

CURS NR. 1
EDCO, AIA

ECUAȚII DIFERENȚIALE

ECUAȚII DIFERENȚIALE: introducere, definiții, exemple, istoric, modele matematice

Introducere. Ecuațiile și sistemele de ecuații diferențiale au fost introduse și studiate din interesul oamenilor de știință de a prezice, cu o cât mai mare acuratețe, evoluția în timp a fenomenelor fizice, chimice, biologice, sociale etc. Predicția cât mai aproape de realitate necesită date cât mai precise, unele determinate empiric, legate de starea la un moment de studiu al sistemului, dar și de felul în care starea sistemului influențează variația și viteza de variație a sistemului. Modelarea matematică oferă legi în limbaj matematic, de cele mai multe ori sub forma unor ecuații diferențiale, sisteme de ecuații diferențiale, ale căror studii facilitează predicția.

Definiția 1. Se numește *ecuație diferențială scalară* o relație de dependență funcțională între variabilele independente, funcția necunoscută cu valori reale și derivatele sale ordinare/ parțiale până la un anumit ordin. Dacă funcția necunoscută depinde de o singură variabilă independentă, dependența funcțională se numește *ecuație diferențială ordinară*, iar dacă funcția necunoscută depinde de mai multe variabile independente, dependența funcțională se numește *ecuație cu derivate parțiale*. Ordinul maxim de derivare al funcției necunoscute care este efectiv implicat în ecuație se numește *ordinul* ecuației diferențiale.

Observația 1. Ecuația numerică $x^2 - 2^2 = 0$ are ca soluții numerele $x_{1,2} = \pm 2$.

Ecuația funcțională $x^2(t) - t^2 = 0$, $t \in \mathbb{R}$, are ca soluții funcțiile $x_{1,2} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x_{1,2}(t) = \pm t$.

Ecuația funcțională $x''(t) + x(t) = \sin t$, $t \in \mathbb{R}$ este o ecuație diferențială ordinară de ordinul al doilea ale cărei funcții soluții, care apar în legea descrisă împreună cu derivatele lor de ordinul al doilea, se pot determina.

Ecuația funcțională $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y) = 0$, $(x, y) \in \mathbb{D}$ este o ecuație diferențială cu derivate parțiale de ordinul al doilea, numită ecuația Laplace, ale cărei funcții soluții sunt din clasa funcțiilor armonice și se pot determina.

Istoric Ecuațiile diferențiale sunt o ramură majoră a matematicii pure și aplicate din mijlocul secolului al XVII-lea și până în prezent.

secolul al XVII-lea Au început cu Leibniz, frații Bernoulli și alții din anii 1680, nu mult după "ecuațiile de flux" ale lui Newton, în anii 1670. S-au aplicat în mare parte *la geometrie și mecanică*; existând și problemele izoperimetrice ca exerciții de optimizare.

Denumirea "equatio differentialis" a fost folosită pentru prima dată în 1676 de către Gottfried Wilhelm von Leibniz (1646–1716), referindu-se la problema determinării unei funcții care satisface, împreună cu una sau mai multe derivate ale sale, o relație dată. Acest concept a apărut din necesitatea de a aborda într-un cadru unitar și abstract o multitudine de probleme de analiză și modelare matematică.

Una dintre primele probleme a fost "*problema inversă a tangentelor*", care constă în determinarea unei curbe plane știind tangenta în fiecare punct al său

$x'(t) = f(t)$, $t \in \mathbb{I} \subseteq \mathbb{R}$, $\mathbb{I}$ interval.

Primul care a rezolvat câteva cazuri particulare ale problemei a fost Isaac Barrow (1630 – 1677).

Se obține

$$x(t) = \int_{t_0}^t f(\tau) d\tau, t \in \mathbb{I},$$

unde $t_0 \in \mathbb{I}$ este fixat.

Reducerea unei probleme la calculul unei integrale (definită sau nedefinită) se numește *cuadratură* (din geometria greacă, când se punea problema determinării unei arii construind doar cu doar rigla și compasul un pătrat cu aceeași arie).

În 1687, Sir Isaac Newton (1643 – 1727) a integrat ecuațiile diferențiale liniare, de forma

$$x'(t) = a(t) \cdot x(t), t \in \mathbb{I},$$

iar, în 1694, Jean Bernoulli (1667 – 1748) a folosit metoda "factorului integrant" pentru a rezolva anumite ecuații liniare de ordin n ,

$$x^{(n)}(t) + a_1(t) \cdot x^{(n-1)}(t) + \dots + a_n(t) \cdot x(t) = 0, t \in \mathbb{I}.$$

În 1693, Leibniz a folosit substituția $x(t) = t \cdot u(t)$ pentru a rezolva ecuații omogene,

$$x'(t) = f\left(\frac{x(t)}{t}\right), t \in \mathbb{I},$$

iar, în 1697, Jean Bernoulli a rezolvat ecuații de tipul

$$x'(t) = a(t)x(t) + b(t)x^\alpha(t), t \in \mathbb{I},$$

numite ecuații Bernoulli, în cazul în care a și b sunt funcții constante.

secolul al XVIII-lea Majoritatea dezvoltărilor din secolul al XVIII-lea au consolidat tradiția leibniziană, extinzându-le la ecuații cu derivate parțiale. Generalizarea problemelor izoperimetrice a condus la calculul variațional. Au apărut noi studii, efectuate de Euler, Daniel Bernoulli, Lagrange și Laplace. Dezvoltarea teoriei generale a soluțiilor a inclus soluțiile singulare, soluțiile funcționale și cele prin serii infinite. S-au introdus multe aplicații în ramuri ale mecanicii, în special ale astronomiei și mediilor continue.

•În 1705, Jacopo Riccati (1676 – 1754) a perfectat o metodă de reducere a ordinului unei ecuații diferențiale pătratice

$$x'(t) = a(t)x(t) + b(t)x^2(t) + c(t), t \in \mathbb{I},$$

unde b și c neidentice nule (pentru $b \equiv 0$ este o ecuație liniară, iar pentru $c \equiv 0$ este o ecuație Bernoulli cu $\alpha = 2$).

În 1760, Leonhard Euler (1707 – 1783) a observat că, dacă se știe o soluție particulară a ecuației Riccati, atunci aceasta poate fi redusă la o ecuație Bernoulli. Dacă x_1 este o soluție particulară, prin scăderea ecuațiilor corespunzătoare, se obține

$$(x - x_1)'(t) = a(t) \cdot (x - x_1)(t) + b(t) \cdot (x - x_1)(t) \cdot (x - x_1 + 2x_1)(t), t \in \mathbb{I},$$

și, notând $y(t) = (x - x_1)(t)$, se obține

$$y'(t) = A(t)y(t) + B(t)y^2(t), t \in \mathbb{I}.$$

Mai mult, Euler a arătat că, dacă se cunosc două soluții distincte ale unei ecuații de tip Riccati, atunci printr-o substituție aceste ecuații pot fi reduse la ecuații liniare.

Ulterior, Jean le Rond D'Alembert (1717 – 1783) a observat că o ecuație diferențială de ordinul n este echivalentă cu un sistem de n ecuații diferențiale de ordinul 1.

În 1775, Joseph Louis de Lagrange (1736 – 1813) a introdus metoda variației constantelor, metodă care s-a dovedit că fusese deja inventată de Euler.

•Ecuațiile de forma

$$P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz = 0, (x, y, z) \in \mathbb{D},$$

au fost considerate multă vreme fără sens atribuit dacă membrul stâng nu era o diferențială exactă, adică

$$dF = Pdx + Qdy + Rdz \text{ pe } \mathbb{D} \subseteq \mathbb{R}^3.$$

Gaspard Monge (1746 – 1816) le-a arătat importanța în 1787. Au apărut, astfel, ecuațiile cu derivate parțiale.

•Noțiunea de soluție singulară pentru o ecuație a fost introdusă în 1715 de Brook Taylor (1685–1731) și a fost studiată în 1736 de Alexis Claude Clairaut (1713–1765). Acesta a propus și rezolvat și un tip de ecuații diferențiale care îi poartă numele.

secolul al XIX-lea În secolul al XIX-lea, teoria generală s-a îmbogățit prin dezvoltarea înțelegerii soluțiilor generale și particulare și a teoremelor de existență. Au apărut mai multe tipuri de ecuații și de soluții pentru acestea; de exemplu, analiza Fourier și funcțiile speciale. Dintre noii matematicieni se remarcă Augustin Louis Cauchy (1789–1857). S-au realizat aplicații nu numai în studiul mecanicii clasice, ci și al teoriei căldurii, în optică, electricitate și magnetism, un impact special având James Clerk Maxwell (1831–1879). A se vedea *Electromagnetism-Legile lui Maxwell* de profesor Eugene Khutoryansky, pe <https://www.youtube.com/watch?v=9Tm2c6NjH4Y>. Mai târziu, Jules Henri Poincaré (1854–1912) a introdus teoremele de recurență, inițial în legătură cu problema celor trei corpuri.

•S-a observat că foarte multe clase de ecuații diferențiale admit soluții, dar acestea nu pot fi date explicit. De exemplu,

$$x'(t) = e^{t^2} \Leftrightarrow x(t) = \int_{t_0}^t e^{\tau^2} d\tau, t \in \mathbb{I},$$

dar integrala, deși există, nu poate fi scrisă într-o formă explicită. A apărut, astfel, o gamă largă de metode de aproximare a soluției unei ecuații diferențiale într-un punct.

•Afirmatia lui Newton conform căreia "orice ecuație diferențială poate fi rezolvată utilizând seriile de puteri" a avut o influență majoră în matematica secolului al XVIII-lea. Încă din 1768, Euler a dezvoltat metode de aproximare (care îi poartă numele) folosind serii de puteri

$$x(t) = x(a) + \frac{x'(a)}{1!}(t-a) + \frac{x''(a)}{2!}(t-a)^2 + \dots + \frac{x^{(n)}(a)}{n!}(t-a)^n + \dots$$

În timpul cercetărilor sale, Euler a identificat anumite funcții pe care le-a numit funcții cilindrice, dar cel care le-a utilizat în mod eficient a fost astronomul Friedrich Wilhelm Bessel (1784–1846). Funcțiile sunt numite acum funcții Bessel și joacă un rol major în procesarea semnalelor. De remarcat că, până în acel moment, nimeni nu a pus problema convergenței seriei Taylor de mai sus. Cel care a reanalizat problema a fost Cauchy, la mijlocul sec al XIX-lea, iar Emile Picard a dezvoltat metoda aproximațiilor succesive în 1890 pentru a stabili, în anumite condiții, cu un caracter general, rezultate de existență și unicitate pentru soluția unei ecuații diferențiale cu condiții inițiale (problema Cauchy).

secolul al XX În secolul XX, teoria generală a fost influențată de apariția teoriei mulțimilor în analiza matematică; cu consecințe pentru teoretizare, inclusiv alte aspecte topologice. S-au obținut noi aplicații în matematica cuantică, sistemele dinamice și teoria relativității.

secolul al XXI-lea În prezent, modelarea matematică prin ecuații diferențiale apare în toate domeniile în care se poate studia o mărime ce are o viteză de variație cu lege postulată. Se utilizează simulări de algoritmi de aproximare pe calculator, modelare vizuală 3D, 4D pe calculator, cu impact în creativitate, completate de corectitudinea și exactitatea oferite de demonstrațiile matematice.

Definiția 2. a) O *ecuație diferențială ordinară de ordinul întâi* este o relație de dependență funcțională de forma

$$F(t, x(t), x'(t)) = 0, t \in \mathbb{I}$$

între variabila independentă t , funcția necunoscută x și derivata ei x' , unde $F: \mathbb{D}_F \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ este o funcție neconstantă în raport cu ultima variabilă.

O *ecuație diferențială ordinară de ordinul $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$* este o relație de dependență funcțională de forma

$$F(t, x(t), x'(t), \dots, x^{(n)}(t)) = 0, t \in \mathbb{I}$$

între variabila independentă t , funcția necunoscută x și derivatele ei $x', \dots, x^{(n)}$, unde $F : \mathbb{D}_F \subseteq \mathbb{R}^{n+2} \rightarrow \mathbb{R}$ este o funcție neconstantă în raport cu ultima variabilă.

b) În ipotezele teoremei funcțiilor definite implicit, se poate scrie *forma normală a ecuațiilor diferențiale* ordinare anterioare, prin explicitare:

$$x'(t) = f(t, x(t)), t \in \mathbb{I}, \text{ respectiv}$$

$$x^{(n)}(t) = f(t, x(t), x'(t), \dots, x^{(n-1)}(t)), t \in \mathbb{I}.$$

Definiția 3. a) Se numește *soluție* a ecuației diferențiale de ordinul întâi o funcție $x : \mathbb{I} \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, cu $\text{Int}(\mathbb{I}) \neq \emptyset$, cu proprietățile:

$$\bullet x \in \mathcal{C}^1(\mathbb{I}; \mathbb{R});$$

$$\bullet x, x' \text{ verifică } F(t, x(t), x'(t)) = 0, \forall t \in \mathbb{I}.$$

Se numește *soluție* a ecuației diferențiale de ordinul $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ o funcție $x : \mathbb{I} \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, cu $\text{Int}(\mathbb{I}) \neq \emptyset$ cu proprietățile:

$$\bullet x \in \mathcal{C}^n(\mathbb{I}; \mathbb{R});$$

$$\bullet x, x', \dots, x^{(n)} \text{ verifică } F(t, x(t), x'(t), \dots, x^{(n)}(t)) = 0, \forall t \in \mathbb{I}.$$

b) Graficele funcțiilor soluție se numesc *curbe integrale*.

Exemplul 1. Se arată că, pentru fiecare $c \in \mathbb{R}$, funcția

$$x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x(t) = ct + \sqrt{1 + c^2} \text{ este soluție a ecuației diferențiale ordinare}$$

$$(*) x(t) - tx'(t) = \sqrt{1 + (x'(t))^2}, t \in \mathbb{R}.$$

Rezolvare. Există o infinitate de funcții care sunt soluții pentru ecuația (*), pentru fiecare $c \in \mathbb{R}$ câte o funcție, deoarece:

• pentru fiecare $c \in \mathbb{R}, x$ este funcție derivabilă, cu

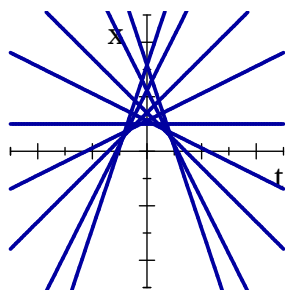
$$x' : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x'(t) = c \text{ și cu derivata } x' \text{ continuă;}$$

• pentru fiecare $c \in \mathbb{R}$, funcția x verifică identic (*), adică

$$ct + \sqrt{1 + c^2} - tc = \sqrt{1 + c^2}, \forall t \in \mathbb{R}.$$

Se reprezintă grafic curbele integrale (graficele funcțiilor soluție) pentru

$$c = 0, c = 1, c = 2, c = 3, c = -1, c = -2, c = -3, c = \frac{1}{2}, c = \frac{-1}{2} \Rightarrow$$



Modele matematice descrise de ecuații diferențiale

Procesele modelate de ecuații diferențiale sunt procese continuu diferențiabile studiate în tehnică (teoria circuitelor electrice, a oscilațiilor, a comenzii automate), fizică, biologie, chimie, ecologie, demografie etc. Înlocuirea modelului matematic discret, mai realist, s-a făcut din rațiuni pur matematice.

a) Dezintegrarea unei substanțe radioactive. În 1902, Ernest Rutherford Lord of Nelson (1871 – 1937) și Sir Frederick Soddy (1877 – 1956) au formulat legea dezintegrării atomilor radioactivi: "Viteza instantanee de dezintegrare a unui element radioactiv este proporțională cu numărul de atomi radioactivi existenți la momentul considerat și nu depinde de alți factori externi."

Atunci, notând cu $x(t)$ numărul de atomi radioactivi existenți la momentul $t \in [0, +\infty[$ și presupunând că funcția x este din $\mathcal{C}^1([0, +\infty[)$, conform acestei legi se obține:

$$\boxed{x'(t) = -a \cdot x(t), \forall t \geq 0,}$$

unde a este o constantă specifică elementului respectiv, numită constantă de dezintegrare, care poate fi determinată experimental. Aceasta este o ecuație ordinară (funcția necunoscută depinde de o singură variabilă) de ordinul 1 (apare doar prima derivată a funcției necunoscute).

Pentru determinarea soluției, alta decât cea nulă (singulară), formal,

$$\frac{x'(t)}{x(t)} = -a \Leftrightarrow (\ln x(t))' = -a \Leftrightarrow \ln x(t) = -at + c \Leftrightarrow x(t) = e^{-at+c} \Leftrightarrow x(t) = k \cdot e^{-at}, t \geq 0, \text{ unde } k = e^c = x(0) > 0.$$

Această lege stă la baza metodei datării cu carbon. Conform cercetărilor Hubbard și West, în toate organismele vii, în afară de izotopul stabil de carbon ^{12}C , apare și o cantitate mică de carbon radioactiv ^{14}C , provenind din radiațiile cosmice. Datorită unor procese care au loc în organismele vii, raportul dintre numărul de atomi ^{14}C și cel de atomi ^{12}C este constant. Atunci când un organism moare, procesele respective încetează și carbonul ^{14}C începe să se dezintegreze cu viteză constantă, conform Rutherford. Viteza (rata) de dezintegrare, determinată experimental, este de 1 : 8000. Astfel, dacă se cunoaște rata $^{14}\text{C}/^{12}\text{C}$ după t ani de la moarte, atunci funcția $t \mapsto x(t)$ verifică

$$x'(t) = -\frac{1}{8000}x(t) \Rightarrow x(t) = k \cdot e^{-\frac{1}{8000}t},$$

iar $k = x(0) \stackrel{\text{not.}}{=} r_0$ este rata constantă dintre ^{14}C și ^{12}C la momentul morții, adică aceeași cu cea din timpul vieții.

Atunci, dacă se știe $x(t)$, raportul dintre ^{14}C și ^{12}C la momentul T , se obține

$$T = 8000 \ln \frac{r_0}{x(T)}$$

reprezintă numărul de ani care au trecut de la moartea acelui organism. De menționat că $x(t)$ se măsoară, experimental, la momentul T , iar $r_0 \simeq 1.35 \cdot 10^{-12}$, adică în organismele vii există aprox. 135 atomi de carbon radioactiv ^{14}C la fiecare 10^{10} atomi de carbon ^{12}C . Metoda este destul de precisă pentru intervale de timp până la 10000 de ani.

b) Ecuațiile mișcării. Ecuațiile mișcării a n particule în spațiul euclidian tridimensional sunt descrise de Legea a doua a lui Newton,

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a}.$$

Atunci

$$\boxed{F_i(x_i(t)) = m_i \cdot x_i''(t), t \geq 0,}$$

unde $x_i(t)$ reprezintă coordonatele particulei cu numărul i , de masă m_i , la momentul $t \geq 0$, iar F_i este forța care acționează asupra particulei cu numărul i . În funcție de tipul de forțe care intervin (tare, slabă, gravitațională, electromagnetică), se obțin diferite ecuații ale mișcării. În cazul forței gravitaționale, respectiv electromagnetice, se obțin forme simple în cazul în care viteza de mișcare este mult mai mică decât viteza luminii. În aceste cazuri, $\vec{F}_i$ sunt gradientii potențialului newtonian și coulombian

$$\vec{F}_i(x_i) = \sum_{j \neq i} \frac{x_j - x_i}{\|x_j - x_i\|^3} (km_i m_j - e_i e_j),$$

unde k este constanta de atracție universală, iar e_i este sarcina particulei i .

În particular:

b₁) *Oscilatorul armonic.* Fie o particulă de masă m care se mișcă în linie dreaptă sub acțiunea forței elastice. Se notează cu $x(t)$ abscisa particulei la momentul $t \geq 0$. Deoarece forța este elastică,

$$F(x(t)) = -k \cdot x(t), \forall t \geq 0,$$

unde $k > 0$ este constanta de elasticitate. Din legea a doua a lui Newton,

$$F(x(t)) = m \cdot a(t) = m \cdot x''(t), \forall t \geq 0,$$

și rezultă

$$x''(t) + \frac{k}{m}x(t) = 0, \forall t \geq 0,$$

sau, echivalent, notând $\omega^2 = \frac{k}{m}$,

$$\boxed{x''(t) + \omega^2 x(t) = 0, \forall t \geq 0,}$$

numită *ecuația oscilatorului armonic*.

Pentru determinarea soluției, înmulțind relația cu $x'(t)$, se obține, formal,

$$\left((x'(t))^2\right)' + \omega^2 (x^2(t))' = 0 \Leftrightarrow (x'(t))^2 + \omega^2 x^2(t) = c \stackrel{\text{not.}}{=} p^2 > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x'(t) = \pm \omega \sqrt{\frac{p^2}{\omega^2} - x^2} \Leftrightarrow \pm \frac{x'(t)}{\sqrt{\frac{p^2}{\omega^2} - x^2}} = \omega \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \arcsin \frac{\omega \cdot x(t)}{p} = \omega t + \varphi_0 \text{ sau } \arccos \frac{\omega \cdot x(t)}{p} = \omega t + \varphi_1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x(t) = \frac{p}{\omega} (\sin(\omega t + \varphi_0) + \cos(\omega t + \varphi_1)) \Leftrightarrow$$

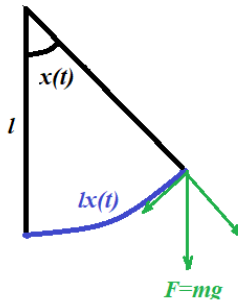
$$\Leftrightarrow x(t) = c_1 \sin \omega t + c_2 \cos \omega t, \forall t \geq 0$$

unde c_i sunt constante care se obțin prin aplicarea anterior a unor formule trigonometrice.

b₂) *Pendulul matematic.* Se consideră un pendul de lungime l și se notează cu $s(t)$ lungimea arcului descris de extremitatea liberă a pendulului. Atunci,

$$s(t) = l \cdot x(t),$$

unde $x(t)$ este măsura în radiani a unghiului făcut de pendul la momentul t și axa verticală.



Forța care acționează asupra pendulului este cea gravitațională, care poate fi descompusă pe două direcții, una de-a lungul pendulului și cealaltă tangentă la arc de cerc. Componenta care acționează de-a lungul firului este anulată de rezistența firului, astfel încât singura componentă activă este cea tangențială, adică $-mg \sin x(t)$. Deoarece x se supune legii a doua a lui Newton, atunci

$$mlx''(t) = -mg \sin x(t) \Leftrightarrow \boxed{x''(t) + \frac{g}{l} \sin x(t) = 0,}$$

care este o ecuație neliniară, numită *ecuația pendulului matematic* sau *ecuația pendulului gravitațional*.

Dacă se studiază doar oscilații mici, atunci $\sin x(t) \simeq x(t)$ și ecuația devine

$$x''(t) + \frac{g}{l}x(t) = 0,$$

care, conform celor anterioare, admite soluții de forma

$$x(t) = c_1 \sin\left(\sqrt{\frac{g}{l}}t\right) + c_2 \cos\left(\sqrt{\frac{g}{l}}t\right).$$

Comentariu. Mai mult, în general, ecuația

$$x''(t) + \omega^2 x(t) = 0, \forall t \in \mathbb{R},$$

modelează *oscilațiile unui resort* ($\omega^2 = \frac{k}{m}$), *oscilațiile mici ale unui pendul matematic* ($\omega^2 = \frac{g}{l}$), *oscilațiile armonice ale unui circuit electric* ($\omega^2 = \frac{1}{LC}$). Pentru soluțiile

$$x(t) = c_1 \cos(\omega t) + c_2 \sin(\omega t), \forall t \in \mathbb{R}, \forall c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

se pot găsi constantele $A = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}$ și φ din $\tan \varphi = \frac{c_1}{c_2}$ astfel încât

$$c_1 \cos(\omega t) + c_2 \sin(\omega t) = A \sin(\omega t + \varphi), \forall t \in \mathbb{R}.$$

Se numește *oscilație armonică* orice mișcare descrisă de un parametru de stare de forma "legii sinusului"

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(t) = A \sin(\omega t + \varphi), \text{ unde } A, \omega, \varphi \text{ sunt constante reale date.}$$

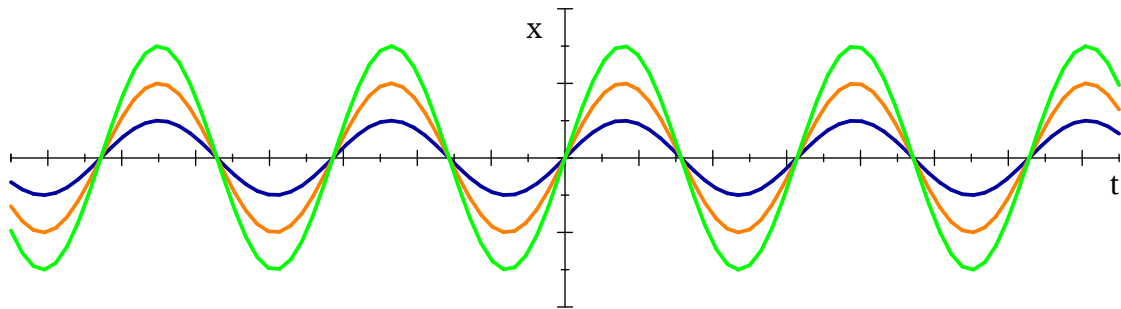
Se poate presupune că $\omega > 0$, deoarece

$$\sin(\omega t + \varphi) = -\sin(-\omega t - \varphi).$$

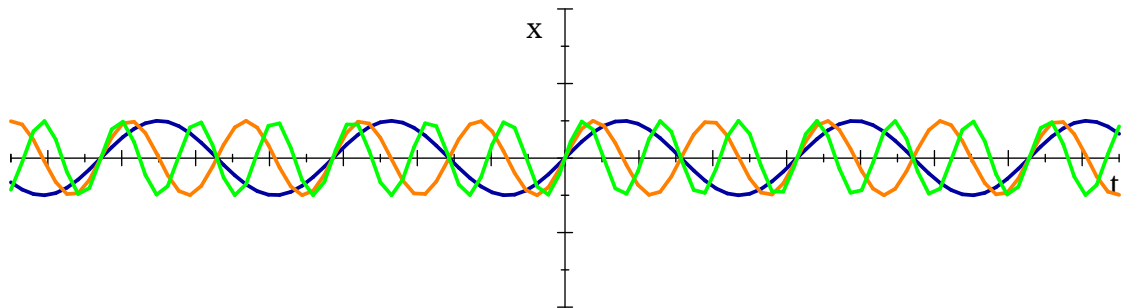
Numărul $A = \max_{t \in \mathbb{R}} |f(t)|$ se numește *amplitudinea oscilației*, iar numărul $T = \frac{2\pi}{\omega}$ se numește *perioada oscilației* (în s). Numărul $\omega = \frac{2\pi}{T}$ se numește *frecvența ciclică*, *pulsația oscilației* (în rad/s), iar numărul φ *frecvența inițială a oscilației* (în rad).

Amplitudinile oscilațiilor armonice au importanța dată de faptul că energia oscilației depinde de pătratul amplitudinii, iar fazele pentru a observa defazajul dintre diferite oscilații.

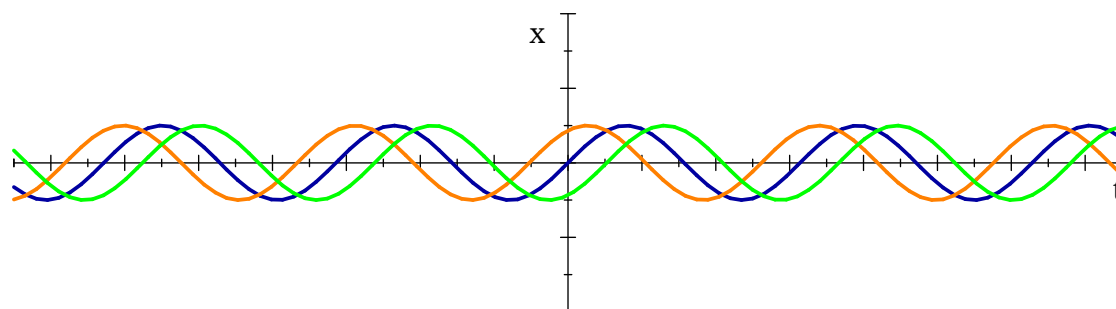
De exemplu, $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(t) = 1 \sin(1t + 0), f(t) = 2 \sin(1t + 0), f(t) = 3 \sin(1t + 0).$



De exemplu, $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(t) = 1 \sin(1t + 0), f(t) = 1 \sin(2t + 0), f(t) = 1 \sin(3t + 0).$



De exemplu, $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(t) = 1 \sin(1t + 0), f(t) = 1 \sin(1t + \frac{\pi}{3}), f(t) = 1 \sin(1t - \frac{\pi}{3}).$



A se vedea *Fourier Transform, Fourier Series, and frequency spectrum*, de profesor Eugene Khutoryansky: <https://www.youtube.com/watch?v=r18Gi8lSkfM>

c) Modele demografice.

c₁) Modelul Malthus. A fost propus în 1798 de Thomas Robert Malthus (1766 – 1834) și a fost primul astfel de model. Legea lui Malthus afirmă că "Viteza instantanee de creștere a numărului de indivizi este proporțională cu numărul de indivizi dintr-o anumită populație, iar viteza instantanee de creștere a resurselor este constantă în timp". Notând cu $x(t)$ numărul de indivizi dintr-o anumită populație la momentul t și cu $y(t)$ resursele necesare supraviețuirii la momentul t , se obține, conform legii lui Malthus,

$$\begin{cases} x'(t) = cx(t), t \geq 0, \\ y'(t) = k, t \geq 0, \end{cases}$$

unde c și k sunt constante strict pozitive. Atunci:

$$\begin{cases} x(t) = x_0 e^{ct}, t \geq 0, \\ y(t) = y_0 + kt, t \geq 0, \end{cases}$$

unde x_0 și y_0 reprezintă populația și resursele la momentul $t = 0$. Acest model nu funcționează pe perioade lungi de timp, din cauza caracterului limitat al resurselor. De aceea au fost propuse modele mai rafinate, care să descrie mai bine evoluția unei populații în timp.

c₂) O observație este aceea că, la un moment dat, populația nu poate depăși o anumită valoare critică, dată de resursele de la acel moment. Astfel, dacă se notează cu $h > 0$ cantitatea de resurse care este necesară unui individ pentru a rămâne în viață după momentul $t > 0$, se poate presupune că x și y verifică:

$$\begin{cases} x'(t) = cx(t) \left(\frac{y(t)}{h} - x(t) \right), t \geq 0, \\ y'(t) = k, t \geq 0, \end{cases}$$

model care exprimă o legătură mai firească între evoluția resurselor și creșterea sau descreșterea populației.

Acest model a fost propus de Verhulst în 1835, iar datele obținute cu acest model au fost comparate cu datele demografice din Belgia și Franța la momentul respectiv, rezultând o potrivire foarte bună pe perioade de 10 ani.

Considerând $k = 0$, indicând faptul că resursele sunt constante, se obține $y(t) = b \cdot h$, unde b este numărul maxim de indivizi care poate fi suportat de resurse. Mai mult, din prima ecuație se obține o ecuație ordinară de ordinul 1, a cărei soluție, alta decât cea singulară nulă, se determină, formal:

$$x'(t) = cx(t)(b - x(t)) \Leftrightarrow \frac{x'(t)}{x(t)(b - x(t))} = c \Leftrightarrow \frac{1}{b} \left(\frac{x'(t)}{x(t)} + \frac{x'(t)}{b - x(t)} \right) = c \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\ln x(t) - \ln(b - x(t)))' = b \cdot c \Leftrightarrow \ln \frac{x(t)}{b - x(t)} = bct + k \Leftrightarrow \frac{x(t)}{b - x(t)} = \mu e^{bct} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x(t) = \frac{b\mu e^{bct}}{1 + \mu e^{bct}},$$

unde $\mu = e^k$. La această soluție se adaugă soluția singulară $x(t) = b$, eliminată în timpul procesului formal de integrare. Atunci, soluția x este determinată până la aflarea constantei μ , care poate fi fixată impunând o condiție, numită condiție inițială:

$$x(0) = x_0 \Rightarrow \frac{b\mu}{1 + \mu} = x_0,$$

unde x_0 este numărul inițial de indivizi, care se presupune cunoscut. Se obține

$$x(t) = \frac{bx_0 e^{bct}}{b + x_0(e^{bct} - 1)}, \forall t \geq 0.$$

Ambele modele pot fi puse sub forma

$$\boxed{x'(t) = d(t, x)},$$

unde $d(t, x)$ reprezintă diferența dintre natalitate și mortalitatea în populația x , la momentul t .

d) Modelul pradă-răpitor (Lotka-Volterra). A se vedea în Bibliografie [Vrabie].

În 1910, Alfred James Lotka (1880 – 1949) a propus modelul în studiul reacțiilor chimice autocatalitice, iar în 1920, independent, Vito Volterra (1860 – 1940) l-a folosit în analiza statistică a tipurilor de pești din Marea Adriatică, apoi a descris dinamica sistemelor biologice în care doar două specii interacționează, prădătorul și prada. Fie $x(t)$ numărul de indivizi din populația pradă la momentul t și $y(t)$ numărul prădătorilor. Se presupune că se verifică legile:

- "În absența prădătorilor, populația pradă crește cu rata $x'(t) = ax(t)$, unde $a > 0$ este o constantă."

- "În absența pradei, populația prădătorilor scade cu rata $y'(t) = -by(t)$, unde $b > 0$ este o constantă."

- "Când ambele populații sunt prezente, consumul pradei de către prădători duce la o scădere în x proporțională cu xy (adică $-pxy$, $p > 0$ este o constantă) și o creștere în y proporțională cu xy (adică qxy , $q > 0$ este o constantă). Motivul de proporționalitate cu xy este că, dacă oricare dintre populații se dublează, frecvența întâlnirii dintre populații se dublează; iar dacă ambele populații se dublează, numărul întâlnirilor crește de patru ori".

Se obține sistemul:

$$\boxed{\begin{cases} x'(t) = ax(t) - px(t)y(t) \\ y'(t) = -by(t) + qx(t)y(t) \end{cases}}$$

e) Un model de răspândire a epidemiilor.

e₁) În 1976, Ana Lajmanovich și James Yorke au propus un model de răspândire a bolilor care nu oferă imunitate, adică un individ se poate reîmbolnăvi după ce a fost vindecat. Se notează cu p populația, considerată constantă. Se notează cu $x(t)$ numărul de indivizi infectați la momentul t . Atunci $p - x(t) \geq 0, \forall t$. Numărul $p - x(t)$ reprezintă numărul indivizilor susceptibili a fi infectați la momentul t . Legea propusă afirmă că "viteza/ rata de modificare a numărului de persoane infectate este proporțională cu numărul tuturor contactelor posibile dintre indivizii sănătoși și cei infectați". Se obține ecuația ordinară neliniară

$$\boxed{x'(t) = ax(t)(p - x(t))},$$

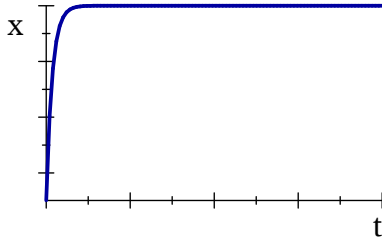
unde $a > 0$ este o constantă. Ca la c), se obține

$$x(t) = \frac{p\mu e^{apt}}{1 + \mu e^{apt}},$$

unde, aici, μ se poate determina pe baza numărului de indivizi infectați la momentul inițial. Notând $x(0) = x_0$,

$$x(t) = \frac{px_0 e^{apt}}{p + x_0(e^{apt} - 1)}.$$

La această soluție se adaugă soluția singulară $x(t) = p$, eliminată în procesul formal de integrare. Se observă că, pentru orice $x_0 > 0$, $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = p$, adică în absența unei intervenții externe, întreaga populație se va infecta (oricât de puțini ar fi infectați la început). Evoluția este reprezentată grafic mai jos.



e₂) Au fost propuse și modele mai rafinate. De exemplu, se presupune că populația este împărțită în n clase disjuncte, fiecare având un număr constant de membri. Se notează cu p_i numărul de indivizi din clasa i și cu $x_i(t)$ numărul de indivizi bolnavi din clasa i , la momentul $t \geq 0$, pentru fiecare $i = \overline{1, n}$. Atunci, numărul indivizilor care se pot infecta la momentul t este $p_i - x_i(t)$. Se notează cu R_i rata de infectare și cu C_i rata de recuperare a indivizilor din clasa $i = \overline{1, n}$. Se presupune că R_i sunt funcții care depind de $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, în timp ce rata de recuperare este specifică fiecărei clase în parte și nu depinde decât de x_i . Se presupune că

$$\frac{\partial R_i}{\partial x_j}(x_1, \dots, x_n) \geq 0,$$

ceea ce înseamnă că, în absența oricăror factori externi, numărul celor infectați din fiecare clasă crește. Toate aceste considerente conduc la următorul sistem de ecuații diferențiale:

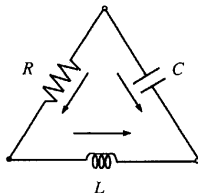
$$\begin{cases} x'_1 = R_1(x_1, \dots, x_n) - C_1(x_1) \\ \vdots \\ x'_n = R_n(x_1, \dots, x_n) - C_n(x_n) \end{cases}$$

Modelul propus de Ana Lajmanovich și James Yorke are forma simplificată

$$x'_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j (p_i - x_i) - k_i x_i,$$

unde $a_{ij} \geq 0$ și $k_i \geq 0$ sunt rata de infectare la contactul dintre clasele i și j , respectiv rata de vindecare a indivizilor din clasa i .

f) Un model de circuit electric. Se consideră circuitul următor, format dintr-un rezistor R , o bobină L și un condensator C în care curentul circulă după săgețile indicate.



Notând cu i_R , i_L , i_C intensitățile curentului pe porțiunile de circuit care conțin rezistența R ,

inductorul (bobina) L , respectiv condensatorul C și cu u_R , u_L , u_C , tensiunile corespunzătoare, se obțin relațiile:

Legea I a lui Kirchoff: $i_R = i_L = -i_C$

Legea lui Ohm (generalizată): $u_R = f(i_R)$

Legea a II -a a lui Kirchoff: $u_R + u_L - u_C = 0$.

Conform legilor lui Faraday,

$$\begin{cases} L \frac{di}{dt} = u_L \\ C \frac{du_C}{dt} = i_C \end{cases}.$$

Atunci u_C și i_L verifică sistemul de ecuații

$$\begin{cases} Lx'(t) = y(t) - f(x(t)) \\ Cy'(t) = -x(t) \end{cases},$$

unde s-a rennotat $x = i_L$, respectiv $y = u_C$.

Derivând prima ecuație, rezultă

$$Lx''(t) = -\frac{1}{C}x(t) - f'(x(t)) \cdot x'(t) \Leftrightarrow CLx'' + C f'(x)x' + x = 0.$$

Pentru $L = C = 1$, această ecuație se numește *ecuația Liénard* și, în particular, pentru $f(x) = x^3 - x$, se obține ecuația *Van der Pol*:

$$x'' + (3x^2 - 1)x' + x = 0.$$

1. ECUAȚII DIFERENȚIALE REZOLVABILE PRIN CUADRATURI

1.1. Exemple

Vor fi prezentate mai multe tipuri de ecuații diferențiale ale căror soluții pot fi determinate prin operații de integrare (intuite sau cu algoritm prestabilit) a unor funcții cunoscute, numite *ecuații rezolvabile prin cuadraturi*. Prin *cuadratură* se înțelege metoda care constă în reducerea rezolvării unei probleme de analiză matematică la calculul unei integrale definite sau nedefinite. Denumirea provine de la procedeul de calcul al ariei unei figuri plane numit *cuadrare*, utilizat în antichitate, constând în construirea cu rigla și compasul a unui pătrat având aceeași arie cu aria căutată.

Exemplul 2. Se rezolvă ecuația diferențială

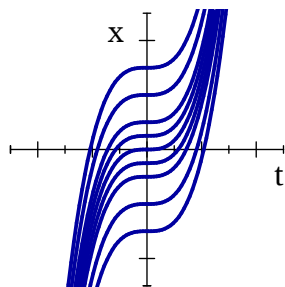
$$(*) x'(t) = t^{2020}, t \in \mathbb{R}.$$

Rezolvare. Pentru t variabilă independentă din domeniul de definiție al soluției, $\mathbb{R}$, se caută $x = x(t)$ funcție necunoscută, soluție a ecuației (*). Prin integrare, se obțin toate funcțiile soluție

$x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x(t) = \frac{t^{2021}}{2021} + c, t \in \mathbb{R}$ variabilă, $c \in \mathbb{R}$ constantă de indexare a mulțimii funcțiilor soluție.

Se reprezintă grafic curbele integrale (graficele funcțiilor soluție) pentru

$$c = 0, c = 1, c = 2, c = 3, c = -1, c = -2, c = -3, c = \frac{1}{2}, c = \frac{-1}{2} \Rightarrow$$



Exemplul 3. Se dă ecuația diferențială

$$(*) x'(t) = x(t), t \in \mathbb{R}.$$

a) Se determină soluțiile ecuației;

b) Se reprezintă grafic soluțiile;

c) Se adaugă o condiție care să asigure existența/unicitatea soluției.

Rezolvare: a) Pentru t variabilă independentă din domeniul de definiție al soluției, $\mathbb{I}_x$, se caută $x = x(t)$ funcție necunoscută, soluție a ecuației (*).

Încercarea 1. Din întrebarea ce funcții sunt egale cu derivata lor, se intuiește că sunt soluții:

$$x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x(t) = e^t$$

$$x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x(t) = 0$$

$$x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x(t) = 2000e^t.$$

Prin intuire nu se descoperă toate soluțiile.

Încercarea 2. Se integrează în raport cu t ecuația (*) $\Rightarrow$

$$\int x'(t) dt = \int x(t) dt, t \in \mathbb{R}, \text{ adică}$$

$$x(t) = \int x(t) dt, t \in \mathbb{R} \text{ -o ecuație integrală (ce are funcția necunoscută sub operatorul de inte-}$$

grare), deci nu s-a rezolvat ecuația diferențială.

Încercarea 3. -rezolvare

• Se observă că

$$x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x(t) = 0, \text{ este soluție singulară pentru ecuația } (*).$$

• Se caută și alte soluții decât cea singulară.

$$(*) \Rightarrow \frac{x'(t)}{x(t)} = 1, \forall t \in \mathbb{I}_x \text{ a.î. } x(t) \neq 0 \left| \int (\cdot) dt \Rightarrow \right.$$

$$\Rightarrow \int \frac{x'(t)}{x(t)} dt = \int dt, \forall t \in \mathbb{I}_x \text{ a.î. } x(t) \neq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln |x(t)| = t + c_1, \forall t \in \mathbb{I}_x \text{ a.î. } x(t) \neq 0 \text{ și } c_1 \in \mathbb{R}.$$

Din surjectivitatea funcției $\ln$, pentru $c_1 \in \mathbb{R}$, există $k_1 > 0$ a.î. $c_1 = \ln k_1 \Rightarrow$

$$\ln |x(t)| = \ln e^t + \ln k_1, \forall t \in \mathbb{I}_x \text{ a.î. } x(t) \neq 0 \text{ și } k_1 > 0 \Rightarrow$$

$$|x(t)| = k_1 \cdot \underbrace{e^t}_{>0}, \forall t \in \mathbb{I}_x \text{ a.î. } x(t) \neq 0 \text{ și } k_1 > 0 \Rightarrow$$

$$x(t) = c_2 \cdot e^t, \forall t \in \mathbb{I}_x \text{ a.î. } x(t) \neq 0 \text{ a.î. } c_2 \in \mathbb{R}^*.$$

La acest exercițiu, $\mathbb{I}_x \subseteq \{t \in \mathbb{I} = \mathbb{R}; x(t) \neq 0\} = \mathbb{R}, \forall x$, adică $\forall c_2$.

Soluția generală a ecuației (*) este dată, sub formă explicită, pentru fiecare $c_2 \in \mathbb{R}^*$, de

$$x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x(t) = c_2 \cdot e^t, \forall t \in \mathbb{R}.$$

• Toate soluțiile ecuației (*) sunt date sub formă explicită, pentru fiecare $c \in \mathbb{R}$, de

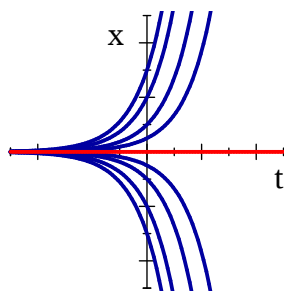
$$(**) x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x(t) = c \cdot e^t, \forall t \in \mathbb{R}.$$

Familia de soluții corespunzătoare unei ecuații diferențiale de ordinul unu depinde de o constantă.

De menționat că, în seminarii, se folosește

$$\boxed{\begin{array}{l} \ln e^u = u, \forall u \in \mathbb{R} \\ e^{\ln v} = v, \forall v \in \mathbb{R}_+^* \end{array}}$$

b) Fie sistemul cartezian de coordonate tOx . Soluția singulară are drept reprezentare grafică curba integrală singulară dată de axa Ot . Pentru fiecare $c \in \mathbb{R}^*$, se reprezintă grafic și celelalte curbele integrale date de (**). Pentru $c = 0, c = 1, c = 2, c = 3, c = -1, c = -2, c = -3, c = \frac{1}{2}, c = \frac{-1}{2}$:



c) A adăuga o condiție care să asigure existența/ unicitatea soluției revine la a adăuga o condiție care să asigure alegerea unei curbe integrale unice în plan (care să fie reprezentare pentru soluția ecuației), și reciproc.

• A alege din familia de curbe integrale din plan o curbă care trece prin $M(t_0, x_0)$ din plan (dacă există, dacă este unică) revine la a impune asupra ecuației condiția inițială $CI : x(t_0) = x_0$. Și reciproc.

De exemplu, se impune asupra ecuației (*) condiția $CI : x(0) = 0$. Se determină acea soluție particulară din (**) ce verifică $x(0) = 0$. Din $ce^0 = 0 \Rightarrow c = 0$. Soluția singulară

$$x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x(t) = 0,$$

este unica ce verifică $x(0) = 0$.

Se impune $CI : x(0) = 1$. Se determină acea soluție particulară din (**) ce verifică $x(0) = 1$. Din $ce^0 = 1 \Rightarrow c = 1$. Soluția particulară

$$x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x(t) = 1 \cdot e^t$$

este unica ce verifică $x(0) = 1$.

• A alege din familia de curbe integrale din plan o curbă care are o anumită asimptotă orizontală sau verticală (dacă există, dacă este unică) revine la a impune asupra ecuației o condiție la limită, de exemplu $CL : \lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = x_0$. Și reciproc.

De exemplu, se impune asupra ecuației (*) condiția $CL : \lim_{t \rightarrow -\infty} x(t) = 0$. Se observă că toate soluțiile ecuației, și cea singulară și celelalte verifică CL (toate curbele integrale admit asimptotă orizontală $x = 0$). Dar nu se obține prin această impunere o soluție unică.

Se impune asupra ecuației (*) condiția $CL : \lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = 1$. Se observă că nici una dintre soluțiile ecuației nu verifică CL .

• A alege din familia de curbe integrale din plan o curbă care are în punctul $M(t_0, x(t_0))$ din plan o tangentă cu o anumită pantă m (dacă există, dacă este unică) revine la a impune asupra ecuației o condiție de tipul $CT : x'(t_0) = m$. Și reciproc.

De exemplu, se impune asupra ecuației (*) condiția $x'(0) = 1$. Se determină acea soluție particulară din (**) ce verifică $x'(0) = 1$. Cum $x'(t) = c \cdot e^t$, din $ce^0 = 1 \Rightarrow c = 1$. Soluția particulară

$$x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x(t) = e^t$$

este unica ce verifică $x'(0) = 1$. Curba integrală corespunzătoare are tangenta $m = 1$ în punctul de abscisa $t_0 = 0$.

Tipurile de condiții de impus pot continua.

Comentariu. A se vedea "Exponential Growth and its Philosophical Implications" și "Exponential Decay" de Eugene Khutoryansky:

<https://www.youtube.com/watch?v=Vqc1M1agKgA>

https://www.youtube.com/watch?v=e73wGT_R8fM

Observația 2. Domeniul de definiție a unei soluții, $\mathbb{I}_x$, depinde de constanta c (pentru fiecare c se obține o soluție cu un anumit domeniu de definiție și o anumită lege de asociere). Chiar dacă în cele ce urmează se precizează doar condițiile pentru domeniu, se subînțelege că $\mathbb{I}_x$ este un interval cu interior nevid inclus în domeniu. La Exercițiul 3, toate soluțiile date de $(**)$ au același domeniu, $\mathbb{I}_x = \mathbb{R}$.

Convenție. a) Pentru $x : \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{R}$ derivabilă pe $\mathbb{I}$ se reamintește notația

$$x'(t) = \frac{dx}{dt}(t), \forall t \in \mathbb{I}.$$

Având în vedere relația ce dă diferențiala pentru funcția x ,

$$dx(t) = x'(t) dt, \forall t \in \mathbb{I},$$

se face convenția ca, acolo unde este util în calcul, să se folosească

$$\frac{dx}{dt}(t) = \frac{dx(t)}{dt}, \forall t \in \mathbb{I}.$$

b) În ecuațiile diferențiale pentru care soluția se caută sub forma $x(t)$, sau $t(x)$, sau o relație de dependență algebrico-funcțională între t și x (fără operatorii de derivare sau integrare), în expresia ecuației poate apărea

x în loc de $x(t)$,

dx în loc de $dx(t)$,

$\frac{dx}{dt}$ în loc de $\frac{dx}{dt}(t)$ sau $\frac{dx(t)}{dt}$ sau $x'(t)$.

○ **Exemplul 4.** Să se reprezinte grafic soluțiile (curbele integrale) ecuației diferențiale ordinare

a) $\frac{dx}{dt} = \frac{x+t}{|x+t|}, t \in \mathbb{I}$; **b)** $\frac{dx}{dt} = \frac{|xt|}{xt}, t \in \mathbb{I}$; **c)** $\frac{dx}{dt} = \frac{x-t}{|x-t|}, t \in \mathbb{I}$.

Rezolvare. A se vedea Seminar.

