos u) \cdot u'$;

Pentru u a.î. $\cos u \neq 0$, $(\operatorname{tg} u)' = \frac{1}{\cos^2 u} \cdot u'$; Pentru u a.î. $\sin u \neq 0$, $(\operatorname{ctg} u)' = \frac{-1}{\sin^2 u} \cdot u'$;

$(\operatorname{ch} u)' = (\operatorname{sh} u) \cdot u'$; $(\operatorname{sh} u)' = (\operatorname{ch} u) \cdot u'$;

7°. Pentru u a.î. $u^2 < 1$, $(\arccos u)' = \frac{-1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$;

Pentru u a.î. $u^2 < 1$, $(\arcsin u)' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$;

$(\operatorname{arctg} u)' = \frac{1}{1+u^2} \cdot u'$; $(\operatorname{arcctg} u)' = \frac{-1}{1+u^2} \cdot u'$;

Teorema 7.1.8. Fie $u : B \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție derivabilă pe B a.î. $u > 0$, cu $u' : B \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ funcția derivată atașată. Fie $v : B \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție derivabilă pe B , cu $v' : B \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ funcția derivată atașată. Atunci, subînțelegând argumentele funcțiilor de mai jos, se obține că:

$$8^\circ. (u^v)' = u^v \left(v' \ln u + v \frac{u'}{u} \right).$$

Exemplul 7.1.4. În cele ce urmează se subînțelege variabila de derivare x și se derivează formal, pe un domeniu de derivare neprecizat:

1°. **a)** $7' = 0$; **b)** $(\ln 5)' = 0$; **c)** $(\sqrt[3]{\pi})' = 0$.

2°. **a)** $(x^{13})' \stackrel{u(x)=x}{=} 13x^{12};$
 $\stackrel{u'(x)=1}{=}$

b) $\left((x^2 + x + 1)^{2000} \right)' \stackrel{u(x)=x^2+x+1}{=} 2000 (x^2 + x + 1)^{1999} (2x + 1).$
 $\stackrel{u'(x)=2x+1}{=}$

3°. **a)** $\left(\sqrt[3]{x^2} \right)' \stackrel{r=\frac{2}{3}}{=} \frac{2}{3} x^{\frac{2}{3}-1} = \frac{2}{3} \frac{1}{\sqrt[3]{x}};$
 $\stackrel{u(x)=x, u'(x)=1}{=}$

b) $\left(\sqrt{x} \right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}};$ **c)** $\left(\frac{1}{x} \right)' = \frac{-1}{x^2};$

d) $\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x^4 + 1}} \right)' = \left((x^4 + 1)^{-\frac{1}{3}} \right)' \stackrel{r=-\frac{1}{3}}{=} \frac{-1}{3} (x^4 + 1)^{-\frac{1}{3}-1} (4x^3);$
 $\stackrel{u(x)=x^4+1, u'(x)=4x^3+0}{=}$

e) $\left(\sqrt{x^2 + 9} \right)' \stackrel{r=\frac{1}{2}}{=} \frac{1}{2\sqrt{x^2 + 9}} \cdot (2x);$
 $\stackrel{u(x)=x^2+9, u'(x)=2x+0}{=}$

$$(u^{-1})' = \frac{-1}{u^2} \cdot u'$$

f) $\left(\frac{1}{x^{2000} + 1} \right)' = \left((x^{2000} + 1)^{-1} \right)' \stackrel{u(x)=x^{2000}+1}{=} \frac{-1}{(x^{2000} + 1)^2} \cdot 2000x^{1999};$

4°. **a)** $(2^x)' = 2^x (\ln 2);$ **b)** $\left(\left(\frac{\pi}{4} \right)^x \right)' = \left(\frac{\pi}{4} \right)^x \ln \left(\frac{\pi}{4} \right);$

c) $(e^x)' = e^x;$

d) $\left(3^{5x^2+2x} \right)' \stackrel{u(x)=5x^2+2x}{=} 3^{5x^2+2x} (\ln 3) \cdot (10x + 2);$
 $\stackrel{u'(x)=10x+2}{=}$

e) $\left(e^{x^2} \right)' \stackrel{u(x)=x^2}{=} e^{x^2} \cdot (2x).$
 $\stackrel{u'(x)=2x}{=}$

5°. **a)** $(\ln x)' = \frac{1}{x};$

b) $\left(\ln (x^6 + x^3 + 1) \right)' \stackrel{u(x)=x^6+x^3+1}{=} \frac{1}{x^6 + x^3 + 1} (6x^5 + 3x^2);$
 $\stackrel{u'(x)=6x^5+3x^2+0}{=}$

$$(\log_{10} x)' = \frac{1}{x \ln 10};$$

c) $\left(\log_2 (x^4 + 1) \right)' = \frac{1}{(x^4 + 1) \ln 2} (4x^3)$

6°. **a)** $(\cos x)' = -\sin x; (\sin x)' = \cos x;$

b) $\left(\cos (7x) \right)' \stackrel{u(x)=7x}{=} -(\sin (7x)) \cdot 7;$
 $\stackrel{u'(x)=7}{=}$

c) $\left(\sin \sqrt{x} \right)' \stackrel{u(x)=\sqrt{x}}{=} (\cos \sqrt{x}) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}};$
 $\stackrel{u'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}}{=}$

d) $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x};$ **e)** $(\operatorname{ctg} x)' = \frac{-1}{\sin^2 x};$

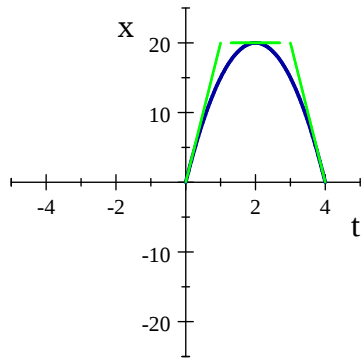
f) $(\operatorname{tg} x^4)' = \frac{1}{\cos^2 x^4} \cdot (4x^3);$
g) $(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x; (\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x;$
7°. a) $(\arccos x)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}};$ b) $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}};$
c) $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2};$ d) $(\operatorname{arcctg} x)' = \frac{-1}{1+x^2};$
e) $(\operatorname{arctg} \frac{1}{x^2})' \stackrel{u(x)=x^{-2}}{=} \stackrel{u'(x)=-2x^{-3}}{=} \frac{1}{1+(\frac{1}{x^2})^2} \cdot (-2x^{-3}).$
8°. a) $((1+x^2)^{3x})' = (1+x^2)^{3x} (3 \ln(1+x^2) + 3x \frac{2x}{1+x^2}).$
9°. a) $(x^2 + \cos(3x+5))' = 2x - (\sin(3x+5)) \cdot 3;$
b) $(x^{10} \sin(3x+5))' = 10x^9 \sin(3x+5) + x^{10} (\cos(3x+5)) \cdot 3;$
c) $(\frac{x^2+1}{x^4+9})' = \frac{2x(x^4+9) - (x^2+1) \cdot 4x^3}{(x^4+9)^2}.$

Exemplul 7.1.5. a) O minge este aruncată în aer. Viteza acesteia este pozitivă cât timp înălțimea mingii față de pământ, $x(t)$, crește, adică $\frac{dx}{dt}(t) > 0$. La un moment dat, mingea începe să coboare spre pământ. Din acel moment înălțimea mingii față de pământ, $x(t)$, descrește și viteza este negativă, $\frac{dx}{dt}(t) < 0$. Pentru a trece de la viteză pozitivă la viteză negativă, mingea trece printr-un punct critic, unde atinge înălțimea maximă și viteza 0. Dacă mingea are viteza inițială $20m/s$, cum se determină înălțimea maximă pe care o atinge?

Rezolvare. Se presupune că rezistența aerului este neglijabilă și că legea înălțimii este:

$x(t) = v_0 \cdot t + \frac{1}{2}at^2$, unde t este timpul, $v_0 = 20(m/s)$ este viteza inițială și $a = -g$ este accelerația (presupusă constantă, dată de gravitație, $g \simeq 10(m/s^2)$). Atunci:

$$x(t) = 20t - 5t^2 \Rightarrow v(t) = \frac{dx}{dt}(t) = 20 - 10t.$$



Se observă că, deoarece mingea este aruncată în aer la $t = 0$, viteza inițială cu care este aruncată în aer este, într-adevăr,

$$v_0 = v(0) = +20(m/s),$$

că mingea atinge pământul a doua oară când înălțimea este $x = 0 \Rightarrow$

$$20t - 5t^2 = 0 \Rightarrow t = 0s \text{ (momentul aruncării)} \text{ și } t = 4s \text{ (momentul atingerii solului)}$$

și că viteza finală, când lovește pământul, este

$$v(4) = -20(m/s).$$

La înălțime maximă, variația înălțimii este 0, deci viteza este 0 :

$$v(t) = 0 \Rightarrow 20 - 10t = 0 \Rightarrow t = 2(s)$$

Înălțimea maximă se atinge după 2s de la aruncare, adică

$$x(2) = 20 \cdot 2 - 5 \cdot 2^2 = 20(m).$$

Se observă că dreapta care este tangentă la graficul funcției înălțime $x(t)$ în punctul $(t, x) = (0, 0)$ are panta $v(0) = 20 > 0$, dreapta care este tangentă la graficul funcției înălțime $x(t)$ în punctul $(t, x) = (2, 20)$ are panta $v(2) = 0$, adică este paralelă cu Ot și că dreapta care este tangentă la graficul funcției înălțime $x(t)$ în punctul $(t, x) = (4, 0)$ are panta $v(4) = -20 < 0$.

Punctul $t = 2$ în care $\frac{dx}{dt}(t) = 0$ se numește *punct critic* sau *punct staționar*. Pentru a decide dacă este punct de maxim local, de minim local sau de inflexiune pentru x se studiază tabelul de variație a funcției $x(t)$ sau se studiază cu o teoremă implicând derivatele de ordin superior. Se observă și din grafic că $t = 2$ este punct de maxim local, iar $x(2) = 20$ este valoarea maximă locală.

t	0		2		4
$\frac{dx}{dt}(t)$	20	+++	0	---	-20
$x(t)$	0	$\nearrow \nearrow \nearrow$	20	$\searrow \searrow \searrow$	0

Definiția 7.1.4. Fie $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ și $a \in A$.

a) $a \in A$ se numește *punct de minim local* pentru f dacă

$$\exists V \in \mathcal{V}(a) \text{ a.î. } f(a) \leq f(x), \forall x \in V \cap A;$$

$a \in A$ se numește *punct de minim global* pentru f dacă

$$f(a) \leq f(x), \forall x \in A;$$

b) $a \in A$ se numește *punct de maxim local* pentru f dacă

$$\exists V \in \mathcal{V}(a) \text{ a.î. } f(a) \geq f(x), \forall x \in V \cap A.$$

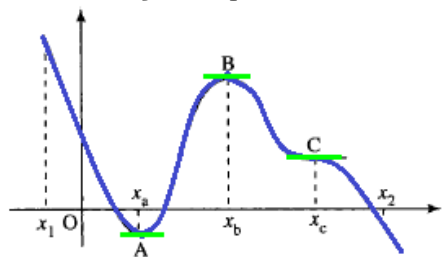
$a \in A$ se numește *punct de maxim global* pentru f dacă

$$f(a) \geq f(x), \forall x \in A.$$

c) $a \in A$ se numește *punct de extrem local* pentru f dacă a este punct de minim local sau maxim local pentru f .

$a \in A$ se numește *punct de extrem global* pentru f dacă a este punct de minim global sau maxim global pentru f .

Interpretarea geometrică a punctelor de extrem relativ: A se vedea Exemplul 7.1.5, manualul de liceu și Complemente de Matematică



De menționat că pentru o funcție $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ cu reprezentarea graficului în figură, punctele A, B, C sunt puncte staționare sau critice, în care $f'(x) = 0$. Dacă se imaginează că reprezentarea este a unei secțiuni de munte pe care urcă-coboară o mașină de la stânga la dreapta, atunci mașina:

-coboară spre A (f este descrescătoare, are $f'(x) < 0, \forall x \in]x_1, x_a[$);

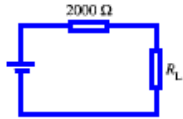
-staționează în A , care are abscisa punct de minim (f are $f(x_a)$ valoare minimă local, are $f'(x_a) = 0, f'(x) < 0, \forall x \in]x_1, x_a[$ și $f'(x) > 0, \forall x \in]x_a, x_b[$);

-urcă de la A spre B (f este crescătoare, are $f'(x) > 0, \forall x \in]x_a, x_b[$);

- staționează în B , care are abscisa punct de maxim (f are $f(x_b)$ valoare maximă local, are $f'(x_b) = 0$, $f'(x) > 0, \forall x \in]x_a, x_b[$ și $f'(x) < 0, \forall x \in]x_b, x_c[$);
- coboară de la B spre C (f este descrescătoare, are $f'(x) < 0, \forall x \in]x_b, x_c[$);
- staționează în C , care are abscisa punct de inflexiune-definiția necesită $f''(x)$ (f are are $f'(x_c) = 0$, $f'(x) < 0, \forall x \in]x_b, x_c[$ și $f'(x) < 0, \forall x \in]x_c, x_2[$);
- coboară de la C (f este descrescătoare, are $f'(x) < 0, \forall x \in]x_c, x_2[$).

Teoremele 7.1.9, 10, 11, 12, 13, 14. (teoremele Fermat, Rolle, Lagrange, Cauchy, Darboux, l'Hospital): A se vedea manualul de liceu și Complemente de Matematică

Exemplul 7.1.5. b) (transfer maxim de putere) Puterea livrată la sarcina rezistivă R_L pentru circuitul din figură este dată de legea



$$P(R_L) = \frac{25R_L}{(2000 + R_L)^2} \text{ (provenită din } P(R_L) = \left(\frac{V_{TH}}{R_{TH} + R_L} \right)^2 \cdot R_L)$$

Se arată că puterea maximă livrată are loc pentru $R_L = 2000(\Omega)$.

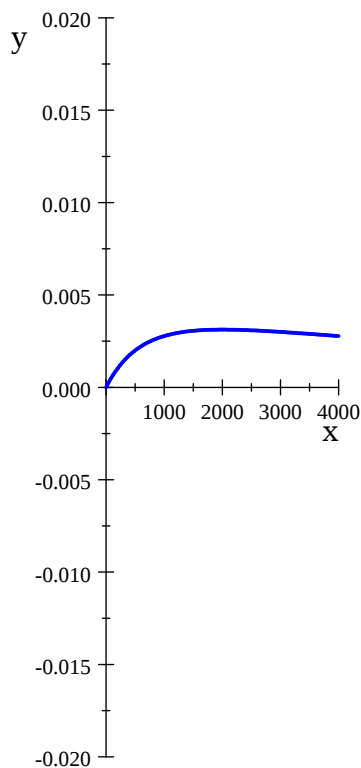
Rezolvare.

Etapa 1. Se determină punctele staționare (critice) pentru putere, adică cele în care

$$\begin{aligned} \frac{dP}{dR_L}(R_L) = 0 &\Leftrightarrow \frac{25(2000 + R_L)^2 - 25R_L \cdot 2(2000 + R_L)}{(2000 + R_L)^4} = 0 \Leftrightarrow \frac{50000 - 25R_L}{(2000 + R_L)^3} = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow R_L = 2000. \end{aligned}$$

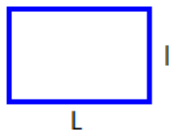
Etapa 2. Se studiază dacă punctul staționar este de extrem local. Din tabelul de variație a funcției putere $P(R_L)$ în jurul punctului staționar, se observă că $R_L = 2000$ este punct de maxim local, cu $P(R_L) = 3.125 \times 10^{-3}$ valoarea maximă local.

R_L	0		2000		4000
$\frac{dP}{dR_L}(R_L)$	+	+	0	-	-
$P(R_L)$	0	$\nearrow \nearrow \nearrow$	3.125×10^{-3}	$\searrow \searrow \searrow$	2.777×10^{-3}



Prin urmare, s-a verificat că transferul de putere de la o rețea de sursă de curent continuu la o rețea rezistivă este maximă atunci când rezistența internă a rețelei de sursă de curent continuu este egală cu rezistența la sarcină. ($R_{TH} = R_L$)

c) (arie rectangulară maximă împrejmuită de un gard) Un teren dreptunghiular este înconjurat de un gard de 400m. Se determină dimensiunile terenului de arie maximă ce poate fi împrejmuit cu acest gard.



Rezolvare. Deoarece perimetrul terenului este $P = 400(m) \Rightarrow$

$$2L + 2l = 400 \Leftrightarrow L = 200 - l.$$

Atunci aria este dată de legea

$$A = l \cdot L \Leftrightarrow A(l) = l(200 - l) = 200l - l^2.$$

Etapa 1. Se determină punctele staționare (critice) pentru arie, adică cele în care

$$\frac{dA}{dl}(l) = 0 \Leftrightarrow 200 - 2l = 0 \Leftrightarrow l = 100.$$

Etapa 2. Se studiază dacă punctul staționar este de extrem local. Din tabelul de variație a funcției arie $A(l)$ în jurul punctului staționar, se observă că $l = 100$ este punct de maxim local, iar $A(l) = 100^2 m^2$ este valoarea maximă locală.

l	0		100		200
$\frac{dA}{dl}(l)$	+	+++	0	---	-
$A(l)$	0	$\nearrow \nearrow \nearrow$	100^2	$\searrow \searrow \searrow$	0

Prin urmare, dimensiunile terenului sunt $l = 100(m)$ și $L = 100(m)$, adică terenul are formă

pătrată.

Derivate de ordin superior.

Definiția 7.1.5. Fie $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție derivabilă pe $A_1 \subset A \cap A'$. Fie $f' : A_1 \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ funcția derivată atașată. Fie $a \in A_1 \cap A'_1$

a) Funcția f are derivată de ordin doi în punctul a dacă

$$\exists \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x) - f'(a)}{x - a} \stackrel{\text{not.}}{=} f''(a) \in \overline{\mathbb{R}}.$$

b) Funcția f este derivabilă de ordinul doi în punctul a dacă există limita anterioară și este finită, $f''(a) \in \mathbb{R}$.

c) Funcția f este derivabilă de ordinul doi pe mulțimea $A_1 \cap A'_1$ dacă este derivabilă în fiecare $a \in A_1 \cap A'_1$.

Analog se definește, dacă există, $f^{(n)}(a)$, $n \in \mathbb{N}_2$.

Observația 7.1.4. Dacă funcția f este derivabilă pe mulțimea $A_2 \subseteq A_1 \cap A'_1$ atunci se poate defini o funcție

$$f'' : A_2 \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

care asociază fiecărui $x \in A_2$, numărul real $f''(x)$. Această funcție se numește *funcția derivată de ordinul doi a lui f* . Se notează

$$f'' = \frac{d^2 f}{dx^2} = \frac{d^2}{dx^2}(f).$$

Analog se definește funcția $f^{(n)}$, $n \in \mathbb{N}_2$.

Interpretarea geometrică a derivatei de ordinul doi-concavitate, convexitate, puncte de inflexiune: A se vedea manualul de liceu, seminar și Complemente de Matematică

Interpretarea geometrică a derivatei de ordinul n -puncte de extrem local: A se vedea manualul de liceu.

Teorema 7.1.15. (operații cu derivate de ordin superior) Fie $f, g : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ funcții derivabile de ordin $n \in \mathbb{N}^*$ pe mulțimea deschisă A ($A \cap A' = A$). Fie $\alpha \in \mathbb{R}$. Atunci funcțiile $f + g$, αf și $f \cdot g$ sunt derivabile de ordin $n \in \mathbb{N}^*$ pe mulțimea deschisă A și

$$(f + g)^{(n)}(a) = f^{(n)}(a) + g^{(n)}(a), \forall a \in A;$$

$$(\alpha \cdot f)^{(n)}(a) = \alpha f^{(n)}(a), \forall a \in A;$$

$$(f \cdot g)^{(n)}(a) = f^{(n)}(a) \cdot g(a) + C_n^1 f^{(n-1)}(a) \cdot g'(a) + C_n^2 f^{(n-2)}(a) \cdot g''(a) + \dots + f(a) \cdot g^{(n)}(a), \forall a \in A.$$

Formula lui Taylor.

Definiția 7.1.6. Fie $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in A \cap A'$ și $V \in \mathcal{V}(a)$. Se presupune că f este o funcție derivabilă de ordin $n \in \mathbb{N}^*$ pe $V \cap A$, cu $f^{(n)}$ funcție continuă pe $V \cap A$.

a) Se numește *polinom Taylor de ordin n asociat funcției f "în jurul" punctului a* polinomul

$$\begin{aligned} T_{n,a}(x) &= f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n = \\ &= f(a) + \sum_{k=1}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k. \end{aligned}$$

Se notează tot cu $T_{n,a}(x)$ și funcția polinomială atașată.

b) Se numește *rest Taylor de ordin n asociat funcției f "în jurul" punctului a* funcția

$$R_{n,a} : V \cap A \rightarrow \mathbb{R}, R_{n,a}(x) = f(x) - T_{n,a}(x).$$

Observația 7.1.5. Tipuri de resturi:

a) *Restul Lagrange:* Dacă f este o funcție derivabilă de ordin $n+1 \in \mathbb{N}^*$ pe $V \cap A$

$$R_{n,a}(x) = \frac{f^{(n+1)}(c_n)}{(n+1)!} (x-a)^{n+1}, \forall x \in V \cap A,$$

unde $c_n = a + \theta_n(x-a)$, $\theta_n \in]0, 1[$.

b) ș.a.m.d

Definiția 7.1.7. Fie $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in A \cap A'$ și $V \in \mathcal{V}(a)$. Se presupune că f este o funcție derivabilă de ordin $n \in \mathbb{N}^*$ pe $V \cap A$, cu $f^{(n)}$ funcție continuă pe $V \cap A$. În anumite ipoteze suplimentare, are loc *formula lui Taylor de ordin n asociată funcției f "în jurul", pe o vecinătate a punctului a* :

$$f(x) = T_{n,a}(x) + R_{n,a}(x), \forall x \in V \cap A, \text{ adică}$$

$$f(x) = \underbrace{f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n}_{T_{n,a}(x)=f(a)+\sum_{k=1}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k} + R_{n,a}(x), \forall x \in V \cap A$$

Definiția 7.1.8. Fie $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $0 \in A \cap A'$ și $V \in \mathcal{V}(0)$. Se presupune că f este o funcție derivabilă de ordin $n+1 \in \mathbb{N}^*$ pe $V \cap A$. În anumite ipoteze suplimentare, are loc *formula lui Maclaurin de ordin n asociată funcției f* , adică formula lui Taylor cu Restul Lagrange în $a = 0$:

$$f(x) = T_{n,0}(x) + R_{n,0}(x), \forall x \in V \cap A, \text{ adică}$$

$$f(x) = \underbrace{f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n}_{T_{n,0}(x)=f(0)+\sum_{k=1}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k} + \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(\theta_n x)}{(n+1)!}x^{n+1}}_{R_{n,0}(x)}, \forall x \in V \cap A, \text{ unde}$$

$\theta_n \in]0, 1[$.

Exemplul 7.1.7. Formula lui Taylor permite o aproximare a funcțiilor transcendente ($e^x, \sin x, \cos x, \dots$) cu funcții polinomiale. Eroarea de aproximare este dată de modulul restului Taylor.

a) Fie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^x$.

Se observă că, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, f este derivabilă de ordin n pe $\mathbb{R}$, și în particular în $a = 0$.

$f(x) = e^x$	$f(0) = 1$
$f'(x) = e^x$	$f'(0) = 1$
$f''(x) = e^x$	$f''(0) = 1$
$\dots$	$\dots$
$f^{(n)}(x) = e^x$	$f^{(n)}(0) = 1$
$f^{(n+1)}(x) = e^x$	$f^{(n+1)}(c_n) = e^{c_n}$

Atunci formula Maclaurin de ordin n atașată lui f este

$$e^x = \underbrace{1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \dots + \frac{1}{n!}x^n}_{T_{n,0}(x)=1+\sum_{k=1}^n \frac{1}{k!}x^k} + \underbrace{\frac{e^{\theta_n x}}{(n+1)!}x^{n+1}}_{R_{n,0}(x)}, \forall x \in \mathbb{R}, \text{ unde } \theta_n \in]0, 1[.$$

Conform formulei anterioare putem aproxima

$$e^1 \cong 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!},$$

iar eroarea de aproximare comisă se poate evalua cu

$$|R_{n,0}(1)| = \left| \frac{e^{\theta_n}}{(n+1)!} \right| \stackrel{\theta_n \in]0,1[}{\leq} \frac{3}{(n+1)!}.$$

Dacă aproximăm e cu polinomul Taylor de ordin $n = 10$ calculat în 1,

$$e^1 \cong 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{10!} \simeq 2.7183,$$

obținem că eroarea comisă se poate evalua cu

$$|R_{10,0}(1)| = \left| \frac{e^{\theta_{10}x}}{(11)!} \right|_{\theta_{10} \in]0,1[} \leq \frac{3}{(11)!} = 7.5156 \times 10^{-8}.$$

Este o eroare de aproximare "mare", deoarece 1 este "departe" de 0, dar totuși este o aproximare "controlată" de $R_{10,0}(1)$.

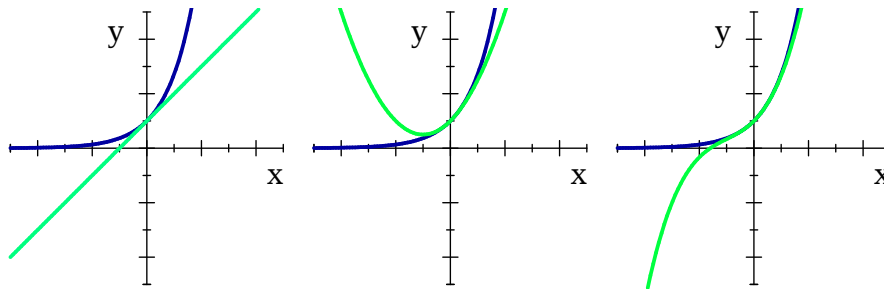
Se reprezintă grafic pe $\mathbb{R}$ funcția f și polinoamele Taylor

$$T_{1,0}(x) = 1 + \frac{1}{1!}x;$$

$$T_{2,0}(x) = 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2;$$

$$T_{3,0}(x) = 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3$$

și se observă că, într-o vecinătate a lui $x = 0$ se poate aproxima $f(x)$ cu $T_{n,0}(x)$ (graficul polinomului aproape se suprapune peste al lui f).



b) Fie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \cos x$.

Se observă că, $\forall n \in \mathbb{N}^*, f$ este derivabilă de ordin n pe $\mathbb{R}$, și în particular în $a = 0$.

$f(x) = \cos x$	$f(0) = 1 = \cos 0$
$f'(x) = -\sin x = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$	$f'(0) = 0 = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)$
$f''(x) = -\cos x = \cos(x + \pi)$	$f''(0) = -1 = \cos(\pi)$
$f'''(x) = \sin x = \cos\left(x + \frac{3\pi}{2}\right)$	$f'''(0) = 0 = \cos\left(\frac{3\pi}{2}\right)$
$f^{(4)}(x) = \cos x = \cos(x + 2\pi)$	$f^{(4)}(0) = 1 = \cos(2\pi)$
...	...
$f^{(n)}(x) = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$	$f^{(n)}(0) = \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)$
$f^{(n+1)}(x) = \cos\left(x + \frac{(n+1)\pi}{2}\right)$	$f^{(n+1)}(c_n) = \cos\left(c_n + \frac{(n+1)\pi}{2}\right)$

Se poate afirma că

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} (-1)^{\tilde{k}} \cos x, & \text{dacă } n = 2\tilde{k}, \tilde{k} \in \mathbb{N}^* \\ (-1)^{\tilde{k}} \sin x, & \text{dacă } n = 2\tilde{k} + 1, \tilde{k} \in \mathbb{N} \end{cases}$$

$$f^{(n)}(0) = \begin{cases} (-1)^{\tilde{k}}, & \text{dacă } n = 2\tilde{k}, \tilde{k} \in \mathbb{N}^* \\ 0, & \text{dacă } n = 2\tilde{k} + 1, \tilde{k} \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Atunci formula Maclaurin de ordin n atașată lui f este

$$\cos x = 1 + \frac{0}{1!}x + \frac{-1}{2!}x^2 + \dots + \frac{\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{n!}x^n + \frac{\cos\left(\theta_n x + \frac{(n+1)\pi}{2}\right)}{(n+1)!}x^{n+1}, \forall x \in \mathbb{R},$$

$$= 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + \dots + \frac{\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{n!}x^n + \underbrace{\frac{\cos\left(\theta_n x + \frac{(n+1)\pi}{2}\right)}{(n+1)!}x^{n+1}}_{R_{n,0}(x)}, \forall x \in \mathbb{R}, \text{ unde } \theta_n \in]0, 1[.$$

$$T_{n,0}(x) = 1 + \sum_{k=1}^n \frac{\cos\left(\frac{k\pi}{2}\right)}{k!}x^k$$

Se poate scrie, renotând $\tilde{k}$, și că:

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + \dots + \frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n} + R(x), \forall x \in \mathbb{R},$$

deci $\cos x$ "se dezvoltă" după puteri pare ale lui x .

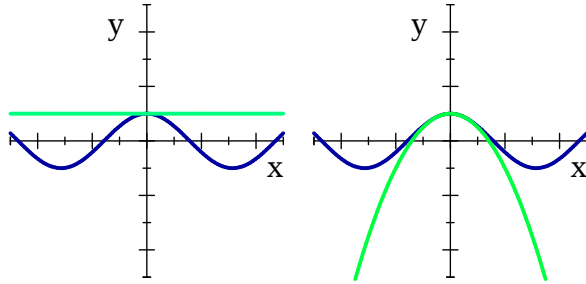
Se reprezintă grafic pe $\mathbb{R}$ funcția f și polinoamele Taylor

$$T_{1,0}(x) = 1;$$

$$T_{2,0}(x) = 1 - \frac{1}{2!}x^2;$$

$$T_{3,0}(x) = 1 - \frac{1}{2!}x^2$$

și se observă că, într-o vecinătate a lui $x = 0$ se poate aproxima $f(x)$ cu $T_{n,0}(x)$ (graficul polinomului aproape se suprapune peste al lui f). A se vedea serii Taylor.



c) Fie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sin x$.

Se observă că, $\forall n \in \mathbb{N}^*, f$ este derivabilă de ordin n pe $\mathbb{R}$, și în particular în $a = 0$.

$f(x) = \sin x$	$f(0) = 0$
$f'(x) = \cos x$	$f'(0) = 1$
$f''(x) = -\sin x$	$f''(0) = 0$
$f'''(x) = -\cos x$	$f'''(0) = -1$
$f^{(4)}(x) = \sin x$	$f^{(4)}(0) = 0$
...	...
$f^{(n)}(x) = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$	$f^{(n)}(0) = \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$
$f^{(n+1)}(x) = \sin\left(x + \frac{(n+1)\pi}{2}\right)$	$f^{(n+1)}(c_n) = \sin\left(c_n + \frac{(n+1)\pi}{2}\right)$

Se poate afirma că

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} (-1)^{\tilde{k}} \sin x, & \text{dacă } n = 2\tilde{k}, \tilde{k} \in \mathbb{N}^* \\ (-1)^{\tilde{k}} \cos x, & \text{dacă } n = 2\tilde{k} + 1, \tilde{k} \in \mathbb{N} \end{cases}$$

$$f^{(n)}(0) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } n = 2\tilde{k}, \tilde{k} \in \mathbb{N}^* \\ (-1)^{\tilde{k}}, & \text{dacă } n = 2\tilde{k} + 1, \tilde{k} \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Atunci formula Maclaurin de ordin n atașată lui f este

$$\sin x = 0 + \frac{1}{1!}x + \frac{0}{2!}x^2 + \dots + \frac{\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{n!}x^n + \frac{\sin\left(\theta_n x + \frac{(n+1)\pi}{2}\right)}{(n+1)!}x^{n+1}, \forall x \in \mathbb{R},$$

$$= \underbrace{\frac{1}{1!}x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + \dots + \frac{\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{n!}x^n}_{T_{n,0}(x) = \sum_{k=1}^n \frac{\sin\left(\frac{k\pi}{2}\right)}{k!}x^k} + \underbrace{\frac{\sin\left(\theta_n x + \frac{(n+1)\pi}{2}\right)}{(n+1)!}x^{n+1}}_{R_{n,0}(x)}, \forall x \in \mathbb{R}, \text{ unde } \theta_n \in]0, 1[.$$

$]0, 1[.$

Se poate scrie, renotând $\tilde{k}$, și că:

$$\sin x = \frac{1}{1!}x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + \dots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1} + R(x), \forall x \in \mathbb{R},$$

deci $\sin x$ "se dezvoltă" după puteri impare ale lui x .

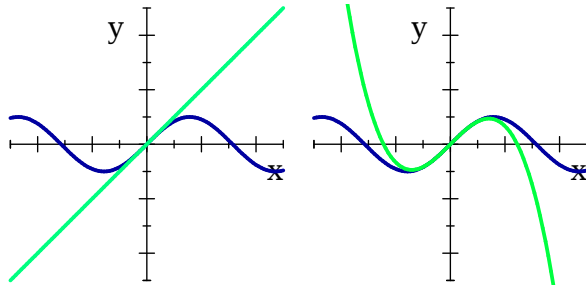
Se reprezintă grafic pe $\mathbb{R}$ funcția f și polinoamele Taylor

$$T_{1,0}(x) = \frac{1}{1!}x;$$

$$T_{2,0}(x) = \frac{1}{1!}x;$$

$$T_{3,0}(x) = \frac{1}{1!}x - \frac{1}{3!}x^3$$

și se observă că, într-o vecinătate a lui $x = 0$ se poate aproxima $f(x)$ cu $T_{n,0}(x)$ (graficul polino- mului aproape se suprapune peste al lui f). A se vedea serii Taylor.



d) Fie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \operatorname{ch} x$.

Se observă că, $\forall n \in \mathbb{N}^*, f$ este derivabilă de ordin n pe $\mathbb{R}$, și în particular în $a = 0$.

$f(x) = \operatorname{ch} x$	$f(0) = 1$
$f'(x) = \operatorname{sh} x$	$f'(0) = 0$
$f''(x) = \operatorname{ch} x$	$f''(0) = 1$
...	...
$f^{(n)}(x) = \begin{cases} \operatorname{ch} x, & \text{dacă } n = 2\tilde{k}, \tilde{k} \in \mathbb{N}^* \\ \operatorname{sh} x, & \text{dacă } n = 2\tilde{k} + 1, \tilde{k} \in \mathbb{N} \end{cases}$	$f^{(n)}(0) = \begin{cases} 1, & \text{dacă } n = 2\tilde{k}, \tilde{k} \in \mathbb{N}^* \\ 0, & \text{dacă } n = 2\tilde{k} + 1, \tilde{k} \in \mathbb{N} \end{cases}$
$f^{(n+1)}(x) = \dots$	$f^{(n+1)}(c_n) = \dots$

Atunci formula Maclaurin de ordin n atașată lui f este

$$\begin{aligned} \operatorname{ch} x &= 1 + \frac{0}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(\theta_n x)}{(n+1)!}x^{n+1}, \forall x \in \mathbb{R}, \\ &= 1 + \underbrace{\frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n}_{T_{n,0}(x) = 1 + \sum_{k=1}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k} + \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(\theta_n x)}{(n+1)!}x^{n+1}}_{R_{n,0}(x)}, \forall x \in \mathbb{R}, \text{ unde } \theta_n \in]0, 1[. \end{aligned}$$

Se poate scrie și că:

$$\operatorname{ch} x = 1 + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + \dots + \frac{1}{(2n)!}x^{2n} + R(x), \forall x \in \mathbb{R},$$

deci $\operatorname{ch} x$ "se dezvoltă" după puteri pare ale lui x .

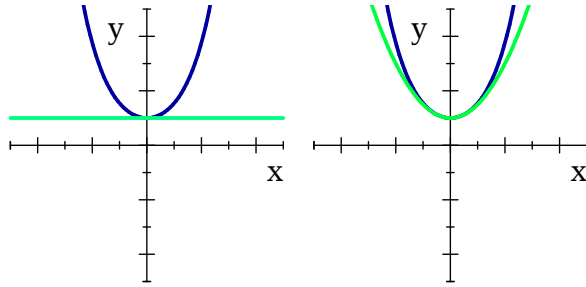
Se reprezintă grafic pe $\mathbb{R}$ funcția f și polinoamele Taylor

$$T_{1,0}(x) = 1;$$

$$T_{2,0}(x) = 1 + \frac{1}{2!}x^2;$$

$$T_{3,0}(x) = 1 + \frac{1}{2!}x^2$$

și se observă că, într-o vecinătate a lui $x = 0$ se poate aproxima $f(x)$ cu $T_{n,0}(x)$ (graficul polinomului aproape se suprapune peste al lui f).



e) Fie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \operatorname{sh} x$.

Se observă că, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, f este derivabilă de ordin n pe $\mathbb{R}$, și în particular în $a = 0$.

$f(x) = \operatorname{sh} x$	$f(0) = 0$
$f'(x) = \operatorname{ch} x$	$f'(0) = 1$
$f''(x) = \operatorname{sh} x$	$f''(0) = 0$
...	...
$f^{(n)}(x) = \begin{cases} \operatorname{sh} x, & \text{dacă } n = 2\tilde{k}, \tilde{k} \in \mathbb{N}^* \\ \operatorname{ch} x, & \text{dacă } n = 2\tilde{k} + 1, \tilde{k} \in \mathbb{N} \end{cases}$	$f^{(n)}(0) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } n = 2\tilde{k}, \tilde{k} \in \mathbb{N}^* \\ 1, & \text{dacă } n = 2\tilde{k} + 1, \tilde{k} \in \mathbb{N} \end{cases}$
$f^{(n+1)}(x) = \dots$	$f^{(n+1)}(c) = \dots$

Atunci formula Maclaurin de ordin n atașată lui f este

$$\begin{aligned} \operatorname{sh} x &= 0 + \frac{1}{1!}x + \frac{0}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(\theta_n x)}{(n+1)!}x^{n+1}, \forall x \in \mathbb{R}, \\ &= \underbrace{\frac{1}{1!}x + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n}_{T_{n,0}(x)} + \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(\theta_n x)}{(n+1)!}x^{n+1}}_{R_{n,0}(x)}, \forall x \in \mathbb{R}, \text{ unde } \theta_n \in]0, 1[. \\ T_{n,0}(x) &= \sum_{k=1}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k \end{aligned}$$

Se poate scrie și că:

$$\operatorname{sh} x = \frac{1}{1!}x + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + \dots + \frac{1}{(2n+1)!}x^{2n+1} + R(x), \forall x \in \mathbb{R},$$

deci $\operatorname{sh} x$ "se dezvoltă" după puteri impare ale lui x .

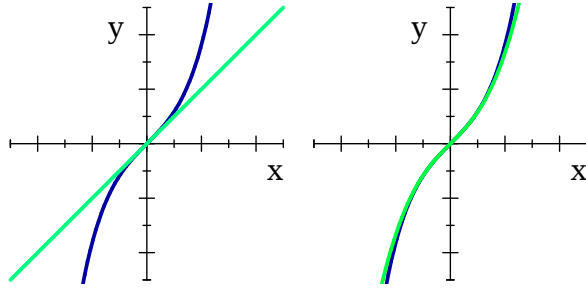
Se reprezintă grafic pe $\mathbb{R}$ funcția f și polinoamele Taylor

$$T_{1,0}(x) = \frac{1}{1!}x;$$

$$T_{2,0}(x) = \frac{1}{1!}x;$$

$$T_{3,0}(x) = \frac{1}{1!}x + \frac{1}{3!}x^3$$

și se observă că, într-o vecinătate a lui $x = 0$ se poate aproxima $f(x)$ cu $T_{n,0}(x)$ (graficul polinomului aproape se suprapune peste al lui f).



f) Fie $f :]-1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \ln(1+x)$.

Se observă că, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, f este derivabilă de ordin n pe $] -1, +\infty[$, și în particular în $a = 0$.

$f(x) = \ln(1+x)$	$f(0) = 0$
$f'(x) = (1+x)^{-1}$	$f'(0) = 1$
$f''(x) = -1(1+x)^{-2}$	$f''(0) = -1$
$f'''(x) = (-1)(-2)(1+x)^{-3}$	$f'''(0) = (-1)(-2)$
...	...
$f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}(n-1)!(1+x)^{-n}$	$f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1}(n-1)!$
$f^{(n+1)}(x) = (-1)^n n!(1+x)^{-(n+1)}$	$f^{(n+1)}(c_n) = (-1)^n n!(1+c_n)^{-(n+1)}$

Atunci formula Maclaurin de ordin n atașată lui f este

$$\begin{aligned}
 f(x) &= 0 + \frac{1}{1!}x + \frac{-1}{2!}x^2 + \dots + \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{n!}x^n + \frac{(-1)^n n! (1+\theta_n x)^{-(n+1)}}{(n+1)!}x^{n+1}, \forall x \in]-1, +\infty[, \\
 &= \underbrace{\frac{1}{1}x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n}_{T_{n,0}(x)} + \underbrace{\frac{(-1)^n (1+\theta_n x)^{-(n+1)}}{n+1}x^{n+1}}_{R_{n,0}(x)}, \forall x \in]-1, +\infty[, \text{ unde} \\
 T_{n,0}(x) &= \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k
 \end{aligned}$$

$\theta_n \in]0, 1[$.

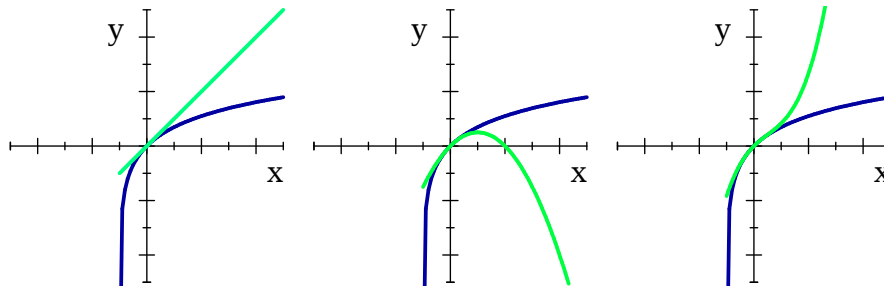
Se reprezintă grafic pe $] -1, +\infty[$ funcția f și polinoamele Taylor

$$T_{1,0}(x) = \frac{1}{1}x;$$

$$T_{2,0}(x) = \frac{1}{1}x - \frac{1}{2}x^2;$$

$$T_{3,0}(x) = \frac{1}{1}x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3$$

și se observă că, într-o vecinătate a lui $x = 0$ se poate aproxima $f(x)$ cu $T_{n,0}(x)$ (graficul polinomului aproape se suprapune peste al lui f).



g) Fie $\alpha \in \mathbb{R}^*$ fixat și $f :]-1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}, f(x) = (1+x)^\alpha$.

Se observă că, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, f este derivabilă de ordin n pe $] -1, +\infty[$, și în particular în $a = 0$.

$f(x) = (1+x)^\alpha$	$f(0) = 1$
$f'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1}$	$f'(0) = \alpha$
$f''(x) = \alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2}$	$f''(0) = \alpha(\alpha-1)$
$f'''(x) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(1+x)^{\alpha-3}$	$f'''(0) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)$
...	...
$f^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n}$	$f^{(n)}(0) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-n+1)$
$f^{(n+1)}(x) = \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n)(1+x)^{\alpha-(n+1)}$	$f^{(n+1)}(c_n) = \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n)(1+c_n)^{\alpha-(n+1)}$

Atunci formula Maclaurin de ordin n atașată lui f este

$$f(x) = 1 + \underbrace{\frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}x^n}_{T_{n,0}(x)=1+\sum_{k=1}^n \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k!}x^k} + \underbrace{\frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n)(1+\theta_n x)^{\alpha-(n+1)}}{(n+1)!}}_{R_{n,0}(x)}, \forall x \in]-1, +\infty[, \text{ unde } \theta_n \in]0, 1[.$$

Se va particulariza $\alpha = n \in \mathbb{N}_2, \alpha = -1, \alpha = \frac{1}{2}$ la serii Taylor.

Exemplul 7.1.8. Să se determine ordinul n al formulei lui Taylor cu rest Lagrange în $a = 1$ și să se scrie această formulă pentru

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} x^4 - 6x^2 + 1, & \text{dacă } x \leq 1 \\ 4x^4 - 8x^3, & \text{dacă } x > 1. \end{cases}$$

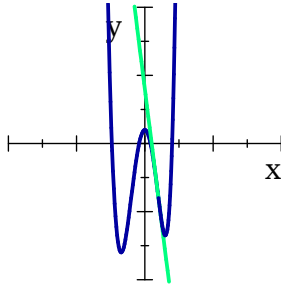
Rezolvare. Conform Exercițiului 9 din Seminar $\Rightarrow n = 1$ și formula Taylor cu rest Lagrange este

$$f(x) = \underbrace{-4 + \frac{-8}{1!}(x-1)}_{T_{1,1}(x)} + \underbrace{\frac{f''(c_1)}{2!}(x-1)^2}_{R_{1,1}(x)}, \text{ cu } c_1 = 1 + \theta_1(x-1), \text{ unde } \theta_1 \in]0, 1[.$$

Se reprezintă grafic pe $\mathbb{R}$ funcția f și polinomul Taylor

$$T_{1,1}(x) = -4 + \frac{-8}{1!}(x-1)$$

și se observă că, într-o vecinătate a lui $x = 1$ se poate aproxima $f(x)$ cu $T_{1,1}(x)$ (graficul polinomului aproape se suprapune peste al lui f).



Diferențiala.

În cele ce urmează fie $A = \mathbb{I}$ interval nevid și deschis în $\mathbb{R}$ ($\mathbb{I} \cap \mathbb{I}' = \mathbb{I}$).

Definiția 7.1.9. Fie $f: \mathbb{I} \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ și $a \in \mathbb{I}$.

a) Funcția f este *diferențiabilă de ordinul 1 în a* dacă $\exists c \in \mathbb{R}$ o constantă și $\alpha: \mathbb{I} \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție continuă cu $\lim_{x \rightarrow a} \alpha(x) = \alpha(a) = 0$ astfel încât

$$f(x) - f(a) = c \cdot (x - a) + \alpha(x) \cdot (x - a), \forall x \in \mathbb{I}. \quad (1)$$

b) Funcția f este *diferențiabilă de ordinul 1 pe mulțimea $\mathbb{I}$* dacă este diferențiabilă de ordinul 1 în $\forall a \in \mathbb{I}$.

Teorema 7.1.16. Fie $f : \mathbb{I} \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ și $a \in \mathbb{I}$. Funcția f este diferențiabilă în a dacă și numai dacă este derivabilă în a . În acest caz $c = f'(a)$.

Demonstrație. *Necesitatea.* Se presupune că f este diferențiabilă în $a \Rightarrow \exists c$ și $\exists \alpha$ astfel încât să aibă loc (1)

$$f(x) - f(a) = c \cdot (x - a) + \alpha(x) \cdot (x - a), \forall x \in \mathbb{I}$$

Se înmulțește egalitatea anterioară cu $\frac{1}{x-a}$, pentru $x \neq a$, apoi se trece la limită egalitatea rezultată pentru $x \rightarrow a$ și se obține că

$$\exists \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} (c + \alpha(x)) = c + 0 \in \mathbb{R},$$

deci f este derivabilă în a și $f'(a) = c$.

Suficiența. Se presupune că f este derivabilă în a . Se definește

$$c = f'(a) \in \mathbb{R} \text{ și}$$

$$\alpha : \mathbb{I} \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \alpha(x) = \begin{cases} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} - f'(a), & \text{dacă } x \in \mathbb{I} \setminus \{a\} \\ 0, & \text{dacă } x = a \end{cases}$$

Se observă că α este funcție continuă, cu $\lim_{x \rightarrow a} \alpha(x) = \alpha(a) = 0$, și că c și α verifică (1) $\Rightarrow f$ este diferențiabilă în a .

Observația 7.1.6. Conform Teoremei 7.1.16, dacă f este diferențiabilă în a , atunci are loc

$$f(x) - f(a) = f'(a) \cdot (x - a) + \alpha(x) \cdot (x - a), \forall x \in \mathbb{I}. \quad (1')$$

Cum $\lim_{x \rightarrow a} \alpha(x) = 0$, rezultă că $\alpha(x) \cdot (x - a)$ tinde la 0 "mai repede" decât $f'(a) \cdot (x - a)$, atunci când $x \rightarrow a$. Deci $f'(a) \cdot (x - a)$ poate fi considerată ca "partea principală" a creșterii lui f (adică a diferenței $f(x) - f(a)$). Atunci diferența $f(x) - f(a)$ se poate aproxima cu $f'(a) \cdot (x - a)$, pentru $x \rightarrow a$, adică

$$f(x) - f(a) \simeq f'(a) \cdot (x - a), \forall x \in \mathbb{I}, x \neq a, x \rightarrow a$$

Din relația (1'), făcând schimbarea de variabilă de trecere la limită $x - a = h \Rightarrow$

$$f(a + h) - f(a) = f'(a) \cdot h + \alpha(a + h) \cdot h, \forall x \in \mathbb{I}.$$

și deci, pentru $h \rightarrow 0$, se poate aproxima

$$f(a + h) - f(a) \simeq f'(a) \cdot h, \forall x = a + h \in \mathbb{I}, h \neq 0, h \rightarrow 0.$$

Deci, dacă f este diferențiabilă ($\Leftrightarrow$ derivabilă) în a , atunci, într-o vecinătate a lui a , funcția f are o comportare liniară (creșterea lui f se poate aproxima cu o funcție liniară).

Definiția 7.1.10. Fie $f : \mathbb{I} \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție derivabilă în $a \in \mathbb{I}$. Funcția liniară

$$T : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, T(h) \stackrel{\text{not.}}{=} ((df)(a))(h) = f'(a) \cdot h \quad (2)$$

se numește *diferențiala funcției f de ordinul 1 în a* .

Observația 7.1.7. Conform Definiției 7.1.6. a diferențialei, cu $h = x - a \Rightarrow$

$$T(x - a) = f'(a) \cdot (x - a) \text{ și } \alpha(x) = \frac{1}{x - a} (f(x) - f(a) - T(x - a)).$$

$$\text{Cum } \lim_{x \rightarrow a} \alpha(x) = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{x - a} (f(x) - f(a) - T(x - a)) = 0.$$

Atunci $f : \mathbb{I} \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ este diferențiabilă de ordinul 1 în $a \in \mathbb{I}$ dacă

$$\exists T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \text{ astfel încât } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (f(a + h) - f(a) - T(h)) = 0, \quad (3)$$

Dacă există, funcția liniară T este chiar diferențiala funcției f de ordinul 1 în a .

Se va folosi această observație în definirea diferențialei pentru $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$.

Observația 7.1.8.

a) Se consideră funcția identitate $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = x$.

Funcția g este derivabilă pe $\mathbb{R}$ și $g' : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g'(x) = 1$.

Atunci, pentru orice $a = x$ fixat $\xrightarrow{(5)} ((dg)(x))(h) = g'(x) \cdot h$, adică
 $(dx)(h) = h$.

În continuare se face convenția ca dx să fie funcția proiecție a $\mathbb{R}$ pe Ox , $dx = p_1$,

$$p_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, p_1(h) = h,$$

b) Fie $f : \mathbb{I} \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ diferențiabilă în $a \in \mathbb{I}$. Apelând la convenția anterioară, din

$$((df)(a))(h) = f'(a) \cdot h, \forall h \in \mathbb{R}, \quad (4)$$

se scrie

$$(df)(a) = \underbrace{f'(a)}_T \cdot dx. \quad (5)$$

c) Fie $A = \mathbb{I} \subseteq \mathbb{R}$ un interval nevid și deschis. Fie $f : \mathbb{I} \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ diferențiabilă pe $\mathbb{I}$; atunci

$$\boxed{(df)(x) = f'(x) \cdot dx, \forall x \in \mathbb{I}.} \quad (6)$$

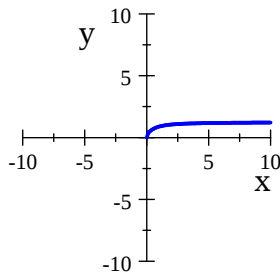
Exemplul 7.1.9. Fie

$$f :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{\arctg x}.$$

Să se studieze dacă f este diferențiabilă pe $]0, +\infty[$. Să se determine

$$(df)(x), \forall x \in]0, +\infty[; (df)(1); ((df)(1))(h), \forall h \in \mathbb{R}; ((df)(x))(-3), \forall x \in]0, +\infty[; ((df)(1))(-3).$$

Rezolvare.



$$\exists f' :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}, f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{\arctg x}} \cdot \frac{1}{1+x^2}.$$

Deci f este derivabilă pe $]0, +\infty[\Leftrightarrow f$ este diferențiabilă pe $]0, +\infty[$. În plus, conform (6) $\Rightarrow$

$$(df)(x) = f'(x) dx, \forall x \in]0, +\infty[, \text{ adică } (df)(x) = \frac{1}{2\sqrt{\arctg x}} \cdot \frac{1}{1+x^2} dx, \forall x \in]0, +\infty[.$$

Atunci

$$(df)(1) = \frac{1}{2\sqrt{\arctg 1}} \cdot \frac{1}{1+1^2} dx = \underbrace{\frac{1}{2\sqrt{\pi}} dx}_T \text{ pentru } a=1.$$

$$((df)(1))(h) = \underbrace{\frac{1}{2\sqrt{\pi}} h}_{T(h) \text{ pentru } a=1}.$$

Conform (4) $\Rightarrow$

$$\begin{aligned} ((df)(x))(-3) &= \left(\frac{1}{2\sqrt{\arctg x}} \cdot \frac{1}{1+x^2} \right) (-3), \forall x \in]0, +\infty[\\ \Rightarrow ((df)(1))(-3) &= \left(\frac{1}{2\sqrt{\arctg 1}} \cdot \frac{1}{1+1^2} \right) (-3) = \frac{-3}{2\sqrt{\pi}}. \end{aligned}$$