CURS NR. 6
Analiză matematică, AIA

8.2. Serii de puteri în $\mathbb{R}$

Definiţia 8.2.1. Fie $a \in \mathbb{R}$ şi $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un şir de numere reale. Se numeşte *serie de puteri ale* $x-a$ sau *centrată în* a seria

$$a_0 + a_1 (x-a)^1 + a_2 (x-a)^2 + ... + a_n (x-a)^n + ..., \forall x \in \mathbb{R} \text{ sau}$$

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n (x-a)^n, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Observaţia 8.2.1. O serie de puteri centrată în a este o serie de funcţii putere reale

$$f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f_n(x) = a_n (x-a)^n$$

şi, din acest motiv, se poate studia natura seriei (chiar şi suma seriei, care este o funcţie), ca la serii de funcţii, $f_0 + \sum_{n=1}^{\infty} f_n$, cu teoreme specifice, care oferă convergenţa punctuală, convergenţa uniformă.

Pentru $x \in \mathbb{R}$ fixat, seria devine o serie de numere reale, $f_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$, care se studiază ca la un capitol anterior.

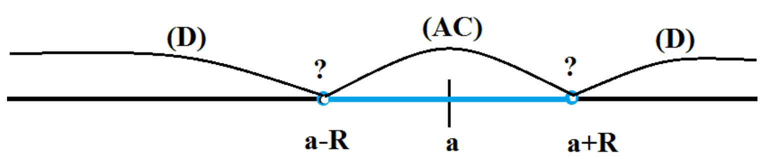
În continuare, natura seriei se studiază cu Teoria Cauchy- Hadamard.

Teorema 8.2.1 (**Cauchy-Hadamard**). Fie $\boxed{\rho = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} \in [0, +\infty]}$ şi $\boxed{R = \frac{1}{\rho},}$ numită *rază de convergenţă*. Atunci:

a) Seria de puteri centrată în a este o serie absolut convergentă, pentru $\forall x \in \mathbb{R}$ cu $|x-a| < R$, adică pentru $\forall x \in \left]a-R, a+R\right[$.

b) Seria de puteri centrată în a este o serie divergentă, pentru $\forall x \in \mathbb{R}$ cu $|x-a| > R$, adică pentru $\forall x \in \left]-\infty, a-R\right[\cup \left]a+R, +\infty\right[$.

c) Pentru $x \in \mathbb{R}$ cu $|x-a| = R$, adică pentru $x = a-R$ şi $x = a+R$ nu se poate preciza natura seriei, se face studiu separat.



Observaţia 8.2.2. Dacă în Teorema 8.2.1.

$\boxed{\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = 0 \Rightarrow R = +\infty}$ $\Rightarrow$seria este absolut convergentă pentru $\forall x \in \mathbb{R}$.

$\boxed{\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = +\infty \Rightarrow R = 0}$ $\Rightarrow$seria este absolut convergentă pentru $x = a$ şi divergentă pentru $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{a\}$.

Observaţia 8.2.3. Dacă $a_n \neq 0, \forall n \in \mathbb{N}$, şi $\boxed{\exists \rho_1 = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}}$ atunci $\boxed{R = \frac{1}{\rho_1}.}$

Observaţia 8.2.4. Fie $m \in \mathbb{N}$. Teoria anterioară este valabilă şi pentru $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_m}$ şi

$a_m (x-a)^m + a_{m+1} (x-a)^{m+1} + ... + a_n (x-a)^n + ..., \forall x \in \mathbb{R}$ sau

$\sum_{n=m}^{\infty} a_n (x-a)^n, \forall x \in \mathbb{R}$.

Exemplul 8.2.1. Să se studieze natura următoarelor serii de puteri:

a) $1 + \sum_{n=1}^{\infty} 3^n (x+2)^n, \forall x \in \mathbb{R}$

Comentariu. Peste tot în rezolvările din acest capitol, chiar dacă şirul a_n are mulţimea de indecşi $\mathbb{N}$, se va considera, pentru determinarea ρ, şirul

$v_n = \sqrt[n]{|a_n|}, \forall n \in \mathbb{N}_2$.

Rezolvare. Este o serie de puteri ale $(x+2)$ sau centrată în $a=-2$, cu

$a_n = 3^n, \forall n \in \mathbb{N}$.

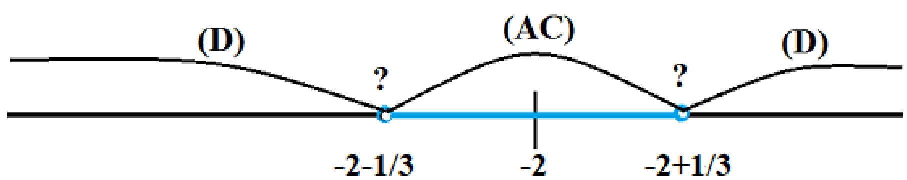
Etapa 1. Se determină raza de convergenţă a seriei.

Modul 1. $\rho = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|3^n|} = \lim\limits_{n\to\infty} 3 = 3 \Rightarrow R = \frac{1}{3}$.

Modul 2. $a_n \neq 0, \forall n \in \mathbb{N}$ şi $\exists \rho_1 = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{|3^{n+1}|}{|3^n|} = \lim\limits_{n\to\infty} 3 = 3 \Rightarrow R = \frac{1}{3}$.

Etapa 2. Se aplică Teorema Cauchy-Hadamard.

•Seria este absolut convergentă pentru $\forall x \in \mathbb{R}$ cu $|x+2| < \frac{1}{3}$, adică pentru $\forall x \in \left]-2-\frac{1}{3}, -2+\frac{1}{3}\right[= \left]-\frac{7}{3}, -\frac{5}{3}\right[$.



•Seria deste divergentă pentru $\forall x \in \mathbb{R}$ cu $|x+2| > \frac{1}{3}$, adică pentru $\forall x \in \left]-\infty, -\frac{7}{3}\right[\cup \left]-\frac{5}{3}, +\infty\right[$.

•Pentru $x \in \mathbb{R}$ cu $|x+2| = \frac{1}{3}$ nu se poate preciza natura seriei, se face studiu separat.

-pentru $x = -\frac{7}{3}$ se obţine seria $\sum_{n=0}^{\infty} 3^n \left(-\frac{7}{3}+2\right)^n \overset{\text{are aceeaşi}}{\underset{\text{natură}}{\sim}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n$. Ultima serie este divergentă, conform condiţiei suficiente de divergenţă ($\nexists \lim\limits_{n\to\infty} (-1)^n$) sau ca serie armonică alternantă cu $\alpha = 0$.

-pentru $x = -\frac{5}{3}$ se obţine seria $\sum_{n=0}^{\infty} 3^n \left(-\frac{5}{3}+2\right)^n \overset{\text{are aceeaşi}}{\underset{\text{natură}}{\sim}} \sum_{n=0}^{\infty} 1$. Ultima serie este divergentă, conform condiţiei suficiente de divergenţă ($\lim\limits_{n\to\infty} 1 = 1 \neq 0$) sau ca serie armonică cu $\alpha = 0$.

Concluzie. Seria este:

absolut convergentă pentru $\forall x \in \left]-\frac{7}{3}, -\frac{5}{3}\right[$,

divergentă pentru $\forall x \in \left]-\infty, -\frac{7}{3}\right] \cup \left[-\frac{5}{3}, +\infty\right[$.

Comentariu Pentru $x = \frac{-2\pi}{3} \in \left]-\frac{7}{3}, -\frac{5}{3}\right[\Rightarrow 1 + \sum_{n=1}^{\infty} 3^n \left(\frac{-2\pi}{3}+2\right)^n$ este absolut convergentă.

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-5)^n}{n} x^n, \forall x \in \mathbb{R}$;

Rezolvare. Este o serie de puteri ale $(x-0)$ sau centrată în $a=0$, cu

$a_n = \dfrac{(-5)^n}{n} = \dfrac{(-1)^n \cdot 5^n}{n}, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Etapa 1. Se determină raza de convergenţă a seriei.

Modul 1. $\rho = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\left|\frac{(-5)^n}{n}\right|} = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \frac{5}{\sqrt[n]{n}} = 5 \Rightarrow R = \frac{1}{5}$.

Modul 2. $a_n \neq 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$ şi $\exists \rho_1 = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\left|\frac{(-5)^{n+1}}{n+1}\right|}{\left|\frac{(-5)^n}{n}\right|} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{5^{n+1}}{5^n}\frac{n}{n+1} = 5 \Rightarrow R = \frac{1}{5}$.

Etapa 2. Se aplică Teorema Cauchy-Hadamard.

•Seria este absolut convergentă pentru $\forall x \in \mathbb{R}$ cu $|x-0| < \frac{1}{5}$, adică pentru $\forall x \in \left]-\frac{1}{5}, \frac{1}{5}\right[$

•Seria este divergentă pentru $\forall x \in \mathbb{R}$ cu $|x-0| > \frac{1}{5}$, adică pentru $\forall x \in \left]-\infty, -\frac{1}{5}\right[\cup \left]\frac{1}{5}, +\infty\right[$.

•Pentru $x \in \mathbb{R}$ cu $|x-0| = \frac{1}{5}$ nu se poate preciza natura seriei, se face studiu separat.

-pentru $x = -\frac{1}{5}$ se obţine seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-5)^n}{n}\left(-\frac{1}{5}\right)^n \underset{\text{natură}}{\overset{\text{are aceeaşi}}{\sim}} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, care este divergentă ca serie armonică cu $\alpha = 1$.

-pentru $x = \frac{1}{5}$ se obţine seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-5)^n}{n}\left(\frac{1}{5}\right)^n \underset{\text{natură}}{\overset{\text{are aceeaşi}}{\sim}} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$, care este semiconvergentă ca serie armonică alternantă cu $\alpha = 1$.

Concluzie. Seria este:

absolut convergentă pentru $\forall x \in \left]-\frac{1}{5}, \frac{1}{5}\right[$,

divergentă pentru $\forall x \in \left]-\infty, -\frac{1}{5}\right] \cup \left]\frac{1}{5}, +\infty\right[$

semiconvergentă pentru $x = \frac{1}{5}$.

c) $1 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^{n(-1)^n} x^n, \forall x \in \mathbb{R}$;

Rezolvare. Este o serie de puteri ale $(x-0)$ sau centrată în $a = 0$, cu

$a_n = 2^{n(-1)^n}, \forall n \in \mathbb{N}$.

Deoarece $\mathbb{N} = \left\{2\widetilde{k}; \widetilde{k} \in \mathbb{N}\right\} \cup \left\{2\widetilde{k}+1; \widetilde{k} \in \mathbb{N}\right\}$, se explicitează

$$a_n = \begin{cases} 2^n, & \text{dacă } n = 2\widetilde{k}; \widetilde{k} \in \mathbb{N} \\ \frac{1}{2^n}, & \text{dacă } n = 2\widetilde{k}+1; \widetilde{k} \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Etapa 1. Se determină raza de convergenţă a seriei.

Modul 1. $\rho = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\left|n^{(-1)^n}\right|}$.

$$v_n = \sqrt[n]{\left|2^{n(-1)^n}\right|} = \begin{cases} 2, & \text{dacă } n = 2\widetilde{k}; \widetilde{k} \in \mathbb{N}^* \\ \frac{1}{2}, & \text{dacă } n = 2\widetilde{k}+1; \widetilde{k} \in \mathbb{N}^*. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lim\limits_{\widetilde{k}\to\infty} v_{2\widetilde{k}} = 2 \\ \lim\limits_{\widetilde{k}\to\infty} v_{2\widetilde{k}+1} = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \mathcal{L}\left((v_n)_{n\in\mathbb{N}_2}\right) = \left\{2, \frac{1}{2}\right\} \Rightarrow \begin{cases} \underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, v_n = \frac{1}{2} \\ \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, v_n = 2 \end{cases}$$

$\Rightarrow \rho = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, v_n = 2 \Rightarrow R = \frac{1}{\rho} = \frac{1}{2}$.

Modul 2. $a_n \neq 0, \forall n \in \mathbb{N}$ şi $\exists ?\rho_1 = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\left|2^{(n+1)(-1)^{n+1}}\right|}{\left|2^{n(-1)^n}\right|}$.

$$u_n = \frac{\left|2^{(n+1)(-1)^{n+1}}\right|}{\left|2^{n(-1)^n}\right|} = \begin{cases} \frac{1}{2^{2n+1}}, & \text{dacă } n = 2\widetilde{k}; \widetilde{k} \in \mathbb{N} \\ 2^{n+1+n}, & \text{dacă } n = 2\widetilde{k}+1; \widetilde{k} \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lim\limits_{\widetilde{k}\to\infty} u_{2\widetilde{k}} = 0 \\ \lim\limits_{\widetilde{k}\to\infty} u_{2\widetilde{k}+1} = +\infty \end{cases} \Rightarrow \mathcal{L}\left((u_n)_{n\in\mathbb{N}}\right) = \{0, +\infty\} \Rightarrow \begin{cases} \underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, u_n = 0 \\ \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, u_n = +\infty \end{cases}$$

$\Rightarrow \nexists \rho_1 = \lim\limits_{n\to\infty} u_n \Rightarrow$nu se poate aplica Modul 2.

Etapa 2. Se aplică Teorema Cauchy-Hadamard.

•Seria este absolut convergentă pentru $\forall x \in \mathbb{R}$ cu $|x| < \frac{1}{2}$, adică pentru $\forall x \in \left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[$.

•Seria deste divergentă pentru $\forall x \in \mathbb{R}$ cu $|x| > \frac{1}{2}$, adică pentru $\forall x \in \left]-\infty, -\frac{1}{2}\right[\cup \left]\frac{1}{2}, +\infty\right[$.
•Pentru $x \in \mathbb{R}$ cu $|x| = \frac{1}{2}$ nu se poate preciza natura seriei, se face studiu separat.
-pentru $x = -\frac{1}{2}$ se obţine seria $1 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^{n(-1)^n} \left(\frac{-1}{2}\right)^n$ care este divergentă din condiţia suficientă de divergenţă. Într-adevăr, termenul general al seriei este

$$x_n = (-1)^n \, 2^{n(-1)^n - n}, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

$$x_n = \begin{cases} 1, & \text{dacă } n = 2\widetilde{k}; \widetilde{k} \in \mathbb{N}^* \\ -\frac{1}{2^{2n}}, & \text{dacă } n = 2\widetilde{k} + 1; \widetilde{k} \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lim\limits_{\widetilde{k}\to\infty} x_{2\widetilde{k}} = 1; \\ \lim\limits_{\widetilde{k}\to\infty} x_{2\widetilde{k}+1} = 0. \end{cases} \Rightarrow \mathcal{L}\left((x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}\right) = \{0, 1\} \Rightarrow \begin{cases} \underline{\lim}_{n\to\infty} x_n = 0 \\ \overline{\lim}_{n\to\infty} x_n = 1 \end{cases} \Rightarrow \nexists \lim_{n\to\infty} x_n$$

$\overset{CS \text{ de Divergenţă}}{\Rightarrow}$ seria este divergentă.

-pentru $x = \frac{1}{2}$ se obţine seria $1 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^{n(-1)^n} \left(\frac{1}{2}\right)^n$ care este divergentă, analog.

Concluzie. Seria este:
absolut convergentă pentru $\forall x \in \left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[$,
divergentă pentru $\forall x \in \left]-\infty, -\frac{1}{2}\right] \cup \left[\frac{1}{2}, +\infty\right[$.

d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 7^n x^{2n}, \forall x \in \mathbb{R}$.

Rezolvare. Seria

$$7^1 x^2 + 7^2 x^4 + ... + 7^n x^{2n} + ..., \forall x \in \mathbb{R}$$

are aceeaşi natură cu seria

$$0x^1 + 7^1 x^2 + 0x^3 + 7^2 x^4 + 0x^5 + ... + 7^n x^{2n} + ..., \forall x \in \mathbb{R},$$

scrisă $\sum\limits_{\widetilde{n}=1}^{\infty} a_{\widetilde{n}} x^{\widetilde{n}}$, unde

$$a_{\widetilde{n}} = \begin{cases} 7^n, & \text{dacă } \widetilde{n} = 2n; n \in \mathbb{N}^* \\ 0, & \text{dacă } \widetilde{n} = 2n + 1; n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Etapa 1. Se determină raza de convergenţă a seriei.
Modul 1. $\rho = \overline{\lim}_{\widetilde{n}\to\infty} \sqrt[\widetilde{n}]{|a_{\widetilde{n}}|}$.

$$v_{\widetilde{n}} = \sqrt[\widetilde{n}]{|a_{\widetilde{n}}|} = \begin{cases} \sqrt[2n]{7^n}, & \text{dacă } \widetilde{n} = 2n; n \in \mathbb{N}^* \\ \sqrt[2n+1]{0}, & \text{dacă } \widetilde{n} = 2n + 1; n \in \mathbb{N}^*. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} v_{2n} = \sqrt{7} \\ \lim\limits_{n\to\infty} v_{2n+1} = 0 \end{cases} \Rightarrow \mathcal{L}\left((v_{\widetilde{n}})_{\widetilde{n}\in\mathbb{N}_2}\right) = \left\{0, \sqrt{7}\right\} \Rightarrow \begin{cases} \underline{\lim}_{\widetilde{n}\to\infty} v_{\widetilde{n}} = 0 \\ \overline{\lim}_{\widetilde{n}\to\infty} v_{\widetilde{n}} = \sqrt{7} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \rho = \overline{\lim}_{\widetilde{n}\to\infty} v_{\widetilde{n}} = \sqrt{7} \Rightarrow R = \frac{1}{\sqrt{7}}.$$

Modul 2. Nu se poate aplica, deoarece $a_{2n+1} = 0, \forall n \in \mathbb{N}$.
Etapa 2. Se aplică Teorema Cauchy-Hadamard.
•Seria este absolut convergentă pentru $\forall x \in \mathbb{R}$ cu $|x| < \frac{1}{\sqrt{7}}$, adică pentru $\forall x \in \left]-\frac{1}{\sqrt{7}}, \frac{1}{\sqrt{7}}\right[$.
•Seria deste divergentă pentru $\forall x \in \mathbb{R}$ cu $|x| > \frac{1}{\sqrt{7}}$, adică pentru $\forall x \in \left]-\infty, -\frac{1}{\sqrt{7}}\right[\cup \left]\frac{1}{\sqrt{7}}, +\infty\right[$.
•Pentru $x \in \mathbb{R}$ cu $|x| = \frac{1}{\sqrt{7}}$ nu se poate preciza natura seriei se face studiu separat.
-pentru $x = -\frac{1}{\sqrt{7}}$ se obţine seria $1 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} 7^n \left(-\frac{1}{\sqrt{7}}\right)^{2n} \underset{\text{natură}}{\overset{\text{are aceeaşi}}{\sim}} \sum\limits_{n=0}^{\infty} 1$, care este divergentă din Condiţia suficientă de divergenţă, deoarece $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} 1 = 1 \neq 0$.

-pentru $x=\frac{1}{\sqrt{7}}$ se obţine seria $1+\sum\limits_{n=0}^{\infty}7^n\left(\frac{1}{\sqrt{7}}\right)^{2n}\underset{\text{natură}}{\overset{\text{are aceeaşi}}{\sim}}\sum\limits_{n=0}^{\infty}1$, care este divergentă din Condiţia suficientă de divergenţă, deoarece $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}1=1\neq 0$.

Concluzie. Seria este:

absolut convergentă pentru $\forall x\in\left]-\frac{1}{\sqrt{7}},\frac{1}{\sqrt{7}}\right[$,

divergentă pentru $\forall x\in\left]-\infty,-\frac{1}{\sqrt{7}}\right]\cup\left[\frac{1}{\sqrt{7}},+\infty\right[$.

e) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)!}(x+1)^n,\forall x\in\mathbb{R}$

Rezolvare. Este o serie de puteri ale $(x+1)$ sau centrată în $a=-1$, cu

$a_n=\frac{1}{(n+1)!},\forall n\in\mathbb{N}^*$.

Etapa 1. Se determină raza de convergenţă a seriei.

Modul 2. $a_n\neq 0,\forall n\in\mathbb{N}^*$ şi $\exists\rho_1=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\left|\frac{1}{(n+2)!}\right|}{\left|\frac{1}{(n+1)!}\right|}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n+2}=0\Rightarrow R=+\infty$.

Etapa 2. Se aplică Teorema Cauchy-Hadamard.

•Seria este absolut convergentă pentru $\forall x\in\mathbb{R}$ cu $|x+1|<+\infty$, adică $\forall x\in\mathbb{R}$.

f) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^n(x-\pi)^n,\forall x\in\mathbb{R}$.

Rezolvare. Este o serie de puteri ale $(x-\pi)$ sau centrată în π, cu

$a_n=n^n,\forall n\in\mathbb{N}^*$.

Etapa 1. Se determină raza de convergenţă a seriei.

Modul 1. $\rho=\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|n^n|}=\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}n=+\infty\Rightarrow R=0$.

Etapa 2. Se aplică Teorema Cauchy-Hadamard.

•Seria este absolut convergentă pentru $\forall x\in\mathbb{R}$ cu $|x-\pi|<0$, adică pentru niciun x.

•Seria este divergentă pentru $\forall x\in\mathbb{R}$ cu $|x-\pi|>0$, adică pentru $\forall x\in\left]-\infty,\pi\right[\cup\left]\pi,+\infty\right[$.

•Pentru $x\in\mathbb{R}$ cu $|x-\pi|=0$ nu se poate preciza natura seriei, se face studiu separat.

-pentru $x=\pi$ se obţine seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^n(\pi-\pi)^n\overset{\text{are aceeaşi natură}}{\sim}\sum\limits_{n=1}^{\infty}0$. Ultima serie este absolut convergentă.

Concluzie. Seria este:

absolut convergentă pentru $x=\pi$,

divergentă pentru $\forall x\in\left]-\infty,\pi\right[\cup\left]\pi,+\infty\right[=\mathbb{R}\setminus\{\pi\}$.

Seria geometrică. $\sum\limits_{n=m}^{\infty}x^n,\forall x\in\mathbb{R}$ este

•punctual şi absolut convergentă, pentru $x\in\left]-1,1\right[$, cu suma

$s:\left]-1,1\right[\to\mathbb{R},s(x)=x^m\frac{1}{1-x}$;

•divergentă, pentru $x\in\left]-\infty,-1\right]\cup\left[1,+\infty\right[$.

Pentru $m=0$, se convine să se noteze $1+\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^n$, adică

$$\boxed{(*)\ \underbrace{1+x+x^2+...+x^n+...}_{1+\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^n}=\underbrace{\frac{1}{1-x}}_{\text{suma seriei}},\forall x\in\left]-1,1\right[\text{ sau }|x|<1.}$$

Observaţia 8.2.5. Teorema lui Borel afirmă mai mult, că fiecare serie de puteri reale este seria Taylor (studiată ulterior) a unei funcţii de clasă C^∞.

Operaţii cu serii de puteri

Observaţia 8.2.6. În orice serie de puteri se poate face *schimbare de variabilă de funcţie putere* pe intervalul de convergenţă.

Exemplul 8.2.2. **a)** În $(*)$, din $x=-y\Rightarrow$

$1-y+y^2+...+(-1)^n y^n+...=\dfrac{1}{1+y},\forall y\in\mathbb{R}$ cu $-y\in\left]-1,1\right[$ sau $|-y|<1$, adică $y\in\left]-1,1\right[$.

Renotând $y=x\Rightarrow$

$$\boxed{(*_1)\ 1-x+x^2+...+(-1)^n x^n+...=\frac{1}{1+x},\forall x\in\mathbb{R}\text{ cu }x\in\left]-1,1\right[}$$

b) În $(*)$, schimbând x în $-x^2\Rightarrow$

$$\boxed{(*_2)\ 1-x^2+x^4+...+(-1)^n x^{2n}+...=\frac{1}{1+x^2},\forall x\in\mathbb{R}\text{ cu }\left|-x^2\right|<1,\text{ adică }x\in\left]-1,1\right[.}$$

c) În $(*)$, schimbând x în $\frac{1}{2}x\Rightarrow$

$(*_3)\ 1+\frac{1}{2}x+\frac{1}{2^2}x^2+...+\frac{1}{2^n}x^n+...=\dfrac{1}{1-\frac{1}{2}x},\forall x\in\mathbb{R}$ cu $\left|\frac{1}{2}x\right|<1$, adică $|x|<2$, adică $x\in\left]-2,2\right[$.

d) În $(*)$, schimbând x în $\frac{1}{2}(x+1)\Rightarrow$

$(*_4)\ 1+\frac{1}{2}(x+1)+\frac{1}{2^2}(x+1)^2+...+\frac{1}{2^n}(x+1)^n+...=\dfrac{1}{1-\frac{1}{2}(x+1)},\forall x\in\mathbb{R}$ cu

$\left|\frac{1}{2}(x+1)\right|<1$, adică $|x+1|<2$, adică $x\in\left]-1-2,-1+2\right[=\left]-3,1\right[$.

e) Să se determine intervalul de convergenţă şi suma seriei $1+\sum\limits_{n=1}^{\infty}3^n(x+2)^n,\forall x\in\mathbb{R}$.

Conform Exemplului 8.2.1, a), este o serie de puteri ale $(x+2)$ sau centrată în $a=-2$, cu $a_n=3^n,\forall n\in\mathbb{N}$.

Etapa 1. S-a determinat raza de convergenţă a seriei, $R=\frac{1}{3}$.

Etapa 2. S-a aplicat Teorema Cauchy-Hadamard şi seria este:

absolut convergentă pentru $\forall x\in\left]-\frac{7}{3},-\frac{5}{3}\right[$,

divergentă pentru $\forall x\in\left]-\infty,-\frac{7}{3}\right]\cup\left[-\frac{5}{3},+\infty\right[$.

Intervalul de convergenţă este $\mathbb{I}_C=\left]-\frac{7}{3},-\frac{5}{3}\right[$.

Etapa 3. Se determină suma seriei pe intervalul de convergenţă.

$1+\sum\limits_{n=1}^{\infty}3^n(x+2)^n=s(x),\forall x\in\mathbb{I}_C$.

$1+3^1(x+2)^1+3^2(x+2)^2+...+3^n(x+2)^n+...=?,\forall x\in\mathbb{I}_C$.

În $(*)$, schimbând x în $3(x+2)\Rightarrow$

$(*_5)\ 1+3(x+2)+3^2(x+2)^2+...+3^n(x+2)^n+...=\dfrac{1}{1-3(x+2)},\forall x\in\mathbb{R}$ cu

$|3(x+2)|<1$, adică $|x+2|<\frac{1}{3}$, adică $x\in\left]-2-\frac{1}{3},-2+\frac{1}{3}\right[=\left]-\frac{7}{3},-\frac{5}{3}\right[$.

Deci suma seriei din enunţ este $s(x)=\dfrac{1}{1-3(x+2)},\forall x\in\left]-\frac{7}{3},-\frac{5}{3}\right[$.

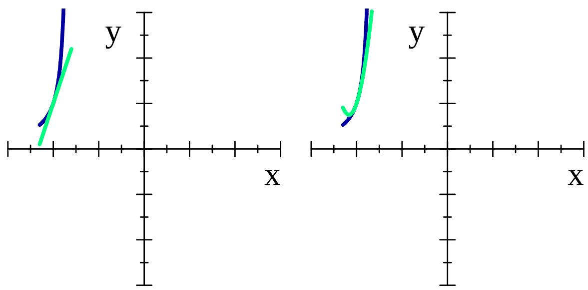
Comentariu $\sum\limits_{n=2}^{\infty} 3^n (x+2)^n = \dfrac{1}{1-3(x+2)} - 1 - 3(x+2), \forall x \in \left]-\frac{7}{3}, -\frac{5}{3}\right[$.

Comentariu Se reprezintă grafic pe $\mathbb{I}_C$ suma s şi polinoamele funcţii - termeni din şirul sumelor parţiale (vor fi chiar polinoame Taylor descrise ulterior pentru s)

$T_{1,-2}(x) = 1 + 3(x+2);$

$T_{2,-2}(x) = 1 + 3^1 (x+2)^1 + 3^2 (x+2)^2;$

şi se observă că, într-o vecinătate a lui $x = -2$ se poate aproxima $f(x)$ cu $T_{n,-2}(x)$ (graficul polinomului aproape se suprapune peste al lui s).



Teorema 8.2.2. Fie $a_0 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n (x-a)^n, \forall x \in \mathbb{R}$ o serie de puteri centrată în a cu raza de convergenţă R_1 şi cu funcţia sumă s_1 definită pe A_1. Fie $b_0 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n (x-a)^n, \forall x \in \mathbb{R}$ o serie de puteri centrată în a cu raza de convergenţă R_2 şi cu funcţia sumă s_2 definită pe A_2. Fie $\lambda \in \mathbb{R}^*$. Atunci

a) *seria sumă a celor două serii*

$$(a_0 + b_0) + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)(x-a)^n, \forall x \in \mathbb{R}$$

este tot o serie de puteri centrată în a cu raza de convergenţă $R \geq \min\{R_1, R_2\}$ şi cu funcţia sumă $s_{sumă} = s_1 + s_2$ definită cel puţin pe $A_1 \cap A_2$, adică

$$\underbrace{\left(a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n (x-a)^n\right)}_{s_1(x)} + \underbrace{\left(b_0 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n (x-a)^n\right)}_{s_2(x)} = (a_0 + b_0) + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)(x-a)^n,$$

$\forall x \in A_1 \cap A_2$.

b) *seria produsul scalar al unei serii cu un scalar nenul*

$$(\lambda a_0) + \sum_{n=1}^{\infty} (\lambda a_n)(x-a)^n, \forall x \in \mathbb{R}$$

este tot o serie de puteri centrată în a cu raza de convergenţă R_1 şi cu funcţia sumă $s_{produs} = \lambda s_1$ definită cel puţin pe A_1, adică

$$\lambda \underbrace{\left(a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n (x-a)^n\right)}_{s_1(x)} = (\lambda a_0) + \sum_{n=1}^{\infty} (\lambda a_n)(x-a)^n, \forall x \in A_1.$$

Exemplul 8.2.3. Conform Teoremei 8.2.2, două serii se pot aduna termen cu termen pe intervalul comun de convergenţă:

$(*)\ 1 + x + x^2 + x^3 + ... + x^n + ... = \dfrac{1}{1-x}, \forall x \in \mathbb{R}$ cu $x \in]-1, 1[$

$(*_1)\ 1 - x + x^2 - x^3 + ... + (-1)^n x^n + ... = \dfrac{1}{1+x}, \forall x \in \mathbb{R}$ cu $x \in]-1, 1[$

şi se obţine

$$2+0x+2x^2+0x^3+...+(1+(-1)^n)\,x^n+...=\frac{1}{1-x}+\frac{1}{1+x},\forall x\in\mathbb{R} \text{ cu } x\in\,]-1,1[\,\cap\,]-1,1[\,.$$

Conform Teoremei 8.2.2, o serie se poate înmulţi termen cu termen cu un scalar nenul (cu $\frac{1}{2}$) pe intervalul de convergenţă:

$$1+x^2+x^4+...+\tfrac{1+(-1)^n}{2}x^n+...=\frac{1}{1-x^2},\forall x\in\mathbb{R} \text{ cu } x\in\,]-1,1[\,.$$

Teorema 8.2.3. Fie $a_0+\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n\,(x-a)^n\,,\forall x\in\mathbb{R}$ o serie de puteri centrată în a cu raza de convergenţă R şi cu funcţia sumă s definită pe A, adică

$$s:A\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R},\; s\,(x)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\,(x-a)^n.$$

Atunci: **a)** funcţia sumă s este continuă pe A;
b) funcţia sumă s este derivabilă pe A şi *seria derivată*

$$1+\sum_{n=2}^{\infty}na_n\,(x-a)^{n-1}\,,\forall x\in\mathbb{R}$$

este tot o serie de puteri centrată în a cu raza de convergenţă R şi suma $s_{derivat\breve{a}}\,(x)=s'\,(x)$ definită pe A, adică

$$\frac{d}{dx}\underbrace{\left(a_0+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\,(x-a)^n\right)}_{s(x)}=1+\sum_{n=2}^{\infty}na_n\,(x-a)^{n-1}\,,\forall x\in A;$$

(orice serie de puteri poate fi derivată termen cu termen pe intervalul de convergenţă).
c) funcţia sumă s este integrabilă pe A şi *seria integrală*

$$a_0x+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\frac{(x-a)^{n+1}}{n+1}$$

este tot o serie de puteri centrată în a cu raza de convergenţă R şi suma $s_i\,(x)=\int s\,(x)\,dx$ definită măcar pe A, cu o constantă de integrare unic determinată, adică

$$\int\underbrace{\left(a_0+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\,(x-a)^n\right)}_{s(x)}dx=a_0x+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\frac{(x-a)^{n+1}}{n+1}+c,\forall x\in A,$$

cu c unic determinată din $x=a$ (orice serie de puteri poate fi integrată termen cu termen pe intervalul de convergenţă).
d) funcţia sumă s este integrabilă Riemann pe orice interval $\left[\widetilde{a},\widetilde{b}\right]\subseteq A$

$$\int_{\widetilde{a}}^{\widetilde{b}}\underbrace{\left(a_0+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\,(x-a)^n\right)}_{s(x)}dx=\left.\left(a_0x+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\frac{(x-a)^{n+1}}{n+1}\right)\right|_{x=\widetilde{a}}^{x=\widetilde{b}}.$$

Exemplul 8.2.4. Să se determine intervalul de convergenţă şi suma seriei $\sum\limits_{n=1}^{\infty}nx^n,\forall x\in\mathbb{R}$.

Rezolvare. Este o serie de puteri ale $x-0$ sau centrată în 0, cu

$a_n=n,\forall n\in\mathbb{N}^*$.

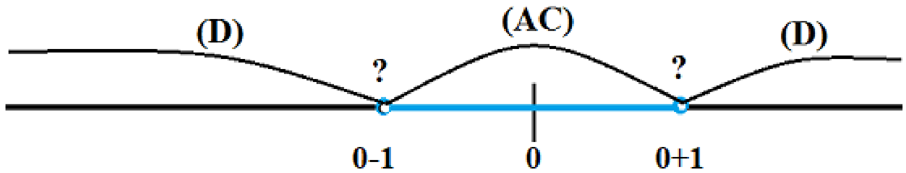
Etapa 1. Se determină raza de convergenţă a seriei

Modul 1. $\rho=\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|n|}=\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\,(\sqrt[n]{n})=1\Rightarrow R=1.$

Modul 2. $a_n \neq 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$ şi $\exists \rho_1 = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{|n+1|}{|n|} = 1 \Rightarrow R = 1.$

Etapa 2. Se aplică Teorema Cauchy-Hadamard.

•Seria este absolut convergentă, pentru $\forall x \in \mathbb{R}$ cu $|x - 0| < 1$, adică pentru $\forall x \in \left]-1, 1\right[$.



•Seria deste divergentă, pentru $\forall x \in \mathbb{R}$ cu $|x - 0| > 1$, adică pentru $\forall x \in \left]-\infty, -1\right[\cup \left]1, +\infty\right[$.

•Pentru $x \in \mathbb{R}$ cu $|x - 0| = 1$ nu se poate preciza natura seriei, se face studiu separat.

-pentru $x = -1$ se obţine seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n(-1)^n$, care este divergentă sau din Condiţia suficientă de divergenţă, deoarece $\nexists \lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} n(-1)^n$ sau ca serie armonică generalizată alternantă cu $\alpha = -1$.

-pentru $x = 1$ se obţine seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n$, care este divergentă sau din Condiţia suficientă de divergenţă, deoarece $\exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} n = +\infty \neq 0$ sau ca serie armonică generalizată cu $\alpha = -1$.

Deci seria este:

absolut convergentă pentru $\forall x \in \left]-1, 1\right[$,

divergentă pentru $\forall x \in \left]-\infty, -1\right] \cup \left[1, +\infty\right[$.

Intervalul de convergenţă este $\mathbb{I}_C = \left]-1, 1\right[$.

Etapa 3. Se determină suma seriei pe intervalul de convergenţă.

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} nx^n = s(x), \forall x \in \mathbb{I}_C.$

$1x^1 + 2x^2 + 3x^3 + ... + nx^n + ... =?, \forall x \in \mathbb{I}_C.$

Se observă că n poate să apară ca factor lui x^n prin operaţia de derivare.

Se ştie de la seria geometrică

$$(*)\, 1 + x + x^2 + ... + x^n + ... = \frac{1}{1-x}, \forall x \in \left]-1, 1\right[\,\Big|\, \frac{d}{dx}$$

Se aplică Teorema 3 şi, prin derivare termen cu termen,

$$\Rightarrow 1 + 2x + ... + nx^{n-1} + ... = \frac{1}{(1-x)^2}, \forall x \in \left]-1, 1\right[\,\Big|\, \cdot x \in \left]-1, 1\right[\setminus \{0\}$$

$$\Rightarrow x + 2x^2 + ... + nx^n + ... = \frac{x}{(1-x)^2}, \forall x \in \left]-1, 1\right[\setminus \{0\}.$$

Egalitatea precedentă se verifică şi pentru $x = 0$, adică

$$\Rightarrow x + 2x^2 + ... + nx^n + ... = \frac{x}{(1-x)^2}, \forall x \in \left]-1, 1\right[$$

Deci suma seriei din enunţ este $s(x) = \dfrac{x}{(1-x)^2}, \forall x \in \left]-1, 1\right[$, adică

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^n = \frac{x}{(1-x)^2}, \forall x \in \left]-1, 1\right[,$$

sau $x + 2x^2 + ... + nx^n + ... = \dfrac{x}{(1-x)^2}, \forall x \in \left]-1, 1\right[$.

Comentariu $\sum\limits_{n=3}^{\infty} nx^n = \dfrac{x}{(1-x)^2} - x - 2x^2, \forall x \in \left]-1, 1\right[$.

Comentariu Se poate demonstra, ca în anterior şi ca în Seminar, că

$1+\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^n=\dfrac{1}{1-x},\forall x\in\,]-1,1[$
$\sum\limits_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}=\dfrac{1}{(1-x)^2},\forall x\in\,]-1,1[$
$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{n(n-1)}{2}x^{n-2}=\dfrac{1}{(1-x)^3},\forall x\in\,]-1,1[$
Rezultatele sunt cazuri speciale ale seriei binomiale, cu $\alpha=-1,\alpha=-2,\alpha=-3$ precizate în capitolul ulterior.

Exemplul 8.2.5. Fie **seria logaritmică** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{1}{n}x^n,\forall x\in\mathbb{R}$. Să se determine mulţimea de convergenţă şi suma ei.
Rezolvare. Este o serie de puteri ale $(x-0)$ sau centrată în $a=0$, cu
$a_n=(-1)^{n-1}\frac{1}{n},\forall n\in\mathbb{N}^*$.
Etapa 1. Se determină raza de convergenţă a seriei

Modul 1. $\rho=\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{\left|(-1)^{n-1}\frac{1}{n}\right|}=\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\frac{1}{\sqrt[n]{n}}=1\Rightarrow R=1.$

Modul 2. $a_n\neq 0,\forall n\in\mathbb{N}^*$ şi.$\exists\rho_1=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\left|(-1)^n\frac{1}{n+1}\right|}{\left|(-1)^{n-1}\frac{1}{n}\right|}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{n+1}\right)=1\Rightarrow R=1.$

Etapa 2. Se aplică Teorema Cauchy-Hadamard.
•Seria este absolut convergentă, pentru $\forall x\in\mathbb{R}$ cu $|x|<1$, adică pentru $\forall x\in\,]-1,1[$
•Seria deste divergentă, pentru $\forall x\in\mathbb{R}$ cu $|x|>1$, adică pentru $\forall x\in\,]-\infty,-1[\,\cup\,]1,+\infty[$.
•Pentru $x\in\mathbb{R}$ cu $|x|=1$ nu se poate preciza natura seriei, se face studiu separat.
-pentru $x=-1$ se obţine seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{1}{n}(-1)^n\overset{\text{are aceeaşi}}{\underset{\text{natură}}{\sim}}-\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$, care este divergentă ca serie armonică cu $\alpha=1$.
-pentru $x=1$ se obţine seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{1}{n}(1)^n\overset{\text{are aceeaşi}}{\underset{\text{natură}}{\sim}}\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{1}{n}$, care este semiconvergentă ca serie armonică alternantă cu $\alpha=1$.
Deci seria este:
absolut convergentă pentru $\forall x\in\,]-1,1[$,
divergentă pentru $\forall x\in\,]-\infty,-1]\cup\,]1,+\infty[$,
semiconvergentă pentru $x=1$.
Intervalul de convergenţă este $\mathbb{I}_C=\,]-1,1]$.
Etapa 3. Se determină suma seriei pe intervalul de convergenţă.
$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{1}{n}x^n=s(x),\forall x\in\mathbb{I}_C.$
$\dfrac{1}{1}x^1+\dfrac{-1}{2}x^2+\dfrac{1}{3}x^3+\dfrac{-1}{4}x^4...+\dfrac{(-1)^{n-1}}{n}x^n+...=?,\forall x\in\mathbb{I}_C.$
Se intuieşte că $\dfrac{1}{n}$ poate să apară ca factor lui x^n prin operaţia de integrare.
Se ştie de la seria geometrică
$(*)\,1+x+x^2+...+x^n+...=\dfrac{1}{1-x},\forall x\in\,]-1,1[.$
În $(*)$, schimbând x în $-x\Rightarrow$
$(*_1)\,1-x+x^2-x^2+...+(-1)^n x^n+...=\dfrac{1}{1+x},\forall x\in\mathbb{R}$ cu $|-x|<1$, adică $x\in\,]-1,1[$.
Se aplică Teorema 8.2.3 şi, prin integrare termen cu termen în $(*_1)$ pe un interval $\subseteq\,]-1,1[$, se

obţine

$$x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+...+(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}+...=\ln(1+x)+c,\forall x\in\,]-1,1[\,.$$

Pentru $x=0=a$, se găseşte $c=0\Rightarrow$

$$x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+...+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}+...=\ln(1+x)\,,\forall x\in\,]-1,1[$$

sau $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}x^n=\ln(1+x)\,,\forall x\in\,]-1,1[\,.$

Deci suma seriei din enunţ este $s(x)=\ln(1+x)\,,\forall x\in\,]-1,1[\,.$

În plus, când s-a determinat intervalul de convergenţă, s-a obţinut că seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}x^n$ este convergentă şi pentru $x=1$, $A=\,]-1,1]$ fiind mulţimea de convergenţă pentru seria de puteri. Atunci funcţia sumă a seriei de puteri are în $x=1$ valoarea obţinută prin prelungirea prin continuitate, adică $s(1)=\ln 2$, adică

$$\boxed{x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+...+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}+...=\ln(1+x)\,,\forall x\in\,]-1,1]}$$

sau $\boxed{\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}x^n=\ln(1+x)\,,\forall x\in\,]-1,1]}$

În particular, $\boxed{\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}=\ln 2.}$

<u>Comentariu</u> $\sum\limits_{n=2}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}x^n=\ln(1+x)-1,\forall x\in\,]-1,1]$

Exemplul 8.2.6. Fie **seria exponenţială** $1+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n,\forall x\in\mathbb{R}$. Să se determine mulţimea de convergenţă şi suma ei.

Rezolvare. Este o serie de puteri ale $(x-0)$ sau centrată în $a=0$, cu

$$a_n=\frac{1}{n!},\forall n\in\mathbb{N}.$$

<u>Etapa 1.</u> Se determină raza de convergenţă a seriei.

$$a_n\neq 0,\forall n\in\mathbb{N}\text{ şi }\exists\rho_1=\lim_{n\to\infty}\frac{\left|\frac{1}{(n+1)!}\right|}{\left|\frac{1}{n!}\right|}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0\Rightarrow R=+\infty.$$

<u>Etapa 2.</u> Se aplică Teorema Cauchy-Hadamard.

Seria este absolut convergentă pentru $\forall x\in\mathbb{R}$.

<u>Etapa 3.</u> Se determină suma seriei, adică funcţia

$$s:A=\mathbb{R}\to\mathbb{R},s(x)=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n.$$

Se aplică Teorema 8.2.3, se derivează termen cu termen

$$s(x)=1+\frac{1}{1!}x+\frac{1}{2!}x^2+...+\frac{1}{n!}x^n+...,\forall x\in\mathbb{R}\,\Big|\,\frac{d}{dx}$$

$$\Rightarrow s'(x)=\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}2x+...+\frac{1}{n!}nx^{n-1}+...,\forall x\in\mathbb{R}.$$

Se observă că $s'(x)=s(x)\,,\forall x\in\mathbb{R}$.

Cum $s(x)\neq 0,\forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow\frac{s'(x)}{s(x)}=1,\forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow$

$$\ln|s(x)|=x+c_1,\forall x\in\mathbb{R},c_1\in\mathbb{R}\overset{c_1=\ln c_2,c_2>0}{\Rightarrow}|s(x)|=c_2e^x,\forall x\in\mathbb{R},c_2>0\Rightarrow$$

$s(x) = ce^x, \forall x \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{R}^*$.

Deoarece $s(0) = 1 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} 0^n = 1 \Rightarrow c = 1$.

Atunci $s(x) = e^x, \forall x \in \mathbb{R}$.

Deci $\boxed{1 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n = e^x, \forall x \in \mathbb{R}}$ sau $\boxed{1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + ... + \frac{1}{n!}x^n + ... = e^x, \forall x \in \mathbb{R}.}$

8.3. Dezvoltarea în serie Taylor (de puteri) a unei funcţii reale cu valori reale

Observaţia 8.3.1. Formula lui Taylor permite o aproximare a funcţiilor transcendente $(e^x, \sin x, \cos x, ...)$ cu funcţii polinomiale de ordin n oarecare pe o vecinătate a lui $a = 0$. Eroarea de aproximare este dată de modulul restului Taylor. A se vedea şi Cursul 5 şi pentru interpretarea grafică.

Funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} x^4 - 6x^2 + 1, & \text{dacă } x \leq 1 \\ 4x^4 - 8x^3, & \text{dacă } x > 1 \end{cases}$

se poate aproxima doar cu formula lui Taylor de ordin maxim $n = 1$ pe o vecinătate a lui $a = 1$ cu rest Lagrange:

$$f(x) = \underbrace{-4 + \frac{-8}{1!}(x-1)}_{T_{1,1}(x)} + \underbrace{\frac{f''(c_1)}{2!}(x-1)^2}_{R_{1,1}(x)},$$

cu $c_1 = 1 + \theta_1 (x - 1), \theta_1 \in]0, 1[$. A se vedea Seminarul 4.

Seriile Taylor (introduse de Brook Taylor în 1715) se vor ataşa funcţiilor derivabile de orice ordin $n \in \mathbb{N}^*$ pe un interval $\mathbb{I}$, având drept caz particular seriile MacLaurin (introduse ulterior de Colin MacLaurin).

A se studia pentru interpretare şi aplicaţii "Taylor series | Chapter 11, Essence of calculus", realizat de 3Blue1Brown pe

https://www.youtube.com/watch?v=3d6DsjIBzJ4

sau "Dear Calculus 2 Students, This is why you're learning Taylor Series", realizat de Zachary S. pe

https://www.youtube.com/watch?v=eX1hvWxmJVE

(o înţelegere mai bună va fi şi după parcurgerea cursului de EDCO)

sau "Taylor series" pe

https://en.wikipedia.org/wiki/Taylor_series.

Definiţia 8.3.1. **a)** Fie $\mathbb{I} \subseteq \mathbb{R}$ interval cu interior nevid şi $a \in \operatorname{int} \mathbb{I}$. Fie $f : \mathbb{I} \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcţie derivabilă de orice ordin $n \in \mathbb{N}^*$ pe $\mathbb{I}, f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{I}; \mathbb{R})$. Se numeşte *serie Taylor asociată funcţiei f într-o vecinătate a punctului a* seria de puteri reale

$$f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + ... + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + ..., \forall x \in \mathbb{I} \tag{1}$$

sau, restrâns, $f(a) + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n, \forall x \in \mathbb{I}$. $\quad (1')$

Pentru $a = 0$, seria anterioară se numeşte *serie MacLaurin asociată funcţiei f*.

b) Fie $\mathbb{I}_C \subseteq \mathbb{I}$ intervalul de convergenţă a seriei de puteri (1). Funcţia f se numeşte *dezvoltabilă în serie Taylor pe $\mathbb{I}_C$* dacă f este suma seriei de puteri (1) pe $\mathbb{I}_C$, adică

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + ... + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + ..., \forall x \in \mathbb{I}_C \tag{2}$$

sau, restrâns, $f(x) = f(a) + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n, \forall x \in \mathbb{I}_C$. $\quad (2')$

Teorema 8.3.1. Fie $\mathbb{I} \subseteq \mathbb{R}$ interval cu interior nevid şi $a \in \operatorname{int} \mathbb{I}$. Fie $f : \mathbb{I} \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcţie derivabilă de orice ordin $n \in \mathbb{N}^*$ pe $\mathbb{I}$, $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{I};\mathbb{R})$. Fie $\mathbb{I}_C \subseteq \mathbb{I}$ intervalul de convergenţă a seriei de puteri (1). Funcţia f este dezvoltabilă în serie Taylor pe o vecinătate punctului a, pe $\widetilde{\mathbb{I}} \subseteq \mathbb{I}_C$, dacă şi numai dacă

$$\lim_{n\to\infty} R_{n,a}(x) = 0, \forall x \in \widetilde{\mathbb{I}},$$

unde $R_{n,a}(x)$ este un rest Taylor ataşat lui f pe o vecinătate punctului a.

Teorema 8.3.2. Fie $\mathbb{I} = (a-r, a+r) \subseteq \mathbb{R}$ un interval simetric. Fie $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{I};\mathbb{R})$. Dacă

$$\exists M > 0 \text{ a.î. } \left|f^{(n)}(x)\right| \le M, \forall x \in (a-r, a+r), \forall n \in \mathbb{N},$$

atunci $\lim\limits_{n\to\infty} R_{n,a}(x) = 0, \forall x \in \mathbb{I}$.

Exerciţiul 8.3.1. Să se dezvolte în serie MacLaurin funcţiile:
a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = e^x$;
b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \cos x$;**c)** $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \sin x$;
d) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \operatorname{ch} x$;**e)** $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \operatorname{sh} x$.

Rezolvare. a) Seria exponenţială**.** Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = e^x$.

etapa 1. Se ataşează funcţiei f seria Taylor în jurul lui 0, adică seria MacLaurin. Se observă că, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, f este derivabilă de ordin n pe $\mathbb{R}$ şi, în particular, în $a = 0$.

$f(x) = e^x$	$f(0) = 1$
$f'(x) = e^x$	$f'(0) = 1$
$f''(x) = e^x$	$f''(0) = 1$
...	...
$f^{(n)}(x) = e^x$	$f^{(n)}(0) = 1$
...	...

Atunci seria MacLaurin este:

$$1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + ... + \frac{1}{n!}x^n + ..., \forall x \in \mathbb{I} = \mathbb{R} \tag{$*_1$}$$

sau, restrâns, $1 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n!}x^n, \forall x \in \mathbb{I} = \mathbb{R}$ $\qquad (*_{1'})$

etapa 2. Se determină intervalul de convergenţă a seriei $(*_1)$.

Seria $(*_1)$ este o serie de puteri ale $x - 0$, cu raza de convergenţă:

$$\exists \rho_1 = \lim_{n\to\infty} \frac{\left|\dfrac{1}{(n+1)!}\right|}{\left|\dfrac{1}{n!}\right|} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0 \Rightarrow R = +\infty.$$

Se aplică Teorema Cauchy-Hadamard$\Rightarrow$ Seria este absolut convergentă, pentru $\forall x \in \mathbb{I}_C = \mathbb{R}$.

etapa 3. Se studiază dacă f este dezvoltabilă în serie MacLaurin şi intervalul pe care este dezvoltabilă:

modul 1. Fie $\alpha > 0$ arbitrar fixat. Cum $\exists M = e^\alpha > 0$ a.î.

$\left|f^{(n)}(x)\right| = e^x \le e^\alpha, \forall x \in (-\alpha, \alpha), \forall n \in \mathbb{N}$, atunci

$$\lim_{n\to\infty} R_{n,0}(x) = 0, \forall x \in (-\alpha, \alpha).$$

Cum α este arbitrar$\Rightarrow \widetilde{\mathbb{I}} = \mathbb{R}$.

etapa 4. **Concluzii:** f este dezvoltabilă în serie MacLaurin pe $\mathbb{R}$ (în raport cu puteri ale $x - 0$) şi

$$\boxed{e^x = 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + ... + \frac{1}{n!}x^n + ..., \forall x \in \mathbb{R}} \tag{3}$$

sau, restrâns, $\boxed{e^x = 1 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n, \forall x \in \mathbb{R}.}$ $(3')$

Se reprezintă grafic pe $\mathbb{R}$ funcţia f şi polinoamele Taylor, ce reprezintă funcţii - termeni din şirul sumelor parţiale,

$T_{1,0}(x) = 1 + \frac{1}{1!}x;$

$T_{2,0}(x) = 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2;$

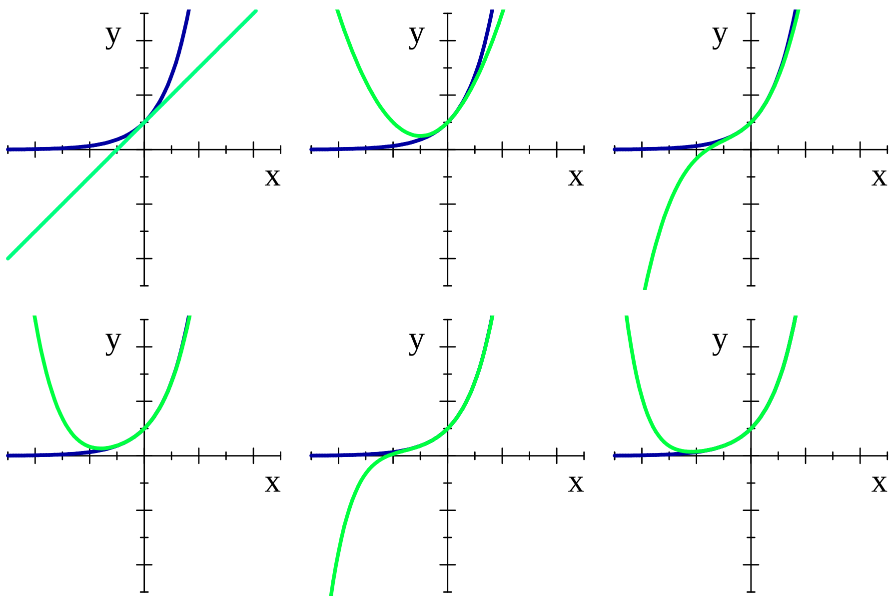
$T_{3,0}(x) = 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3$

$T_{4,0}(x) = 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4$

$T_{5,0}(x) = 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \frac{1}{5!}x^5$

$T_{6,0}(x) = 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \frac{1}{5!}x^5 + \frac{1}{6!}x^6$

şi se observă că, într-o vecinătate a lui $x = 0$ se poate aproxima $f(x)$ cu $T_{n,0}(x)$ (graficul polinomului aproape se suprapune peste al lui f).



b) <u>Seria cosinus</u>**.** Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \cos x$.

<u>etapa 1.</u> Se ataşează funcţiei f seria Taylor în jurul lui 0, adică seria MacLaurin. Se observă că $\forall n \in \mathbb{N}^*$, f este derivabilă de ordin n pe $\mathbb{R}$ şi, în particular, în $a = 0$.

$f(x) = \cos x$	$f(0) = 1$
$f'(x) = -\sin x$	$f'(0) = 0$
$f''(x) = -\cos x$	$f''(0) = -1$
$f'''(x) = \sin x$	$f'''(0) = 0$
$f^{(4)}(x) = \cos x$	$f^{(4)}(0) = 1$
...	...
$f^{(n)}(x) = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$	$f^{(n)}(0) = \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)$
...	...

Atunci seria MacLaurin este:

$$1+\frac{0}{1!}x+\frac{-1}{2!}x^2+...+\frac{\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{n!}x^n+..., \forall x\in\mathbb{I}=\mathbb{R} \qquad (*_1)$$

sau, restrâns, $1+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{n!}x^n, \forall x\in\mathbb{I}=\mathbb{R}$ $\qquad (*_{1'})$

Deoarece:

$$f^{(n)}(x)=\begin{cases}(-1)^k\cos x, & \text{dacă } n=2k, k\in\mathbb{N}\\ (-1)^{k+1}\sin x, & \text{dacă } n=2k+1, k\in\mathbb{N}\end{cases} \Rightarrow f^{(n)}(0)=\begin{cases}(-1)^k, & \text{dacă } n=2k, k\in\mathbb{N}\\ 0, & \text{dacă } n=2k+1, k\in\mathbb{N}\end{cases},$$

renotând k din nou cu n se obţine că seria MacLaurin este:

$$1+\frac{-1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4+...+\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}+..., \forall x\in\mathbb{I}=\mathbb{R}$$

sau, restrâns, $1+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}, \forall x\in\mathbb{I}=\mathbb{R}$.

etapa 2. Se determină intervalul de convergenţă a seriei $(*_1)$.
Seria $(*_1)$ este o serie de puteri ale $x-0$, cu raza de convergenţă $R=+\infty$. Atunci seria este absolut convergentă, pentru $\forall x\in\mathbb{I}_C=\mathbb{R}$.

etapa 3. Se studiază dacă f este dezvoltabilă în serie MacLaurin şi intervalul pe care este dezvoltabilă:

Cum $\exists M=e^{\alpha}>0$ a.î. $\left|f^{(n)}(x)\right|=\left|\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right|\le 1, \forall x\in\mathbb{R}, \forall n\in\mathbb{N}$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty}R_{n,0}(x)=0, \forall x\in\widetilde{\mathbb{I}}=\mathbb{R}$.

etapa 4. **Concluzii:** f este dezvoltabilă în serie MacLaurin pe $\mathbb{R}$ (în raport cu puteri ale $x-0$) şi

$$\boxed{\cos x=1-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4...+\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}+..., \forall x\in\mathbb{R}} \qquad (4)$$

sau, restrâns, $\boxed{\cos x=1+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}, \forall x\in\mathbb{R}.}$ $\qquad (4')$

Se menţionează că dezvoltarea (4) se poate face folosind dezvoltarea în serie pentru e^x. Vezi comentariu.

Se reprezintă grafic pe $\mathbb{R}$ funcţia f şi polinoamele Taylor, ce reprezintă funcţii - termeni din şirul sumelor parţiale,

$T_{0,0}(x)=1;$

$T_{2,0}(x)=1-\frac{1}{2!}x^2;$

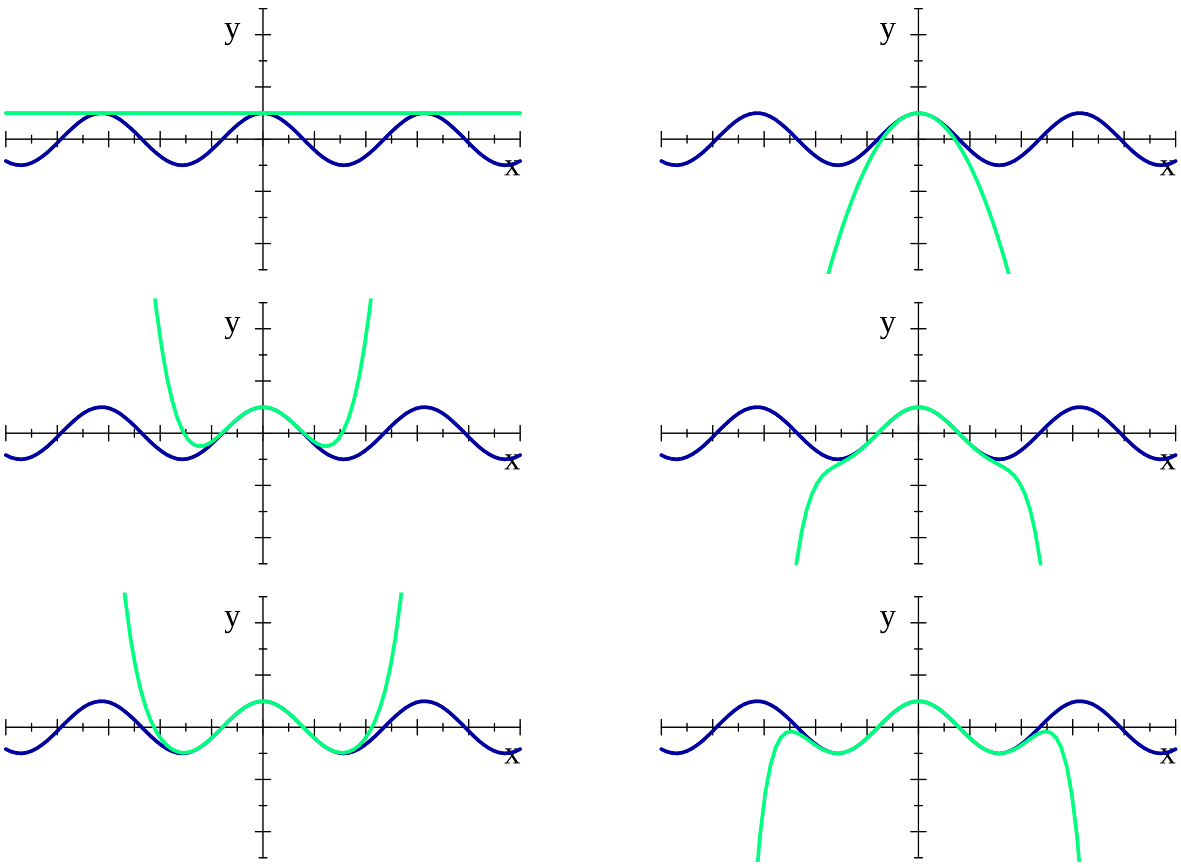
$T_{4,0}(x)=1-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4;$

$T_{6,0}(x)=1-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4-\frac{1}{6!}x^6;$

$T_{8,0}(x)=1-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4-\frac{1}{6!}x^6+\frac{1}{8!}x^8;$

$T_{10,0}(x)=1-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4-\frac{1}{6!}x^6+\frac{1}{8!}x^8-\frac{1}{10!}x^{10}$

şi se observă că, într-o vecinătate a lui $x=0$ se poate aproxima $f(x)$ cu $T_{n,0}(x)$ (graficul polinomului aproape se suprapune peste al lui f).



c) <u>Seria sinus</u>**.** Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \sin x$.

<u>etapa 1.</u> Se ataşează funcţiei f seria Taylor în jurul lui 0, adică seria MacLaurin. Se observă că $\forall n \in \mathbb{N}^*$, f este derivabilă de ordin n pe $\mathbb{R}$ şi, în particular, în $a = 0$.

$f(x) = \sin x$	$f(0) = 0$
$f'(x) = \cos x$	$f'(0) = 1$
$f''(x) = -\sin x$	$f''(0) = 0$
$f'''(x) = -\cos x$	$f'''(0) = -1$
$f^{(4)}(x) = \sin x$	$f^{(4)}(0) = 0$
...	...
$f^{(n)}(x) = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$	$f^{(n)}(0) = \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$
...	...

Atunci seria MacLaurin este:

$$0 + \frac{1}{1!}x + \frac{0}{2!}x^2 + ... + \frac{\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{n!}x^n + ..., \forall x \in \mathbb{I} = \mathbb{R}$$

sau, restrâns, $0 + \sum\limits_{n=1}^{n} \dfrac{\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{n!}x^n, \forall x \in \mathbb{I} = \mathbb{R}$.

Deoarece

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} (-1)^k \sin x, & \text{dacă } n = 2k, k \in \mathbb{N} \\ (-1)^{k+1} \cos x, & \text{dacă } n = 2k+1, k \in \mathbb{N} \end{cases} \Rightarrow f^{(n)}(0) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } n = 2k, k \in \mathbb{N} \\ (-1)^{k+1}, & \text{dacă } n = 2k+1, k \in \mathbb{N} \end{cases},$$

renotând k din nou cu n, se obţine că seria MacLaurin este:

$$\frac{1}{1!}x - \frac{1}{3!}x^3 + ... + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1} + ..., \forall x \in \mathbb{I} = \mathbb{R} \qquad (*_1)$$

sau, restrâns, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}, \forall x \in \mathbb{I} = \mathbb{R}$ $\qquad (*_{1'})$

etapa 2. Se determină intervalul de convergenţă a seriei $(*_1)$.

Seria $(*_1)$ este o serie de puteri ale $x - 0$, cu raza de convergenţă $R = +\infty$. Atunci seria este absolut convergentă, pentru $\forall x \in \mathbb{I}_C = \mathbb{R}$.

etapa 3. Se studiază dacă f este dezvoltabilă în serie MacLaurin şi intervalul pe care este dezvoltabilă:

Cum $\exists M = e^{\alpha} > 0$ a.î. $\left|f^{(n)}(x)\right| = \left|\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right| \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}$, atunci

$\lim\limits_{n\to\infty} R_{n,0}(x) = 0, \forall x \in \widetilde{\mathbb{I}} = \mathbb{R}$.

etapa 4. **Concluzii:** f este dezvoltabilă în serie MacLaurin pe $\mathbb{R}$ (în raport cu puteri ale $x - 0$) şi

$$\boxed{\sin x = \frac{1}{1!}x - \frac{1}{3!}x^3 + ... + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1} + ..., \forall x \in \mathbb{R}} \qquad (5)$$

sau, restrâns, $\boxed{\sin x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}, \forall x \in \mathbb{R}.}$ $\qquad (5')$

Se menţionează că dezvoltarea (5) se poate face şi folosind dezvoltarea în serie pentru e^x. Vezi comentariu.

Se reprezintă grafic pe $\mathbb{R}$ funcţia f şi polinoamele Taylor, ce reprezintă funcţii - termeni din şirul sumelor parţiale,

$T_{1,0}(x) = \frac{1}{1!}x;$

$T_{3,0}(x) = \frac{1}{1!}x - \frac{1}{3!}x^3;$

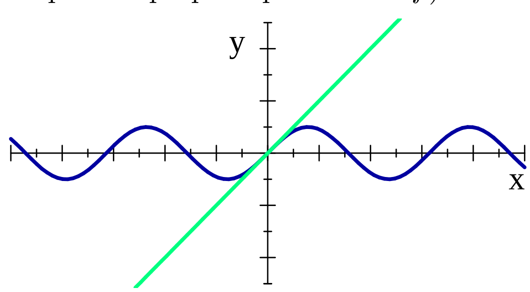
$T_{5,0}(x) = \frac{1}{1!}x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5;$

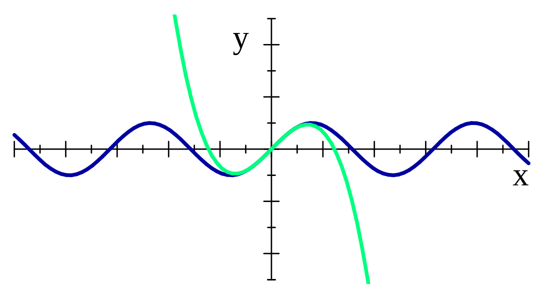
$T_{7,0}(x) = \frac{1}{1!}x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7;$

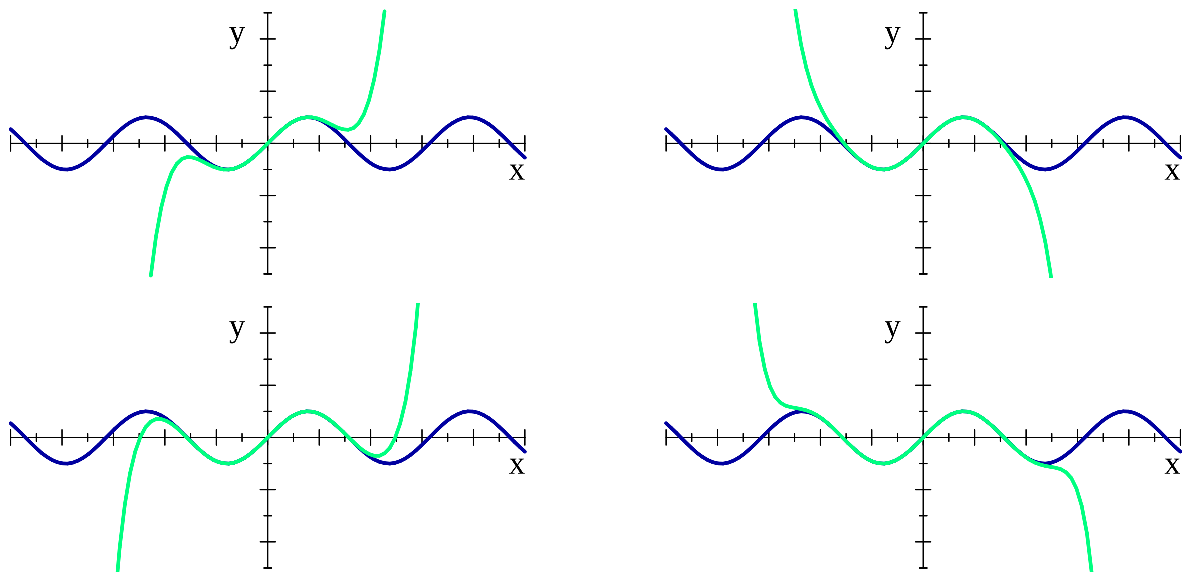
$T_{9,0}(x) = \frac{1}{1!}x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \frac{1}{9!}x^9;$

$T_{11,0}(x) = \frac{1}{1!}x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \frac{1}{9!}x^9 - \frac{1}{11!}x^{11};$

şi se observă că, într-o vecinătate a lui $x = 0$ se poate aproxima $f(x)$ cu $T_{n,0}(x)$ (graficul polinomului aproape se suprapune peste al lui f).







d) Seria cosinus hiperbolic**.** Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\operatorname{ch}x$.
etapa 1. Se ataşează funcţiei f seria Taylor în jurul lui 0, adică seria MacLaurin. Se observă că $\forall n\in\mathbb{N}^*$, f este derivabilă de ordin n pe $\mathbb{R}$ şi, în particular, în $a=0$.

$f(x)=\operatorname{ch}x$	$f(0)=1$
$f'(x)=\operatorname{sh}x$	$f'(0)=0$
$f''(x)=\operatorname{ch}x$	$f''(0)=1$
...	...
$f^{(n)}(x)=...$	$f^{(n)}(x)=...$
...	...

Atunci seria MacLaurin este:

$$1+\frac{0}{1!}x+\frac{1}{2!}x^2+...+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+...,\forall x\in\mathbb{I}=\mathbb{R}$$

sau, restrâns, $1+\sum\limits_{n=1}^{n}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n,\forall x\in\mathbb{I}=\mathbb{R}$.

Deoarece:

$$f^{(n)}(x)=\begin{cases}\operatorname{ch}x, & \text{dacă } n=2k, k\in\mathbb{N}\\ \operatorname{sh}x, & \text{dacă } n=2k+1, k\in\mathbb{N}\end{cases};\ f^{(n)}(0)=\begin{cases}1, & \text{dacă } n=2k, k\in\mathbb{N}\\ 0, & \text{dacă } n=2k+1, k\in\mathbb{N}\end{cases},$$

renotând k din nou cu n, se obţine că seria MacLaurin este:

$$1+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4+...+\frac{1}{(2n)!}x^{2n}+...,\forall x\in\mathbb{I}=\mathbb{R}\qquad(*_1)$$

sau, restrâns, $1+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)!}x^{2n},\forall x\in\mathbb{I}=\mathbb{R}$ $\qquad(*_{1'})$

etapa 2. Se determină intervalul de convergenţă a seriei $(*_1)$
Seria $(*_1)$ este o serie de puteri ale $x-0$, cu raza de convergenţă $R=+\infty$. Atunci seria este absolut convergentă, pentru $\forall x\in\mathbb{I}_C=\mathbb{R}$.
etapa 3. Se studiază dacă f este dezvoltabilă în serie MacLaurin şi intervalul pe care este dezvoltabilă:

Se arată că $\lim\limits_{n\to\infty}R_{n,0}(x)=0,\forall x\in\widetilde{\mathbb{I}}=\mathbb{R}$.

etapa 4. **Concluzii:** f este dezvoltabilă în serie MacLaurin pe $\mathbb{R}$ (în raport cu puteri ale $x-0$) şi

$$\boxed{\operatorname{ch} x = 1 + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 ... + \frac{1}{(2n)!}x^{2n} + ..., \forall x \in \mathbb{R}} \tag{6}$$

sau, restrâns, $$\boxed{\operatorname{ch} x = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)!}x^{2n}, \forall x \in \mathbb{R}.} \tag{6'}$$

Se menţionează că dezvoltarea (6) se poate face şi folosind dezvoltarea în serie pentru e^x. Vezi comentariu.

Se reprezintă grafic pe $\mathbb{R}$ funcţia f şi polinoamele Taylor, ce reprezintă funcţii - termeni din şirul sumelor parţiale,

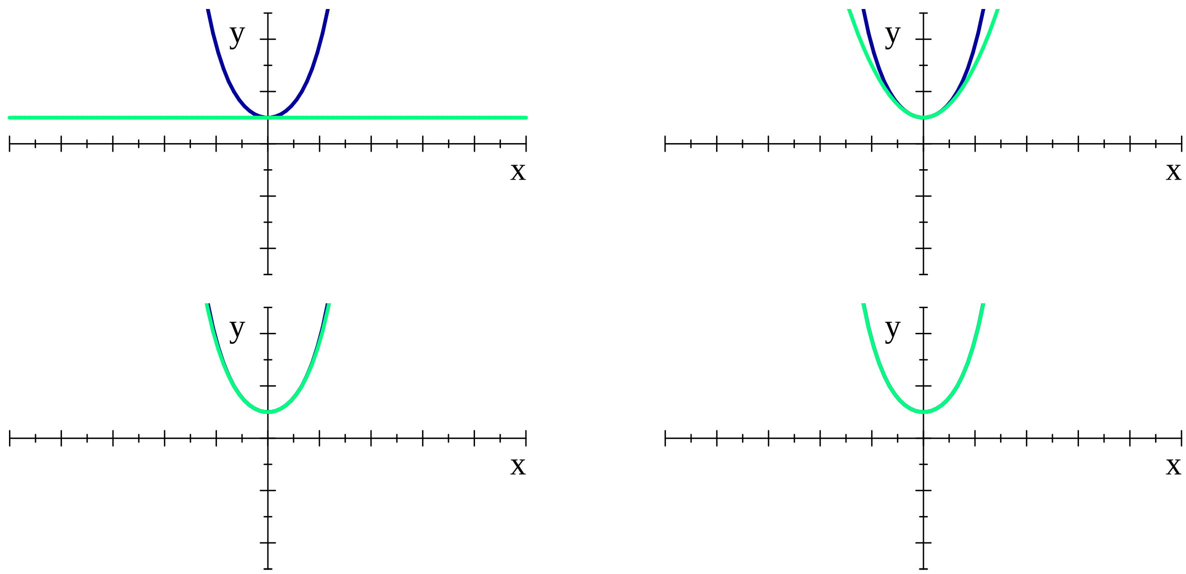
$T_{0,0}(x) = 1;$

$T_{2,0}(x) = 1 + \frac{1}{2!}x^2;$

$T_{4,0}(x) = 1 + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4;$

$T_{6,0}(x) = 1 + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + \frac{1}{6!}x^6;$

şi se observă că, într-o vecinătate a lui $x = 0$ se poate aproxima $f(x)$ cu $T_{n,0}(x)$ (graficul polinomului aproape se suprapune peste al lui f).



e) <u>Seria sinus hiperbolic</u>**.** Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \operatorname{sh} x$.

<u>etapa 1.</u> Se ataşează funcţiei f seria Taylor în jurul lui 0, adică seria MacLaurin. Se observă că $\forall n \in \mathbb{N}^*$, f este derivabilă de ordin n pe $\mathbb{R}$ şi, în particular, în $a = 0$.

$f(x) = \operatorname{sh} x$	$f(0) = 0$
$f'(x) = \operatorname{ch} x$	$f'(0) = 1$
$f''(x) = \operatorname{sh} x$	$f''(0) = 0$
...	...
$f^{(n)}(x) = ...$	$f^{(n)}(0) = ...$
...	...

Atunci seria MacLaurin este:

$0 + \frac{1}{1!}x + \frac{0}{2!}x^2 + ... + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + ..., \forall x \in \mathbb{I} = \mathbb{R}$

sau, restrâns, $0+\sum\limits_{n=1}^{n}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^{n},\forall x\in\mathbb{I}=\mathbb{R}$

Deoarece:

$$f^{(n)}(x)=\begin{cases}\operatorname{sh}x, & \text{dacă } n=2k,k\in\mathbb{N}\\ \operatorname{ch}x, & \text{dacă } n=2k+1,k\in\mathbb{N}\end{cases};\ f^{(n)}(0)=\begin{cases}0, & \text{dacă } n=2k,k\in\mathbb{N}\\ 1, & \text{dacă } n=2k+1,k\in\mathbb{N}\end{cases}.$$

renotând k din nou cu n, se obţine că seria MacLaurin este:

$$\frac{1}{1!}x^{1}+\frac{1}{3!}x^{3}+...+\frac{1}{(2n+1)!}x^{2n+1}+...,\forall x\in\mathbb{I}=\mathbb{R} \tag{$*_1$}$$

$$\text{sau, restrâns, } \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)!}x^{2n+1},\forall x\in\mathbb{I}=\mathbb{R} \tag{$*_{1'}$}$$

etapa 2. Se determină intervalul de convergenţă a seriei $(*_1)$

Seria $(*_1)$ este o serie de puteri ale $x-0$, cu raza de convergenţă $R=+\infty$. Atunci seria este absolut convergentă, pentru $\forall x\in\mathbb{I}_C=\mathbb{R}$.

etapa 3. Se studiază dacă f este dezvoltabilă în serie MacLaurin şi intervalul pe care este dezvoltabilă:

Se arată că $\lim\limits_{n\to\infty}R_{n,0}(x)=0,\forall x\in\widetilde{\mathbb{I}}=\mathbb{R}$.

etapa 4. **Concluzii:** f este dezvoltabilă în serie MacLaurin pe $\mathbb{R}$ (în raport cu puteri ale $x-0$) şi

$$\boxed{\operatorname{sh}x=\frac{1}{1!}x+\frac{1}{3!}x^{3}+...+\frac{1}{(2n+1)!}x^{2n+1}+...,\forall x\in\mathbb{R}} \tag{7}$$

$$\text{sau, restrâns, } \boxed{\operatorname{sh}x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)!}x^{2n+1},\forall x\in\mathbb{R}.} \tag{7'}$$

Se menţionează că dezvoltarea (7) se poate face şi folosind dezvoltarea în serie pentru e^{x}. Vezi comentariu.

Se reprezintă grafic pe $\mathbb{R}$ funcţia f şi polinoamele Taylor, ce reprezintă funcţii - termeni din şirul sumelor parţiale,

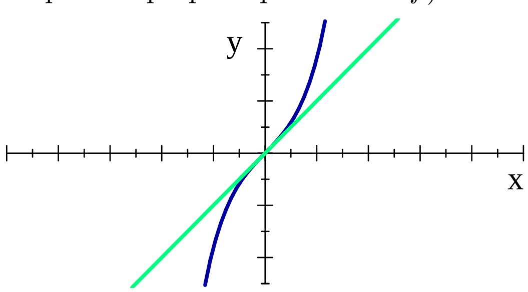
$T_{1,0}(x)=\frac{1}{1!}x;$

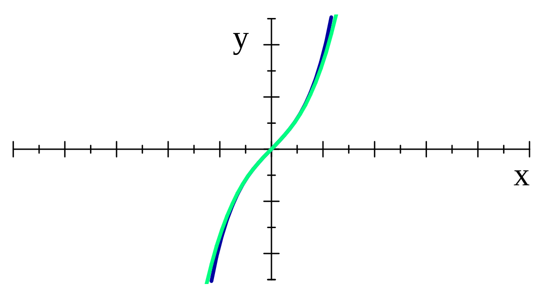
$T_{3,0}(x)=\frac{1}{1!}x+\frac{1}{3!}x^{3};$

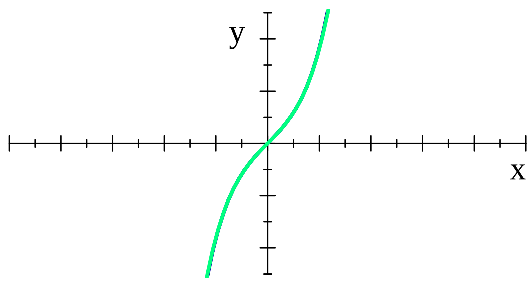
$T_{5,0}(x)=\frac{1}{1!}x+\frac{1}{3!}x^{3}+\frac{1}{5!}x^{5};$

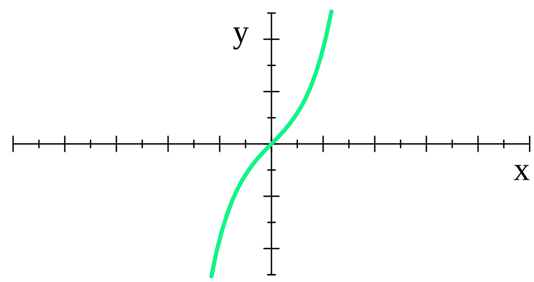
$T_{7,0}(x)=\frac{1}{1!}x+\frac{1}{3!}x^{3}+\frac{1}{5!}x^{5}+\frac{1}{7!}x^{7};$

şi se observă că, într-o vecinătate a lui $x=0$ se poate aproxima $f(x)$ cu $T_{n,0}(x)$ (graficul polinomului aproape se suprapune peste al lui f).









Comentariu. Dezvoltarea în serie MacLaurin a funcţiilor transcendente $\sin x, \cos x, \operatorname{ch} x, \operatorname{sh} x$ se poate face şi folosind dezvoltarea în serie a funcţiei e^x şi definiţia funcţiei e^z ca funcţie complexă de o variabilă complexă.
Pe domeniul de PC/SC într-o serie de funcţii se poate schimba variabila de funcţie putere
În (3) se schimbă x în $-x \Rightarrow$

$$e^{-x} = 1 - \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + ... + \frac{(-1)^n}{n!}x^n + ..., \forall x \in \mathbb{R} \text{ cu } -x \in \mathbb{R}, \text{ adică } x \in \mathbb{R}, \tag{3_1}$$

În (3) se schimbă x în $\mathrm{j}\, x \Rightarrow$

$$e^{\mathrm{j}\, x} = 1 + \frac{1}{1!}(\mathrm{j}\, x) - \frac{1}{2!}x^2 + ... + \frac{1}{n!}\mathrm{j}^n\, x^n + ..., \forall x \in \mathbb{R} \tag{3_2}$$

În (3) se schimbă x în $-\mathrm{j}\, x \Rightarrow$

$$e^{-\mathrm{j}\, x} = 1 + \frac{1}{1!}(-\mathrm{j}\, x) - \frac{1}{2!}x^2 + ... + \frac{1}{n!}(-\mathrm{j})^n\, x^n + ..., \forall x \in \mathbb{R} \tag{3_3}$$

Pe domeniul comun de PC/SC se pot aduna termen cu termen două serii şi se poate înmulţi o serie cu un scalar nenul.

$$\cos x = \frac{e^{\mathrm{j}\, x} + e^{-\mathrm{j}\, x}}{2} \overset{(3_2) \text{ şi } (3_3)}{=} \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{1!}(\mathrm{j}\, x) + \frac{1}{2!}(\mathrm{j}\, x)^2 + ... + \frac{1}{n!}(\mathrm{j}\, x)^n + ...\right) +$$
$$+\frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{1!}(-\mathrm{j}\, x) + \frac{1}{2!}(-\mathrm{j}\, x)^2 + ... + \frac{1}{n!}(-\mathrm{j}\, x)^n + ...\right) =$$
$$= 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 ... + \frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n} + ..., \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\sin x = \frac{e^{\mathrm{j}\, x} - e^{-\mathrm{j}\, x}}{2\,\mathrm{j}} \overset{(3_2) \text{ şi } (3_3)}{=} \frac{1}{2\,\mathrm{j}}\left(1 + \frac{1}{1!}(\mathrm{j}\, x) + \frac{1}{2!}(\mathrm{j}\, x)^2 + ... + \frac{1}{n!}(\mathrm{j}\, x)^n + ...\right) -$$
$$-\frac{1}{2\,\mathrm{j}}\left(1 + \frac{1}{1!}(-\mathrm{j}\, x) + \frac{1}{2!}(-\mathrm{j}\, x)^2 + ... + \frac{1}{n!}(-\mathrm{j}\, x)^n + ...\right) =$$
$$= \frac{1}{1!}x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + ... + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1} + ..., \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \overset{(3) \text{ şi } (3_1)}{=} \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + ... + \frac{1}{n!}x^n + ...\right) +$$
$$+\frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{1!}(-x) + \frac{1}{2!}(-x)^2 + ... + \frac{1}{n!}(-x)^n + ...\right) =$$
$$= 1 + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + \frac{1}{6!}x^6 ... + \frac{1}{(2n)!}x^{2n} + ..., \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \overset{(3) \text{ şi } (3_1)}{=} \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + ... + \frac{1}{n!}x^n + ...\right) -$$
$$-\frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{1!}(-x) + \frac{1}{2!}(-x)^2 + ... + \frac{1}{n!}(-x)^n + ...\right) =$$
$$= \frac{1}{1!}x + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + ... + \frac{1}{(2n+1)!}x^{2n+1} + ..., \forall x \in \mathbb{R}$$

Exerciţiul 8.3.2. Să se dezvolte în serie Taylor după puterile lui x funcţia

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\sin^3 x$.

Rezolvare. Folosind formula

$\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x, \forall x\in\mathbb{R} \Rightarrow f(x)=\sin^3 x = \dfrac{1}{4}(3\sin x-\sin 3x) = \frac{3}{4}\sin x + \frac{-1}{4}\sin 3x.$

Conform exerciţiului 1, se ştie că

$$\sin x = \frac{1}{1!}x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + ... + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1} + ... =$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}, \forall x\in\mathbb{R}.$$

Pe domeniul de PC/SC se schimbă variabila $x \rightsquigarrow 3x \Rightarrow$

$$\sin 3x = \frac{1}{1!}(3x) - \frac{1}{3!}(3x)^3 + \frac{1}{5!}(3x)^5 + ... + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}(3x)^{2n+1} + ... =$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}(3x)^{2n+1}, \forall x\in\mathbb{R} \text{ cu } 3x\in\mathbb{R}, \text{ adică } x\in\mathbb{R}.$$

Pe domeniul comun de PC/SC se pot aduna termen cu termen două serii, se poate înmulţi o serie cu un scalar nenul. Atunci$\Rightarrow$

$$f(x) = \tfrac{3}{4}\sin x + \tfrac{-1}{4}\sin 3x =$$
$$= \frac{1}{1!}\left(\tfrac{3}{4}+\tfrac{-1}{4}3\right)x - \frac{1}{3!}\left(\tfrac{3}{4}+\tfrac{-1}{4}3^3\right)x^3 + \frac{1}{5!}\left(\tfrac{3}{4}+\tfrac{-1}{4}3^5\right)x^5 + ... + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\left(\tfrac{3}{4}+\tfrac{-1}{4}3^{2n+1}\right)x^{2n+1} + ...$$
$$= \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\left(3-3^{2n+1}\right)x^{2n+1}, \forall x\in\mathbb{R}.$$

Se reprezintă grafic pe $\mathbb{R}$ funcţia f şi polinoamele Taylor, ce reprezintă funcţii - termeni din şirul sumelor parţiale,

$T_{1,0}(x) = 0;$

$T_{3,0}(x) = 0 - \dfrac{1}{3!}\left(\tfrac{3}{4}+\tfrac{-1}{4}3^3\right)x^3;$

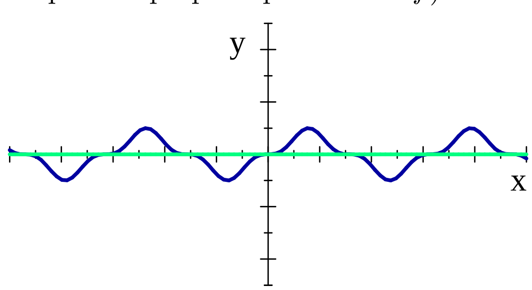
$T_{5,0}(x) = 0 - \dfrac{1}{3!}\left(\tfrac{3}{4}+\tfrac{-1}{4}3^3\right)x^3 + \dfrac{1}{5!}\left(\tfrac{3}{4}+\tfrac{-1}{4}3^5\right)x^5;$

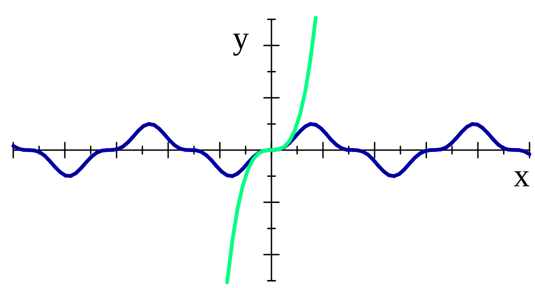
$T_{7,0}(x) = 0 - \dfrac{1}{3!}\left(\tfrac{3}{4}+\tfrac{-1}{4}3^3\right)x^3 + \dfrac{1}{5!}\left(\tfrac{3}{4}+\tfrac{-1}{4}3^5\right)x^5 - \dfrac{1}{7!}\left(\tfrac{3}{4}+\tfrac{-1}{4}3^7\right)x^7;$

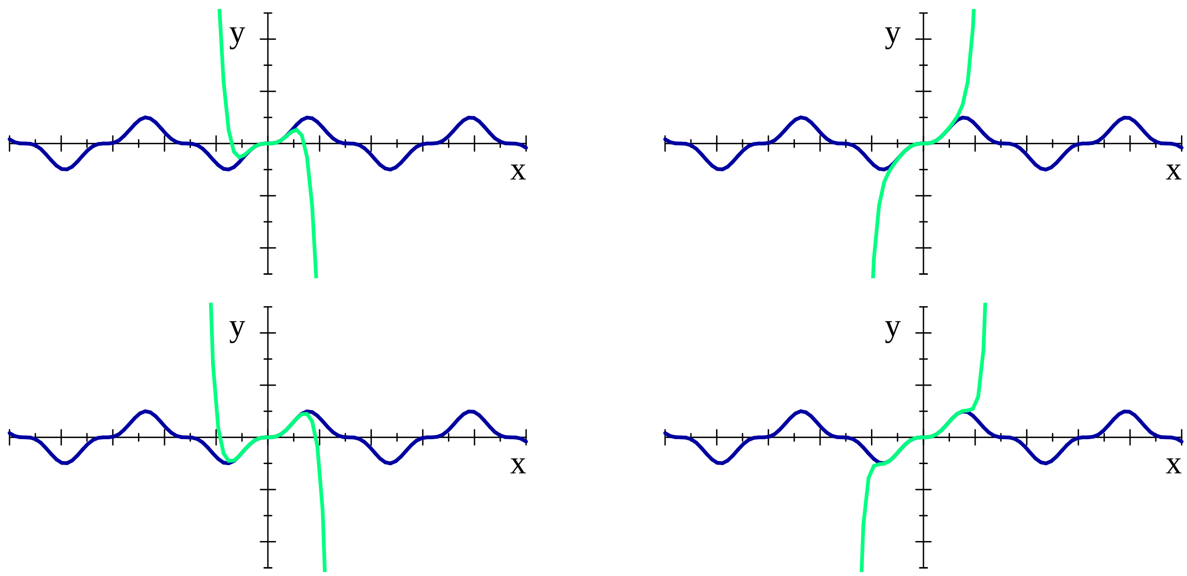
$T_{9,0}(x) = 0 - \dfrac{1}{3!}\left(\tfrac{3}{4}+\tfrac{-1}{4}3^3\right)x^3 + \dfrac{1}{5!}\left(\tfrac{3}{4}+\tfrac{-1}{4}3^5\right)x^5 - \dfrac{1}{7!}\left(\tfrac{3}{4}+\tfrac{-1}{4}3^7\right)x^7 + \dfrac{1}{9!}\left(\tfrac{3}{4}+\tfrac{-1}{4}3^9\right)x^9;$

$T_{11,0}(x) = 0 - \dfrac{1}{3!}\left(\tfrac{3}{4}+\tfrac{-1}{4}3^3\right)x^3 + \dfrac{1}{5!}\left(\tfrac{3}{4}+\tfrac{-1}{4}3^5\right)x^5 - \dfrac{1}{7!}\left(\tfrac{3}{4}+\tfrac{-1}{4}3^7\right)x^7 + \dfrac{1}{9!}\left(\tfrac{3}{4}+\tfrac{-1}{4}3^9\right)x^9 - \dfrac{1}{11!}\left(\tfrac{3}{4}+\tfrac{-1}{4}3^{11}\right)x^{11};$

şi se observă că, într-o vecinătate a lui $x=0$ se poate aproxima $f(x)$ cu $T_{n,0}(x)$ (graficul polinomului aproape se suprapune peste al lui f).







Exerciţiul 8.3.3. **a)** Fie $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$. Să se dezvolte în serie Taylor în jurul originii funcţia $f : [-1, +\infty[\to \mathbb{R}, f(x) = (1+x)^{\alpha}$.

Cazuri particulare sau obţinute din cazuri particulare:

b) $f :]-1,1[\to \mathbb{R}, f(x) = \dfrac{1}{1+x}$;**c)** $f :]-1,1[\to \mathbb{R}, f(x) = \dfrac{1}{1-x}$;

d)$f :]-1,1[\to \mathbb{R}, f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$;**e)** $f :]-1,1[\to \mathbb{R}, f(x) = \dfrac{1}{1-x^2}$;

f) $f :]-1,+\infty[\to \mathbb{R}, f(x) = \ln(1+x)$;**g)** $f :]-\infty, 1[\to \mathbb{R}, f(x) = \ln(1-x)$;

h) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \operatorname{arctg} x$;

i) $f :]-1,1[\to \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{1+x}$;**j)** $f :]-1,1[\to \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{1-x}$;

k) $f :]-1,1[\to \mathbb{R}, f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x}}$;**l)** $f :]-1,1[\to \mathbb{R}, f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$;

m) $f :]-1,1[\to \mathbb{R}, f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$;**n)** $f :]-1,1[\to \mathbb{R}, f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;

o) $f :]-1,1[\to \mathbb{R}, f(x) = \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$;**p)** $f :]-1,1[\to \mathbb{R}, f(x) = \arcsin x$.

Rezolvare.

a) Seria binomială**.** Fie $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$ şi $f : [-1, +\infty[\to \mathbb{R}, f(x) = (1+x)^{\alpha}$.

etapa 1. Se ataşează funcţiei f seria Taylor în jurul lui 0, adică seria MacLaurin. Se observă că $\forall n \in \mathbb{N}^*$, f este derivabilă de ordin n pe $[-1, +\infty[$ şi, în particular, în $a = 0$.

$f(x) = (1+x)^{\alpha}$	$f(0) = 1$
$f'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1}$	$f'(0) = \alpha$
$f''(x) = \alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2}$	$f''(0) = \alpha(\alpha-1)$
$f'''(x) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(1+x)^{\alpha-3}$	$f'''(0) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)$
...	...
$f^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n}$	$f^{(n)}(0) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)...(\alpha-n+1)$
...	...

Atunci seria MacLaurin ataşată este:

$$1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + ... + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)...(\alpha-n+1)}{n!}x^n + ..., \forall x \in \mathbb{I} = [-1, +\infty[\qquad (*_1)$$

sau, restrâns, $1+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)...(\alpha-n+1)}{n!}x^n, \forall x\in\mathbb{I}=[-1,+\infty[\,.$ $(*_{1'})$

etapa 2. Se determină intervalul de convergenţă a seriei $(*_1)$

Se determină raza de convergenţă a seriei de puteri $(*_1)$ ale $x-0$:

$$\exists\rho_1=\lim_{n\to\infty}\frac{\left|\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)...(\alpha-n+1)(\alpha-n)}{(n+1)!}\right|}{\left|\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)...(\alpha-(n-1))}{n!}\right|}=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\alpha-n}{n+1}\right|\overset{\alpha\neq n}{=}1\Rightarrow$$

$\Rightarrow R=1.$

Se aplică Teorema Cauchy-Hadamard$\Rightarrow$

Seria este absolut convergentă, pentru $\forall x\in\,]-1,1[\,.$

Seria este divergentă, pentru $\forall x\in\,]-\infty,-1[\,\cup\,]1,+\infty[$

Pentru $x=-1, x=1$ nu se poate preciza natura seriei cu teorema, se face studiu separat:

$\bullet\bullet$Dacă $\alpha>0,\ \alpha\notin\mathbb{N}$ atunci

-$\boxed{x=-1}\rightsquigarrow 1+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)...(\alpha-(n-1))}{n!}(-1)^n.$

Se foloseşte criteriul Raabe-Duhamel:

$$\lim_{n\to\infty}n\left(\frac{\left|\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)...(\alpha-(n-1))}{n!}\right|}{\left|\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)...(\alpha-n+1)(\alpha-n)}{(n+1)!}\right|}-1\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}n\left(\frac{n+1}{n-\alpha}-1\right)=\alpha+1\overset{\alpha>0,\alpha\notin\mathbb{N}}{>}1\Rightarrow\text{este absolut convergentă.}$$

-$\boxed{x=1}\rightsquigarrow 1+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)...(\alpha-(n-1))}{n!}$

analog$\Rightarrow$este absolut convergentă.

$\bullet\bullet$Dacă $\alpha\in\,]-1,0[\,,$ atunci

-$\boxed{x=-1}\rightsquigarrow 1+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)...(\alpha-(n-1))}{n!}(-1)^n\sim$

$$\underset{\text{are aceeaşi natură}}{\sim}1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-\alpha)(-\alpha+1)(-\alpha+2)...(-\alpha+n-1)}{n!}$$

Se foloseşte criteriul Raabe-Duhamel:

$$\lim_{n\to\infty}n\left(\frac{\frac{(-\alpha)(-\alpha+1)(-\alpha+2)...(-\alpha+n-1)}{n!}}{\frac{(-\alpha)(-\alpha+1)(-\alpha+2)...(-\alpha+n-1)(-\alpha+n)}{(n+1)!}}-1\right)=\lim_{n\to\infty}n\left(\frac{n+1}{n-\alpha}-1\right)=$$

$$=\alpha+1\overset{\alpha\in]-1,0[}{<}1$$

$\Rightarrow$este divergentă

-$\boxed{x=1}\rightsquigarrow 1+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)...(\alpha-(n-1))}{n!}$

$$\underset{\text{are aceeaşi natură}}{\sim}1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-\alpha)(-\alpha+1)(-\alpha+2)...(-\alpha+n-1)}{n!}(-1)^n.$$

Se foloseşte criteriul Raabe-Duhamel pentru seria modulelor şi se obţine că seria modulelor de divergentă.

Se foloseşte criteriul lui Leibinz pentru serie. Se notează

$b_n=\frac{(-\alpha)(-\alpha+1)(-\alpha+2)...(-\alpha+n-1)}{n!}, \forall n\in\mathbb{N}^*.$

Se observă că

-şirul $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este cu termeni strict pozitivi

$b_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$;

-şirul $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este monoton strict descrescător

$\dfrac{b_{n+1}}{b_n} = \dfrac{n-\alpha}{n+1} \overset{-\alpha\in]0,1[}{<} 1, \forall n \in \mathbb{N}^*$;

-şirul $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este mărginit

$0 < \dfrac{(-\alpha)(-\alpha+1)(-\alpha+2)...(-\alpha+n-1)}{n!} < \dfrac{1\cdot 2\cdot 3\cdot ...\cdot n}{n!} = 1, \forall n \in \mathbb{N}^*$;

-şirul $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ are limita 0. Într-adevăr, deoarece este monoton şi mărginit, şirul $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este convergent şi are limita $b \in [0,1]$.

Se construieşte şirul $(c_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ asfel încât să fie convergent, cu limita c şi astfel încât şirul $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ să aibă ca termen general media aritmetică a primilor n termeni ai $(c_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, adică

$b_n = \dfrac{c_1 + c_2 + ... + c_n}{n}, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Dintr-o consecinţă a Criteriului Stolz-Cesaro$\Rightarrow$ $b = c$. Mai mult, se observă că

$b_{n+1} = \dfrac{nb_n + c_{n+1}}{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow$

$c_{n+1} = (n+1)\, b_{n+1} - nb_n, \forall n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow$

$c_{n+1} = (n+1)\dfrac{(-\alpha)(-\alpha+1)...(-\alpha+n)}{(n+1)!} - n\dfrac{(-\alpha)(-\alpha+1)...(-\alpha+n-1)}{n!} =$

$= (-\alpha+n-n)\, b_n = (-\alpha)\, b_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$

Se trece la limită în

$c_{n+1} = (-\alpha)\, b_n, \forall n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow b = (-\alpha)\, b \overset{-\alpha\in]0,1[}{\Rightarrow} b = 0.$

Conform Criteriului Leibniz, seria studiată este convergentă, simplu convergentă.

●●<u>Dacă $\alpha \in]-\infty,-1]$, atunci</u>

-$\boxed{x=-1} \rightsquigarrow 1 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)...(\alpha-(n-1))}{n!}(-1)^n \sim$

$\underset{\text{are aceeaşi natură}}{\sim} 1 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-\alpha)(-\alpha+1)(-\alpha+2)...(-\alpha+n-1)}{n!}$

Se foloseşte criteriul Raabe-Duhamel:

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{\dfrac{(-\alpha)(-\alpha+1)(-\alpha+2)...(-\alpha+n-1)}{n!}}{\dfrac{(-\alpha)(-\alpha+1)(-\alpha+2)...(-\alpha+n-1)(-\alpha+n)}{(n+1)!}} - 1\right) =$$

$= \lim\limits_{n\to\infty} n\left(\dfrac{n+1}{n-\alpha} - 1\right) = \alpha + 1 < 1 \Rightarrow$este divergentă

-$\boxed{x=1} \rightsquigarrow 1 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)...(\alpha-(n-1))}{n!}$

$\underset{\text{are aceeaşi natură}}{\sim} 1 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-\alpha)(-\alpha+1)(-\alpha+2)...(-\alpha+n-1)}{n!}(-1)^n.$

Deoarece

$\dfrac{(-\alpha)(-\alpha+1)(-\alpha+2)...(-\alpha+n-1)}{n!} \overset{-\alpha\geq 1}{\geq} \dfrac{1\cdot 2\cdot 3\cdot ...\cdot n}{n!} = 1, \forall n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow$ limita termenului general al seriei anterioare nu poate fi 0 $\Rightarrow$ seria anterioară este divergentă.

<u>etapa 3.</u> Se studiază dacă f este dezvoltabilă în serie MacLaurin şi intervalul pe care este dezvoltabilă:

<u>modul 1.</u> Se arată că

$\lim\limits_{n\to\infty} R_{n,0}(x) = 0, \forall x \in \widetilde{\mathbb{I}} = \mathbb{R}-$greoi

<u>modul 2.</u> Suma seriei $(*_1)$ verifică o ecuaţie diferenţială pe intervalul de convergenţă şi este tocmai $f(x)$ pe intervalul de convergenţă.

Se notează cu $s :]-1,1[\to \mathbb{R}$ suma seriei $(*_1)$ pe $]-1,1[$, adică

$s(x) = 1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + ... + \frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)}{n!}x^n + ..., \forall x \in]-1,1[. \Big| \frac{d}{dx}$

Se foloseşte teorema de derivare a seriilor de puteri şi se derivează termen cu termen$\Rightarrow$

$s'(x) = 0 + \frac{\alpha}{1!}1 + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}2x + ... + \frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)}{n!}nx^{n-1} + ..., \forall x \in]-1,1[.$

Se înmulţeşte relaţia anterioară cu $x \in]-1,1[\setminus \{0\}$, apoi verificăm şi pentru $x = 0 \Rightarrow$

$xs'(x) = 0 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}2x^2 + ... + \frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)}{n!}nx^n + ..., \forall x \in]-1,1[.$

Se folosesc proprietăţile de adunare termen cu termen a unor serii de puteri pe domeniul comun de convergenţă$\Rightarrow$

$(1+x)s'(x) = \alpha s(x), \forall x \in]-1,1[.$

Rezolvând ecuaţia diferenţială anterioară$\Rightarrow$

$s(x) = f(x), \forall x \in]-1,1[.$

În extremităţile intervalului $]-1,1[$, când este definită, suma seriei se determină folosind teorema de trecere la limită a unei sume de serii de puteri, adică

$s(-1) = \lim\limits_{\substack{x\to-1\\x>1}} f(x) = 0$ şi $s(+1) = \lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}} f(x) = 2^\alpha.$

<u>etapa 4.</u> **Concluzii:**

Dacă $\alpha \in]0,+\infty[\setminus \mathbb{N}$, seria $(*_1)$ este

$\begin{cases} \text{(AC)}, & \text{dacă } x \in [-1,1] \\ \text{(D)}, & \text{dacă } x \in]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[\end{cases} \Rightarrow \mathbb{I}_C = [-1,1]$

Dacă $\alpha \in]-1,0[$, seria $(*_1)$ este

$\begin{cases} \text{(AC)}, & \text{dacă } x \in]-1,1[\\ \text{(SC)}, & \text{dacă } x = 1 \\ \text{(D)}, & \text{dacă } x \in]-\infty,-1] \cup]1,+\infty[\end{cases} \Rightarrow \mathbb{I}_C =]-1,1]$

Dacă $\alpha \in]-\infty,-1]$, seria $(*_1)$ este

$\begin{cases} \text{(AC)}, & \text{dacă } x \in]-1,1[\\ \text{(D)}, & \text{dacă } x \in]-\infty,-1] \cup [1,+\infty[\end{cases} \Rightarrow \mathbb{I}_C =]-1,1[$

Mai mult, $s(x) = f(x), \forall x \in \widetilde{\mathbb{I}} = \mathbb{I}_C$.

Deci f este dezvoltabilă în serie MacLaurin pe $\widetilde{\mathbb{I}} = \mathbb{I}_C$ (în raport cu puteri ale $x - 0$) şi *seria binomială* este

$$\boxed{(1+x)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + ... + \frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)}{n!}x^n + ..., \forall x \in \widetilde{\mathbb{I}} = \mathbb{I}_C} \quad (8)$$

sau, restrâns,

$$\boxed{(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)}{n!}x^n, \forall x \in \widetilde{\mathbb{I}} = \mathbb{I}_C.} \quad (8')$$

Observaţie: Pentru $\alpha = n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow$

$(1+x)^n = 1 + \frac{n}{1!}x + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + ... + \frac{n(n-1)(n-2)...(n-(n-1))}{n!}x^n + 0 \cdot x^{n+1} + 0$

$\boxed{(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + ... + C_n^n x^n, \forall x \in \mathbb{R}}$

adică s-a obţinut *binomul lui Newton*.

b) $f :]-1,1[\to \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{1+x}$;

Din a), pentru $\alpha = -1 \Rightarrow$

$$\boxed{\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + ... + (-1)^n x^n + ..., \forall x \in \mathbb{R} \text{ cu } |x| < 1} \tag{9}$$

sau, restrâns, $\boxed{\frac{1}{1+x} = 1 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n x^n, \forall x \in \mathbb{R} \text{ cu } |x| < 1}$ (9′)

adică s-a obţinut *seria geometrică alternantă.*

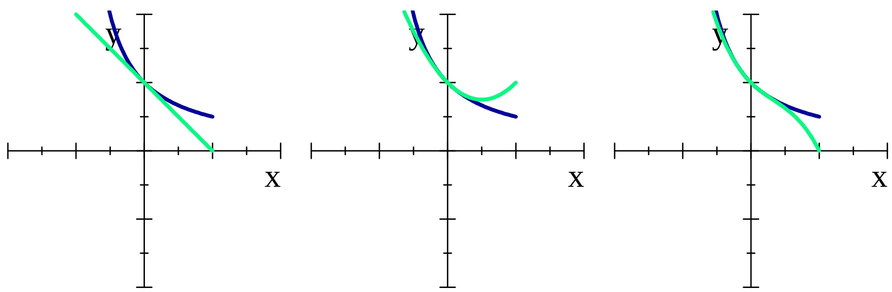
Se reprezintă grafic pe $\mathbb{I}_C$ funcţia f şi polinoamele Taylor, ce reprezintă funcţii - termeni din şirul sumelor parţiale,

$T_{1,0}(x) = 1 - x;$

$T_{2,0}(x) = 1 - x + x^2;$

$T_{3,0}(x) = 1 - x + x^2 - x^3;$

şi se observă că, într-o vecinătate a lui $x = 0$ se poate aproxima $f(x)$ cu $T_{n,0}(x)$ (graficul polinomului aproape se suprapune peste al lui f).



c) $f :]-1, 1[\to \mathbb{R}, f(x) = \dfrac{1}{1-x};$

Din b), făcând schimbarea de variabilă $x \rightsquigarrow -x$ pe domeniul de convergenţă$\Rightarrow$

$$\boxed{\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + ... + x^n + ..., \forall x \in \mathbb{R} \text{ cu } |x| < 1} \tag{10}$$

sau, restrâns, $\boxed{\frac{1}{1-x} = 1 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} x^n, \forall x \in \mathbb{R} \text{ cu } |x| < 1}$ (10′)

adică s-a obţinut *seria geometrică.*

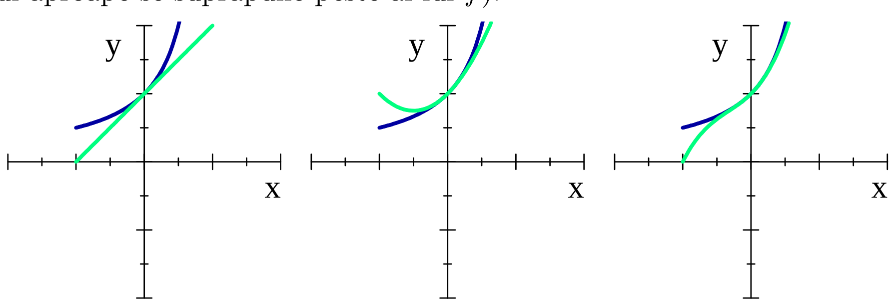
Se reprezintă grafic pe $\mathbb{I}_C$ funcţia f şi polinoamele Taylor, ce reprezintă funcţii - termeni din şirul sumelor parţiale,

$T_{1,0}(x) = 1 + x;$

$T_{2,0}(x) = 1 + x + x^2;$

$T_{3,0}(x) = 1 + x + x^2 + x^3;$

şi se observă că, într-o vecinătate a lui $x = 0$ se poate aproxima $f(x)$ cu $T_{n,0}(x)$ (graficul polinomului aproape se suprapune peste al lui f).



Prin derivare termen cu termen de m ori se obţine

$$\boxed{\sum_{n=m}^{\infty} n(n-1)...(n-m+1)x^{n-m} = \frac{m!}{(1-x)^{m+1}}, \forall x \in \left]-1,1\right[.} \qquad (10'')$$

d) $f : \left]-1,1\right[\to \mathbb{R}, f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$;

Din b), făcând schimbarea de variabilă $x \rightsquigarrow x^2$ pe domeniul de convergenţă$\Rightarrow$

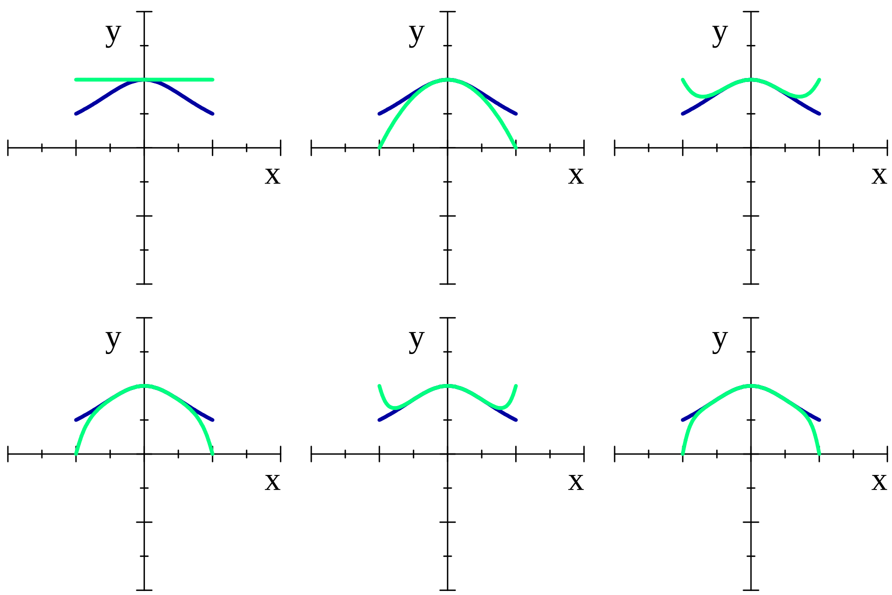
$$\boxed{\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + ... + (-1)^n x^{2n} + ..., \forall x \in \mathbb{R} \text{ cu } |x| < 1} \qquad (11)$$

sau, restrâns, $\boxed{\dfrac{1}{1+x^2} = 1 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n x^{2n}, \forall x \in \mathbb{R} \text{ cu } |x| < 1.}$ (11′)

Se reprezintă grafic pe $\mathbb{I}_C$ funcţia f şi polinoamele Taylor, ce reprezintă funcţii - termeni din şirul sumelor parţiale,

$T_{0,0}(x) = 1$;
$T_{2,0}(x) = 1 - x^2$;
$T_{4,0}(x) = 1 - x^2 + x^4$;
$T_{6,0}(x) = 1 - x^2 + x^4 - x^6$;
$T_{8,0}(x) = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8$;
$T_{10,0}(x) = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 - x^{10}$;

şi se observă că, într-o vecinătate a lui $x = 0$ se poate aproxima $f(x)$ cu $T_{n,0}(x)$ (graficul polinomului aproape se suprapune peste al lui f).



e) $f : \left]-1,1\right[\to \mathbb{R}, f(x) = \dfrac{1}{1-x^2}$;

Din c), făcând schimbarea de variabilă $x \rightsquigarrow x^2$ pe domeniul de convergenţă$\Rightarrow$

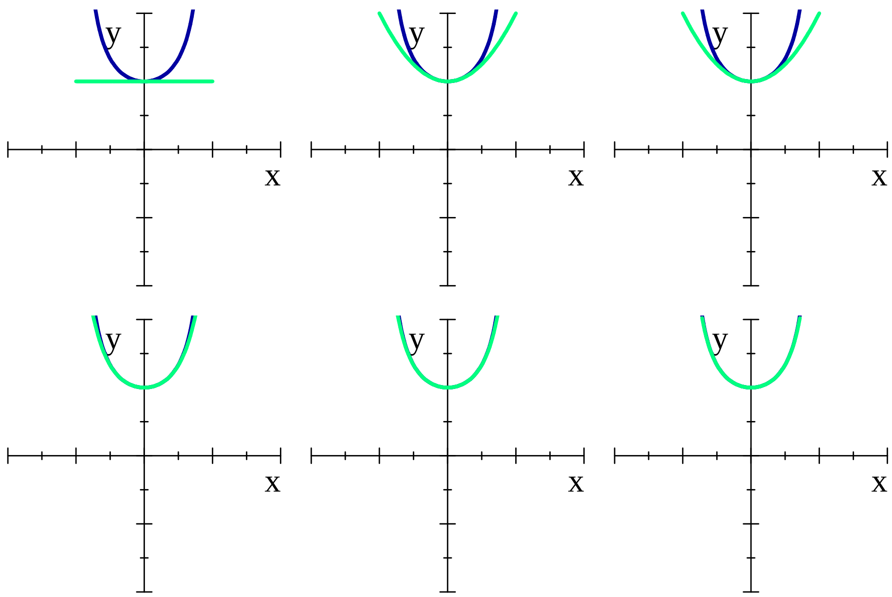
$$\boxed{\frac{1}{1-x^2} = 1 + x^2 + x^4 + x^6 + ... + x^{2n} + ..., \forall x \in \mathbb{R} \text{ cu } |x| < 1} \qquad (12)$$

sau, restrâns, $\boxed{\dfrac{1}{1-x^2} = 1 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} x^{2n}, \forall x \in \mathbb{R} \text{ cu } |x| < 1.}$ (12′)

Se reprezintă grafic pe $\mathbb{I}_C$ funcţia f şi polinoamele Taylor, ce reprezintă funcţii - termeni din şirul sumelor parţiale,

$T_{0,0}(x) = 1;$
$T_{2,0}(x) = 1 + x^2;$
$T_{4,0}(x) = 1 + x^2 + x^4;$
$T_{6,0}(x) = 1 + x^2 + x^4 + x^6;$
$T_{8,0}(x) = 1 + x^2 + x^4 + x^6 + x^8;$
$T_{10,0}(x) = 1 + x^2 + x^4 + x^6 + x^8 + x^{10};$

şi se observă că, într-o vecinătate a lui $x = 0$ se poate aproxima $f(x)$ cu $T_{n,0}(x)$ (graficul polinomului aproape se suprapune peste al lui f).



f) $f :]-1, +\infty[\to \mathbb{R}, f(x) = \ln(1 + x)$.

Se foloseşte seria geometrică alternantă de la b). Se integrează termen cu termen pe domeniul de uniformă convergenţă (în sensul primitivei) $\Rightarrow$

$\ln(1 + x) = c + \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + ... + \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n} + \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1} + ..., \forall x \in \mathbb{R}$ cu $|x| < 1$.

Pentru $x = 0 \in \{x \in \mathbb{R}; |x| < 1\} \Rightarrow$

$\ln(1 + 0) = c + \frac{0}{1} - \frac{0^2}{2} + ... + \frac{(-1)^{n-1} 0^n}{n} + \frac{(-1)^n 0^{n+1}}{n+1} + ... \Rightarrow c = \ln 1 = 0.$

Atunci

$\ln(1 + x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + ... + (-1)^{n-1} \frac{1}{n}x^n + ..., \forall x \in \mathbb{R}$ cu $|x| < 1$,

sau, restrâns, $\ln(1 + x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n}x^n, \forall x \in \mathbb{R}$ cu $|x| < 1$.

Prin **integrare** a unei serii de puteri este posibil să se mărească intervalul de convergenţă spre capete. Dacă se parcurgeau etapele 1 şi 2 de la a), în etapa 2 se găsea:

etapa 1. Se ataşează funcţiei f seria Taylor în jurul lui 0, adică seria MacLaurin. Se observă că $\forall n \in \mathbb{N}^*$, f este derivabilă de ordin n pe $]-1, +\infty[$ şi, în particular, în $a = 0$.

$f(x) = \ln(1+x)$	$f(0) = 0$
$f'(x) = (1+x)^{-1}$	$f'(0) = 1$
$f''(x) = -1(1+x)^{-2}$	$f''(0) = -1$
$f'''(x) = (-1)(-2)(1+x)^{-3}$	$f'''(0) = (-1)(-2)$
...	...
$f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}(n-1)!(1+x)^{-n}$	$f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1}(n-1)!$
...	...

Atunci seria MacLaurin ataşată este:

$$0 + \frac{1}{1!}x + \frac{-1}{2!}x^2 + ... + \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{n!}x^n + ..., \forall x \in \mathbb{I} = [-1, +\infty[\qquad (*_1)$$

sau, restrâns, $0 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n, \forall x \in \mathbb{I} = [-1, +\infty[\,.$ $\qquad (*_{1'})$

etapa 2. Se determină intervalul de convergenţă a seriei $(*_1)$

Se determină raza de convergenţă a seriei de puteri $(*_1)$ ale $x - 0$:

$$\exists \rho_1 = \lim_{n\to\infty} \frac{\left|\dfrac{(-1)^n}{n+1}\right|}{\left|\dfrac{(-1)^{n-1}}{n}\right|} = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n}{n+1}\right| = 1 \Rightarrow R = 1.$$

Se aplică Teorema Cauchy-Hadamard$\Rightarrow$

Seria este absolut convergentă, pentru $\forall x \in \,]-1, 1[\,.$

Seria este divergentă, pentru $\forall x \in \,]1, +\infty[$

Pentru $x = 1$ se obţine seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}\frac{1}{n}(1)^n \overset{\text{are aceeaşi natură}}{\sim} \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}\frac{1}{n}$, care este semiconvergentă, ca serie armonică alternantă cu $\alpha = 1 > 0$.

Deci $\mathbb{I}_C = \,]-1, 1]\,.$

etapa 3. Este abordată înaintea etapei 1, pe $\widetilde{\mathbb{I}} = \mathbb{I}_C = \,]-1,1[\cup\{1\}$, cu menţiunea că funcţia sumă a seriei de puteri are în $x = 1$ valoarea obţinută prin prelungirea prin continuitate, adică $s(1) = \ln 2$, adică

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}\frac{1}{n} = \ln 2.$$

etapa 4. **Concluzii:** f este dezvoltabilă în serie MacLaurin pe $\widetilde{\mathbb{I}} = \mathbb{I}_C$ (în raport cu puteri ale $x-0$) şi

$$\boxed{\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + ... + (-1)^{n-1}\frac{1}{n}x^n + ..., \forall x \in \,]-1, 1]\,,} \qquad (13)$$

sau, restrâns $\boxed{\ln(1+x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}\frac{1}{n}x^n, \forall x \in \,]-1, 1]\,.}$ $\qquad (13')$

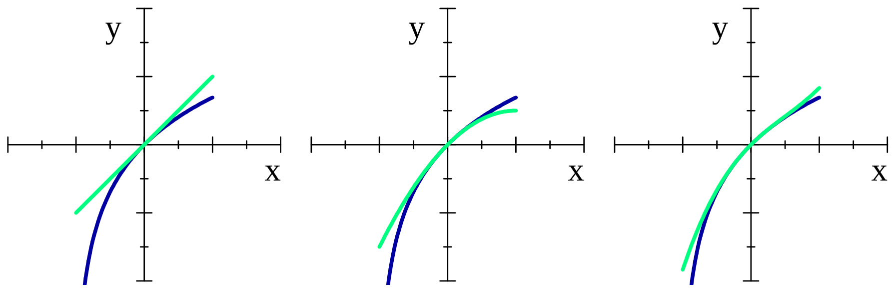
Se reprezintă grafic pe $\mathbb{I}_C$ funcţia f şi polinoamele Taylor, ce reprezintă funcţii - termeni din şirul sumelor parţiale,

$T_{1,0}(x) = x;$

$T_{2,0}(x) = x - \frac{1}{2}x^2;$

$T_{3,0}(x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3;$

şi se observă că, într-o vecinătate a lui $x = 0$ se poate aproxima $f(x)$ cu $T_{n,0}(x)$ (graficul polinomului aproape se suprapune peste al lui f).



g) $f :]-\infty, 1[\to \mathbb{R}, f(x) = \ln(1-x)$;

Se foloseşte seria geometrică de la c). Se integrează termen cu termen pe domeniul de uniformă convergenţă (în sensul primitivei) $\Rightarrow$

$-\ln(1-x) = c + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2} + ... + \frac{x^n}{n} + \frac{x^{n+1}}{n+1} + ..., \forall x \in \mathbb{R}$ cu $|x| < 1$.

Pentru $x = 0 \in \{x \in \mathbb{R}; |x| < 1\} \Rightarrow$

$-\ln(1-0) = c + \frac{0}{1} + \frac{0^2}{2} + ... + \frac{0^n}{n} + \frac{0^{n+1}}{n+1} + ... \Rightarrow c = -\ln 1 = 0$

Atunci

$-\ln(1-x) = x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + ... + \frac{1}{n}x^n + ..., \forall x \in \mathbb{R}$ cu $|x| < 1$,

sau, restrâns, $-\ln(1-x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}x^n, \forall x \in \mathbb{R}$ cu $|x| < 1$.

Prin **integrare** a unei serii de puteri este posibil să se mărească inetrvalul de convergenţă spre capete. Dacă se parcurgeau etapele 1 şi 2 de la a), în etapa 2 se găsea:

etapa 1. Se ataşează funcţiei f seria Taylor în jurul lui 0, adică seria MacLaurin. Se observă că $\forall n \in \mathbb{N}^*$, f este derivabilă de ordin n pe $]-1, +\infty[$ şi, în particular, în $a = 0$.

$f(x) = \ln(1-x)$	$f(0) = 0$
$f'(x) = (-1)(1-x)^{-1}$	$f'(0) = -1$
$f''(x) = (-1)^2(-1)(1+x)^{-2}$	$f''(0) = -1$
$f'''(x) = (-1)^3(-1)(-2)(1+x)^{-3}$	$f'''(0) = (-1)^3(-1)(-2)$
...	...
$f^{(n)}(x) = -(n-1)!(1+x)^{-n}$	$f^{(n)}(0) = -(n-1)!$
...	...

Atunci seria MacLaurin ataşată este:

$$0 + \frac{-1}{1!}x + \frac{-1}{2!}x^2 + ... + \frac{-(n-1)!}{n!}x^n + ..., \forall x \in \mathbb{I} = [-1, +\infty[\qquad (*_1)$$

sau, restrâns, $0 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{-1}{n}x^n, \forall x \in \mathbb{I} = [-1, +\infty[.$ $\qquad (*_{1'})$

etapa 2. Se determină intervalul de convergenţă a seriei $(*_1)$

Se determină raza de convergenţă a seriei de puteri $(*_1)$ ale $x - 0$:

$$\exists \rho_1 = \lim_{n\to\infty} \frac{\left|\frac{-1}{n+1}\right|}{\left|\frac{-1}{n}\right|} = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{n}{n+1}\right| = 1 \Rightarrow R = 1.$$

Se aplică Teorema Cauchy-Hadamard$\Rightarrow$

Seria este absolut convergentă, pentru $\forall x \in]-1, 1[$.

Seria este divergentă, pentru $\forall x \in \left]-\infty, -1\right[$

Pentru $x = -1$ se obţine seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{-1}{n} (-1)^n$ care este semiconvergentă, ca serie armonică alternantă cu $\alpha = 1 > 0$.

Deci $\mathbb{I}_C = \left[-1, 1\right[$.

<u>etapa 3.</u> Este abordată înaintea etapei 1, pe $\widetilde{\mathbb{I}} = \mathbb{I}_C = \left]-1, 1\right[\cup \{-1\}$, cu menţiunea că funcţia sumă a seriei de puteri are în $x = -1$ valoarea obţinută prin prelungirea prin continuitate, adică $s(-1) = \ln 2$, adică

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n} = \ln 2.}$$

<u>etapa 4.</u> **Concluzii:** f este dezvoltabilă în serie MacLaurin pe $\widetilde{\mathbb{I}} = \mathbb{I}_C$ (în raport cu puteri ale $x - 0$) şi

$$\boxed{\ln(1-x) = -x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 - ... - \frac{1}{n}x^n - ..., \forall x \in \left[-1, 1\right[,} \tag{14}$$

sau, restrâns

$$\boxed{\ln(1-x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-1}{n} x^n, \forall x \in \left[-1, 1\right[.} \tag{14'}$$

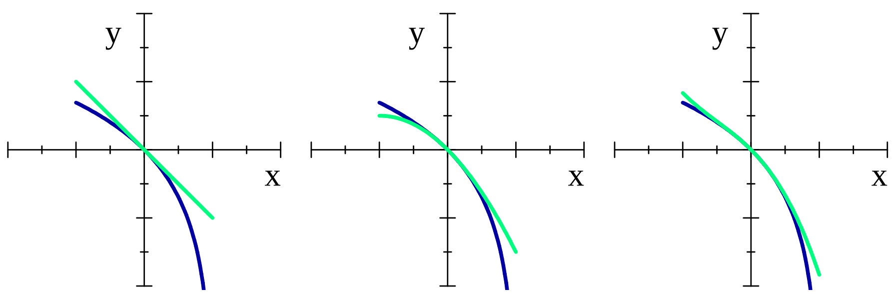
Se reprezintă grafic pe $\mathbb{I}_C$ funcţia f şi polinoamele Taylor, ce reprezintă funcţii - termeni din şirul sumelor parţiale,

$T_{1,0}(x) = -x;$

$T_{2,0}(x) = -x - \frac{1}{2}x^2;$

$T_{3,0}(x) = -x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3;$

şi se observă că, într-o vecinătate a lui $x = 0$ se poate aproxima $f(x)$ cu $T_{n,0}(x)$ (graficul polinomului aproape se suprapune peste al lui f).



h) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \operatorname{arctg} x;$

Se foloseşte seria de la d). Se integrează termen cu termen pe domeniul de uniformă convergenţă (în sensul primitivei)

$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + ... + (-1)^n x^{2n} + ..., \forall x \in \mathbb{R}$ cu $|x| < 1 \Rightarrow$

$\operatorname{arctg} x = c + x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + ... + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + ..., \forall x \in \mathbb{R}$ cu $|x| < 1$.

Pentru $x = 0 \in \{x \in \mathbb{R}; |x| < 1\} \Rightarrow$

$\operatorname{arctg} x = c + 0 - \frac{0^3}{3} + \frac{0^5}{5} + ... + (-1)^n \frac{0^{2n+1}}{2n+1} + ... \Rightarrow c = \operatorname{arctg} x = 0$

Atunci

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + ... + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + ..., \forall x \in \mathbb{R} \text{ cu } |x| < 1,$$

sau, restrâns, $\operatorname{arctg} x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}, \forall x \in \mathbb{R}$ cu $|x| < 1$.

Prin **integrare** a unei serii de puteri este posibil să se mărească inetrvalul de convergenţă spre capete. Dacă se parcurgea etapa 2 de la a) se găsea:

etapa 2. Se determină intervalul de convergenţă a seriei MacLaurin:

Raza de convergenţă este $R = 1$.

Se aplică Teorema Cauchy-Hadamard$\Rightarrow$

Seria este absolut convergentă, pentru $\forall x \in \left]-1,1\right[$.

Seria este divergentă, pentru $\forall x \in \left]-\infty,-1\right[\cup \left]1,+\infty\right[$.

Pentru $x = -1$ şi $x = 1$ se face studiu separat:

-pentru $x = -1$ se obţine seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n+1}$ care este semiconvergentă;

-pentru $x = -1$ se obţine seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n}}{2n+1}$ care este semiconvergentă;

Deci $\mathbb{I}_C = [-1,1]$.

etapa 3. Este abordată înaintea etapei 2, pe $\widetilde{\mathbb{I}} = \mathbb{I}_C = \left]-1,1\right[\cup \{-1,1\} = [-1,1]$, cu menţiunea că funcţia sumă a seriei de puteri are în $x = -1$ şi $x = 1$ valoarea obţinută prin prelungirea prin continuitate, adică

$s(-1) = \operatorname{arctg}(-1) = -\frac{\pi}{4}$, adică $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n+1} = -\frac{\pi}{4}$ şi

$s(1) = \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}$, adică $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n}}{2n+1} = \frac{\pi}{4}$.

Seria $\boxed{1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + ... + \frac{(-1)^n}{2n+1} + ... = \frac{\pi}{4}}$

a fost folosită la aproximarea numărului π cu un număr de chiar 707 zecimale exacte, înainte de folosirea calculatorului.

etapa 4. **Concluzii:** f este dezvoltabilă în serie MacLaurin pe $\widetilde{\mathbb{I}} = \mathbb{I}_C$ (în raport cu puteri ale $x - 0$) şi

$$\boxed{\operatorname{arctg} x = c + x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + ... + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + ..., \forall x \in [-1,1],} \tag{15}$$

sau, restrâns $\boxed{\operatorname{arctg} x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}, \forall x \in [-1,1].}$ $(15')$

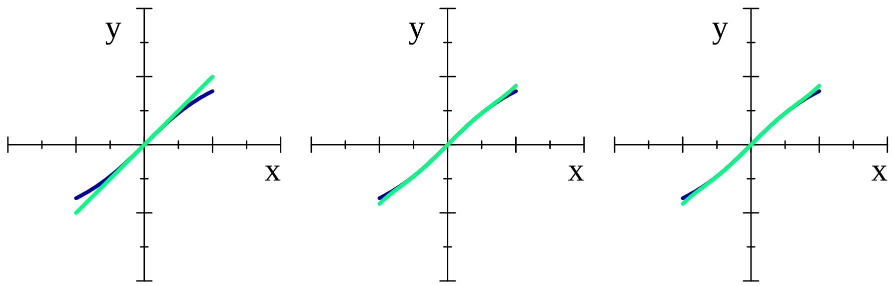
Se reprezintă grafic pe $\mathbb{I}_C$ funcţia f şi polinoamele Taylor, ce reprezintă funcţii - termeni din şirul sumelor parţiale,

$T_{1,0}(x) = x$;

$T_{3,0}(x) = x - \frac{x^3}{3}$;

$T_{5,0}(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5}$;

şi se observă că, într-o vecinătate a lui $x = 0$ se poate aproxima $f(x)$ cu $T_{n,0}(x)$ (graficul polinomului aproape se suprapune peste al lui f).



i) $f :]-1,1[\to \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{1+x}$;
Din a), pentru $\alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow$

$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{\frac{1}{2}}{1!}x + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{2!}x^2 + ... + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)...\left(\frac{1}{2}-n+1\right)}{n!}x^n + ..., \forall x \in \mathbb{R}$ cu $|x| < 1$ şi $x = \pm 1$.

$$\boxed{\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2 \cdot 1!}x - \frac{1}{2^2 \cdot 2!}x^2 + ... + (-1)^{n-1}\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot ... \cdot (2n-3)}{2^n \cdot n!}x^n + ..., \forall x \in [-1,1]} \quad (16)$$

sau, restrâns, $\boxed{\sqrt{1+x} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot ... \cdot (2n-3)}{2^n \cdot n!}x^n, \forall x \in [-1,1].}$ (16′)

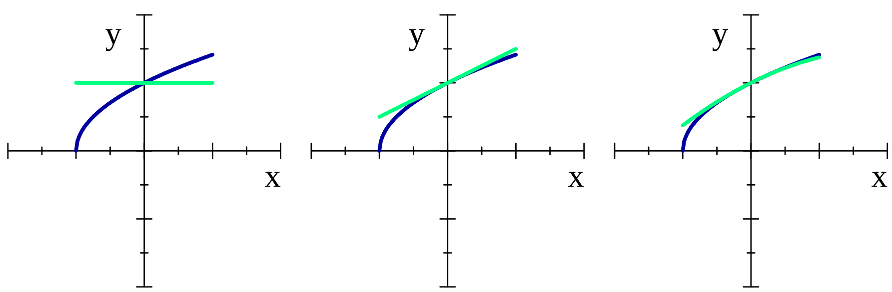
Se reprezintă grafic pe $\mathbb{I}_C$ funcţia f şi polinoamele Taylor, ce reprezintă funcţii - termeni din şirul sumelor parţiale,

$T_{0,0}(x) = 1$;

$T_{1,0}(x) = 1 + \frac{1}{2 \cdot 1!}x$;

$T_{2,0}(x) = 1 + \frac{1}{2 \cdot 1!}x - \frac{1}{2^2 \cdot 2!}x^2$;

şi se observă că, într-o vecinătate a lui $x = 0$ se poate aproxima $f(x)$ cu $T_{n,0}(x)$ (graficul polinomului aproape se suprapune peste al lui f).



j) $f :]-1,1[\to \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{1-x}$;
Din i), făcând schimbarea de variabilă $x \rightsquigarrow -x$ pe domeniul de convergenţă$\Rightarrow$

$\sqrt{1-x} = 1 - \frac{1}{2 \cdot 1!}x - \frac{1}{2^2 \cdot 2!}x^2 + ... + (-1)^{n-1}(-1)^n\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot ... \cdot (2n-3)}{2^n \cdot n!}x^n + ..., \forall x \in \mathbb{R}$ cu $|x| < 1$ şi $x = \pm 1$.

$$\boxed{\sqrt{1-x} = 1 - \frac{1}{2 \cdot 1!}x - \frac{1}{2^2 \cdot 2!}x^2 - ... - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot ... \cdot (2n-3)}{2^n \cdot n!}x^n + ..., \forall x \in [-1,1]} \quad (17)$$

sau, restrâns, $\boxed{\sqrt{1-x} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot ... \cdot (2n-3)}{2^n \cdot n!}x^n, \forall x \in [-1,1].}$ (17′)

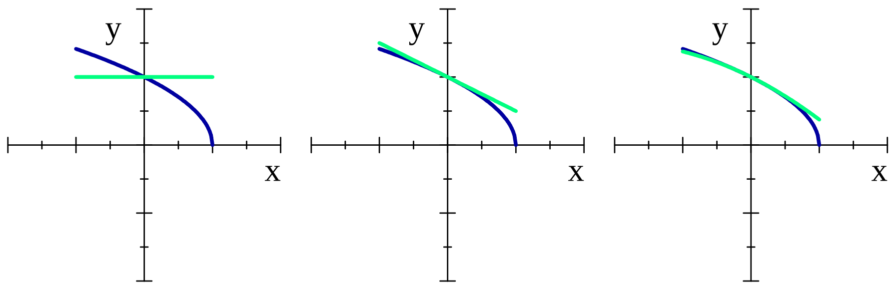
Se reprezintă grafic pe $\mathbb{I}_C$ funcţia f şi polinoamele Taylor, ce reprezintă funcţii - termeni din şirul sumelor parţiale,

$T_{0,0}(x) = 1$;

$T_{1,0}(x) = 1 - \dfrac{1}{2 \cdot 1!}x$;

$T_{2,0}(x) = 1 - \dfrac{1}{2 \cdot 1!}x - \dfrac{1}{2^2 \cdot 2!}x^2$;

şi se observă că, într-o vecinătate a lui $x = 0$ se poate aproxima $f(x)$ cu $T_{n,0}(x)$ (graficul polinomului aproape se suprapune peste al lui f).



k) $f :]-1, 1[\to \mathbb{R}, f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x}}$;

Din a), pentru $\alpha = -\frac{1}{2} \Rightarrow$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 + \frac{\frac{-1}{2}}{1!}x + \frac{\frac{-1}{2}\left(\frac{-1}{2}-1\right)}{2!}x^2 + ... + \frac{\frac{-1}{2}\left(\frac{-1}{2}-1\right)...\left(\frac{-1}{2}-n+1\right)}{n!}x^n + ..., \forall x \in \mathbb{R} \text{ cu } |x| < 1$$

şi $x = 1$.

$$\boxed{\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1}{2 \cdot 1!}x + \frac{1}{2^2 \cdot 2!}x^2 + ... + (-1)^n \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot ... \cdot (2n-1)}{2^n \cdot n!}x^n + ..., \forall x \in]-1, 1]} \quad (18)$$

sau, restrâns, $\boxed{\dfrac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \dfrac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot ... \cdot (2n-1)}{2^n \cdot n!}x^n, \forall x \in]-1, 1]\,.}$ $(18')$

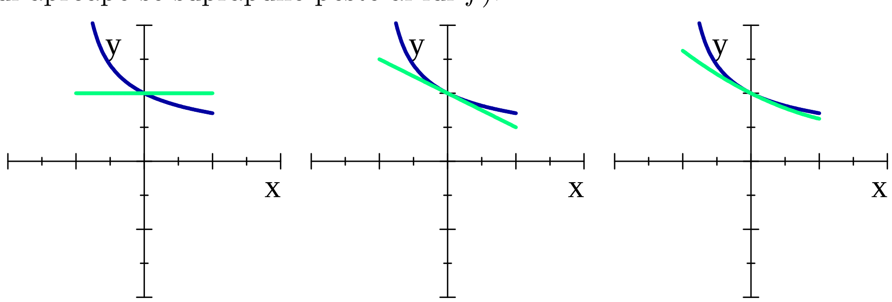
Se reprezintă grafic pe $\mathbb{I}_C$ funcţia f şi polinoamele Taylor, ce reprezintă funcţii - termeni din şirul sumelor parţiale,

$T_{0,0}(x) = 1$;

$T_{1,0}(x) = 1 - \dfrac{1}{2 \cdot 1!}x$;

$T_{2,0}(x) = 1 - \dfrac{1}{2 \cdot 1!}x + \dfrac{1}{2^2 \cdot 2!}x^2$;

şi se observă că, într-o vecinătate a lui $x = 0$ se poate aproxima $f(x)$ cu $T_{n,0}(x)$ (graficul polinomului aproape se suprapune peste al lui f).



l) $f:]-1,1[\to \mathbb{R}, f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$;

Din k), făcând schimbarea de variabilă $x \rightsquigarrow -x$ pe domeniul de convergenţă$\Rightarrow$

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}} = 1 + \frac{1}{2\cdot 1!}x + \frac{1}{2^2\cdot 2!}x^2 + ... + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot ...\cdot(2n-1)}{2^n\cdot n!}x^n + ..., \forall x\in\mathbb{R} \text{ cu } |x|<1 \text{ şi } x=-1.$$

$$\boxed{\frac{1}{\sqrt{1-x}} = 1 + \frac{1}{2\cdot 1!}x + \frac{1}{2^2\cdot 2!}x^2 + ... + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot ...\cdot(2n-1)}{2^n\cdot n!}x^n + ..., \forall x\in[-1,1[} \tag{19}$$

sau, restrâns, $\boxed{\dfrac{1}{\sqrt{1-x}} = 1 + \sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1\cdot 3\cdot 5\cdot ...\cdot(2n-1)}{2^n\cdot n!}x^n, \forall x\in[-1,1[\,.}$ $\quad(19')$

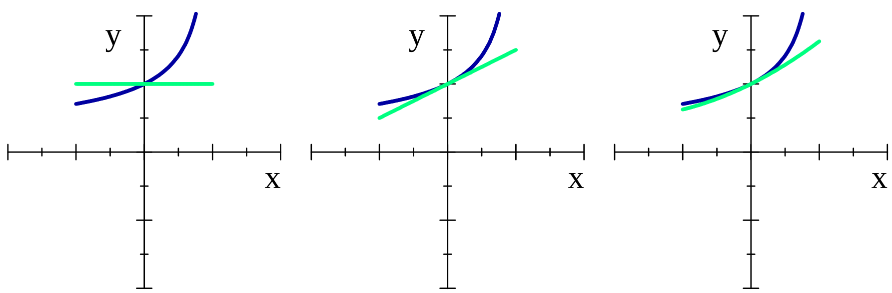
Se reprezintă grafic pe $\mathbb{I}_C$ funcţia f şi polinoamele Taylor, ce reprezintă funcţii - termeni din şirul sumelor parţiale,

$T_{0,0}(x) = 1$;

$T_{1,0}(x) = 1 + \dfrac{1}{2\cdot 1!}x$;

$T_{2,0}(x) = 1 + \dfrac{1}{2\cdot 1!}x + \dfrac{1}{2^2\cdot 2!}x^2$;

şi se observă că, într-o vecinătate a lui $x=0$ se poate aproxima $f(x)$ cu $T_{n,0}(x)$ (graficul polinomului aproape se suprapune peste al lui f).



m) $f:]-1,1[\to \mathbb{R}, f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$;

Din k), făcând schimbarea de variabilă $x \rightsquigarrow x^2$ pe domeniul de convergenţă $\Rightarrow$

$$\boxed{\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = 1 - \frac{1}{2\cdot 1!}x^2 + \frac{1}{2^2\cdot 2!}x^4 + ... + (-1)^n\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot ...\cdot(2n-1)}{2^n\cdot n!}x^{2n} + ..., \forall x\in[-1,1]} \tag{20}$$

sau, restrâns, $\boxed{\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}} = 1 + \sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1\cdot 3\cdot 5\cdot ...\cdot(2n-1)}{2^n\cdot n!}x^{2n}, \forall x\in[-1,1]\,.}$ $\quad(20')$

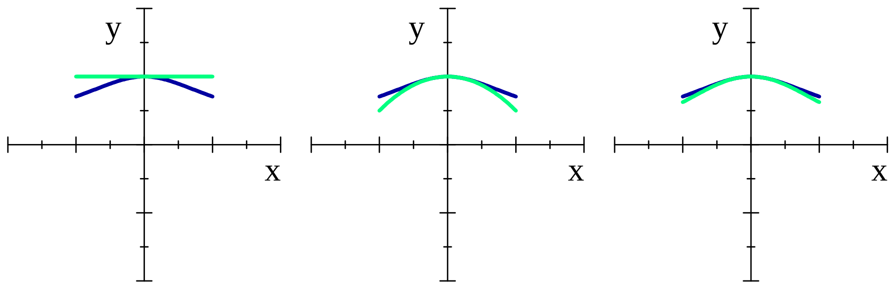
Se reprezintă grafic pe $\mathbb{I}_C$ funcţia f şi polinoamele Taylor, ce reprezintă funcţii - termeni din şirul sumelor parţiale,

$T_{0,0}(x) = 1$;

$T_{2,0}(x) = 1 - \dfrac{1}{2\cdot 1!}x^2$;

$T_{4,0}(x) = 1 - \dfrac{1}{2\cdot 1!}x^2 + \dfrac{1}{2^2\cdot 2!}x^4$;

şi se observă că, într-o vecinătate a lui $x=0$ se poate aproxima $f(x)$ cu $T_{n,0}(x)$ (graficul polinomului aproape se suprapune peste al lui f).



n) $f:]-1,1[\to \mathbb{R}, f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;
Din l), făcând schimbarea de variabilă $x \rightsquigarrow x^2$ pe domeniul de convergenţă $\Rightarrow$

$$\boxed{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \frac{1}{2\cdot 1!}x^2 + \frac{1}{2^2\cdot 2!}x^4 + ... + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot ...\cdot(2n-1)}{2^n\cdot n!}x^{2n} + ..., \forall x \in]-1,1[} \qquad (21)$$

sau, restrâns, $\boxed{\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1\cdot 3\cdot 5\cdot ...\cdot(2n-1)}{2^n\cdot n!}x^n, \forall x \in]-1,1[\,.}$ $(21')$

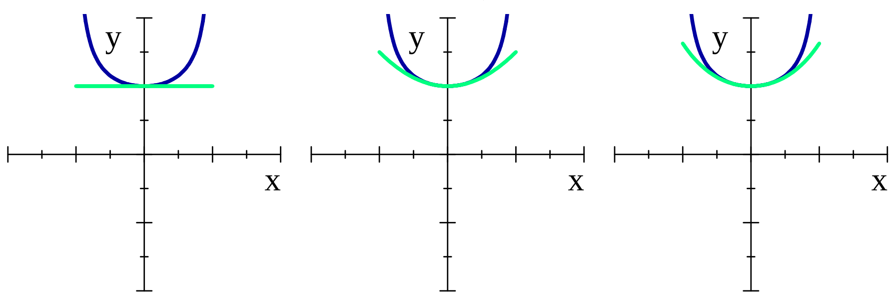
Se reprezintă grafic pe $\mathbb{I}_C$ funcţia f şi polinoamele Taylor, ce reprezintă funcţii - termeni din şirul sumelor parţiale,

$T_{0,0}(x) = 1$;

$T_{2,0}(x) = 1 + \dfrac{1}{2\cdot 1!}x^2$;

$T_{4,0}(x) = 1 + \dfrac{1}{2\cdot 1!}x^2 + \dfrac{1}{2^2\cdot 2!}x^4$;

şi se observă că, într-o vecinătate a lui $x = 0$ se poate aproxima $f(x)$ cu $T_{n,0}(x)$ (graficul polinomului aproape se suprapune peste al lui f).



o) $f:]-1,1[\to \mathbb{R}, f(x) = \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$;
Din m), prin integrare pe domeniul de uniformă convergenţă$\Rightarrow$

$$\boxed{\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right) = x - \frac{1}{2\cdot 1!}\frac{x^3}{3} + \frac{1}{2^2\cdot 2!}\frac{x^5}{5} + ... + (-1)^n \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot ...\cdot(2n-1)}{2^n\cdot n!}\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + ..., \forall x \in [-1,1]}$$
(22)

sau, restrâns, $\boxed{\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right) = x + \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \dfrac{1\cdot 3\cdot 5\cdot ...\cdot(2n-1)}{2^n\cdot n!\cdot(2n+1)}x^{2n+1}, \forall x \in [-1,1]\,.}$ $(22')$

Pentru detalii, $c = 0$ ş.a, s-a procedat ca la f).

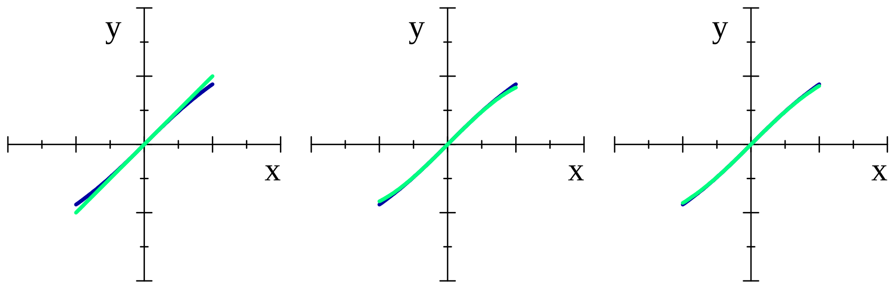
Se reprezintă grafic pe $\mathbb{I}_C$ funcţia f şi polinoamele Taylor, ce reprezintă funcţii - termeni din şirul sumelor parţiale,

$T_{1,0}(x) = x$;

$T_{3,0}(x) = x - \frac{1}{2\cdot 1!}\frac{x^3}{3}$;

$T_{5,0}(x) = x - \frac{1}{2\cdot 1!}\frac{x^3}{3} + \frac{1}{2^2\cdot 2!}\frac{x^5}{5}$;

şi se observă că, într-o vecinătate a lui $x = 0$ se poate aproxima $f(x)$ cu $T_{n,0}(x)$ (graficul polinomului aproape se suprapune peste al lui f).



p) $f :]-1,1[\to \mathbb{R}, f(x) = \arcsin x$;

Din n), prin integrare pe domeniul de uniformă convergenţă$\Rightarrow$

$$\boxed{\arcsin x = x + \frac{1}{2\cdot 1!}\frac{x^3}{3} + \frac{1}{2^2\cdot 2!}\frac{x^5}{5} + ... + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot ...\cdot(2n-1)}{2^n\cdot n!}\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + ..., \forall x \in]-1,1[} \quad (23)$$

sau, restrâns, $\boxed{\arcsin x = x + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot ...\cdot(2n-1)}{2^n\cdot n!\cdot(2n+1)}x^{2n+1}, \forall x \in]-1,1[\,.}$ $(23')$

Pentru detalii, $c = 0$ ş.a., s-a procedat ca la f).

Luând $x = \frac{1}{2} \in]-1,1[$, se obţine:

$$\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^4\cdot 1!\cdot 3} + \frac{1\cdot 3}{2^7\cdot 2!\cdot 5} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2^3\cdot 3!\cdot 7} + ... + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot ...\cdot(2n-1)}{2^{3n+1}n!\cdot(2n+1)} + ...$$

sau $\boxed{\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot ...\cdot(2n-1)}{2^{3n+1}n!\cdot(2n+1)}.}$

Şi cu ajutorul seriei anterioare se poate determina valoarea lui π cu aproximaţie.

Se reprezintă grafic pe $\mathbb{I}_C$ funcţia f şi polinoamele Taylor, ce reprezintă funcţii - termeni din şirul sumelor parţiale,

$T_{1,0}(x) = x$;

$T_{3,0}(x) = x + \frac{1}{2\cdot 1!}\frac{x^3}{3}$;

$T_{5,0}(x) = x + \frac{1}{2\cdot 1!}\frac{x^3}{3} + \frac{1}{2^2\cdot 2!}\frac{x^5}{5}$;

şi se observă că, într-o vecinătate a lui $x = 0$ se poate aproxima $f(x)$ cu $T_{n,0}(x)$ (graficul polinomului aproape se suprapune peste al lui f).