

CURS NR. 7

Analiză matematică, AIA

9. Mulțimile $\mathbb{R}^n, \overline{\mathbb{R}}^n, n \in \mathbb{N}^*$

9.1. Structuri algebrice pe $\mathbb{R}^n, \overline{\mathbb{R}}^n, n \in \mathbb{N}^*$

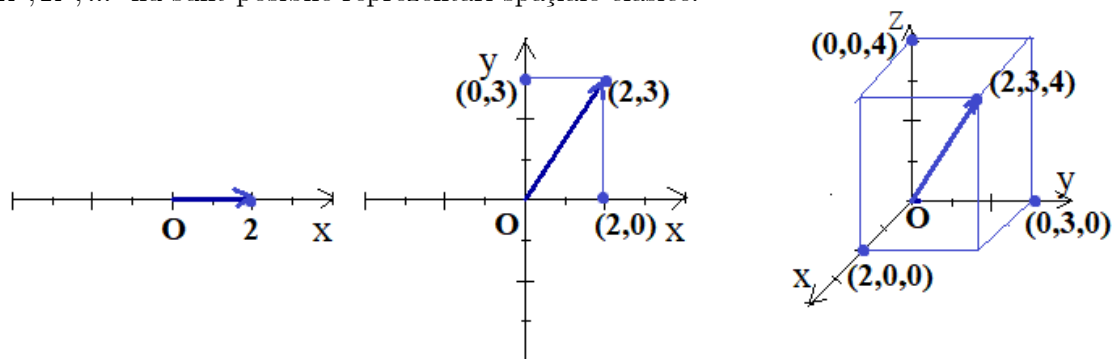
Fie $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Se definește $\mathbb{R}^n = \{\mathbf{x}; \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n), x_i \in \mathbb{R}, \forall i = \overline{1, n}\}$.

$\mathbb{R}^1 = \mathbb{R}$ se reprezintă geometric prin axa numerelor reale;

$\mathbb{R}^2$ se reprezintă prin mulțimea punctelor unui plan raportate la un sistem de axe ortogonale, coordonatele (x_1, x_2) renotându-se cu (x, y) ;

$\mathbb{R}^3$ se reprezintă prin mulțimea punctelor din spațiu raportate la un sistem de axe ortogonale, coordonatele (x_1, x_2, x_3) renotându-se cu (x, y, z) ;

$\mathbb{R}^4, \mathbb{R}^5, \dots$ -nu sunt posibile reprezentări spațiale clasice.



Se definește *egalitatea* a două n -uple prin

$$\mathbf{x} = \mathbf{y} \Leftrightarrow [x_1 = y_1, \dots, x_n = y_n].$$

Teorema 9.1.1. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $(\mathbb{R}^n, +, \cdot, \mathbb{R})$ este spațiu liniar peste $\mathbb{R}$, unde operațiile standard sunt (adunarea n -uplelor)

$$+ : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, \forall (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in (\mathbb{R}^n)^2, (x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n).$$

(înmulțirea n -uplelor din $\mathbb{R}^n$ cu scalari din câmpul $\mathbb{R}$)

$$\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, \forall (\alpha, \mathbf{x}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, \alpha \cdot (x_1, \dots, x_n) = (\alpha x_1, \dots, \alpha x_n).$$

Teorema 9.1.2. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $(\mathbb{R}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ este spațiu liniar euclidian, unde produsul scalar standard este

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \forall \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \forall \mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n, \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n.$$

Observația 9.1.1. Numai pentru $n = 1$, $\mathbb{R}^1 = (\mathbb{X}, +, \cdot, \leq, CD)$ este corp comutativ total ordonat. Pentru $n \geq 2$, nu se poate defini pe $\mathbb{R}^n$ o relație de ordine totală.

Fie $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Se definește $\overline{\mathbb{R}}^n = \{\mathbf{x}; \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n), x_i \in \overline{\mathbb{R}}, \forall i = \overline{1, n}\}$.

9.2. Structuri de convergență pe $\mathbb{R}^n, \overline{\mathbb{R}}^n, n \in \mathbb{N}^*$

Teorema 9.2.1. Fie $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Funcțiile

$$\|\cdot\|_1 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \|\mathbf{x}\|_1 = |x_1| + \dots + |x_n| = \sum_{i=1}^n |x_i|;$$

$$\|\cdot\|_2 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \|\mathbf{x}\|_2 = \sqrt{|x_1|^2 + \dots + |x_n|^2} = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}};$$

$$\|\cdot\|_\infty : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \|\mathbf{x}\|_\infty = \max\{|x_1|, \dots, |x_n|\} = \max\{|x_i|; i \in \{1, 2, \dots, n\}\}$$

sunt norme pe $\mathbb{R}^n$, numite respectiv *norma modul*, *norma euclidiană*, *norma maximum*. Deci

$(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_1)$, $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2)$, $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty)$ sunt spații normate. Norma euclidiană este indusă de produsul scalar standard, adică

$$\|\mathbf{x}\|_2 = \sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle}, \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n.$$

Particularizare $n = 1$ ($\|\cdot\|_1 = \|\cdot\|_2 = \|\cdot\|_\infty = |\cdot|$), $n = 2$, $n = 3$.

Teorema 9.2.2[○]. Fie $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Atunci, pentru $p \in \mathbb{N}^*$, funcția

$$\|\cdot\|_p : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \|\mathbf{x}\|_p = \sqrt[p]{|x_1|^p + \dots + |x_n|^p} = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

este o normă pe $\mathbb{R}^n$. Deci $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_p)$ este spațiu normat.

Teorema 9.2.3. Fie $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Funcțiile

$$d_1 : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, d_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = |x_1 - y_1| + \dots + |x_n - y_n| = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|;$$

$$d_2 : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, d_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sqrt{|x_1 - y_1|^2 + \dots + |x_n - y_n|^2} = \left(\sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}};$$

$$d_\infty : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, d_\infty(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \max\{|x_1 - y_1|, \dots, |x_n - y_n|\} = \max\{|x_i - y_i|; i \in \{1, \dots, n\}\}$$

sunt metrici pe $\mathbb{R}^n$, numite respectiv *metrica modul*, *metrica euclidiană*, *metrica maximum*. Deci $(\mathbb{R}^n, d_1)$, $(\mathbb{R}^n, d_2)$, $(\mathbb{R}^n, d_\infty)$ sunt spații metrice. Mai mult, metricile d_1, d_2, d_∞ sunt induse de normele $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2, \|\cdot\|_\infty$, adică

$$d_{1,2,\infty}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_{1,2,\infty}, \forall (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in (\mathbb{R}^n)^2.$$

Particularizare $n = 1$ ($d_1 = d_2 = d_\infty$), $n = 2$, $n = 3$.

Teorema 9.2.4[○]. Fie $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Pentru $p \in \mathbb{N}^*$, funcția

$$d_p : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, d_p(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sqrt[p]{|x_1 - y_1|^p + \dots + |x_n - y_n|^p} = \left(\sum_{k=1}^n |x_i - y_i|^p \right)^{\frac{1}{p}};$$

este o metrică pe $\mathbb{R}^n$. Deci $(\mathbb{R}^n, d_p)$ este spațiu metric. Mai mult, metrica d_p este indusă de norma $\|\cdot\|_p$, adică

$$d_p(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_p, \forall (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in (\mathbb{R}^n)^2.$$

Definiția 9.2.1. Fie $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ și $r > 0$. Mulțimea

$$S(\mathbf{a}, r) = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n; \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|_{1,2,\infty} = d_{1,2,\infty}(\mathbf{x}, \mathbf{a}) = r \right\}$$

este sfera cu centrul în $\mathbf{a}$ și de rază r . Mulțimea

$$B(\mathbf{a}, r) = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n; \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|_{1,2,\infty} = d_{1,2,\infty}(\mathbf{x}, \mathbf{a}) < r \right\}$$

este interiorul sferei (sfera deschisă) cu centrul în $\mathbf{a}$ și de rază r . Mulțimea

$$B'(\mathbf{a}, r) = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n; \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|_{1,2,\infty} = d_{1,2,\infty}(\mathbf{x}, \mathbf{a}) \leq r \right\}$$

este sfera închisă cu centrul în $\mathbf{a}$ și de rază r . Mulțimea

$$\left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n; \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|_{1,2,\infty} = d_{1,2,\infty}(\mathbf{x}, \mathbf{a}) > r \right\}$$

este exteriorul sferei cu centrul în $\mathbf{a}$ și de rază r .

În funcție de ce distanță se alege se obține un anumit tip sferă.

Exemplul 9.2.1. Se reprezintă grafic sferele $S(\mathbf{a}, r)$, $B(\mathbf{a}, r)$, $B'(\mathbf{a}, r)$, $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$, $r > 0$, corespunzătoare pentru d_1, d_2, d_∞ ($\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2, \|\cdot\|_\infty$) în cazurile $n = 1$, $n = 2$, $n = 3$.

$n = 1$. $d_{1,2,\infty} : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, d_{1,2,\infty}(x, y) = |x - y|;$

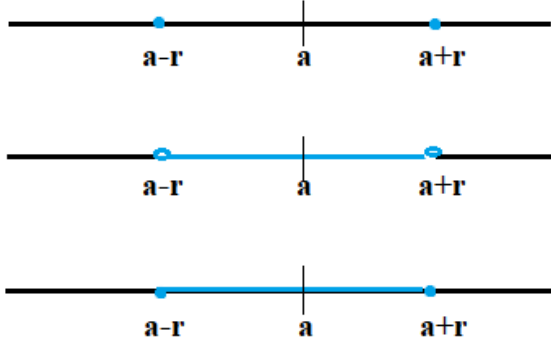
$$\|\cdot\|_{1,2,\infty} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \|\cdot\|_{1,2,\infty} = |\cdot|.$$

Fie $a \in \mathbb{R}$ și $r > 0$. Atunci:

$$S_{1,2,\infty}(a, r) = \{x \in \mathbb{R}; |x - a| = r\} = \{a - r, a + r\}\text{-sfera cu centrul în } a \text{ și de rază } r.$$

$B_{1,2,\infty}(a, r) = \{x \in \mathbb{R}; |x - a| < r\} =]a - r, a + r[$ -interiorul sferei (sfera deschisă) cu centrul în a și de rază r .

$$B'_{1,2,\infty}(a, r) = \{x \in \mathbb{R}; |x - a| \leq r\} = [a - r, a + r]\text{-sfera închisă cu centrul în } a \text{ și de rază } r.$$



$$[n = 2.] \quad d_1 : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad d_1((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|;$$

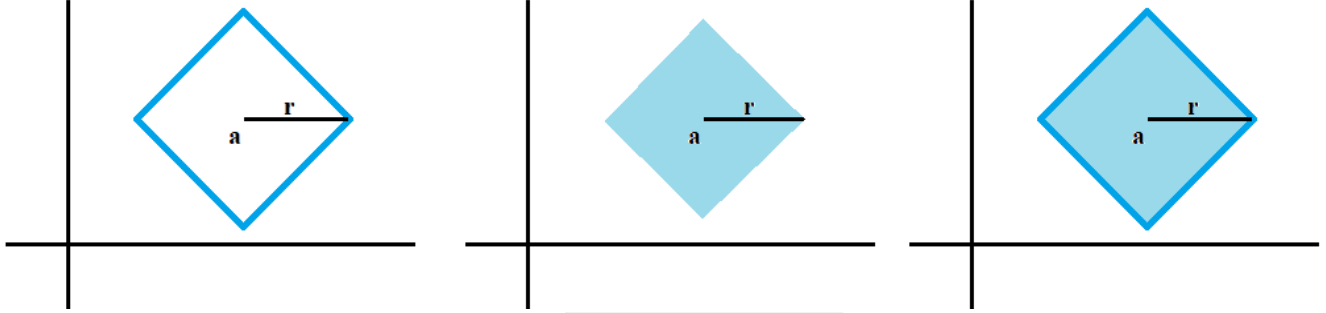
$$\|\cdot\|_1 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad \|(x_1, x_2)\|_1 = |x_1| + |x_2|;$$

Fie $\mathbf{a} = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$ și $r > 0$. Atunci:

$S_1(\mathbf{a}, r) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2; |x_1 - a_1| + |x_2 - a_2| = r\}$ -sfera cu centrul în $\mathbf{a}$ și de rază r .

$B_1(\mathbf{a}, r) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2; |x_1 - a_1| + |x_2 - a_2| < r\}$ -interiorul sferei (sfera deschisă) cu centrul în $\mathbf{a}$ și de rază r .

$B'_1(\mathbf{a}, r) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2; |x_1 - a_1| + |x_2 - a_2| \leq r\}$ -sfera închisă cu centrul în $\mathbf{a}$ și de rază r .



$$d_2 : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad d_2((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = \sqrt{|x_1 - y_1|^2 + |x_2 - y_2|^2};$$

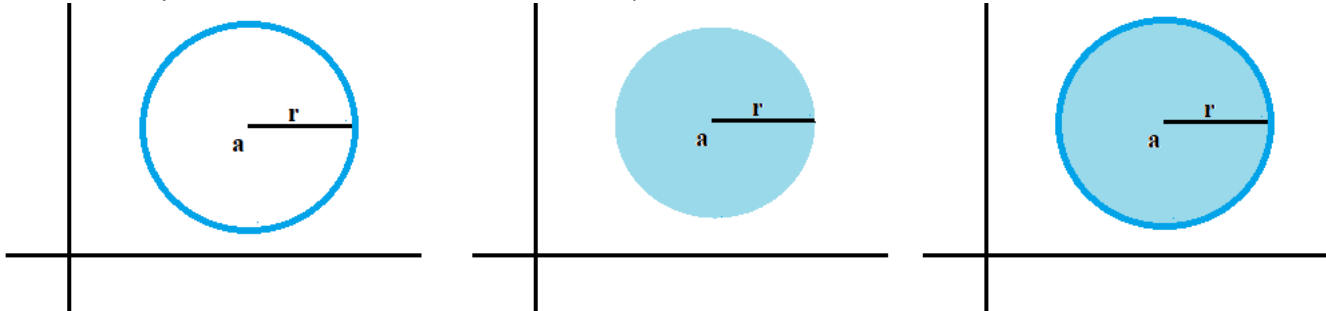
$$\|\cdot\|_2 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad \|(x_1, x_2)\|_2 = \sqrt{|x_1|^2 + |x_2|^2}.$$

Fie $\mathbf{a} = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$ și $r > 0$. Atunci:

$S_2(\mathbf{a}, r) = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2; \sqrt{|x_1 - a_1|^2 + |x_2 - a_2|^2} = r \right\}$ -sfera cu centrul în $\mathbf{a}$ și de rază r .

$B_2(\mathbf{a}, r) = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2; \sqrt{|x_1 - a_1|^2 + |x_2 - a_2|^2} < r \right\}$ -interiorul sferei (sfera deschisă) cu centrul în $\mathbf{a}$ și de rază r .

$B'_2(\mathbf{a}, r) = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2; \sqrt{|x_1 - a_1|^2 + |x_2 - a_2|^2} \leq r \right\}$ -sfera închisă cu centrul în $\mathbf{a}$ și de rază r .



$$d_\infty : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, d_\infty((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = \max(|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|);$$

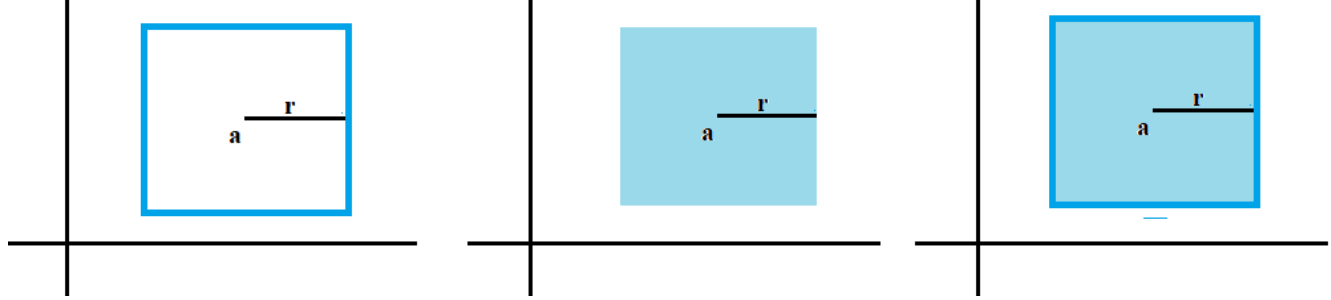
$$\|\cdot\|_\infty : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \|(x_1, x_2)\|_\infty = \max(|x_1|, |x_2|)$$

Fie $\mathbf{a} = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$ și $r > 0$. Atunci:

$S_\infty(\mathbf{a}, r) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2; \max(|x_1 - a_1|, |x_2 - a_2|) = r\}$ -sfera cu centrul în $\mathbf{a}$ și de rază r .

$B_\infty(\mathbf{a}, r) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2; \max(|x_1 - a_1|, |x_2 - a_2|) < r\}$ -interiorul sferei (sfera deschisă) cu centrul în $\mathbf{a}$ și de rază r .

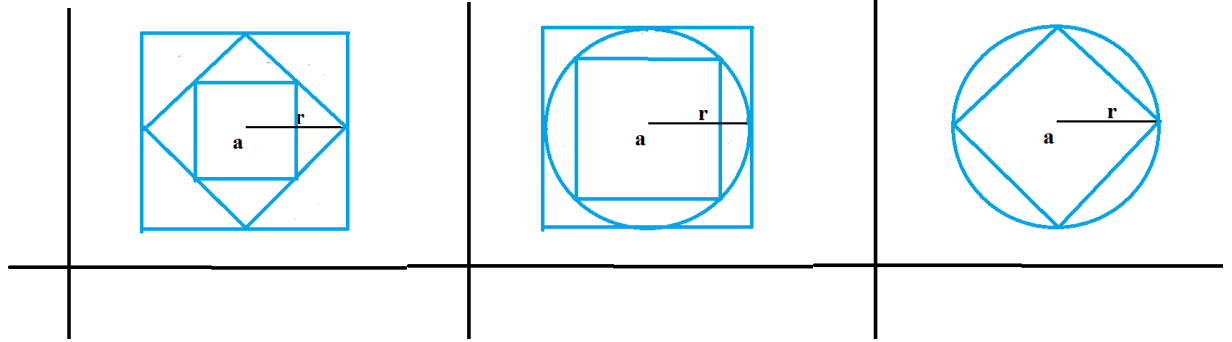
$B'_\infty(\mathbf{a}, r) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2; \max(|x_1 - a_1|, |x_2 - a_2|) \leq r\}$ -sfera închisă cu centrul în $\mathbf{a}$ și de rază r .



Teorema 9.2.5. **a)** $d_\infty \leq d_1 \leq n d_\infty$; **b)** $d_\infty \leq d_2 \leq \sqrt{n} d_\infty$; **c)** $d_2 \leq d_1$.

Utilizând inegalitățile anterioare, se arată că $\forall \mathbf{a} \in \mathbb{R}^n, \forall r > 0$ au loc

a) $B_\infty(\mathbf{a}, \frac{r}{n}) \subset B_1(\mathbf{a}, r) \subset B_\infty(\mathbf{a}, r)$; **b)** $B_\infty(\mathbf{a}, \frac{r}{\sqrt{n}}) \subset B_2(\mathbf{a}, r) \subset B_\infty(\mathbf{a}, r)$; **c)** $B_1(\mathbf{a}, r) \subset B_2(\mathbf{a}, r)$.



S-au reprezentat grafic incluziunile în cazul $n = 2$.

Exemplul 9.2.2. Se arată că $\forall \mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n, \forall r > 0$ au loc

$$\mathbf{a)} \quad B_\infty(\mathbf{a}, r) = \prod_{j=1}^n]a_j - r, a_j + r[=]a_1 - r, a_1 + r[\times]a_2 - r, a_2 + r[\times \dots \times]a_n - r, a_n + r[$$

(este un interval deschis n -dimensional centrat în $\mathbf{a}$ și de rază r);

$$\mathbf{b)} \quad B'_\infty(\mathbf{a}, r) = \prod_{j=1}^n [a_j - r, a_j + r];$$

(este un interval închis n -dimensional centrat în $\mathbf{a}$ și de rază r);

$$\mathbf{c)} \quad S_\infty(\mathbf{a}, r) = \prod_{j=1}^n \{a_j - r, a_j + r\}.$$

Exemplul 9.2.3[○]. Fie $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Se arată că funcția

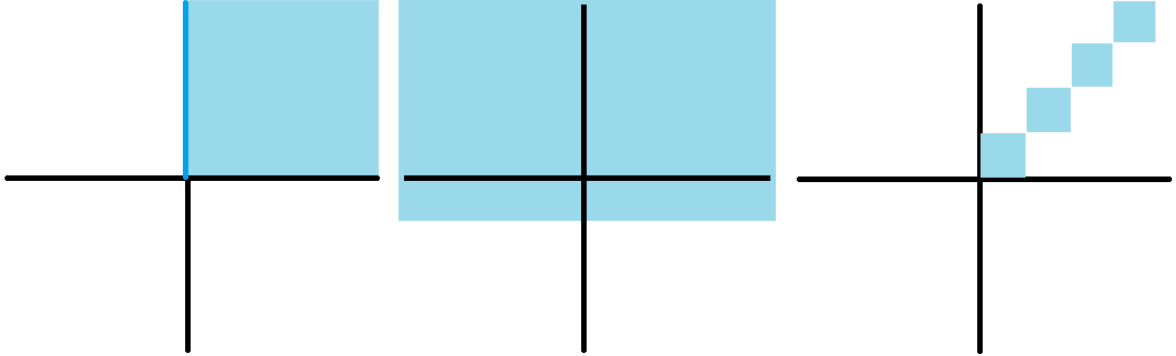
$$d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{j=1}^n \frac{1}{2^j} \cdot \frac{|x_j - y_j|}{1 + |x_j - y_j|}$$

este o metrică pe $\mathbb{R}^n$, dar nu este indusă de nici o normă de pe $\mathbb{R}^n$.

Definiția 9.2.2. O mulțime $D \subseteq \mathbb{R}^n$ se numește *mulțime deschisă* în $\mathbb{R}^n$

$$\begin{cases} \text{dacă } D = \emptyset \text{ sau} \\ \text{dacă } D \neq \emptyset \text{ și } \forall \mathbf{a} \in D, \exists r_{\mathbf{a}} > 0 \text{ a.î. } \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n; \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|_{1,2,\infty} < r \right\} \subseteq D. \end{cases}$$

Exemplul 9.2.4. Se reprezintă grafic următoarele mulțimi și, conform definiției, se observă că:



$A = [0, +\infty[\times]0, +\infty[$ - nu este mulțime deschisă în $\mathbb{R}^2$;

$B = \mathbb{R} \times]-1, +\infty[$ - este mulțime deschisă în $\mathbb{R}^2$;

$C = \bigcup_{n=0}^{+\infty} (]n, n+1[\times]n, n+1[)$ - este mulțime deschisă în $\mathbb{R}^2$.

Teorema 9.2.5. $(\mathbb{R}^n, \mathcal{T})$ este spațiu topologic. Topologia $\mathcal{T}$ este formată din toate mulțimile deschise în sensul definiției anterioare, și este indusă și de d_1 , și de d_2 , și de d_∞ . $\mathcal{T}$ se numește *topologie uzuală* pe $\mathbb{R}^n$.

Definiția 9.2.3. O mulțime $V \subseteq \mathbb{R}^n$ se numește *vecinătate în $\mathbb{R}^n$ a punctului $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$* dacă

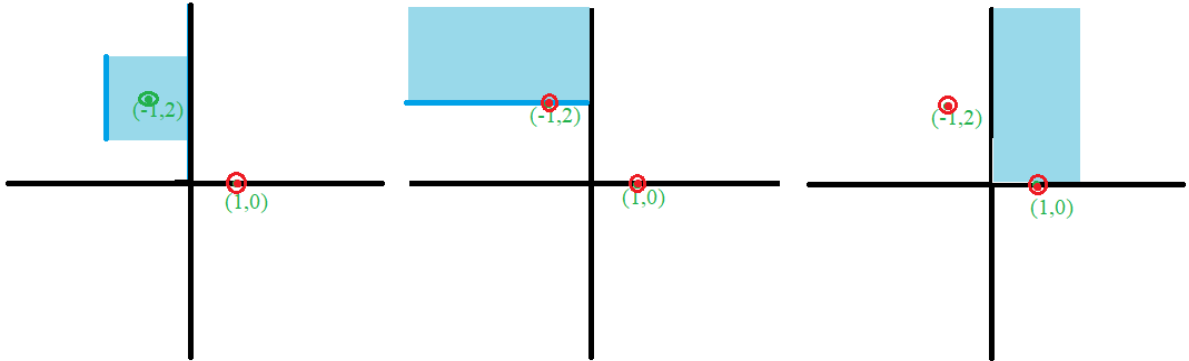
$$\exists r > 0 \text{ a.î. } \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n; \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|_{1,2,\infty} < r \right\} \subseteq V.$$

Se notează cu $\mathcal{V}(\mathbf{a})$ mulțimea tuturor vecinătăților punctului $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$.

Exemplul 9.2.5. Se reprezintă grafic următoarele mulțimi și, conform definiției, se observă că:

$A = [-2, 0[\times]1, 3[$ - este vecinătate în $\mathbb{R}^2$ a punctului $\mathbf{a} = (-1, 2)$ și nu este vecinătate în $\mathbb{R}^2$ a punctului $\mathbf{a} = (1, 0)$;

Analog, pe bază de reprezentare grafică, se studiază care dintre următoarele mulțimi



$B =]-\infty, 0[\times [2, +\infty[$; $C =]0, 2[\times \mathbb{R}$;

$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2; (x+1)^2 + (y-2)^2 \leq 13 \right\}$;

$E =]-\infty, 0] \times [0, 3]$; $F = [0, +\infty[\times]-\infty, 1]$

sunt vecinătăți în $\mathbb{R}^2$ ale punctului $\mathbf{a} = (-1, 2)$, respectiv ale punctului $\mathbf{a} = (1, 0)$.

Observația 9.2.4. $(\mathbb{R}^n, \bar{\mathcal{T}})$ este doar spațiu topologic. Topologia uzuală $\bar{\mathcal{T}}$ pe $\mathbb{R}^n$ este mulțimea formată din toate mulțimile deschise în $\bar{\mathbb{R}}^n$.

(nu se precizează aici definiția mulțimii deschise în $\bar{\mathbb{R}}^n$; nici definiția vecinătății unui "punct" din $\bar{\mathbb{R}}^n$).

Exemplul 9.2.6. Se precizează care dintre mulțimile

$A = [0, +\infty) \times]0, +\infty[; B =]0, +\infty[\times \overline{\mathbb{R}}; C = \overline{\mathbb{R}} \times]-1, 1[$
sunt deschise în $\mathbb{R}^2$. Reprezentare grafică.

Exemplul 9.2.7. Se precizează care dintre mulțimile

$$A =]-2, 4[\times \overline{\mathbb{R}}; B = \overline{\mathbb{R}} \times]-\infty, 0[; C = \{(x, y) \in \overline{\mathbb{R}}^2; x^2 < y\};$$

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; (x+1)^2 + (y-2)^2 \leq 13\};$$

$$E =]-\infty, 2] \times [2, +\infty[; F = [-2, +\infty] \times [-\infty, 0]$$

sunt vecinătăți în $\mathbb{R}^2$ ale "punctului" $\mathbf{a} = (1, +\infty)$, respectiv ale "punctelor" $\mathbf{a} = (+\infty, -\infty)$, $\mathbf{a} = (-1, -\infty)$. Reprezentare grafică.

Definiția 9.2.4. O mulțime $A \subseteq \mathbb{R}^n$ este *mărginită* dacă poate fi inclusă într-o sferă deschisă:

$$\exists \mathbf{a} \in \mathbb{R}^n \text{ și } \exists r > 0 \text{ astfel încât } A \subseteq \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n; \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|_{1,2,\infty} < r\}$$

$$\text{sau } \exists M > 0 \text{ astfel încât } A \subseteq \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n; \|\mathbf{x} - \boldsymbol{\theta}_{R^n}\|_{1,2,\infty} < M\}$$

$$\text{sau } \exists M > 0 \text{ astfel încât } \|\mathbf{x}\|_{1,2,\infty} < M, \forall \mathbf{x} \in A.$$

Numai pentru $n = 1$, noțiunea de mărginire coincide cu cea dată în $(\mathbb{R}, +, \cdot, \leq, CD)$ cu inf și sup.

Exemplul 9.2.8. Se studiază mărginirea următoarelor mulțimi din $\mathbb{R}^2$:

$$A = [-2, 0[\times]1, 2[; B = [0, 1] \times [1, +\infty[;$$

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; \frac{x^2}{4} + y^2 \leq 1\}; D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 \leq y\}.$$

Reprezentare grafică.

Observația 9.2.5. Pentru definițiile punctelor interioare, exterioare, frontieră, aderente, de acumulare, izolate și a mulțimilor corespunzătoare-A se vedea Spații Topologice din Anexa 1.

Exemplul 9.2.9. Se determină $\text{int}_X A$, $\text{fr}_X A$, $\text{ext}_X A$, $\text{ad}_X A$, $\text{ad}_X A (A')$, $\text{iz}_X A$, $\overline{A}^X$ pentru $A \subset X$, unde $X = \mathbb{R}^2$ este considerat cu topologia uzuală:

a) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 < 1, x + y < 1, y > 0\};$

b) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \leq 1, x + y \leq 1, y \geq 0\};$

c) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \leq 1, x + y < 1, y > 0\};$

d) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \leq 1, x + y \leq 1, y \geq 0, x < 1\}.$

9.3. Șiruri de n -uple reale: mărginire, limite, șiruri Cauchy

Peste tot în această secțiune fie $m \in \mathbb{N}$ un număr natural fixat și $\mathbb{N}_m = \{m, m+1, \dots, n, \dots\}$ ($\mathbb{N}_0 = \mathbb{N}$ și $\mathbb{N}_1 = \mathbb{N}^*$).

Definiția 9.3.1. Se numește *șir de n -uple de numere reale* o funcție

$$f: \mathbb{N}_m \rightarrow \mathbb{R}^n, f(k) = (x_1^k, \dots, x_n^k).$$

n -upla $\mathbf{x}^k = (x_1^k, \dots, x_n^k) \in \mathbb{R}^n$ se numește *termenul de rang k* al șirului ($k \in \mathbb{N}$ indice de șir, $n \in \mathbb{N}_2$ indice de n -uplă). Se notează șirul prin $(\mathbf{x}^k)_{k \in \mathbb{N}_m}$. Se descrie

$$(\mathbf{x}^k)_{k \in \mathbb{N}_m} : (x_1^m, \dots, x_n^m), (x_1^{m+1}, \dots, x_n^{m+1}), \dots, (x_1^k, \dots, x_n^k), \dots$$

Se numește *subșir al șirului* $(\mathbf{x}^k)_{k \in \mathbb{N}_m}$ restricția funcției f la o submulțime numărabilă a $\mathbb{N}_m$.

Observația 2.3.1. Deoarece pentru $n \geq 2$ pe $\mathbb{R}^n$ nu se poate introduce o relație de ordine totală, atunci pentru $n \geq 2$ nu există noțiunea de șiruri monotone de n -uple.

Definiția 9.3.2. Fie $(\mathbf{x}^k)_{k \in \mathbb{N}_m}$ un șir de n -uple de numere reale. Șirul $(\mathbf{x}^k)_{k \in \mathbb{N}_m}$ se numește *șir mărginit* dacă mulțimea termenilor șirului este mărginită în $\mathbb{R}^n$, adică dacă

$$\exists M > 0 \text{ astfel încât } \|\mathbf{x}^k\|_{1,2,\infty} < M, \forall k \in \mathbb{N}_m.$$

(toți termenii șirului sunt într-o sferă deschisă de centru $\boldsymbol{\theta}_{R^n}$ și rază M).

Teorema 2.3.1. Fie $(\mathbf{x}^k)_{k \in \mathbb{N}_m}$ un șir de n -uple de numere reale

$\mathbf{x}^k = (x_1^k, \dots, x_n^k) \in \mathbb{R}^n, k \in \mathbb{N}_m$ indice de șir, $n \in \mathbb{N}_2$ indice de n -uplă. Atunci următoarele afirmații sunt echivalente:

- (i) $(\mathbf{x}^k)_{k \in \mathbb{N}_m}$ este șir mărginit;
 (ii) $\forall j \in \{1, \dots, n\}$ șirul $(x_j^k)_{k \in \mathbb{N}_m}$ este șir mărginit.

Exemplul 9.3.1. Să se studieze mărginirea șirurilor

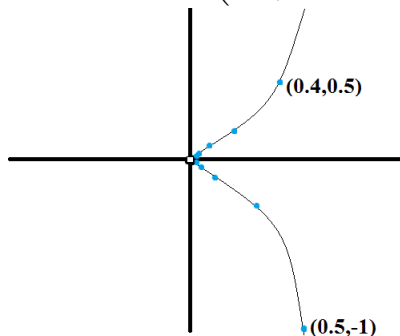
a) $(x_n, y_n) = \left(\frac{n}{n^2 + 1}, \frac{(-1)^n}{n} \right), \forall n \in \mathbb{N}^*; \mathbf{b)} (x_n, y_n, z_n) = \left((-n)^n, \frac{1}{n^2}, \frac{n^2}{n+1} \right), \forall n \in \mathbb{N}^*.$

Rezolvare. S-a rennotat la exercițiu indicele de șir cu n .

a) $(x_n, y_n) = \left(\frac{n}{n^2 + 1}, \frac{(-1)^n}{n} \right), \forall n \in \mathbb{N}^*.$

Se descrie șirul:

$$((x_n, y_n))_{n \in \mathbb{N}^*} : \left(\frac{1}{1^2 + 1}, \frac{(-1)^1}{1} \right), \left(\frac{2}{2^2 + 1}, \frac{(-1)^2}{2} \right), \dots, \left(\frac{n}{n^2 + 1}, \frac{(-1)^n}{n} \right), \dots$$



Șirul $((x_n, y_n))_{n \in \mathbb{N}^*}$ este mărginit dacă:

- sau mulțimea termenilor șirului este mărginită în $\mathbb{R}^2$.
- sau șirurile $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ și $(y_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ sunt mărginite.

Aici

$$x_n = \frac{n}{n^2 + 1}, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

$$\text{-monotonia: } x_{n+1} - x_n = \frac{n+1}{(n+1)^2 + 1} - \frac{n}{n^2 + 1} < 0, \forall n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ șirul este monoton descrescător;

-se reprezintă grafic;

-șirul este mărginit: $0 < x_n \leq \frac{1}{2}, \forall n \in \mathbb{N}^*.$

$$y_n = \frac{(-1)^n}{n}, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Deoarece $\mathbb{N} = \{2k; k \in \mathbb{N}^*\} \cup \{2k+1; k \in \mathbb{N}\}$, se explicitează

$$y_n = \begin{cases} \frac{1}{n}, & \text{dacă } n = 2k; k \in \mathbb{N}^* \\ -\frac{1}{n}, & \text{dacă } n = 2k+1; k \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

-se studiază monotonia pe subșiruri și se arată că

$$\inf_{n \in \mathbb{N}^*} y_n = -1; \exists \min_{n \in \mathbb{N}^*} y_n = -1 = y_1;$$

$$\sup_{n \in \mathbb{N}^*} y_n = \frac{1}{2}; \exists \max_{n \in \mathbb{N}^*} x_n = \frac{1}{2} = y_2.$$

-se reprezintă grafic;

-șirul este mărginit: $-1 \leq y_n \leq \frac{1}{2}, \forall n \in \mathbb{N}^*.$

Atunci şirul $((x_n, y_n))_{n \in \mathbb{N}^*}$ este mărginit: $(x_n, y_n) \in]0, \frac{1}{2}] \times [-1, \frac{1}{2}], \forall n \in \mathbb{N}^*$
Se interpretează geometric.

Definiția 9.3.3. Şirul de n -uple de numere reale $(\mathbf{x}^k)_{k \in \mathbb{N}_m}$ are limita $\mathbf{x} \in (\overline{\mathbb{R}})^n$, şi se notează $\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{x}^k = \mathbf{x}$ sau $\mathbf{x}^k \rightarrow \mathbf{x}$, dacă

$$\forall V \in \mathcal{V}(x), \exists k_V \in \mathbb{N}_m \text{ a.î. } \forall k \in \mathbb{N}_m, k \geq k_V \Rightarrow \mathbf{x}^k \in V.$$

Teorema 9.3.2. (de unicitate a limitei unui şir) Dacă un şir de n -uple de numere reale $(\mathbf{x}^k)_{k \in \mathbb{N}_m}$ are limită în $(\overline{\mathbb{R}})^n$, atunci aceasta este unică.

Definiția 9.3.4. Şirul de n -uple de numere reale $(\mathbf{x}^k)_{k \in \mathbb{N}_m}$ este convergent dacă are limită în $\mathbb{R}^n$.
Şirul $(\mathbf{x}^k)_{k \in \mathbb{N}_m}$ este divergent dacă sau nu are limită sau are limită şi aceasta este în $(\overline{\mathbb{R}})^n \setminus \mathbb{R}^n$.

Teorema 9.3.3. (de caracterizare a convergenței unui şir) $\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{x}^k = \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \Leftrightarrow$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists k_\varepsilon \in \mathbb{N}_m \text{ astfel încât } \forall k \in \mathbb{N}_m, k \geq k_\varepsilon \Rightarrow \|\mathbf{x}^k - \mathbf{x}\|_{1,2,\infty} < \varepsilon.$$

Teorema 2.3.4. Fie $(\mathbf{x}^k)_{k \in \mathbb{N}_m}$ un şir de n -uple de numere reale

$$\mathbf{x}^k = (x_1^k, \dots, x_n^k) \in \mathbb{R}^n, k \in \mathbb{N}_m \text{ indice de şir, } n \in \mathbb{N}_2 \text{ indice de } n\text{-uplă.}$$

Atunci următoarele afirmații sunt echivalente:

- (i) $(\mathbf{x}^k)_{k \in \mathbb{N}_m}$ este are limita $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$;
- (ii) $\forall j \in \{1, \dots, n\}$ şirul $(x_j^k)_{k \in \mathbb{N}_m}$ are limita x_j .

$$\hat{\text{În}} \text{ caz de existență, } \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{x}^k = \left(\lim_{k \rightarrow \infty} x_1^k, \dots, \lim_{k \rightarrow \infty} x_n^k \right)$$

Exemplul 9.3.2. Să se studieze limitele şirurilor:

$$\text{a) } (x_n, y_n) = \left(\frac{n}{n^2 + 1}, \frac{(-1)^n}{n} \right), \forall n \in \mathbb{N}^*; \text{b) } (x_n, y_n) = \left(\frac{n}{2 + (-1)^n}, \frac{n^2}{1 - n} \right), n \in \mathbb{N}_2;$$

$$\text{c) } (x_n, y_n) = \left(\frac{3^n}{n^n}, \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \right), n \in \mathbb{N}^*; \text{d) } (x_n, y_n, z_n) = \left(\sqrt[n]{n}, \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n, \cos \frac{2\pi}{n} \right), n \in \mathbb{N}^*;$$

$$\text{e) } (x_n, y_n, z_n) = \left(\frac{1}{n!}, \frac{(-1)^n}{n^2}, \left(\frac{n}{n+1} \right)^n \right), n \in \mathbb{N}^*;$$

$$\text{f) } (x_n, y_n, z_n) = \left(\frac{1}{2n + (-1)^n}, \frac{n^2}{n+1}, \frac{1}{n} - n \right), n \in \mathbb{N}^*.$$

Rezolvare. Am rennotat la exercițiu indicele de şir cu n .

Şirul $((x_n, y_n))_{n \in \mathbb{N}^*}$ are limită dacă şirurile $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ şi $(y_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ au limită. În acest caz

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n, y_n) = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n, \lim_{n \rightarrow \infty} y_n \right).$$

Şirul $((x_n, y_n, z_n))_{n \in \mathbb{N}^*}$ are limită dacă şirurile $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, $(y_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ şi $(z_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ au limită. În acest caz

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n, y_n, z_n) = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n, \lim_{n \rightarrow \infty} y_n, \lim_{n \rightarrow \infty} z_n \right).$$

$$\text{a) } (x_n, y_n) = \left(\frac{n}{n^2 + 1}, \frac{(-1)^n}{n} \right), \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Se descrie şirul:

$$((x_n, y_n))_{n \in \mathbb{N}^*} : \left(\frac{1}{1^2 + 1}, \frac{(-1)^1}{1} \right), \left(\frac{2}{2^2 + 1}, \frac{(-1)^2}{2} \right), \dots, \left(\frac{n}{n^2 + 1}, \frac{(-1)^n}{n} \right), \dots$$

$$x_n = \frac{n}{n^2 + 1}, \forall n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow \exists \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0.$$

$$y_n = \frac{(-1)^n}{n}, \forall n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow \exists \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0.$$

$$\text{Deci } \exists \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n, y_n) = (0, 0).$$

Se interpretează geometric.

$$\text{b) } (x_n, y_n) = \left(\frac{n}{2 + (-1)^n}, \frac{n^2}{1 - n} \right), n \in \mathbb{N}_2;$$

Se descrie șirul:

$$((x_n, y_n))_{n \in \mathbb{N}_2} : \left(\frac{2}{2 + (-1)^2}, \frac{2^2}{1 - 2} \right), \left(\frac{3}{3 + (-1)^3}, \frac{3^2}{1 - 3} \right), \dots, \left(\frac{n}{2 + (-1)^n}, \frac{n^2}{1 - n} \right), \dots$$

$$x_n = \frac{n}{2 + (-1)^n}, \forall n \in \mathbb{N}_2.$$

Deoarece $\mathbb{N}_2 = \{2k; k \in \mathbb{N}^*\} \cup \{2k + 1; k \in \mathbb{N}^*\}$, se explicitează

$$x_n = \begin{cases} \frac{n}{2}, & \text{dacă } n = 2k; k \in \mathbb{N}^* \\ \frac{3}{1}, & \text{dacă } n = 2k + 1; k \in \mathbb{N}^*. \end{cases}$$

Se trece la limită pe subșiruri

$$\begin{cases} \lim_{k \rightarrow \infty} x_{2k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{2k}{2} = +\infty; \\ \lim_{k \rightarrow \infty} x_{2k+1} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{2k+1}{1} = +\infty \end{cases} \quad \mathbb{N}_2 = \{2k; k \in \mathbb{N}^*\} \cup \{2k+1; k \in \mathbb{N}^*\} \Rightarrow$$

mulțimea punctelor limită ale șirului $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_2}$ este

$$\mathcal{L}((x_n)_{n \in \mathbb{N}_2}) = \{+\infty\} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \liminf_{n \rightarrow \infty} x_n = \liminf_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty \text{ (cel mai mic punct limită)} \\ \limsup_{n \rightarrow \infty} x_n = \limsup_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty \text{ (cel mai mare punct limită)} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\exists \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty.$$

$$y_n = \frac{n^2}{1 - n}, \forall n \in \mathbb{N}_2 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = -\infty.$$

$$\text{Deci } \exists \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n, y_n) = (+\infty, -\infty).$$

Se interpretează geometric.

$$\text{c) } (x_n, y_n) = \left(\frac{3^n}{n^n}, \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \right), n \in \mathbb{N}^*;$$

Se descrie șirul:

$$((x_n, y_n))_{n \in \mathbb{N}^*} : \left(\frac{3^1}{1^1}, 1 + \frac{1}{1!} \right), \left(\frac{3^2}{2^2}, 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} \right), \dots, \left(\frac{3^n}{n^n}, 1 + \frac{1}{1!} + \dots + \frac{1}{n!} \right), \dots$$

$$x_n = \frac{3^n}{n^n}, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

$$\left. \begin{aligned} 0 < \frac{3^n}{n^n} &= \left(\frac{3}{n} \right)^n < \left(\frac{3}{4} \right)^n, \forall n \in \mathbb{N}^*, n \geq 5; \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3}{4} \right)^n &= 0 \end{aligned} \right\} \text{Crit. C\text{le}ștelui} \Rightarrow$$

$$\exists \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0.$$

$$y_n = 1 + \frac{1}{1!} + \dots + \frac{1}{n!}, \forall n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = e.$$

$$\text{Deci } \exists \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n, y_n) = (0, e).$$

Se interpretează geometric.

$$\text{d) } (x_n, y_n, z_n) = \left(\sqrt[n]{n}, \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n, \cos \frac{2\pi}{n} \right), n \in \mathbb{N}^*;$$

Se descrie șirul:

$((x_n, y_n, z_n))_{n \in \mathbb{N}^*} : \left(\sqrt[1]{1}, \left(1 + \frac{1}{1}\right)^1, \cos \frac{2\pi}{1} \right), \left(\sqrt[2]{2}, \left(1 + \frac{1}{2}\right)^2, \cos \frac{2\pi}{2} \right), \dots, \left(\sqrt[n]{n}, \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \cos \frac{2\pi}{n} \right), \dots$
 $x_n = \sqrt[n]{n}, \forall n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow \exists \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1.$
 $y_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \forall n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = e.$
 $z_n = \cos \frac{2\pi}{n}, n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = 1.$
 Deci $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n, y_n, z_n) = (1, e, 1).$
 Se interpretează geometric.

Teorema 9.3.5. (operații algebrice cu șiruri convergente) Fie $(\mathbf{x}^k)_{k \in \mathbb{N}_m}$ și $(\mathbf{y}^k)_{k \in \mathbb{N}_m}$ două șiruri de n -uple de numere reale și $\lambda \in \mathbb{R}$.

a) Dacă șirurile $(\mathbf{x}^k)_{k \in \mathbb{N}_m}$ și $(\mathbf{y}^k)_{k \in \mathbb{N}_m}$ sunt convergente atunci șirurile $(\mathbf{x}^k + \mathbf{y}^k)_{k \in \mathbb{N}_m}$ și $(\lambda \cdot \mathbf{x}^k)_{k \in \mathbb{N}_m}$ sunt convergente. În acest caz

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (\mathbf{x}^k + \mathbf{y}^k) = \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{x}^k + \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{y}^k \text{ și } \lim_{k \rightarrow \infty} (\lambda \cdot \mathbf{x}^k) = \lambda \cdot \left(\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{x}^k \right).$$

b) Dacă șirul $(\mathbf{x}^k)_{k \in \mathbb{N}_m}$ este convergent atunci șirul $(\|\mathbf{x}^k\|_{1,2,\infty})_{k \in \mathbb{N}_m}$ este convergent. În acest caz

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|\mathbf{x}^k\|_{1,2,\infty} = \left\| \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{x}^k \right\|_{1,2,\infty}.$$

Teorema 9.3.6. (criteriul majorării de convergență, CS) Fie $(\mathbf{x}^k)_{k \in \mathbb{N}_m}$ un șir de n -uple de numere reale. Dacă există un șir $(y^k)_{k \in \mathbb{N}_m}$ de numere reale pozitive și o n -uplă $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ astfel încât

$$\begin{cases} \|\mathbf{x}^k - \mathbf{x}\|_{1,2,\infty} \leq y^k, \forall k \in \mathbb{N}_m, k > k_0, \\ \exists \lim_{k \rightarrow \infty} y^k = 0 \end{cases}$$

atunci $\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{x}^k = \mathbf{x}$.

Definiția 9.3.4. Șirul de n -uple de numere reale $(\mathbf{x}^k)_{k \in \mathbb{N}_m}$ este *șir Cauchy* (*șir fundamental*) dacă

$$\forall \varepsilon > 0, \exists k_\varepsilon \in \mathbb{N}_m \text{ astfel încât } \forall p \in \mathbb{N}^*, \forall k \in \mathbb{N}_m, k \geq k_\varepsilon \text{ să rezulte } \|\mathbf{x}^{k+p} - \mathbf{x}^k\|_{1,2,\infty} < \varepsilon.$$

Teorema 9.3.7. (Criteriul Cauchy de convergență a șirurilor de n -uple de nr. reale, CNS) Șirul de n -uple de numere reale $(\mathbf{x}^k)_{k \in \mathbb{N}_m}$ este șir convergent $\Leftrightarrow$ este șir Cauchy.

○9.4. Serii de n -uple de numere reale

10. Limite de funcții $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ în $\mathbf{a} \in A'$

Se va studia noțiunea de limită pentru funcții definite pe mulțimi din $\mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}^*$ cu valori în $\mathbb{R}^p$, $p \in \mathbb{N}^*$, în următoarele situații:

- limita unei funcții reale de o variabilă reală $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ în $a \in A'$:

$$\forall x \in A \subseteq \mathbb{R}, f(x) = y \in \mathbb{R}.$$

- limita unei funcții cu valori reale de n variabile reale (de fapt cu variabila o n -uplă) (*câmp scalar*) $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^*$ în $\mathbf{a} \in A'$:

$$\forall \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in A \subseteq \mathbb{R}^n, f(\mathbf{x}) = f((x_1, \dots, x_n)) \stackrel{\text{convenție}}{=} f(x_1, \dots, x_n) = y \in \mathbb{R}.$$

- limita unei funcții cu valori vectoriale (cu valori p -uple) de o variabilă reală $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^p$, $p \in \mathbb{N}^*$ în $a \in A'$:

$$\forall x \in A \subseteq \mathbb{R}, f(x) = (f_1(x), \dots, f_p(x)) = (y_1, \dots, y_p) \in \mathbb{R}^p.$$

- limita unei funcții cu valori vectoriale (cu valori p -uple) de n variabile reale (cu variabila o n -uplă) (*câmp vectorial*) $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$, $n \in \mathbb{N}^*$ și $p \in \mathbb{N}^*$ în $\mathbf{a} \in A'$:

$$\begin{aligned} \forall \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in A \subseteq \mathbb{R}^n, f(\mathbf{x}) &= f((x_1, \dots, x_n)) \stackrel{\text{convenție}}{=} f(x_1, \dots, x_n) = \\ &= (f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_p(x_1, \dots, x_n)) = (y_1, \dots, y_p) \in \mathbb{R}^p. \end{aligned}$$

Euristică. A. Din tabelul următor (cu valori ale $f(x, y)$), se observă că funcția

$$f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, f(x, y) = \frac{x^3}{x^2 + y^2}, \text{ unde } D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\},$$

are proprietatea că, dacă (x, y) "se apropie" de $(0, 0)$, atunci și $f(x, y)$ "se apropie" de numărul 0.

$x \setminus y$	-1.0	-0.5	-0.2	0	0.5	0.2	1.0
-1.0	-0.500	-0.800	-0.962	-1.000	-0.800	-0.962	-0.500
-0.5	-0.100	-0.250	-0.432	-0.500	-0.250	-0.432	-0.100
-0.2	-0.007	-0.027	-0.100	-0.200	-0.100	-0.027	-0.007
0	0.000	0.000	0.000		0.000	0.000	0.000
0.2	0.007	0.027	0.100	0.200	0.100	0.027	0.007
0.5	0.100	0.250	0.432	0.500	0.250	0.432	0.100
1.0	0.500	0.800	0.962	1.000	0.800	0.962	0.500

Din tabelul următor (cu valori ale $f(x, y)$), se observă că funcția

$$f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, \text{ unde } D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\},$$

are proprietatea că, dacă (x, y) "se apropie" de $(0, 0)$, atunci și $f(x, y)$ "nu se apropie" de niciun număr.

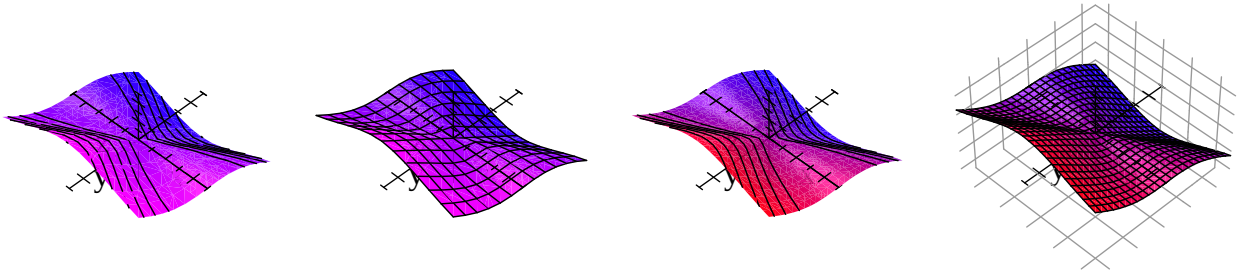
$x \setminus y$	-1.0	-0.5	-0.2	0	0.2	0.5	1.0
-1.0	0.000	0.600	0.923	1.000	0.923	0.600	0.000
-0.5	-0.600	0.000	0.724	1.000	0.724	0.000	-0.600
-0.2	-0.923	-0.724	0.000	1.000	0.000	-0.724	-0.923
0	-1.000	-1.000	-1.000		-1.000	-1.000	-1.000
0.2	-0.923	-0.724	0.000	1.000	0.000	-0.724	-0.923
0.5	-0.600	0.000	0.724	1.000	0.724	0.000	-0.600
1.0	0.000	0.600	0.923	1.000	0.923	0.600	0.000

B. O funcție $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ are graficul $G_f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; (x, y) \in D, z = f(x, y)\}$, care se poate reprezenta, cu ajutorul calculatorului, în $\mathbb{R}^3$.

Grafic, se observă că funcția

$$f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x, y) = \frac{x^3}{x^2 + y^2}$$

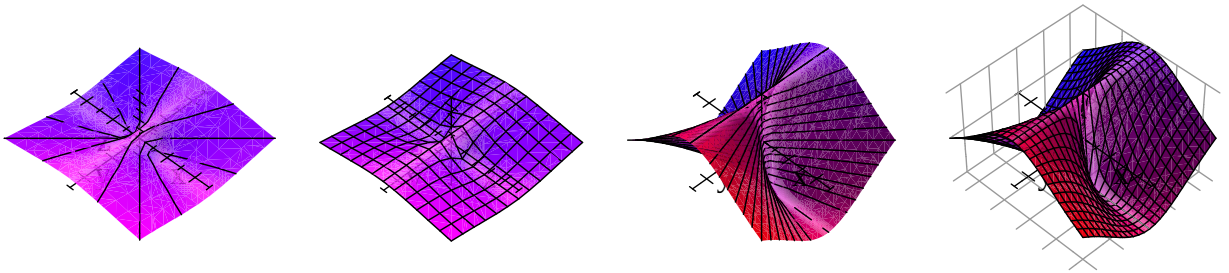
are proprietatea că, dacă (x, y) "se apropie" de $(0, 0)$, atunci și $f(x, y)$ "se apropie" de 0.



Grafic (cu grafic "mărit în apropiere de" $O(0,0,0)$, reprezentat în fereastra din dreapta), se observă că

$$f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$$

are proprietatea că, dacă (x, y) "se apropie" de $(0,0)$, atunci și $f(x, y)$ "nu se apropie" de niciun număr, are "oscilații" mari raportate la cotă.



Observațiile anterioare conduc la următoarea definiție, dată în cazul general:

Definiția 10.1. Fie $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$, $\mathbf{a} \in A' \subseteq \overline{\mathbb{R}^n}$. Funcția f are *limita* $\mathbf{l} \in \overline{\mathbb{R}^p}$ în *punctul* $\mathbf{a}$ și se notează $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}, \mathbf{x} \in A} f(\mathbf{x}) = \mathbf{l}$ dacă

$$[\forall V \in \mathcal{V}(\mathbf{l}), \exists U = U_V \in \mathcal{V}(\mathbf{a}) \text{ a.î. } \forall \mathbf{x} \in A \cap U, \mathbf{x} \neq \mathbf{a} \Rightarrow f(\mathbf{x}) \in V].$$

Dacă există, $\mathbf{l} \in \overline{\mathbb{R}^p}$ se numește *limita (globală a) funcției f în $\mathbf{a}$* .

Teorema 10.1. (de caracterizare a limitei) Fie $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$, $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n) \in A' \cap \mathbb{R}^n$. Sunt echivalente afirmațiile

(a) (definiția limitei cu **vecinătăți** 10.1) $\exists \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}, \mathbf{x} \in A} f(\mathbf{x}) = \mathbf{l} \in \mathbb{R}^p$

(b) (caracterizarea $\varepsilon - \delta$) $[\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \text{ a.î. } \forall \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in A \text{ cu } \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|_{\mathbb{R}^n} < \delta \text{ (este suficient } |x_1 - a_1| < \delta, \dots, |x_n - a_n| < \delta), \mathbf{x} \neq \mathbf{a} \Rightarrow \|f(\mathbf{x}) - \mathbf{l}\|_{\mathbb{R}^p} < \varepsilon]$.

(c) (caracterizarea **cu șiruri**) $[\forall (\mathbf{x}^k)_{k \in \mathbb{N}_m}$ un șir de n -uple reale din $A \setminus \{\mathbf{a}\}$, cu $\lim_{k \rightarrow \infty} (x_1^k, \dots, x_n^k) = (a_1, \dots, a_n) \Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} f(x_1^k, \dots, x_n^k) = \mathbf{l}]$.

Observația 10.1. Se reformulează teorema de caracterizare pentru

A) $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $\mathbf{a} = (a_1, a_2) \in A'$, $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^2$. Sunt echivalente afirmațiile

(a) (definiția limitei cu **vecinătăți**) $\exists \lim_{(x,y) \rightarrow (a_1, a_2), (x,y) \in A} f(x, y) = l \in \mathbb{R}$

(b) (caracterizarea $\varepsilon - \delta$) $[\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \text{ a.î. } \forall (x, y) \in A \setminus \{\mathbf{a}\} \text{ cu } |x - a_1| < \delta \text{ și } |y - a_2| < \delta \Rightarrow |f(x, y) - l| < \varepsilon]$.

(c) (caracterizarea **cu șiruri**) (se renotează cu n indicele de șir)

$[\forall ((x_n, y_n))_{n \in \mathbb{N}_m}$ un șir de perechi de numere reale din $A \setminus \{\mathbf{a}\}$, cu $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n, y_n) = (a_1, a_2) \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n, y_n) = l]$

B) $f : A \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3) \in A'$, $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$. Sunt echivalente afirmațiile

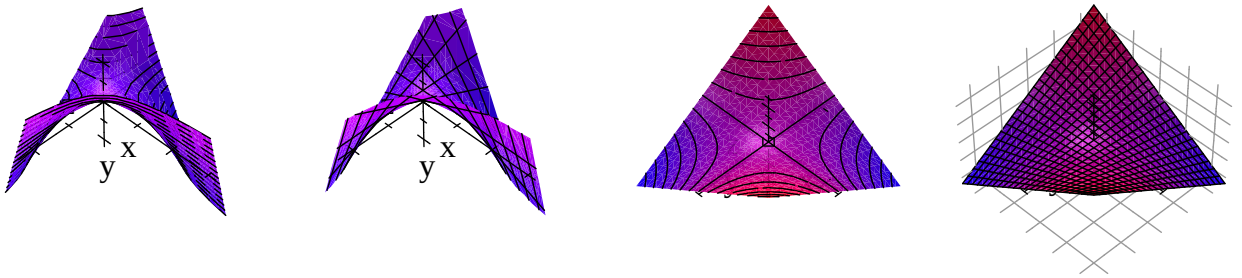
- (a) (definiția limitei cu **vecinătăți**) $\exists \lim_{(x,y,z) \rightarrow (a_1,a_2,a_3), (x,y,z) \in A} f(x,y,z) = l \in \mathbb{R}$
 (b) (caracterizarea $\varepsilon - \delta$) $[\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$ a.î. $\forall (x,y,z) \in A \setminus \{\mathbf{a}\}$, cu $|x - a_1| < \delta, |y - a_2| < \delta, |z - a_3| < \delta \Rightarrow |f(x,y,z) - l| < \varepsilon]$.
 (c) (caracterizarea cu **șiruri**) (se renotează cu n indicele de șir)
 $[\forall ((x_n, y_n, z_n))_{n \in \mathbb{N}_m}$ un șir de triplete de numere reale din $A \setminus \{\mathbf{a}\}$, cu $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n, y_n, z_n) = (a_1, a_2, a_3) \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n, y_n, z_n) = l]$

Exemplul 10.1. Să se arate că

a) $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,3)} (3 + 2xy) = 9$; b) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2y + yx^2}{x^2 + y^2} = 0$; c) $\lim_{(x,y,z) \rightarrow (1,1,1)} \frac{x^3 + y^3 + z^3}{x^2 + y^2 + z^2} = 1$

Rezolvare. a) Fie $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x,y) = 3 + 2xy$. Graficul funcției,

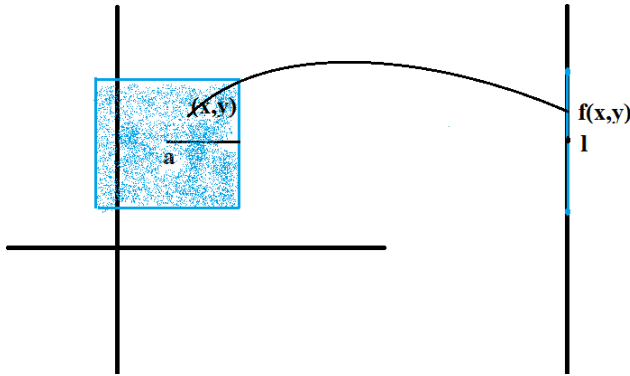
$G_f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; z = 3 + 2xy\}$,
 se reprezintă ca o suprafață în spațiu.



Se alege $A = \mathbb{R}^2$ și se observă că $\mathbf{a} = (1, 3) \in A'$.

Se studiază dacă $(x,y) \rightarrow (1,3) \Rightarrow f(x,y) \rightarrow 9$, adică $\exists \lim_{(x,y) \rightarrow (1,3)} f(x,y) = 9 \Leftrightarrow$

$$[\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \text{ a.î. } \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(1,3)\} \text{ cu } \underbrace{|x-1| < \delta \text{ și } |y-3| < \delta}_{(x,y) \text{ este în o vecinătate a lui } (1,3)} \Rightarrow \underbrace{|f(x,y) - 9| < \varepsilon}_{f(x,y) \text{ este în o vecinătate a lui } 9}].$$



Fie $\forall \varepsilon > 0$. Se caută $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ a.î. $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(1,3)\}$ cu

$|x-1| < \delta$ și $|y-3| < \delta$ să rezulte

$$|f(x,y) - 9| = |3 + 2xy - 9| = 2|xy - 3| = 2|(x-1)(y-3) + 3(x-1) + (y-3)| \leq 2(|x-1| \cdot |y-3| + 3|x-1| + |y-3|) \stackrel{\text{"se scapă" de } x,y}{\underset{\text{rămâne } \delta}{<}} 2[\delta \cdot \delta + 3\delta + \delta] < \varepsilon.$$

modul 1. Se caută $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ a.î.

$$\delta^2 + 4\delta - \frac{\varepsilon}{2} < 0 \Leftrightarrow \delta \in]-2 - \sqrt{4 + \frac{\varepsilon}{2}}, -2 + \sqrt{4 + \frac{\varepsilon}{2}}[, \text{ adică a.î. } 0 < \delta < -2 + \sqrt{4 + \frac{\varepsilon}{2}}.$$

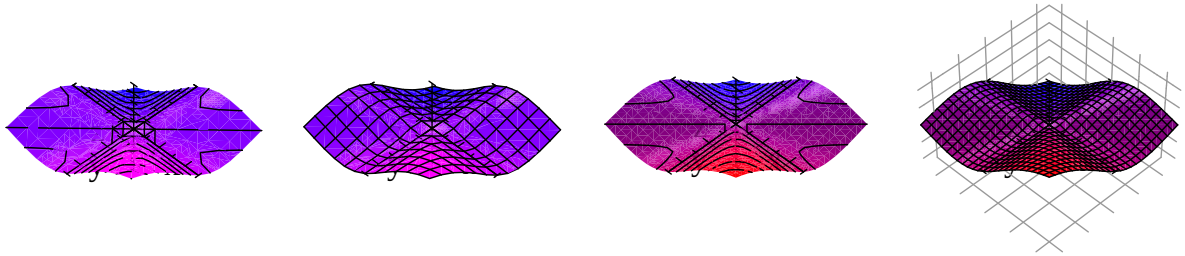
Din Teorema de densitate a $\mathbb{R}$ în $\mathbb{R}$, între numerele reale 0 și $-2 + \sqrt{4 + \frac{\varepsilon}{2}}$ există un astfel de δ . Se poate alege, de exemplu, $\delta = \frac{1}{2}(-2 + \sqrt{4 + \frac{\varepsilon}{2}})$.

modul 2. De menționat că, deoarece $\delta(\varepsilon)$ este "rază" pentru o vecinătate a punctului $(1, 3)$, se poate căuta chiar și $\delta = \delta(\varepsilon) \in]0, 1[$ a.î.

$$2[\delta \cdot \delta + 3\delta + \delta] \stackrel{\delta^2 < \delta, \text{ pentru } \delta \in]0, 1[}{<} 2(\delta + 3\delta + \delta) = 10\delta < \varepsilon.$$

Din Teorema de densitate a $\mathbb{R}$ în $\mathbb{R}$, între numerele reale 0 și $\frac{\varepsilon}{10}$ există un astfel de δ . Se poate alege, de exemplu, $\delta = \min\left\{\frac{1}{2}\frac{\varepsilon}{10}, 1\right\}$. q.e.d.

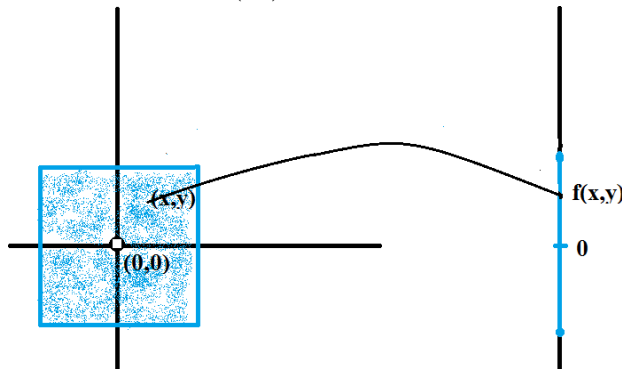
b) Fie $f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = \frac{x^2 y + xy^2}{x^2 + y^2}$, unde $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; (x, y) \neq (0, 0)\}$.



Se alege $A = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} = D$ a.î. $\mathbf{a} = (0, 0) \in A'$.

Se studiază dacă $\exists \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y + xy^2}{x^2 + y^2} = 0 \Leftrightarrow$

$$[\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \text{ a.î. } \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \text{ cu } \underbrace{|x - 0| < \delta \text{ și } |y - 0| < \delta}_{\text{vec. a } (0,0)} \Rightarrow \underbrace{|f(x, y) - 0| < \varepsilon}_{\text{vec. a } 0}].$$



Fie $\forall \varepsilon > 0$. Se caută $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ a.î. $\forall (x, y) \in A \setminus \{(0, 0)\}$ cu

$|x - 0| < \delta$ și $|y - 0| < \delta$ să rezulte

modul 1. (folosind $\frac{u}{u+v} < 1, \forall u > 0, v > 0$)

$$|f(x, y) - 0| = \left| \frac{x^2 y + xy^2}{x^2 + y^2} - 0 \right| \leq \frac{x^2}{x^2 + y^2} \cdot |y| + \frac{y^2}{x^2 + y^2} \cdot |x| \stackrel{\substack{\text{"se scapă" de } x, y \\ \text{rămâne } \delta}}{<} 1 \cdot \delta + 1 \cdot \delta < \varepsilon.$$

Deci se caută $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ a.î. $0 < 2\delta < \varepsilon$. Din Teorema de densitate a $\mathbb{R}$ în $\mathbb{R}$, între numerele reale 0 și ε există un astfel de δ . Se poate alege, de exemplu, $\delta = \frac{\varepsilon}{4}$.

modul 2. (folosind $u^2 + v^2 \geq 2|u| \cdot |v|, \forall u, v \in \mathbb{R}$)

$$|f(x, y) - 0| = \left| \frac{x^2 y + xy^2}{x^2 + y^2} - 0 \right| \leq \frac{x^2 \cdot |y| + |x| \cdot y^2}{x^2 + y^2} \leq \frac{x^2 \cdot |y| + |x| \cdot y^2}{2|x| \cdot |y|} = \frac{1}{2}(|x| + |y|) \stackrel{\substack{\text{"se scapă" de } x, y \\ \text{rămâne } \delta}}{<} \frac{1}{2}(\delta + \delta) < \varepsilon.$$

Deci se caută $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ a.î. $0 < \delta < \varepsilon$. Din Teorema de densitate a $\mathbb{R}$ în $\mathbb{R}$, între numerele reale 0 și ε există un astfel de δ . Se poate alege, de exemplu, $\delta = \frac{\varepsilon}{2000}$.

c) Fie $f : D \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y, z) = \frac{x^3 + y^3 + z^3}{x^2 + y^2 + z^2}$, unde $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; (x, y, z) \neq (0, 0, 0)\}$.

Se alege $A = \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\} = D$ a.î. $\mathbf{a} = (1, 1, 1) \in A'$.

Se studiază dacă $\exists \lim_{(x,y,z) \rightarrow (1,1,1)} \frac{x+y+z}{x^2+y^2+z^2} = 1 \Leftrightarrow$

$$[\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \text{ a.î. } \forall (x, y, z) \in A \setminus \{(1, 1, 1)\} \text{ cu } \underbrace{|x-1| < \delta, |y-1| < \delta \text{ și } |z-1| < \delta}_{(x,y,z) \text{ este în o vec. a } (1,1,1)} \Rightarrow \underbrace{|f(x, y, z) - 1| < \varepsilon}_{f(x,y,z) \text{ este în o vec. a } 1}].$$

Fie $\forall \varepsilon > 0$. Se caută $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ a.î. $\forall (x, y, z) \in A \setminus \{(1, 1, 1)\}$ cu

$|x-1| < \delta, |y-1| < \delta$ și $|z-1| < \delta$ să rezulte

$$|f(x, y, z) - 1| = \left| \frac{x^3 + y^3 + z^3}{x^2 + y^2 + z^2} - 1 \right| = \left| \frac{x^2(x-1) + y^2(y-1) + z^2(z-1)}{x^2 + y^2 + z^2} \right|$$

$$\leq \frac{x^2}{x^2 + y^2 + z^2} |x-1| + \frac{y^2}{x^2 + y^2 + z^2} |y-1| + \frac{z^2}{x^2 + y^2 + z^2} |z-1|$$

$$\begin{aligned} & \text{"se scapă" de } x, y, z, \text{ rămâne } \delta \\ & < 1 \cdot \delta + 1 \cdot \delta + 1 \cdot \delta < \varepsilon. \end{aligned}$$

Deci se caută $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ a.î. $0 < 3\delta < \varepsilon$. Din Teorema de densitate a $\mathbb{R}$ în $\mathbb{R}$, între numerele reale 0 și $\frac{\varepsilon}{3}$ există un astfel de δ . Se poate alege, de exemplu, $\delta = \frac{\varepsilon}{6}$.

○ **Observația 10.2.** Pentru $\mathbf{a} \in A', \mathbf{a} \in (\overline{\mathbb{R}})^n$ și $\mathbf{l} \in (\overline{\mathbb{R}})^p$, Teorema 1, (b), se poate reformula, utilizând definiția vecinătăților pentru $-\infty, +\infty$ în $\overline{\mathbb{R}}$. De exemplu, pentru $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, f(x, y) =$

...

a) $\exists \lim_{(x,y) \rightarrow (a_1, a_2), (x,y) \in A} f(x, y) = +\infty \Leftrightarrow$

$$[\forall \alpha > 0, \exists \delta = \delta(\alpha) > 0 \text{ a.î. } \forall (x, y) \in A \text{ cu } 0 \leq |x - a_1| < \delta, 0 \leq |y - a_2| < \delta \Rightarrow f(x, y) > \alpha].$$

b) $\exists \lim_{(x,y) \rightarrow (a_1, a_2), (x,y) \in A} f(x, y) = -\infty \Leftrightarrow$

$$[\forall \alpha < 0, \exists \delta = \delta(\alpha) > 0 \text{ a.î. } \forall (x, y) \in A \text{ cu } 0 \leq |x - a_1| < \delta, 0 \leq |y - a_2| < \delta \Rightarrow f(x, y) < \alpha].$$

c) $\exists \lim_{(x,y) \rightarrow (a_1, -\infty), (x,y) \in A} f(x, y) = l \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$

$$[\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_1 = \delta_1(\varepsilon) > 0, \exists \beta_2 = \beta_2(\varepsilon) < 0 \text{ a.î. } \forall (x, y) \in A \text{ cu } 0 \leq |x - a_1| < \delta_1, y < \beta_2 \Rightarrow |f(x, y) - l| < \varepsilon].$$

d) $\exists \lim_{(x,y) \rightarrow (+\infty, a_2), (x,y) \in A} f(x, y) = l \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$

$$[\forall \varepsilon > 0, \exists \beta_1 = \beta_1(\varepsilon) > 0, \exists \delta_2 = \delta_2(\varepsilon) > 0 \text{ a.î. } \forall (x, y) \in A \text{ cu } x > \beta_1, 0 \leq |y - a_2| < \delta_2 \Rightarrow |f(x, y) - l| < \varepsilon].$$

ș.a.m.d.

De menționat că $\beta_1 = \beta_1(\varepsilon) > 0$ este "mare, spre $+\infty$ ", iar $\delta_2 = \delta_2(\varepsilon) > 0$ este "mic, spre 0".

○ **Observația 10.3.** Pentru $\mathbf{a} \in A', \mathbf{a} \in (\overline{\mathbb{R}})^n$ și $\mathbf{l} \in (\overline{\mathbb{R}})^p$, Teorema 1, (c), se poate reformula, utilizând definiția limitei șirurilor în $(\overline{\mathbb{R}})^n$. De exemplu, pentru $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, f(x, y) = \dots$, renotând cu n indicele de șir,

a) $\exists \lim_{(x,y) \rightarrow (a_1, a_2), (x,y) \in A} f(x, y) = +\infty \Leftrightarrow [\forall ((x_n, y_n))_{n \in \mathbb{N}_m} \text{ un șir din } A \setminus \{\mathbf{a}\},$

$$\text{cu } \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n, y_n) = (a_1, a_2) \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n, y_n) = +\infty]$$

b) $\exists \lim_{(x,y) \rightarrow (a_1, a_2), (x,y) \in A} f(x, y) = -\infty \Leftrightarrow [\forall ((x_n, y_n))_{n \in \mathbb{N}_m} \text{ un șir din } A \setminus \{\mathbf{a}\},$

$$\text{cu } \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n, y_n) = (a_1, a_2) \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n, y_n) = -\infty].$$

c) $\exists \lim_{(x,y) \rightarrow (a_1, -\infty), (x,y) \in A} f(x, y) = l \in \mathbb{R} \Leftrightarrow [\forall ((x_n, y_n))_{n \in \mathbb{N}_m} \text{ un șir din } A \setminus \{\mathbf{a}\},$

cu $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n, y_n) = (a_1, -\infty) \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n, y_n) = l$.

d) $\exists \lim_{(x,y) \rightarrow (+\infty, a_2), (x,y) \in A} f(x, y) = l \in \mathbb{R} \Leftrightarrow [\forall ((x_n, y_n))_{n \in \mathbb{N}_m} \text{ un şir din } A \setminus \{\mathbf{a}\},$

cu $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n, y_n) = (+\infty, a_2) \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n, y_n) = l]$. ş.a.m.d.

Teorema 10.2. (proprietatea de unicitate a limitei)

Fie $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$, $\mathbf{a} \in A'$, $\mathbf{a} \in (\overline{\mathbb{R}})^n$. Dacă $\exists \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}, \mathbf{x} \in A} f(\mathbf{x}) \in (\overline{\mathbb{R}})^p$, atunci aceasta este unică.

Corolar 10.1. (criteriul de inexistenţă a limitei cu şiruri)

Fie $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$, $\mathbf{a} \in A'$, $\mathbf{a} \in (\overline{\mathbb{R}})^n$. Dacă

$\exists (\mathbf{x}^k)_{k \in \mathbb{N}_m}$ un şir de n -uple reale din $A \setminus \{\mathbf{a}\}$, cu $\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{x}^k \stackrel{\text{in } \mathbb{R}^n}{=} \mathbf{a}$,

$\exists (\tilde{\mathbf{x}}^k)_{k \in \mathbb{N}_m}$ un şir de n -uple reale din $A \setminus \{\mathbf{a}\}$, cu $\lim_{k \rightarrow \infty} \tilde{\mathbf{x}}^k \stackrel{\text{in } \mathbb{R}^n}{=} \mathbf{a}$

a.î.

•sau unul din şirurile $(f(\mathbf{x}^k))_{k \in \mathbb{N}_m}, (f(\tilde{\mathbf{x}}^k))_{k \in \mathbb{N}_m}$ nu are limită;

•sau ambele şiruri $(f(\mathbf{x}^k))_{k \in \mathbb{N}_m}, (f(\tilde{\mathbf{x}}^k))_{k \in \mathbb{N}_m}$ au limită, cu

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f(\mathbf{x}^k) \stackrel{\text{in } \mathbb{R}^p}{=} \mathbf{l}, \lim_{k \rightarrow \infty} f(\tilde{\mathbf{x}}^k) \stackrel{\text{in } \mathbb{R}^p}{=} \tilde{\mathbf{l}} \text{ şi } \mathbf{l} \neq \tilde{\mathbf{l}},$$

atunci $\nexists \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}, \mathbf{x} \in A} f(\mathbf{x})$.

A se vedea Criteriul reformulat pentru $p = 1$ şi $n = 2, 3$ în Seminar.

Definiţia 10.2. Fie $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$, $\mathbf{a} \in A'$, $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$. Fie $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\theta_{\mathbb{R}^n}\}$ o direcţie în $\mathbb{R}^n$. Funcţia f are limita $\mathbf{l} \in \mathbb{R}^p$ în punctul $\mathbf{a}$ după direcţia $\mathbf{h}$ dacă

$$[\exists U \in \mathcal{V}_{\mathbb{R}}(0) \text{ a.î. } \forall t \in U \text{ cu } \mathbf{a} + t\mathbf{h} \in A \Rightarrow \lim_{t \rightarrow 0, t \in U} f(\mathbf{a} + t\mathbf{h}) = \mathbf{l}].$$

Dacă există, $\mathbf{l} \in \mathbb{R}^p$ se numeşte *limita funcţiei f în $\mathbf{a}$ după direcţia $\mathbf{h}$* .

Teorema 10.3. Fie $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ şi $\mathbf{a} \in A'$, $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$. Dacă $\exists \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}, \mathbf{x} \in A} f(\mathbf{x}) = \mathbf{l} \in \mathbb{R}^p$ atunci,

pentru $\forall \mathbf{h} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\theta_{\mathbb{R}^n}\}$ direcţie în $\mathbb{R}^n$, $\exists \lim_{t \rightarrow 0} f(\mathbf{a} + t\mathbf{h}) = \mathbf{l} \in \mathbb{R}^p$.

Corolar 10.2. (criteriul de inexistenţă a limitei cu limita după direcţii)

Fie $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$, $\mathbf{a} \in A' \subseteq \mathbb{R}^n$. Dacă

• sau $\exists \mathbf{h} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\theta_{\mathbb{R}^n}\}$ direcţie în $\mathbb{R}^n$ pentru care $\nexists \lim_{t \rightarrow 0} f(\mathbf{a} + t\mathbf{h})$;

• sau $\forall \mathbf{h} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\theta_{\mathbb{R}^n}\}$ direcţie în $\mathbb{R}^n$, $\exists \lim_{t \rightarrow 0} f(\mathbf{a} + t\mathbf{h})$, dependentă de $\mathbf{h}$;

atunci $\nexists \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}, \mathbf{x} \in A} f(\mathbf{x})$.

Teorema 10.4. Fie $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$, $f(x_1, \dots, x_n) = (f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_p(x_1, \dots, x_n))$ şi $\mathbf{a} \in A'$, $\mathbf{a} \in (\overline{\mathbb{R}})^n$. Atunci $\exists \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}, \mathbf{x} \in A} f(\mathbf{x}) = \mathbf{l} \in (\overline{\mathbb{R}})^p$, $\mathbf{l} = (l_1, \dots, l_p) \Leftrightarrow$

$$[\exists \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}, \mathbf{x} \in A} f_i(\mathbf{x}) = l_i \in \mathbb{R}, \forall i \in \{1, \dots, p\}].$$

Exemplul 10.2. Să se arate că

$$\text{a) } \nexists \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}; \text{b) } \nexists \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^4 - 2x^2y + y^2}{x^4 + y^2}; \text{c) } \nexists \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x}{x^4 + y^2}.$$

Rezolvare. a) Fie $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$.

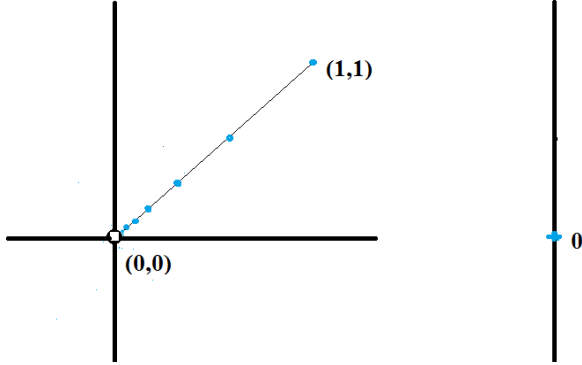
Graficul funcţiei este reprezentat în Euristică.

Fie $A = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Se observă că $\mathbf{a} = (0,0) \in A'$, deci are sens studiul limitei.

modul 1. (cu şiruri) Se alege:

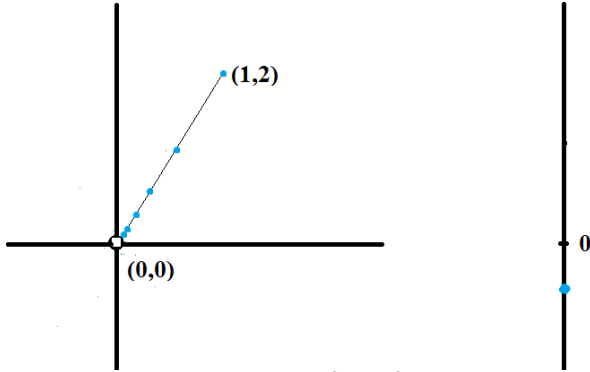
• $(x_n, y_n) = (\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ şir de perechi din $A \setminus \{(0,0)\}$ astfel încât $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n, y_n) = (0,0)$. Se observă că

$$f(x_n, y_n) = \frac{\left(\frac{1}{n}\right)^2 - \left(\frac{1}{n}\right)^2}{\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \left(\frac{1}{n}\right)^2} = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n, y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} 0 = 0.$$



• $(\tilde{x}_n, \tilde{y}_n) = \left(\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right), \forall n \in \mathbb{N}^*$ șir de perechi din $A \setminus \{(0,0)\}$ astfel încât $\lim_{n \rightarrow \infty} (\tilde{x}_n, \tilde{y}_n) = (0,0)$. Se observă că

$$f(\tilde{x}_n, \tilde{y}_n) = \frac{\left(\frac{1}{n}\right)^2 - \left(\frac{2}{n}\right)^2}{\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \left(\frac{2}{n}\right)^2} = \frac{1 - 2^2}{1 + 2^2} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(\tilde{x}_n, \tilde{y}_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-3}{5} = \frac{-3}{5}.$$



Cum $0 \neq \frac{-3}{5} \Rightarrow \nexists \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$.

Comentariu. Se putea alege și:

$$(\tilde{x}_n, \tilde{y}_n) = \left(\frac{1}{n}, 0\right), \forall n \in \mathbb{N}^* \text{ cu } \lim_{n \rightarrow \infty} f(\tilde{x}_n, \tilde{y}_n) = 1 \neq 0.$$

$$(\tilde{x}_n, \tilde{y}_n) = \left(0, \frac{1}{n}\right), \forall n \in \mathbb{N}^* \text{ cu } \lim_{n \rightarrow \infty} f(\tilde{x}_n, \tilde{y}_n) = -1 \neq 0.$$

$$(\tilde{x}_n, \tilde{y}_n) = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n^2}\right), \forall n \in \mathbb{N}^* \text{ cu } \lim_{n \rightarrow \infty} f(\tilde{x}_n, \tilde{y}_n) = 1 \neq 0.$$

Dacă se alegea

$$(\tilde{x}_n, \tilde{y}_n) = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n+1}\right), \forall n \in \mathbb{N}^*, \text{ cu } \lim_{n \rightarrow \infty} f(\tilde{x}_n, \tilde{y}_n) = 0 = 0, \text{ nu se putea aplica pentru această}$$

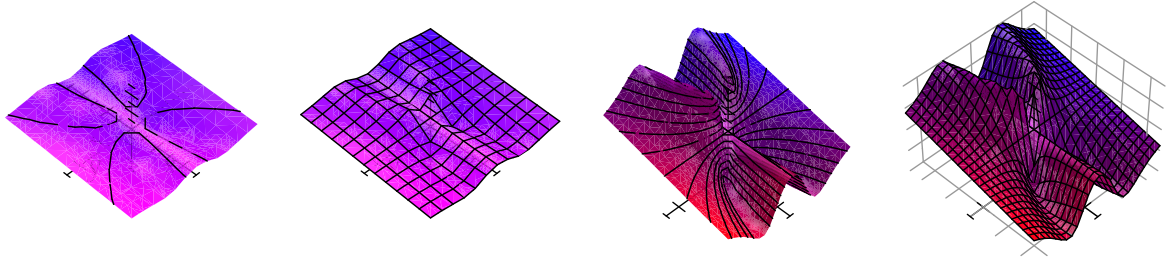
funcție criteriul.

modul 2. (cu limite după direcții, dacă este posibil) Se alege $\forall \mathbf{h} = (h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ o direcție în $\mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned} \exists? \lim_{t \rightarrow 0, t \in U} f((0,0) + t(h_1, h_2)) &\stackrel{\text{convenție}}{=} \lim_{((\cdot))=(\cdot)} \lim_{t \rightarrow 0, t \in U} f(th_1, th_2) = \lim_{t \rightarrow 0, t \in U} \frac{(th_1)^2 - (th_2)^2}{(th_1)^2 + (th_2)^2} = \\ &= \lim_{t \rightarrow 0, t \in U} \frac{h_1^2 - h_2^2}{h_1^2 + h_2^2} = \frac{h_1^2 - h_2^2}{h_1^2 + h_2^2}, \forall (h_1, h_2) \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ există limita funcției f în $(0,0)$ după direcția oarecare $\mathbf{h}$, dar este dependentă de direcția $\mathbf{h}$ aleasă $\Rightarrow$ nu există limita globală a funcției f în $(0,0)$.

b) Fie $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x,y) = \frac{x^4 - 2x^2y + y^2}{x^4 + y^2}$;

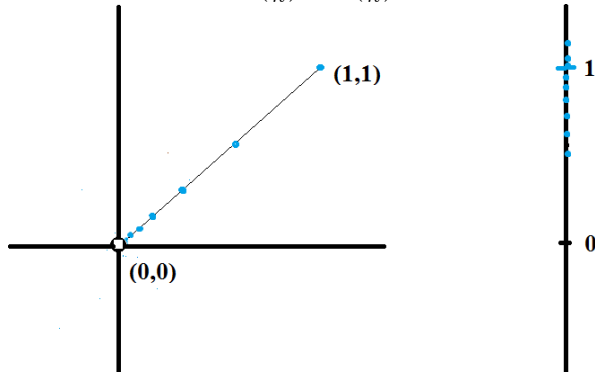


Fie $A = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. se observă că $a = (0,0) \in A'$, deci are sens studiul limitei.

modul 1. (cu șiruri) Se alege

• $(x_n, y_n) = (\frac{1}{n}, \frac{1}{n}), \forall n \in \mathbb{N}^*$ șir de perechi din $A \setminus \{(0,0)\}$ astfel încât $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n, y_n) = (0,0)$. Se observă că

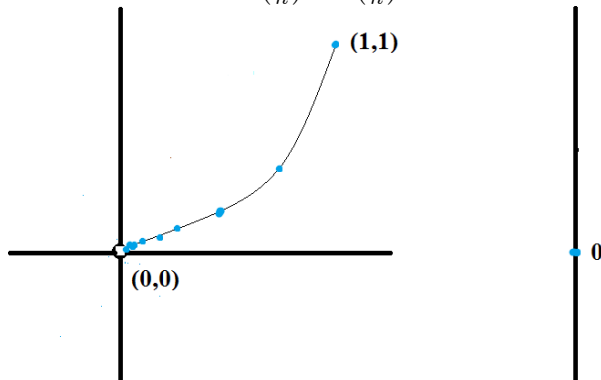
$$f(x_n, y_n) = \frac{(\frac{1}{n})^4 - 2(\frac{1}{n})^2(\frac{1}{n}) + (\frac{1}{n})^2}{(\frac{1}{n})^4 + (\frac{1}{n})^2} = \frac{1 - 2n + n^2}{1 + n^2} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n, y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - 2n + n^2}{1 + n^2} = 1.$$



• $(\tilde{x}_n, \tilde{y}_n) = (\frac{1}{n}, \frac{1}{n^2}), \forall n \in \mathbb{N}^*$ șir de perechi din $A \setminus \{(0,0)\}$ astfel încât $\lim_{n \rightarrow \infty} (\tilde{x}_n, \tilde{y}_n) = (0,0)$.

Se observă că

$$f(\tilde{x}_n, \tilde{y}_n) = \frac{(\frac{1}{n})^4 - 2(\frac{1}{n})^2(\frac{1}{n^2}) + (\frac{1}{n^2})^2}{(\frac{1}{n})^4 + (\frac{1}{n^2})^2} = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(\tilde{x}_n, \tilde{y}_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} 0 = 0.$$



Cum $1 \neq 0 \Rightarrow \nexists \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^4 - 2x^2y + y^2}{x^4 + y^2}$.

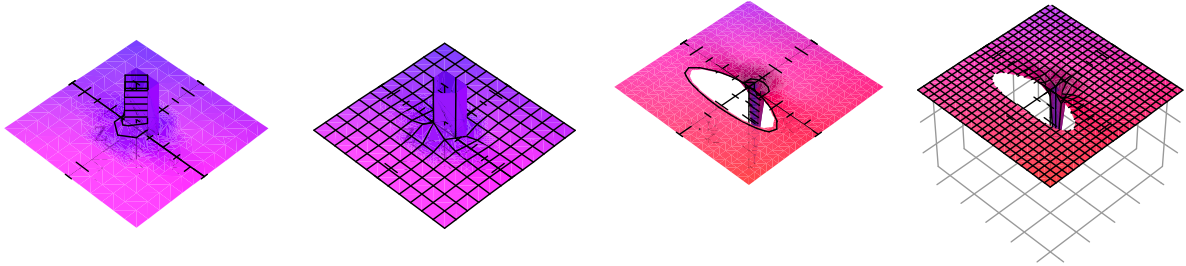
modul 2. (cu limite după direcții, dacă este posibil) Se alege $\forall \mathbf{h} = (h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ o direcție

în $\mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned} \exists? \lim_{t \rightarrow 0, t \in U} f((0,0) + t(h_1, h_2)) &\stackrel{\text{convenție}}{=} \lim_{((\cdot))=(\cdot)} f(th_1, th_2) = \lim_{t \rightarrow 0, t \in U} \frac{(th_1)^4 - 2(th_1)^2(th_2) + (th_2)^2}{(th_1)^4 + (th_2)^2} = \\ &= \lim_{t \rightarrow 0, t \in U} \frac{t^2 t^2 h_1^4 - 2th_1^2 h_2 + h_2^2}{t^2 h_1^4 + h_2^2} = \frac{h_2^2}{h_2^2} = 1, \forall (h_1, h_2) \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ există limita funcției f în $(0,0)$ după orice direcție h , și are valoarea 1, independentă de direcție $\Rightarrow$ se poate să existe limita globală a funcției f în $(0,0)$ și ar avea valoarea $l = 1$. Nu se va putea demonstra cu acea caracterizare $\varepsilon - \delta$ că limita globală există și ar avea valoarea 1, deci singurul mod de studiu aplicabil aici rămâne modul 1.

c) Fie $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x, y) = \frac{x}{x^4 + y^2}$;



Fie $A = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. se observă că $a = (0,0) \in A'$, deci are sens studiul limitei.
modul 2. (cu limite după direcții, dacă este posibil)

Fie $\forall \mathbf{h} = (h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ o direcție în $\mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned} \exists? \lim_{t \rightarrow 0, t \in U} f((0,0) + t(h_1, h_2)) &\stackrel{\text{convenție}}{=} \lim_{((\cdot))=(\cdot)} f(th_1, th_2) = \lim_{t \rightarrow 0, t \in U} \frac{(th_1)}{(th_1)^4 + (th_2)^2} = \\ &= \lim_{t \rightarrow 0, t \in U} \frac{t}{t^2} \cdot \frac{h_1}{t^2 \cdot h_1^4 + h_2^2}. \end{aligned}$$

$$\text{Cum } \lim_{t \rightarrow 0, t < 0} \frac{1}{t} = -\infty \text{ și } \lim_{t \rightarrow 0, t > 0} \frac{1}{t} = +\infty \Rightarrow \nexists \lim_{t \rightarrow 0, t \in U} \frac{1}{t}.$$

Deci nu există limita funcției în $(0,0)$ după nici o direcție din $\mathbb{R}^2$, $\mathbf{h}$ cu $h_1 \neq 0$.

$\Rightarrow$ nu există limita globală a funcției f în $(0,0)$, adică $\nexists \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x}{x^4 + y^2}$.

Exemplul 10.3. Să se studieze dacă există $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3}{x^2 + y^2}$.

Rezolvare. Fie $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, f(x, y) = \frac{x^3}{x^2 + y^2}$, unde $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$;

Graficul funcției este reprezentat în Euristică.

Fie $A = D$. se observă că $\mathbf{a} = (0,0) \in A'$. Are sens să se studieze dacă $\exists \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$.

Etapă 1. Se intuiește o valoare posibilă a limitei globale, dacă aceasta ar exista.

Modul 1.-cu șiruri. Se alege un șir

• $(x_n, y_n) = (\frac{1}{n}, \frac{1}{n}), \forall n \in \mathbb{N}^*$ șir de perechi din $A \setminus \{(0,0)\}$ a.î. $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n, y_n) = (0,0)$. se observă că

$$f(x_n, y_n) = \frac{(\frac{1}{n})^3}{(\frac{1}{n})^2 + (\frac{1}{n})^2} = \frac{1}{n^3} \cdot \frac{n^2}{2} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n, y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n} = \tilde{0}.$$

$\Rightarrow$ se poate să existe limita globală a funcției f în $(0,0)$ și ar avea valoarea $\tilde{0}$.

modul 2. cu limite după direcții. Fie $\forall \mathbf{h} = (h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ o direcție în $\mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned} \exists? \lim_{t \rightarrow 0, t \in U} f((0,0) + t(h_1, h_2)) &\stackrel{\text{convenție}}{=} \lim_{((\cdot))=(\cdot)} f(th_1, th_2) = \lim_{t \rightarrow 0, t \in U} \frac{(th_1)^3}{(th_1)^2 + (th_2)^2} = \\ &= \lim_{t \rightarrow 0, t \in U} \frac{t^3}{t^2} \frac{h_1^3}{h_1^2 + h_2^2} = 0, \forall (h_1, h_2) \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ există limita funcției f în $(0,0)$ după orice direcție $\mathbf{h}$, și are valoarea 0 $\Rightarrow$ se poate să existe limita globală a funcției f în $(0,0)$ și ar avea valoarea $l = 0$.

Etape 2. Se studiază existența limitei funcției în $(0,0)$ cu definiția (caracterizarea $\varepsilon - \delta$).

$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = 0 \Leftrightarrow$
 $[\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$ astfel încât, $\forall (x,y) \in A \setminus \{(0,0)\}$ cu $0 < |x - 0| < \delta$ și $0 < |y - 0| < \delta$ să rezulte $|f(x,y) - 0| < \varepsilon]$.

Fie $\forall \varepsilon > 0$. Se caută $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ astfel încât, $\forall (x,y) \in A \setminus \{(0,0)\}$ cu $0 < |x - 0| < \delta$ și $0 < |y - 0| < \delta$ să rezulte

$$|f(x,y) - 0| = \left| \frac{x^3}{x^2 + y^2} - 0 \right| = \frac{x^2}{x^2 + y^2} |x| \leq 1 \cdot |x| \stackrel{\substack{\text{"se scapă" de } x,y \\ \text{rămâne } \delta}}{<} \delta < \varepsilon.$$

Deci se caută $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ astfel încât $0 < \delta < \varepsilon$. Din Teorema de densitate a $\mathbb{R}$ în $\mathbb{R}$, între numerele reale 0 și ε există un astfel de δ . Se poate alege, de exemplu, $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$.

$$\text{Deci } \exists \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3}{x^2 + y^2} = 0.$$

Definiția 10.3. Fie $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$, $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \dots$ o funcție vectorială cu " n variabile" reale $x_1, x_2, \dots, x_n$ (variabilă o n -uplă).

Dacă pentru f se consideră, de exemplu, $x_2, \dots, x_n$ fixe, atunci f devine funcție de o singură variabilă, anume x_1 . În acest mod se poate considera f ca funcție de orice variabilă x_i , celelalte variabile $x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n$ fiind considerate fixe.

Dacă se va considera *limita parțială a funcției f în raport cu variabila x_j în a_i ,*

$$\lim_{x_i \rightarrow a_i} f(x_1, x_2, \dots, x_n) = f^*(x_1, \dots, x_{i-1}, a_i, x_{i+1}, \dots, x_n)$$

atunci valoarea limitei, $f^*(x_1, \dots, x_{i-1}, a_i, x_{i+1}, \dots, x_n)$, este funcție de cele $n - 1$ variabile, considerate fixe. Pentru noua funcție f^* se poate considera limita

$$\lim_{x_j \rightarrow a_j} f^*(x_1, \dots, x_{i-1}, a_i, x_{i+1}, \dots, x_n) = \lim_{x_j \rightarrow a_j} \left(\lim_{x_i \rightarrow a_i} f(x_1, x_2, \dots, x_n) \right),$$

valoarea ultimei limite fiind o funcție de $n - 2$ variabile; aceasta se numește *limita iterată* a funcției f în ordinea x_i, x_j . Operația se poate continua cu toate variabilele lui f .

Exemplul 10.4. Fie $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x,y) = x^2 + 7xy$. Atunci

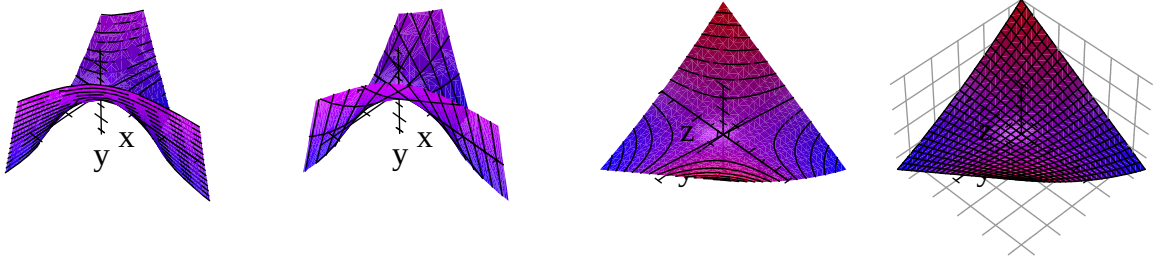
$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x,y) = \lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + 7xy) \stackrel{x \text{ variabilă de trecere la limită}}{=} 1 + 7y$$

$$\lim_{y \rightarrow 3} \left(\lim_{x \rightarrow 1} f(x,y) \right) = \lim_{y \rightarrow 3} (1 + 7y) = 22.$$

$$\lim_{y \rightarrow 3} f(x,y) = \lim_{y \rightarrow 3} (x^2 + 7xy) \stackrel{y \text{ variabilă de trecere la limită}}{=} x^2 + 21x$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\lim_{y \rightarrow 3} f(x,y) \right) = \lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + 21x) = 22.$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (1,3)} f(x,y) = 22.$$



Teorema 10.5. Fie $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ și $\mathbf{a} \in A'$, $\mathbf{a} \in (\overline{\mathbb{R}})^n$. Dacă $\exists \lim_{x \rightarrow \mathbf{a}, x \in A} f(x) = \mathbf{l} \in (\overline{\mathbb{R}})^p$ și există

o limită iterată $\lim_{x_j \rightarrow a_j} \left(\lim_{x_i \rightarrow a_i} f(x_1, x_2, \dots, x_n) \right)$ atunci există și limita iterată $\lim_{x_i \rightarrow a_i} \left(\lim_{x_j \rightarrow a_j} f(x_1, x_2, \dots, x_n) \right)$ și cele două limite iterate sunt egale, și egale cu limita $\mathbf{l}$.

Observația 10.4. Dacă limitele iterate într-un punct există și sunt egale, nu rezultă că există limita funcției în punctul respectiv.

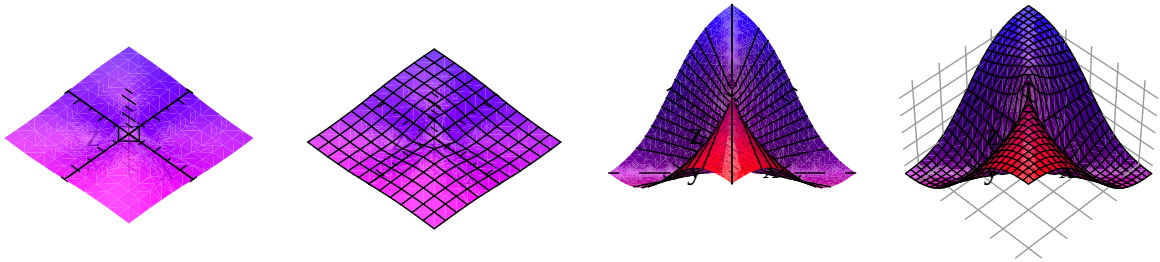
Exemplul 10.5. Să se studieze dacă există limitele iterate și limita globală în origine pentru funcția

a) $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$, unde $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

b) $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, f(x, y) = x \sin \frac{1}{y} + y \sin \frac{1}{x}$, unde $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

c) $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, f(x, y) = \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}$, unde $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$;

Rezolvare. a) $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$, unde $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.



• Limitele iterate în $(0, 0)$ sunt

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\lim_{y \rightarrow 0} \frac{xy}{x^2 + y^2} \right) \quad y \text{ este var. de trecere la } \lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} (0) \quad x \text{ este var. de trecere la } \lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} (0),$$

$$\lim_{y \rightarrow 0} \left(\lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) \right) = \lim_{y \rightarrow 0} \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{xy}{x^2 + y^2} \right) \quad x \text{ este var. de trecere la } \lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} (0) \quad y \text{ este var. de trecere la } \lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} (0).$$

• Limita globală în $(0, 0)$. $\exists? \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{xy}{x^2 + y^2}$.

Fie $A = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. Se observă că $\mathbf{a} = (0, 0) \in A'$. Are sens să se studieze dacă $\exists \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y)$.

Etapă 1. Se intuiește o valoare posibilă a limitei globale, dacă aceasta ar exista.

modul 2. cu limite după direcții. Se studiază existența limitei funcției în $(0, 0)$ cu direcții.

Fie $\forall \mathbf{h} = (h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ o direcție în $\mathbb{R}^2$.

$$\exists? \lim_{t \rightarrow 0, t \in U} f((0, 0) + t(h_1, h_2)) \stackrel{\text{convenție}}{=} \lim_{((\cdot)) = (\cdot)} f(th_1, th_2) = \lim_{t \rightarrow 0, t \in U} \frac{(th_1)(th_2)}{(th_1)^2 + (th_2)^2} =$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0, t \in U} \frac{t^2}{t^2} \frac{h_1 h_2}{h_1^2 + h_2^2} = \frac{h_1 h_2}{h_1^2 + h_2^2}.$$

Pentru fiecare $\mathbf{h} = (h_1, h_2)$ o direcție în $\mathbb{R}^2$, obținem câte o valoare a limitei anterioare. Conform Teoremei 4, era necesar ca limita anterioară să aibă aceeași valoare pentru orice direcție

$$\Rightarrow \text{nu există limita globală a funcției } f \text{ în } (0, 0), \text{ adică } \nexists \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2}.$$

Observație. Etapa 1 putea fi completată cu

sau modul 3. Se poate studia existența limitei funcției în $(0, 0)$ cu direcții particulare, de forma $y = \lambda x, \lambda \in \mathbb{R}^*$.

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0), y=\lambda x} \frac{xy}{x^2 + y^2} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0), y=\lambda x} \frac{x(\lambda x)}{x^2 + (\lambda x)^2} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0), y=\lambda x} \frac{\lambda}{1 + \lambda^2} = \frac{\lambda}{1 + \lambda^2}.$$

Deoarece limita anterioară nu este un număr independent de λ , ci pentru fiecare pantă λ a dreptei pe care (x, y) se deplasează spre $(0, 0)$ obținem câte o valoare a limitei

$$\Rightarrow \text{nu există limita globală a funcției } f \text{ în } (0, 0), \text{ adică } \nexists \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2}.$$

sau modul 4. Se poate studia existența limitei funcției în $(0, 0)$ cu șiruri particulare, care tind la $(0, 0)$ pe o dreaptă de pantă $\lambda \in \mathbb{R}^*$. Se alege

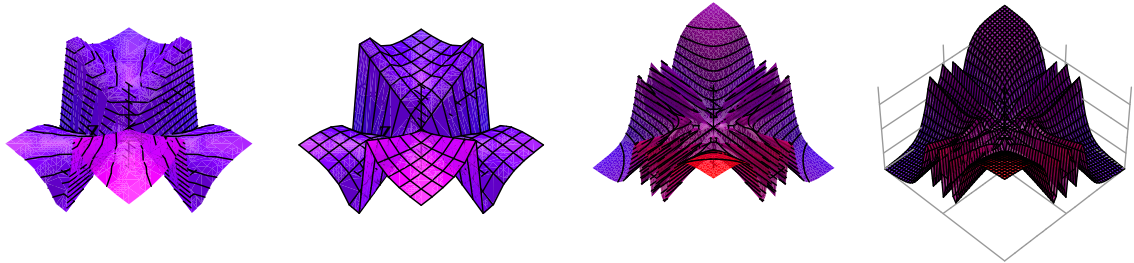
$$(x_n, y_n) = \left(\frac{1}{n}, \frac{\lambda}{n}\right), \forall n \in \mathbb{N}^* \text{ șiruri de perechi din } A \text{ a.î. } \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n, y_n) = (0, 0). \text{ se observă că}$$

$$f(x_n, y_n) = \frac{\left(\frac{1}{n}\right)\left(\frac{\lambda}{n}\right)}{\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \left(\frac{\lambda}{n}\right)^2} = \frac{\lambda}{1 + \lambda^2} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n, y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\lambda}{1 + \lambda^2} = \frac{\lambda}{1 + \lambda^2}.$$

Deoarece limita anterioară nu este un număr independent de λ , ci pentru fiecare șir $((x_n, y_n))_{n \in \mathbb{N}^*}$ se obține câte o valoare a limitei dependentă de panta dreptei pe care șirul se deplasează spre origine

$$\Rightarrow \text{nu există limita globală a funcției } f \text{ în } (0, 0), \text{ adică } \nexists \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2}.$$

b) $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, f(x, y) = x \sin \frac{1}{y} + y \sin \frac{1}{x}$, unde $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.



Limitele iterate în $(0, 0)$.

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(x \sin \frac{1}{y} + y \sin \frac{1}{x}\right) \text{ -nu există } \Rightarrow \nexists \lim_{y \rightarrow 0} \left(\lim_{x \rightarrow 0} f(x, y)\right).$$

$$\lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) = \lim_{y \rightarrow 0} \left(x \sin \frac{1}{y} + y \sin \frac{1}{x}\right) \text{ -nu există } \Rightarrow \nexists \lim_{x \rightarrow 0} \left(\lim_{y \rightarrow 0} f(x, y)\right).$$

Limita globală în $(0, 0)$.

Se arată direct că $\exists \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \left(x \sin \frac{1}{y} + y \sin \frac{1}{x}\right) = 0$ cu definiția (caracterizarea $\varepsilon - \delta$).

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = 0 \Leftrightarrow [\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \text{ astfel încât, } \forall (x, y) \in A \setminus \{(0, 0)\} \text{ cu } 0 < |x - 0| < \delta \text{ și } 0 < |y - 0| < \delta \text{ să rezulte } |f(x, y) - 0| < \varepsilon].$$

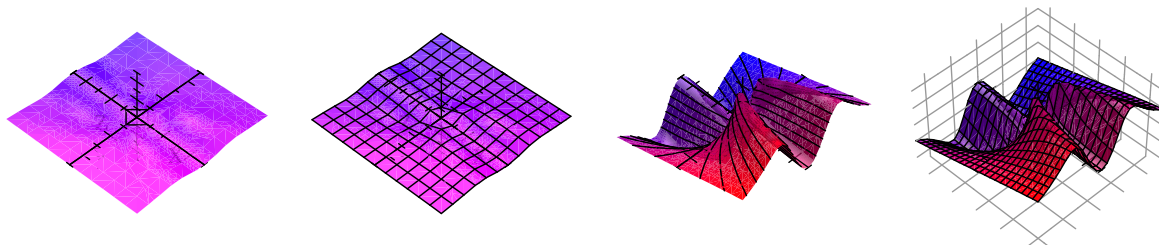
Fie $\forall \varepsilon > 0$. Se caută $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ astfel încât, $\forall (x, y) \in A \setminus \{(0, 0)\}$ cu $0 < |x - 0| < \delta$ și $0 < |y - 0| < \delta$ să rezulte

$$|f(x, y) - 0| = \left| x \sin \frac{1}{y} + y \sin \frac{1}{x} \right| \leq |x| \cdot \left| \sin \frac{1}{y} \right| + |y| \cdot \left| \sin \frac{1}{x} \right| \leq |x| + |y| \underset{\text{rămâne } \delta}{\overset{\text{"se scapă" de } x, y}{<}} \delta + \delta < \varepsilon.$$

Deci se caută $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ astfel încât $0 < 2\delta < \varepsilon$. Din Teorema de densitate a $\mathbb{R}$ în $\mathbb{R}$, între numerele reale 0 și ε există un astfel de δ . Se poate alege, de exemplu, $\delta = \frac{\varepsilon}{4}$.

$$\text{Deci } \exists \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \left(x \sin \frac{1}{y} + y \sin \frac{1}{x} \right) = 0.$$

c) $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, f(x, y) = \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}$, unde $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.



Limitele iterate în $(0, 0)$.

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2} = 0 \Rightarrow \lim_{y \rightarrow 0} \left(\lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) \right) = \lim_{y \rightarrow 0} 0 = 0.$$

$$\lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2} = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \left(\lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) \right) = \lim_{x \rightarrow 0} 0 = 0.$$

Limita globală în $(0, 0)$.

Dacă se trece la limită spre $(0, 0)$ pe parabole de parametru $m, x^2 = my \Rightarrow$

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ x^2=my}} f(x, y) = \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ x^2=my}} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{(my) y}{(my)^2 + y^2} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{m}{m^2 + 1} = \frac{m}{m^2 + 1},$$

deci limita este diferită pe parabole diferite $\Rightarrow$ limita globală nu există.

○ **Exemplul 10.6.** Să se studieze dacă următoarele limite există, și dacă da, să se determine valoarea lor

a) $\lim_{(x,y) \rightarrow (+\infty, +\infty)} \frac{x^2}{x+y}$; b) $\lim_{(x,y) \rightarrow (+\infty, -\infty)} \frac{y^2}{x^2 + y^2}$;

Rezolvare. a) $\lim_{(x,y) \rightarrow (+\infty, +\infty)} \frac{x^2}{x+y}$;

Fie $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, f(x, y) = \frac{x^2}{x+y}$, unde $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x+y \neq 0\}$.

Se alege $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x+y > 0\}$ a.î. $\mathbf{a} = (+\infty, +\infty) \in A'$. Are sens să se studieze dacă $\exists \lim_{(x,y) \rightarrow (+\infty, +\infty)} f(x, y)$.

Etapă 1. Se intuiește valoarea limitei funcției în $(+\infty, +\infty)$ cu șiruri. Fie

$$(x_n, y_n) = (n, n), \forall n \in \mathbb{N}^* \text{ șir de perechi din } A \text{ a.î. } \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n, y_n) = (+\infty, +\infty). \text{ se observă că}$$

$$f(x_n, y_n) = \frac{n^2}{n+n} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n, y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{2n} = +\infty.$$

$\Rightarrow$ se poate să existe limita funcției f în $(+\infty, +\infty)$ și ar avea valoarea $+\infty$.

În etapa 1' s-a arătat că numai pentru un șir $((x_n, y_n))_{n \in \mathbb{N}^*}$ cu limita $(+\infty, +\infty)$ rezultă că $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n, y_n) = +\infty$, și nu pentru toate șirurile din A , cu limita $(+\infty, +\infty)$. Deci nu se poate

aplica Teorema 2 $\Rightarrow$ *nu se poate afirma sigur* că $\lim_{(x,y) \rightarrow (+\infty, +\infty)} \frac{x^2}{x+y} = 0$.

Etapă 2. Se studiază existența limitei funcției în $(+\infty, +\infty)$ cu definiția (caracterizarea $\varepsilon - \delta$).

$\lim_{(x,y) \rightarrow (+\infty, +\infty)} f(x, y) = +\infty \Leftrightarrow [\forall \alpha > 0, \exists \beta_1 = \beta_1(\varepsilon) > 0, \exists \beta_2 = \beta_2(\varepsilon) > 0, \text{a.î. } \forall (x, y) \in A \text{ cu } x > \beta_1 \text{ și } y > \beta_2 \text{ să rezulte } f(x, y) > \alpha]$.

Fie $\forall \alpha > 0$ (mare spre $+\infty$, ca și "rază" a unei vecinătăți "punctate" pentru $+\infty$). Se caută $\beta_1 = \beta_1(\varepsilon) > 0$ (mare spre $+\infty$, ca și "rază" a unei vecinătăți "punctate" pentru $+\infty$), se caută $\beta_2 = \beta_2(\varepsilon) > 0$ (mare spre $+\infty$, ca și "rază" a unei vecinătăți "punctate" pentru $+\infty$), a.î. $\forall (x, y) \in A$ cu $x > \beta_1$ și $y > \beta_2$ să rezulte

$$f(x, y) = \frac{x^2}{x+y} \begin{array}{l} \text{"se scapă" de } x, y \\ > \text{rămâne } \delta_{1, \beta_2} \end{array} \dots > \alpha.$$

Se intuiește că

-sau nu se știe o majorare, înainte de a scrie $\dots > \alpha$.

-sau nu există limita globală $\lim_{(x,y) \rightarrow (+\infty, +\infty)} f(x, y)$.

Etapă 3. Se arată că $\nexists \lim_{(x,y) \rightarrow (+\infty, +\infty)} f(x, y)$ cu șiruri. Se alege

• $(x_n, y_n) = (n, n)$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ șir de perechi din A a.î. $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n, y_n) = (+\infty, +\infty)$. Se observă că

$$f(x_n, y_n) = \frac{n^2}{n+n} = \frac{n^2}{2n} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n, y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{2n} = +\infty.$$

• $(\tilde{x}_n, \tilde{y}_n) = (n, n^2)$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ șir de perechi din A a.î. $\lim_{n \rightarrow \infty} (\tilde{x}_n, \tilde{y}_n) = (+\infty, +\infty)$. Se observă că

$$f(\tilde{x}_n, \tilde{y}_n) = \frac{n^2}{n+n^2} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(\tilde{x}_n, \tilde{y}_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{n+n^2} = 1.$$

Cum $+\infty \neq 1 \Rightarrow \nexists \lim_{(x,y) \rightarrow (+\infty, +\infty)} \frac{x^2}{x+y}$.

b) $\lim_{(x,y) \rightarrow (+\infty, -\infty)} \frac{y^2}{x^2+y^2}$;

Fie $f: D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = \frac{y^2}{x^2+y^2}$, unde $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; (x, y) \neq (0, 0)\}$.

Se alege $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x > 0, y < 0\}$ a.î. $\mathbf{a} = (+\infty, -\infty) \in A'$. Are sens să se studieze dacă $\exists \lim_{(x,y) \rightarrow (+\infty, -\infty)} f(x, y)$.

Etapă 1. Se intuiește valoarea limitei funcției în $(+\infty, -\infty)$ cu șiruri. Fie

$(x_n, y_n) = (n, -n)$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ șir de perechi din A a.î. $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n, y_n) = (+\infty, -\infty)$. Se observă că

$$f(x_n, y_n) = \frac{(-n)^2}{n^2 + (-n)^2} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n, y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{2n^2} = \frac{1}{2}.$$

$\Rightarrow$ se poate să existe limita funcției f în $(+\infty, -\infty)$ și ar avea valoarea $\frac{1}{2}$.

În etapă 1' s-a arătat că numai pentru *un șir* $((x_n, y_n))_{n \in \mathbb{N}^*}$ cu limita $(+\infty, -\infty)$ rezultă că $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n, y_n) = \frac{1}{2}$, și nu pentru *toate șirurile* din A , cu limita $(+\infty, -\infty)$. Deci nu se poate

aplica Teorema 2 $\Rightarrow$ *nu se poate afirma sigur* că $\lim_{(x,y) \rightarrow (+\infty, -\infty)} \frac{y^2}{x^2+y^2} = \frac{1}{2}$.

Etapă 2. Se studiază existența limitei funcției în $(+\infty, -\infty)$ cu definiția (caracterizarea $\varepsilon - \delta$).

$\lim_{(x,y) \rightarrow (+\infty, -\infty)} f(x, y) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow [\forall \varepsilon > 0, \exists \beta_1 = \beta_1(\varepsilon) > 0, \exists \beta_2 = \beta_2(\varepsilon) < 0, \text{a.î. } \forall (x, y) \in A_1 \text{ cu } x > \beta_1 \text{ și } y < \beta_2 \text{ să rezulte } |f(x, y) - \frac{1}{2}| < \varepsilon]$

$x > \beta_1$ și $y < \beta_2$ să rezulte $\left| f(x, y) - \frac{1}{2} \right| < \varepsilon$.

Fie $\forall \varepsilon > 0$. Se caută $\beta_1 = \beta_1(\varepsilon) > 0$ (mare spre $+\infty$, ca și "rază" a unei vecinătăți "punctate" pentru $+\infty$), se caută $\beta_2 = \beta_2(\varepsilon) < 0$ (mic spre $-\infty$, ca și "rază" a unei vecinătăți "punctate" pentru $-\infty$), a.î. $\forall (x, y) \in A$ cu $x > \beta_1$ și $y < \beta_2$ să rezulte

$$\left| f(x, y) - \frac{1}{2} \right| = \left| \frac{y^2}{x^2 + y^2} - \frac{1}{2} \right| = \frac{1}{2} \frac{|y^2 - x^2|}{x^2 + y^2} \leq \underset{\text{rămâne } \delta_1, \beta_2}{\text{"se scapă" de } x, y} \dots < \varepsilon.$$

Se încearcă $\frac{1}{2} \frac{|y^2 - x^2|}{x^2 + y^2} \leq \frac{1}{2} \frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^2} = \frac{1}{2} < \varepsilon$ — contradicție cu faptul că $\varepsilon > 0$ este o rază oricât

de mică pentru o vecinătate a $\frac{1}{2}$, de exemplu $\varepsilon = \frac{1}{7}$.

Se intuiește că

—sau nu se știe o majorare, înainte de a scrie $\dots < \varepsilon$.

—sau nu există limita globală $\lim_{(x, y) \rightarrow (+\infty, -\infty)} f(x, y)$.

Etapă 3. Arătăm că $\nexists \lim_{(x, y) \rightarrow (+\infty, -\infty)} f(x, y)$ cu șiruri. Se alege

• $(x_n, y_n) = (n, -n)$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ șir de perechi din A a.î. $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n, y_n) = (+\infty, -\infty)$. Se observă

că

$$f(x_n, y_n) = \frac{(-n)^2}{n^2 + (-n)^2} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n, y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{2n^2} = \frac{1}{2}.$$

• $(\tilde{x}_n, \tilde{y}_n) = (n^2, -n)$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ șir de perechi din A a.î. $\lim_{n \rightarrow \infty} (\tilde{x}_n, \tilde{y}_n) = (+\infty, -\infty)$. Se observă

că

$$f(\tilde{x}_n, \tilde{y}_n) = \frac{(-n)^2}{n^4 + (-n)^2} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(\tilde{x}_n, \tilde{y}_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{n^4 + n^2} = 0.$$

Cum $\frac{1}{2} \neq 0 \Rightarrow \nexists \lim_{(x, y) \rightarrow (+\infty, -\infty)} \frac{y^2}{x^2 + y^2}$.

○10'. Limită uniformă-nu

11. Funcții $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ continue în $\mathbf{a} \in A$

Se va studia noțiunea de continuitate pentru funcții definite pe mulțimi dintr-un spațiu $\mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}^*$ cu valori într-un spațiu $\mathbb{R}^p$, $p \in \mathbb{N}^*$, în $\mathbf{a} \in A$.

Definiția 11.1. Fie $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$, $\mathbf{a} \in A$.

a) Funcția f este continuă în punctul $\mathbf{a}$ dacă

$$[\forall V \in \mathcal{V}(f(\mathbf{a})), \exists W = W_V \in \mathcal{V}(\mathbf{a}) \text{ a.î. } \forall \mathbf{x} \in A \cap W \Rightarrow f(\mathbf{x}) \in V].$$

b) Funcția f este continuă pe mulțimea A dacă este continuă în fiecare $\mathbf{a} \in A$.

Teorema 11.1. Fie $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$, $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n) \in A$. Atunci sunt echivalente afirmațiile

(a) (definiția continuității cu vecinătăți 4.2.1)

$$\text{-dacă } \mathbf{a} \in A \cap A', \exists \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}, \mathbf{x} \in A} f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{a}) \in \mathbb{R}^p$$

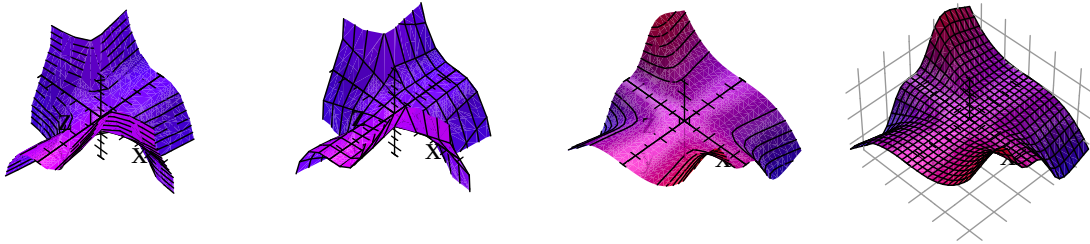
-dacă $\mathbf{a} \in A \setminus A'$ ($\mathbf{a}$ este punct izolat), f este continuă, conform Definiției 11.1.

(b) (caracterizarea $\varepsilon - \delta$) $[\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \text{ a.î. } \forall \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in A \text{ cu } \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|_{\mathbb{R}^n} < \delta \text{ (este suficient } |x_1 - a_1| < \delta, \dots, |x_n - a_n| < \delta) \Rightarrow \|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{a})\|_{\mathbb{R}^p} < \varepsilon]$.

(c) (caracterizarea cu șiruri) $[\forall (\mathbf{x}^k)_{k \in \mathbb{N}_m}$ un șir de n -uple reale din A , cu $\lim_{k \rightarrow \infty} (x_1^k, \dots, x_n^k) = (a_1, \dots, a_n) \Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} f(x_1^k, \dots, x_n^k) = f(a_1, \dots, a_n)]$.

Exemplul 11.1. Să se studieze dacă următoarele funcții sunt continue pe $\mathbb{R}^2$

$$\text{b) } f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 y^3}{x^4 + y^2}, & \text{dacă } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{dacă } (x, y) = (0, 0) \end{cases};$$



Se studiază dacă f este continuă pe $A = \mathbb{R}^2 = (\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}) \cup \{(0, 0)\}$.

• Pe $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, care este mulțime deschisă, f este continuă ca fiind obținută prin operații algebrice cu funcții continue.

• În $\mathbf{a} = (0, 0) \in A \cap A'$, f este continuă $\stackrel{\text{Teorema 1}}{\Leftrightarrow} \exists \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = \underbrace{f(0, 0)}_0$.

Etapă 2. Se studiază existența limitei funcției în $(0, 0)$ cu definiția (caracterizarea $\varepsilon - \delta$).

$$\exists \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = 0 \Leftrightarrow$$

$$[\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \text{ a.î. } \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \text{ cu } \underbrace{|x - 0| < \delta \text{ și } |y - 0| < \delta}_{\text{vec. a } (0,0)} \Rightarrow \underbrace{|f(x, y) - 0| < \varepsilon}_{\text{vec. a } 0}].$$

Fie $\forall \varepsilon > 0$. Se caută $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ a.î. $\forall (x, y) \in A \setminus \{(0, 0)\}$ cu

$|x - 0| < \delta$ și $|y - 0| < \delta$ să rezulte

$$|f(x, y) - 0| = \left| \frac{x^3 y^3}{x^4 + y^2} - 0 \right| = \frac{|x|^3 |y| y^2}{x^4 + y^2} \leq \frac{y^2}{x^4 + y^2} |x|^3 |y| \stackrel{\text{"se scapă" de } x, y}{\underset{\text{rămâne } \delta}{<}} 1 \cdot \delta^3 \cdot \delta < \varepsilon.$$

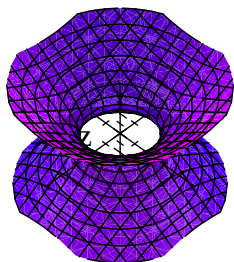
Din Teorema de densitate a $\mathbb{R}$ în $\mathbb{R}$, între numerele reale 0 și ε există un astfel de δ . Se poate alege, de exemplu, $\delta = \sqrt[4]{\frac{\varepsilon}{2}}$.

Deci $\exists \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3 y^3}{x^4 + y^2} = 0 = f(0,0)$
 $\Rightarrow f$ este continuă în $a = (0,0)$.

Exemplul 11.2. Să se studieze dacă următoarea funcție este continuă pe $D \subset \mathbb{R}^2$

$$f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, f(x, y) = \begin{cases} \sqrt{x^2 + y^2 - 4}, & \text{dacă } x^2 + y^2 > 4 \\ \pi, & \text{dacă } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

unde $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 > 4\} \cup \{(0, 0)\}$.



Se studiază dacă f este continuă pe $A = D$.

• Pe $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 > 4\}$, care este mulțime deschisă, f este continuă ca fiind obținută prin operații algebrice cu funcții continue.

• În $a = (0, 0) \in A \setminus A'$, adică este punct izolat pentru A , f este continuă prin definiția cu vecinătăți. De menționat că în punctul izolat $a = (0, 0)$ nu are sens să se studieze dacă $\exists \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$.

Teorema 11.2. Fie $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p, f(x_1, \dots, x_n) = (f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_p(x_1, \dots, x_n))$ și $\mathbf{a} \in A$. Atunci

f este continuă în $\mathbf{a} \Leftrightarrow [f_i \text{ este continuă în } \mathbf{a}, \forall i \in \{1, \dots, p\}]$.

Teorema 11.3. Fie $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow B \subset \mathbb{R}^p, g : B \subseteq \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$, și $\mathbf{a} \in A$. Dacă f este continuă în $\mathbf{a}$ și g este continuă în $f(\mathbf{a})$ atunci funcția compunere $g \circ f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^q$ este continuă în $\mathbf{a}$.

Definiția 11.2. Fie $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Mulțimea A se numește *mulțime compactă în $\mathbb{R}^n$* dacă orice șir n -uple din A conține un subșir convergent la o n -uplă din A .

Teorema 11.4. Fie $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Mulțimea A este mulțime compactă în $\mathbb{R}^n$ dacă și numai dacă este mărginită și închisă.

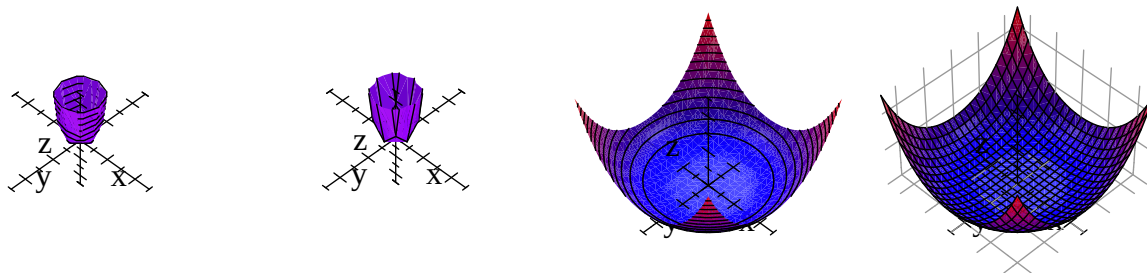
Corolar 11.1. Sferele închise din $\mathbb{R}^n$ în raport cu orice normă din $\mathbb{R}^n$ sunt mulțimi compacte în $\mathbb{R}^n$.

Teorema 11.4. Fie $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ funcție continuă pe A . Atunci f duce orice mulțime compactă din A într-o mulțime compactă din $\mathbb{R}^p$, adică

$$\forall \tilde{A} \subset A, \tilde{A} \text{ compactă în } \mathbb{R}^n \Rightarrow f(\tilde{A}) \text{ este compactă în } \mathbb{R}^p.$$

Teorema 11.5. Fie $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ funcție continuă pe A . Dacă A este mulțime compactă în $\mathbb{R}^n$, atunci f își atinge marginile, adică adică $\exists \min_{x \in A} f(x)$ și $\exists \max_{x \in A} f(x)$.

Exemplul 11.3. Fie funcția $f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, f(x, y) = (x^2 + y^2)^2$, unde $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \leq 2\}$.



Funcția f este continuă pe D . D este mulțime compactă (e închisă și mărginită). Se observă că $\inf_{x \in D} f(x, y) = 0$ și $\sup_{x \in D} f(x, y) = 2^2 = 4$.

Mai mult, infimumul este atins, adică $\exists (x, y) = (0, 0) \in D$ astfel încât $f(0, 0) = 0 \Rightarrow \exists \min_{x \in D} f(x, y) = 0$.

De asemenea, supremumul este atins, adică $\exists (x, y) \in D$, (de exemplu toate punctele (x, y) de pe cercul $x^2 + y^2 = 2$) astfel încât $f(x, y) = 4 \Rightarrow$

$$\exists \max_{x \in D} f(x, y) = 4.$$

Definiția 11.3. Fie $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$, $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \dots$

o funcție vectorială cu " n variabile" reale $x_1, x_2, \dots, x_n$ (variabila o n -uplă).

Dacă pentru f se consideră, de exemplu, $x_2, \dots, x_n$ fixe, atunci f devine funcție de o singură variabilă, anume x_1 . În modul acesta se poate considera f ca funcție de orice variabilă x_i , celelalte variabile $x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n$ fiind considerate fixe.

Funcția f este *continuă parțial în raport cu variabila x_i* în a_i dacă funcția anterioară, cu $x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n$ fiind considerate fixe, este continuă parțial în x_i .

Teorema 11.6. Fie $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$. Dacă f este funcție continuă în $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n) \in A$ atunci ea este continuă în acest punct parțial în raport cu fiecare variabilă în a_i . Reciproc nu.

○11.2. Funcții care au proprietatea lui Darboux...

○11.3. Funcții uniform continue pe A . Funcții Lipschitz pe A .
Contractii pe A ...