CURS NR. 10
EDCO, AIA

$^{\bigcirc}$5. INTEGRALA IMPROPRIE $f : \mathbb{I} \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

-se va studia la Statistică şi Prelucrarea Datelor

5.1. Definiţii. Exemple. Proprietăţi

Definiţia 5.1.1. Fie $\mathbb{I}$ un interval necompact din $\mathbb{R}$, adică

$$\mathbb{I} = \begin{cases}]a, b], & \text{dacă } -\infty \le a < b < +\infty \\ [a, b[, & \text{dacă } -\infty < a < b \le +\infty \\ ]a, b[, & \text{dacă } -\infty \le a < b \le +\infty \end{cases}$$

O funcţie $f : \mathbb{I} \to \mathbb{R}$ se numeşte *local integrabilă pe* $\mathbb{I}$ dacă $\forall\, [c, d] \subset \mathbb{I}$ un interval compact în $\mathbb{R}$ rezultă că $f \in \mathcal{R}([c, d])$. Notăm cu $\mathcal{R}_{\text{loc}}(\mathbb{I})$ mulţimea funcţiilor local integrabile pe $\mathbb{I}$.

Observaţia 5.1.1. Fie $\mathbb{I}$ un interval necompact din $\mathbb{R}$.

a) Dacă $f : \mathbb{I} \to \mathbb{R}$ este mărginită pe $\mathbb{I}$ şi continuă a.p.t. pe $\mathbb{I}$, atunci $f \in \mathcal{R}_{\text{loc}}(\mathbb{I})$.

b) Dacă $f : \mathbb{I} \to \mathbb{R}$ este continuă peste tot pe $\mathbb{I}$, atunci $f \in \mathcal{R}_{\text{loc}}(\mathbb{I})$. De precizat că şi funcţiile nemărginite pe $\mathbb{I}$ necompact, care sunt continue peste tot pe $\mathbb{I}$, au proprietatea că $f \in \mathcal{R}_{\text{loc}}(\mathbb{I})$.

Definiţia 5.1.2. **a)** Fie $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}, -\infty < a, f \in \mathcal{R}_{\text{loc}}([a, +\infty[)$ şi funcţia (corect definită)

$F : [a, +\infty[\to \mathbb{R}, F(\lambda) = \int_a^\lambda f(x)\, dx.$

Se numeşte *integrală improprie de la a la $+\infty$ din funcţia f* perechea (f, F), notată

$(f, F) \overset{\text{not.}}{=} \int_a^{+\infty} f(x)\, dx \overset{\text{not.}}{=} \int_{[a,+\infty[} f(x)\, dx.$

Se numeşte *valoarea integralei improprii de la a la $+\infty$ din funcţia f* limita $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} \left(\int_a^\lambda f(x)\, dx \right)$, dacă aceasta există.

În exerciţii, se face convenţia să se folosească denumirea şi notaţia clasică

$$\boxed{\int_a^{+\infty} f(x)\, dx \overset{\text{d.}\ \exists}{=} \lim_{\lambda \to +\infty} \left(\int_a^\lambda f(x)\, dx \right).}$$

Integrala $\int_a^{+\infty} f(x)\, dx$ este *convergentă* (C) dacă limita anterioară există şi este finită şi *divergentă* (D) dacă nu există limita anterioară sau există şi este $-\infty$ sau $+\infty$.

Punctul $b = +\infty$ se numeşte *punct singular* pentru integrala improprie $\int_a^{+\infty} f(x)\, dx$.

b) Fie $f :]-\infty, b] \to \mathbb{R}, b < +\infty, f \in \mathcal{R}_{\text{loc}}(]-\infty, b])$ şi funcţia (corect definită)

$F :]-\infty, b] \to \mathbb{R}, F(\lambda) = \int_\lambda^b f(x)\, dx.$

Se numeşte *integrală improprie de la $-\infty$ la b din funcţia f* perechea (f, F), notată

$(f, F) \overset{\text{not.}}{=} \int_{-\infty}^b f(x)\, dx \overset{\text{not.}}{=} \int_{]-\infty,b]} f(x)\, dx.$

Se numeşte *valoarea integralei improprii de la $-\infty$ la b din funcţia f* limita $\lim\limits_{\lambda \to -\infty} \left(\int_\lambda^b f(x)\, dx \right)$, dacă aceasta există.

În exerciţii, se face convenţia să se folosească denumirea şi notaţia clasică

$$\boxed{\int_{-\infty}^b f(x)\, dx \overset{\text{d.}\ \exists}{=} \lim_{\lambda \to -\infty} \left(\int_\lambda^b f(x)\, dx \right).}$$

Integrala $\int_{-\infty}^b f(x)\, dx$ este *convergentă*(C) dacă limita anterioară există şi este finită şi *divergentă* (D) dacă nu există limita anterioară sau există şi este $-\infty$ sau $+\infty$.

Punctul $a = -\infty$ se numeşte *punct singular* pentru integrala improprie $\int_{-\infty}^b f(x)\, dx$.

c) Fie $f :]-\infty, +\infty[\to \mathbb{R}, f \in \mathcal{R}_{\text{loc}}(]-\infty, +\infty[)$.

Se numeşte *valoarea integralei improprii de la* $-\infty$ *la* $+\infty$ *din funcţia* f, notată $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx \overset{\text{not.}}{=} \int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx$, suma limitelor

$\lim\limits_{\lambda\to-\infty}\left(\int_{\lambda}^{c} f(x)\,dx\right) + \lim\limits_{\mu\to+\infty}\left(\int_{c}^{\mu} f(x)\,dx\right)$,

dacă acestea există şi dacă are sens suma, unde c este arbitrar ales $c \in \left]-\infty,+\infty\right[$.

În exerciţii, se face convenţia să se folosească denumirea şi notaţia clasică

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx \overset{\text{d. }\exists}{=} \lim_{\lambda\to-\infty}\left(\int_{\lambda}^{c} f(x)\,dx\right) + \lim_{\mu\to+\infty}\left(\int_{c}^{\mu} f(x)\,dx\right).}$$

Integrala $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ este *convergentă* (C) dacă valoarea există şi este finită, şi că este *divergentă* (D) dacă nu există măcar una din limitele anterioare, sau dacă există amândouă şi suma lor este $-\infty$ sau $+\infty$.

Punctele $a=-\infty$ şi $b=+\infty$ se numesc *puncte singulare* pentru integrala improprie $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$.

Noţiunea de *valoare principală în sens Cauchy* pentru integrala improprie anterioară nu se va studia studia aici.

d) Integralele improprii anterioare se numesc *integrale improprii de speţa întâi* sau *integrale improprii pe interval nemărginit.*

Observaţia 5.1.2. **a)** Fie $f:\left[a,+\infty\right[\to\mathbb{R}, -\infty<a, f\in\mathcal{R}_{\text{loc}}\left(\left[a,+\infty\right[\right)$. Dacă F este o primitivă a lui f atunci

$$\boxed{\int_{a}^{+\infty} f(x)\,dx \overset{\text{dacă }\exists}{=} \left(\lim_{x\to+\infty} F(x)\right) - F(a) \overset{\text{not.}}{=} F(x)\Big|_{x=a}^{x\to+\infty}.}$$

b) Fie $f:\left]-\infty,b\right]\to\mathbb{R}, b<+\infty, f\in\mathcal{R}_{\text{loc}}\left(\left]-\infty,b\right]\right)$. Dacă F este o primitivă a lui f atunci

$$\boxed{\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx \overset{\text{dacă }\exists}{=} F(b) - \left(\lim_{x\to-\infty} F(x)\right) \overset{\text{not.}}{=} F(x)\Big|_{x\to-\infty}^{x=b}.}$$

Definiţia 3. **a)** Fie $f:\left[a,b\right[\to\mathbb{R}, -\infty<a<b<+\infty, f\in\mathcal{R}_{\text{loc}}\left(\left[a,b\right[\right)$, cu $\lim\limits_{x\to b, x<b} f(x)=+\infty$ (sau $=-\infty$). Fie funcţia (corect definită)

$F:\left[a,b\right[\to\mathbb{R},\ F(\lambda)=\int_{a}^{\lambda} f(x)\,dx.$

Se numeşte *integrală improprie de la* a *la* b *din funcţia* f *nemărginită în* b perechea (f,F), notată

$(f,F) \overset{\text{not.}}{=} \int_{a}^{b} f(x)\,dx \overset{\text{not.}}{=} \int_{\left[a,b\right[} f(x)\,dx \overset{\text{not.}}{=} \int_{a}^{b-0} f(x)\,dx.$

Se numeşte *valoarea integralei improprii de la* a *la* b *din funcţia* f *nemărginită în* b limita $\lim\limits_{\lambda\to b,\lambda<b}\left(\int_{a}^{\lambda} f(x)\,dx\right)$, dacă aceasta există.

În exerciţii, se face convenţia să se folosească denumirea şi notaţia clasică

$$\boxed{\int_{a}^{b-0} f(x)\,dx \overset{\text{d. }\exists}{=} \lim_{\lambda\to b,\lambda<b}\left(\int_{a}^{\lambda} f(x)\,dx\right).}$$

Integrala $\int_{a}^{b-0} f(x)\,dx$ este *convergentă* (C) dacă limita anterioară există şi este finită şi *divergentă* (D) dacă nu există limita anterioară sau există şi este $-\infty$ sau $+\infty$.

Punctul b se numeşte *punct singular* pentru integrala improprie $\int_{a}^{b-0} f(x)\,dx$.

b) Fie $f:\left]a,b\right]\to\mathbb{R}, -\infty<a<b<+\infty, f\in\mathcal{R}_{\text{loc}}\left(\left]a,b\right]\right)$, cu $\lim\limits_{x\to a,x>a} f(x)=+\infty$ (sau $=-\infty$). Fie funcţia (corect definită)

$F:\left]a,b\right]\to\mathbb{R},\ F(\lambda)=\int_{\lambda}^{b} f(x)\,dx.$

Se numeşte *integrală improprie de la* a *la* b *din funcţia* f *nemărginită în* a perechea (f,F), notată

$(f,F) \overset{\text{not.}}{=} \int_{a}^{b} f(x)\,dx \overset{\text{not.}}{=} \int_{\left]a,b\right]} f(x)\,dx \overset{\text{not.}}{=} \int_{a+0}^{b} f(x)\,dx.$

Se numeşte *valoarea integralei improprii de la* a *la* b *din funcţia* f *nemărginită în* a limita $\lim\limits_{\lambda\to a,\lambda>a}\left(\int_{\lambda}^{b} f(x)\,dx\right)$, dacă aceasta există.

În exerciţii, se face convenţia să se folosească denumirea şi notaţia clasică

$$\boxed{\int_{a+0}^{b} f(x)\,dx \overset{\text{d. }\exists}{=} \lim_{\lambda\to a,\lambda>a}\left(\int_{\lambda}^{b} f(x)\,dx\right).}$$

Integrala $\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx$ este *convergentă* (C) dacă limita anterioară există şi este finită şi *divergentă* (D) dacă nu există limita anterioară sau există şi este $-\infty$ sau $+\infty$.

Punctul a se numeşte *punct singular* pentru integrala improprie $\int_{a+0}^{b} f(x)\,dx$.

c) Fie $f :]a,b[\to \mathbb{R}, -\infty < a < b < +\infty, f \in \mathcal{R}_{\text{loc}}(]a,b[)$, cu

$$\lim_{x\to a,x>a} f(x) = +\infty \text{ (sau } = -\infty\text{) şi } \lim_{x\to b,x<b} f(x) = +\infty \text{ (sau } = -\infty\text{)}.$$

Se numeşte *valoarea integralei improprii de la a la b din funcţia f*, notată $\int_{a+0}^{b-0} f(x)\,dx \overset{\text{not.}}{=} \int_{]a,b[} f(x)\,dx$, suma limitelor

$$\lim_{\lambda\to a,\lambda>a}\left(\int_{\lambda}^{c} f(x)\,dx\right) + \lim_{\mu\to b,\mu<b}\left(\int_{c}^{\mu} f(x)\,dx\right),$$

dacă acestea există şi dacă are sens suma, unde c este arbitrar ales $c \in]a,b[$.

În exerciţii, se face convenţia să se folosească denumirea şi notaţia clasică

$$\boxed{\int_{a+0}^{b-0} f(x)\,dx \overset{\text{d. }\exists}{=} \lim_{\lambda\to a,\lambda>a}\left(\int_{\lambda}^{c} f(x)\,dx\right) + \lim_{\mu\to b,\mu<b}\left(\int_{c}^{\mu} f(x)\,dx\right).}$$

Integrala $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ este *convergentă* (C) dacă valoarea există şi este finită şi *divergentă* (D) dacă nu există măcar una din limitele anterioare sau dacă există amândouă şi suma lor este $-\infty$ sau $+\infty$.

Punctele a şi b se numesc *puncte singulare* pentru integrala improprie $\int_{a+0}^{b-0} f(x)\,dx$.

d) Integralele improprii de la a la b din funcţia f nemărginită în b, sau de la a la b din funcţia f nemărginită în a, sau de la a la b din funcţia f nemărginită şi în a şi în b se numesc *integrale improprii de speţa a doua* sau *integrale improprii cu integrant nemărginit.*

Observaţia 3. a) Fie $f : [a,b[\to \mathbb{R}, -\infty < a < b < +\infty, f \in \mathcal{R}_{\text{loc}}([a,b[)$, cu

$$\lim_{x\to b,x<b} f(x) = +\infty \text{ (sau } = -\infty\text{)}.$$

Dacă F este o primitivă a lui f atunci

$$\boxed{\int_{a}^{b-0} f(x)\,dx \overset{\text{dacă }\exists}{=} \left(\lim_{x\to b,x<b} F(x)\right) - F(a) \overset{\text{not.}}{=} F(x)\big|_{x=a}^{x\to b,x<b}.}$$

b) Fie $f :]a,b] \to \mathbb{R}, -\infty < a < b < +\infty, f \in \mathcal{R}_{\text{loc}}(]a,b])$, cu

$$\lim_{x\to a,x>a} f(x) = +\infty \text{ (sau } = -\infty\text{)}.$$

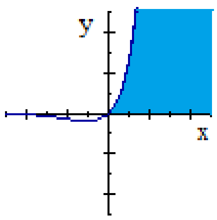
Dacă F este o primitivă a lui f atunci

$$\boxed{\int_{a+0}^{b} f(x)\,dx \overset{\text{dacă }\exists}{=} F(b) - \lim_{x\to a,x>a}(F(x)) \overset{\text{not.}}{=} F(x)\big|_{x\to a,x>a}^{x=b}.}$$

Exemplul 5.1.1. Să se studieze natura şi valoarea integralelor de speţa întâi, pe interval nemărginit:

a) $\int_{0}^{+\infty} (xe^{x})\,dx$.

Rezolvare. <u>etapa 1.</u> $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}, f(x) = xe^{x}$.



f este bine definită şi continuă pe $[0,+\infty[\Rightarrow f \in \mathcal{R}_{\text{loc}}([0,+\infty[)$

$b = +\infty$ este unicul punct singular pentru integrala improprie de speţa 1, pe interval nemărginit.

etapa 2. Se studiază natura şi valoarea integralei, aplicând Definiţia.

pasul 1. Se determină o primitivă pe $[0,+\infty[$ pentru f.

$F(x;c) = \int (xe^x)\,dx = xe^x - e^x + c, \forall x \in [0,+\infty[, \forall c \in \mathbb{R}$.

pasul 2-detaliat. $\int_0^{+\infty} f(x)\,dx \overset{\text{dacă } \exists}{=} \lim\limits_{\lambda\to+\infty}\left(\int_0^{\lambda} f(x)\,dx\right)$.

Se calculează, pentru $\lambda \in [0,+\infty[$,

$\int_0^{\lambda}(xe^x)\,dx = (xe^x - e^x)\big|_{x=0}^{x=\lambda} = \left(\lambda e^{\lambda} - e^{\lambda}\right) - \left(0 - e^0\right)$.

Se determină, dacă există,

$\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\left(\int_0^{\lambda}(xe^x)\,dx\right) = \lim\limits_{\lambda\to+\infty}\left(\lambda e^{\lambda} - e^{\lambda} + 1\right) = +\infty$.

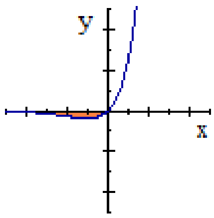
pasul 2-direct. $\int_0^{+\infty}(xe^x)\,dx \overset{\text{dacă } \exists}{=} (xe^x - e^x)\big|_{x=0}^{x\to+\infty} = \lim\limits_{x\to+\infty}(xe^x - e^x) + 1 = +\infty$.

Se deduce că integrala improprie dată este divergentă şi are valoarea $+\infty$, adică

$\int_0^{+\infty}(xe^x)\,dx = +\infty$.

b) $\int_{-\infty}^{0}(xe^x)\,dx$.

Rezolvare. etapa 1. $f :]-\infty,0] \to \mathbb{R}, f(x) = xe^x$.



f este bine definită şi continuă pe $]-\infty,0] \Rightarrow f \in \mathcal{R}_{\text{loc}}(]-\infty,0])$.

$b = -\infty$ este unicul punct singular pentru integrala improprie de speţa 1, pe interval nemărginit.

etapa 2. Se studiază natura şi valoarea integralei aplicând Definiţia.

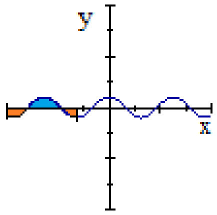
pasul 1. Se determină o primitivă pe $]-\infty,0]$ pentru f.

$F(x;c) = \int (xe^x)\,dx = xe^x - e^x + c, \forall x \in]-\infty,0], \forall c \in \mathbb{R}$.

pasul 2-direct $\int_{-\infty}^{0}(xe^x)\,dx \overset{\text{dacă } \exists}{=} (xe^x - e^x)\big|_{x\to-\infty}^{x=0} = -1 - \lim\limits_{x\to-\infty}(xe^x - e^x) = -1$.

c) $\int_{-\infty}^{-\pi}(\cos x)\,dx$.

Rezolvare. etapa 1. $f :]-\infty,-\pi] \to \mathbb{R}, f(x) = \cos x$.



f este bine definită şi continuă pe $]-\infty,-\pi] \Rightarrow f \in \mathcal{R}_{\text{loc}}(]-\infty,-\pi])$.

$a=-\infty$ este unicul punct singular pentru integrala improprie de speţa 1, pe interval nemărginit.

etapa 2. Se studiază natura şi valoarea integralei, aplicând Definiţia.

pasul 1. Se determină o primitivă pe $]-\infty,-\pi]$ pentru f.

$F(x;c)=\int(\cos x)\,dx=\sin x+c, \forall x\in\,]-\infty,-\pi], \forall c\in\mathbb{R}.$

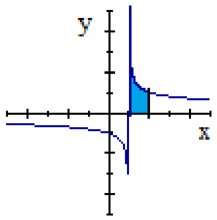
pasul 2-direct. $\int_{-\infty}^{-\pi}(\cos x)\,dx \overset{\text{dacă } \exists}{=} (\sin x)|_{x\to-\infty}^{x=-\pi}=\sin(-\pi)+\lim\limits_{x\to-\infty}(\sin x)$ −nu există

$\Rightarrow \int_{-\infty}^{-\pi}(\cos x)\,dx\ (D)$.

Exemplul 5.1.2. Să se studieze natura şi valoarea integralelor de speţa a doua, cu integrant nemărginit:

a) $\int_1^2 \dfrac{1}{\sqrt[3]{x-1}}dx.$

Rezolvare. etapa 1. $f:\,]1,2]\to\mathbb{R}, f(x)=\dfrac{1}{\sqrt[3]{x-1}}.$



f este bine definită şi continuă pe $]1,2] \Rightarrow f\in\mathcal{R}_{\text{loc}}(]1,2])$.

$a=1$ este unicul punct singular pentru integrala improprie de speţa 2, cu integrant nemărginit, deoarece $\lim\limits_{x\to1,x>1}f(x)=\lim\limits_{x\to1,x>1}\dfrac{1}{\sqrt[3]{x-1}}=+\infty.$

etapa 2. Se studiază natura şi valoarea integralei, aplicând Definiţia.

pasul 1.Se determină o primitivă pe $]1,2]$ pentru f.

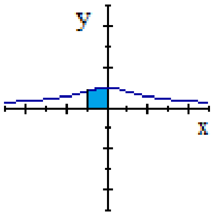
$$\int\frac{1}{\sqrt[3]{x-1}}dx=\int(x-1)^{-\frac{1}{3}}(x-1)'\,dx=\frac{(x-1)^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}}+c, \forall x\in\,]1,2], \forall c\in\mathbb{R}.$$

pasul 2-direct. $\int_{1+0}^{2}\dfrac{1}{\sqrt[3]{x-1}}dx \overset{\text{dacă } \exists}{=} \left.\dfrac{(x-1)^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}}\right|_{x\to1,x>1}^{x=2}=\frac{3}{2}(2-1)^{\frac{2}{3}}-\lim\limits_{x\to1,x>1}\left(\frac{3}{2}(x-1)^{\frac{2}{3}}\right)=\frac{3}{2}.$

Observaţia 5.1.4. Dacă pentru $\int_{[a,b[}f(x)\,dx$, f nu este definită în b, dar $\lim\limits_{x\to b,x<b}f(x)$ există şi este finită, atunci integrala scrisă anterior poate fi considerată ca o integrala improprie convergentă identificată cu integrala Riemann a prelungirii funcţiei f prin continuitate la $[a,b]$. De exemplu, fie $\int_{[-1,0[}\dfrac{\operatorname{arctg} x}{x}dx.$

etapa 1. Integrantul $f:[-1,0[\,\to\mathbb{R}, f(x)=\dfrac{\operatorname{arctg} x}{x}$ este nedefinit în $b=0$. Totuşi $b=0$ nu este

punct singular pentru integrală, deoarece
$$\lim_{x\to 0, x<0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1.$$
Integrala poate fi identificată cu integrala Riemann $\int_{[-1,0]} \widetilde{f}(x)\,dx$, unde $\widetilde{f}$ este prelungirea prin continuitate a f pe $[-1,0]$, adică
$$\widetilde{f} : [-1,0] \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{arctg} x}{x}, & \text{dacă } x \in [-1,0[\\ 1, & \text{dacă } x = 0 \end{cases}.$$
etapa 2. Deoarece $\widetilde{f}$ admite primitive, dar acestea nu pot fi exprimate cu funcţii elementare, valoarea acestei integrale se determină cu **metode numerice** (calculator).



Teorema 5.1.1. Fie $-\infty < a < b < +\infty$ fixate. Fie $f : [a,b[\to \mathbb{R}, f \in \mathcal{R}_{\text{loc}}([a,b[)$, cu $\lim\limits_{x\to b, x<b} f(x) = +\infty$ (sau $= -\infty$). Dacă f este mărginită pe $[a,b[$, atunci $\int_a^{b-0} f(x)\,dx$ este (C). Analog pentru $\int_{a+0}^b f(x)\,dx$.

Exemplul 5.1.3. Fie $0 < a < +\infty, 0 < b < +\infty$ fixate. Fie $\alpha \in \mathbb{R}$ fixat.

a) $\boxed{\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx}$ este

(C), dacă $\alpha \in]1,+\infty[$, şi $\boxed{\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx = \frac{a^{1-\alpha}}{1-\alpha}, \text{ dacă } \alpha > 1}$

(D), dacă $\alpha \in]-\infty,1]$, şi $\boxed{\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx = +\infty, \text{ dacă } \alpha \leq 1.}$

De exemplu, $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx = \frac{1}{1-2}\,(C)$; $\int_{\frac{1}{2}}^{+\infty} \frac{1}{x^3} dx = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{1-3}}{1-3}\,(C)$; $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{x}} dx = \frac{(2)^{1-\frac{3}{2}}}{1-\frac{3}{2}}\,(C)$;
$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx = +\infty\,(D)$; $\int_{\frac{1}{2}}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} dx = +\infty\,(D)$; $\int_2^{+\infty} x^3 dx = +\infty\,(D)$;

b) $\boxed{\int_a^b \frac{1}{(b-x)^\alpha} dx}$ este

(C), dacă $\alpha \in]-\infty,1[$, şi $\boxed{\int_a^{b-0} \frac{1}{(b-x)^\alpha} dx = \int_{[a,b[} \frac{1}{(b-x)^\alpha} dx = \frac{(b-a)^{1-\alpha}}{1-\alpha}, \text{ dacă } \alpha < 1}$

(D), dacă $\alpha \in [1,+\infty[$, şi $\boxed{\int_a^{b-0} \frac{1}{(b-x)^\alpha} dx = \int_{[a,b[} \frac{1}{(b-x)^\alpha} dx = +\infty, \text{ dacă } \alpha \geq 1.}$

De exemplu, $\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{2-x}} dx = \frac{1}{1-\frac{1}{2}}\,(C)$; $\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{\sqrt[3]{1-x}} dx = \frac{\left(1-\frac{1}{2}\right)^{1-\frac{1}{3}}}{1-\frac{1}{3}}\,(C)$;
$\int_1^3 \frac{1}{x-3} dx = +\infty\,(D)$; $\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{(1-x)\sqrt{1-x}} dx = +\infty\,(D)$.

c) $\boxed{\int_a^b \frac{1}{(x-a)^\alpha} dx}$ este

(C), dacă $\alpha \in]-\infty, 1[$, şi $\boxed{\int_{a+0}^b \frac{1}{(x-a)^\alpha} dx = \int_{]a,b]} \frac{1}{(x-a)^\alpha} dx = \frac{(b-a)^{1-\alpha}}{1-\alpha}, \text{ dacă } \alpha < 1}$

(D), dacă $\alpha \in [1, +\infty[$, şi $\boxed{\int_{a+0}^b \frac{1}{(x-a)^\alpha} dx = \int_{]a,b]} \frac{1}{(x-a)^\alpha} dx = +\infty, \text{ dacă } \alpha \geq 1.}$

De exemplu, $\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x-1}} dx = \frac{1}{1-\frac{1}{2}}\ (C)$; $\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{\sqrt[3]{x-\frac{1}{2}}} dx = \frac{\left(1-\frac{1}{2}\right)^{1-\frac{1}{3}}}{1-\frac{1}{3}}\ (C)$;

$\int_2^3 \frac{1}{x-2} dx = +\infty\ (D)$; $\int_1^2 \frac{1}{(x-1)\sqrt{x-1}} dx = +\infty\ (D)$.

Observaţia 5.1.5. Există integrale improprii cu două puncte singulare *mixte*, în care apar şi puncte singulare pentru interval nemărginit şi puncte sigulare pentru integrant nemărginit. De exemplu

$\int_{a+0}^{+\infty} f(x)\, dx \overset{\text{dacă } \exists}{=} \lim_{\lambda \to a, \lambda > a} \left(\int_\lambda^c f(x)\, dx\right) + \lim_{\mu \to +\infty} \left(\int_c^\mu f(x)\, dx\right)$

Integrala $\int_{a+0}^{+\infty} f(x)\, dx$ este *convergentă* (C) dacă valoarea există şi este finită şi este *divergentă* (D) dacă nu există măcar una din limitele anterioare sau dacă există amândouă şi suma lor este $-\infty$ sau $+\infty$.

$\int_{-\infty}^{b-0} f(x)\, dx \overset{\text{dacă } \exists}{=} \lim_{\lambda \to -\infty} \left(\int_\lambda^c f(x)\, dx\right) + \lim_{\mu \to b, \mu < b} \left(\int_c^\mu f(x)\, dx\right)$

Integrala $\int_{-\infty}^{b-0} f(x)\, dx$ este *convergentă* (C) dacă valoarea există şi este finită şi este *divergentă* (D) dacă nu există măcar una din limitele anterioare sau dacă există amândouă şi suma lor este $-\infty$ sau $+\infty$.

Există integrale improprii cu mai mult de două puncte singulare, unele chiar şi în interiorul intervalului de integrare.

Teorema 5.1.2.(de aditivitate a integralei improprii în raport cu funcţia integrant) Fie $\int_{\mathbb{I}} f(x)\, dx, \int_{\mathbb{I}} g(x)\, dx$ -integrale improprii ambele de speţa întâi, sau a doua, sau mixte, cu $f, g \in \mathcal{R}_{\text{loc}}(\mathbb{I})$.

Dacă $\int_{\mathbb{I}} f(x)\, dx\ (C)$ şi $\int_{\mathbb{I}} g(x)\, dx\ (C)$, atunci$\Rightarrow \int_{\mathbb{I}} (f+g)(x)\, dx\ (C)$ şi

$\int_{\mathbb{I}} (f+g)(x)\, dx = \int_{\mathbb{I}} f(x)\, dx + \int_{\mathbb{I}} g(x)\, dx.$

Observaţia 5.1.6. În ipotezele Teoremei 2,

$\int_{\mathbb{I}} f(x)\, dx\ (C)$ şi $\int_{\mathbb{I}} g(x)\, dx\ (C) \Rightarrow \int_{\mathbb{I}} (f+g)(x)\, dx\ (C)$;

$\int_{\mathbb{I}} f(x)\, dx\ (D)$ şi $\int_{\mathbb{I}} g(x)\, dx\ (C) \Rightarrow \int_{\mathbb{I}} (f+g)(x)\, dx\ (D)$;

$\int_{\mathbb{I}} f(x)\, dx\ (C)$ şi $\int_{\mathbb{I}} g(x)\, dx\ (D) \Rightarrow \int_{\mathbb{I}} (f+g)(x)\, dx\ (D)$;

$\int_{\mathbb{I}} f(x)\, dx\ (D)$ şi $\int_{\mathbb{I}} g(x)\, dx\ (D) \Rightarrow \int_{\mathbb{I}} (f+g)(x)\, dx$ poate fi sau (C) sau (D).

Teorema 5.1.3.(de omogeneitate a integralei improprii în raport cu funcţia integrant) Fie $\int_{\mathbb{I}} f(x)\, dx$ -integrală improprie de speţa întâi, sau a doua, sau mixtă cu $f \in \mathcal{R}_{\text{loc}}(\mathbb{I})$. Fie $\alpha \in \mathbb{R}^*$. Atunci $\int_{\mathbb{I}} (\alpha f)(x)\, dx$ şi $\int_{\mathbb{I}} f(x)\, dx$ au aceeaşi natură (sunt ambele (C) sau (D) simultan) şi, în caz de convergenţă

$\int_{\mathbb{I}} (\alpha f)(x)\, dx = \alpha \int_{\mathbb{I}} f(x)\, dx.$

Teorema 5.1.4.(de aditivitate a integralei improprii în raport cu intervalul) Fie $\int_{]a,b[} f(x)\, dx$ -integrală improprie de speţa întâi, sau a doua, sau mixtă cu a şi b exact două puncte singulare, cu $f \in \mathcal{R}_{\text{loc}}(]a, b[)$.

a) Dacă $\int_{]a,b[} f(x)\, dx\ (C)$, atunci $\forall c \in]a, b[\Rightarrow \int_{]a,c]} f(x)\, dx\ (C)$ şi $\int_{[c,b[} f(x)\, dx\ (C)$ şi

$\int_{]a,c]} f(x)\, dx + \int_{[c,b[} f(x)\, dx = \int_{]a,b[} f(x)\, dx.$

b) Dacă $\exists c \in \left]a,b\right[$ a.î. $\int_{]a,c]} f(x)\,dx\ (C)$ şi $\int_{[c,b[} f(x)\,dx\ (C)$ atunci $\Rightarrow \int_{]a,b[} f(x)\,dx\ (C)$ şi
$\int_{]a,b[} f(x)\,dx = \int_{]a,c]} f(x)\,dx + \int_{[c,b[} f(x)\,dx.$

Observaţia 5.1.7. În ipotezele Teoremei 4, pentru un $c \in \left]a,b\right[$ oarecare dat,
$\int_a^c f(x)\,dx\ (C)$ şi $\int_c^b f(x)\,dx\ (C) \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx\ (C)$;
$\int_a^c f(x)\,dx\ (D)$ şi $\int_c^b f(x)\,dx\ (C) \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx\ (D)$;
$\int_a^c f(x)\,dx\ (C)$ şi $\int_c^b f(x)\,dx\ (D) \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx\ (D)$;
$\int_a^c f(x)\,dx\ (D)$ şi $\int_c^b f(x)\,dx\ (D) \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx$ poate fi sau (C) sau (D).

Observaţia 5.1.8.

I. Fie $\int_{[a,b[} f(x)\,dx$ -integrală improprie de speţa întâi sau a doua cu b unicul punct singular, $f \in \mathcal{R}_{\text{loc}}([a,b[)$.

$\int_{[a,b[} f(x)\,dx\ (C) \Leftrightarrow \int_{[c,b[} f(x)\,dx\ (C)$ unde $c \in [a,b[$ este arbitrar ales. Mai mult,

$$\underbrace{\int_{[a,b[} f(x)\,dx}_{\text{improprie}} = \underbrace{\int_{[a,c]} f(x)\,dx}_{\text{Riemann, deci } (C)} + \underbrace{\int_{[c,b[} f(x)\,dx}_{\text{improprie}}.$$

Rezultă că este suficient să se studieze convergenţa pe intervale $[c,b[$, cu c "spre" punctul singular b.

II. Fie $\int_{]a,b]} f(x)\,dx$ -integrală improprie de speţa întâi sau a doua cu a unicul punct singular, $f \in \mathcal{R}_{\text{loc}}(]a,b])$.

$\int_{]a,b]} f(x)\,dx\ (C) \Leftrightarrow \int_{]c,b]} f(x)\,dx\ (C)$ unde $c \in \left]a,b\right]$ este arbitrar ales. Mai mult

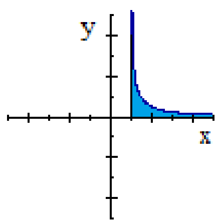
$$\underbrace{\int_{]a,b]} f(x)\,dx}_{\text{improprie}} = \underbrace{\int_{]a,c]} f(x)\,dx}_{\text{improprie}} + \underbrace{\int_{[c,b]} f(x)\,dx}_{\text{Riemann, deci } (C)}.$$

Rezultă că este suficient să se studieze convergenţa pe intervale $]a,c]$, cu c "spre" punctul singular a.

Exerciţiul 4. Să se studieze natura şi valoarea integralei:

a) $\int_1^{+\infty} \dfrac{1}{x\sqrt{x-1}}\,dx.$

Rezolvare. <u>etapa 1.</u> $f :]1,+\infty[\to \mathbb{R}, f(x) = \dfrac{1}{x\sqrt{x-1}}.$



f este bine definită şi continuă pe $]1,+\infty[\Rightarrow f \in \mathcal{R}_{\text{loc}}(]1,+\infty[)$.
$b = +\infty$ este punct singular pentru integrala improprie pe interval nemărginit.
$a = 1$ este punct singular pentru integrala improprie cu integrant nemărginit, deoarece
$\lim\limits_{x\to1,x>1} f(x) = \lim\limits_{x\to1,x>1} \dfrac{1}{x\sqrt{x-1}} = +\infty.$
Deci este integrală improprie mixtă.

etapa 2. Se studiază natura şi valoarea integralei, cu Definiţia.
pasul 0. Se izolează cele două puncte singulare şi se studiază separat.

$\mathcal{I}_1 = \int_1^2 \frac{1}{x\sqrt{x-1}}dx$ şi $\mathcal{I}_2 = \int_2^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{x-1}}dx$

pasul 1. Se determină o primitivă pe $]1,+\infty[$ pentru $f, F(x;c) = \int \frac{1}{x\sqrt{x-1}}dx$.

Se face schimbarea de variabilă de integrare: $\begin{cases} \sqrt{x-1} = t,\ t \in]0,+\infty[\mid \text{inversăm} \\ x = t^2+1,\ t \in]0,+\infty[\mid \text{diferenţiem} \\ dx = 2tdt \end{cases}$

Se înlocuieşte$\Rightarrow F(t;\widetilde{c}) = \int \frac{1}{(t^2+1)\cdot t}2tdt = 2\int \frac{1}{t^2+1}dt = 2\operatorname{arctg} t + \widetilde{c}, \forall t \in]0,+\infty[\,, \forall \widetilde{c} \in \mathbb{R}$.

Se revine la substituţie$\Rightarrow F(x;c) = 2\operatorname{arctg}\sqrt{x-1} + c$, $\forall x \in]1,+\infty[\,, \forall c \in \mathbb{R}$

pasul 2-detaliat.$\bullet\mathcal{I}_1 = \int_{1+0}^2 f(x)\,dx = \lim\limits_{\lambda\to 1, \lambda>1} \left(\int_\lambda^2 f(x)\,dx\right)$

Se calculează, pentru $\lambda \in]1,2]\,,$

$\int_\lambda^2 \frac{1}{x\sqrt{x-1}}dx = \left(2\operatorname{arctg}\sqrt{x-1}\right)\Big|_{x=\lambda}^{x=2} = 2\operatorname{arctg} 1 - 2\operatorname{arctg}\sqrt{\lambda-1}.$

Se determină, dacă există,

$\lim\limits_{\lambda\to 1,\lambda>1}\left(\int_\lambda^2 \frac{1}{x\sqrt{x-1}}dx\right) = \lim\limits_{\lambda\to 1,\lambda>1}\left(2\operatorname{arctg} 1 - 2\operatorname{arctg}\sqrt{\lambda-1}\right) = 2\frac{\pi}{4} - 0.$

$\bullet\mathcal{I}_2 = \int_2^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{x-1}}dx$

Se calculează, pentru $\mu \in [2,+\infty[\,,$

$\int_2^\mu \frac{1}{x\sqrt{x-1}}dx = \left(2\operatorname{arctg}\sqrt{x-1}\right)\Big|_{x=2}^{x=\mu} = 2\operatorname{arctg}\sqrt{\mu-1} - 2\operatorname{arctg} 1.$

Se determină, dacă există,

$\lim\limits_{\mu\to+\infty}\left(\int_2^\mu \frac{1}{x\sqrt{x-1}}dx\right) = \lim\limits_{\mu\to+\infty}\left(2\operatorname{arctg}\sqrt{\mu-1} - 2\operatorname{arctg} 1\right) = 2\frac{\pi}{2} - 2\frac{\pi}{4}.$

pasul 2-direct. $\mathcal{I}_1 \overset{\text{dacă } \exists}{=} \left(2\operatorname{arctg}\sqrt{x-1}\right)\Big|_{x\to 1, x>1}^{x=2} = 2\operatorname{arctg}\sqrt{2-1} - \lim\limits_{x\to 1,x>1}\left(2\operatorname{arctg}\sqrt{x-1}\right) = 2\frac{\pi}{4} - 0.$

$\mathcal{I}_2 \overset{\text{dacă } \exists}{=} \left(2\operatorname{arctg}\sqrt{x-1}\right)\Big|_{x=2}^{x\to+\infty} = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(2\operatorname{arctg}\sqrt{x-1}\right) - 2\operatorname{arctg}\sqrt{2-1} = 2\frac{\pi}{2} - 2\frac{\pi}{4}.$

Se deduce că integrala improprie $\mathcal{I}_1$ este convergentă şi are valoarea $\frac{\pi}{2}$, adică

$\int_{1+0}^2 \frac{1}{x\sqrt{x-1}}dx = \frac{\pi}{2}.$

Se deduce că integrala improprie $\mathcal{I}_2$ este convergentă şi are valoarea $\frac{\pi}{2}$, adică

$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{x-1}}dx = \frac{\pi}{2}.$

Atunci, conform Observaţiei 6, se deduce că $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{x-1}}dx$ (C) şi are valoarea

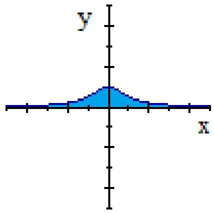
$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{x-1}}dx = \int_1^2 \frac{1}{x\sqrt{x-1}}dx + \int_2^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{x-1}}dx = \pi.$

$*$Uneori se scrie şi direct

$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{x-1}}dx \overset{\text{dacă } \exists}{=} \left(2\operatorname{arctg}\sqrt{x-1}\right)\Big|_{x\to 1,x>1}^{x\to+\infty} = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(2\operatorname{arctg}\sqrt{x-1}\right) - \lim\limits_{x\to 1,x>1}\left(2\operatorname{arctg}\sqrt{x-1}\right) = \pi.$

b) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}dx.$

Rezolvare. etapa 1.$f:]-\infty,+\infty[\to \mathbb{R}, f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$.



f este bine definită şi continuă pe $]-\infty,+\infty[\Rightarrow f \in \mathcal{R}_{\text{loc}}(]-\infty,+\infty[)$

$a=-\infty$ şi $b=+\infty$ sunt două puncte singulare, ambele pentru integrala improprie de speţa 1, pe interval nemărginit.

etapa 2. Se studiază natura şi valoarea integralei, cu Definiţia.

pasul 0. Se izolează cele două puncte singulare, alegând $0 \in]-\infty,+\infty[$ şi se studiază separat

$\mathcal{I}_1 = \int_{-\infty}^{0} \dfrac{1}{1+x^2} dx$ şi $\mathcal{I}_2 = \int_0^{+\infty} \dfrac{1}{1+x^2} dx$

pasul 1. Se determină o primitivă pe $]-\infty,+\infty[$ pentru f.

$F(x;c) = \int \dfrac{1}{1+x^2} dx = \operatorname{arctg} x + c, \forall x \in]-\infty,+\infty[, \forall c \in \mathbb{R}.$

pasul 2-direct.$\mathcal{I}_1 = \int_{-\infty}^{0} \dfrac{1}{1+x^2} dx = \operatorname{arctg} x|_{x\to-\infty}^{x=0} = \operatorname{arctg} 0 - \lim\limits_{x\to-\infty} (\operatorname{arctg} x) = \dfrac{\pi}{2}.$

$\mathcal{I}_2 = \int_0^{+\infty} \dfrac{1}{1+x^2} dx = \operatorname{arctg} x|_{x=0}^{x\to+\infty} = \lim\limits_{x\to+\infty} (\operatorname{arctg} x) - \operatorname{arctg} 0 = \dfrac{\pi}{2}.$

Se deduce că $\int_{-\infty}^{+\infty} \dfrac{1}{1+x^2} dx$ (C) şi are valoarea

$\int_{-\infty}^{+\infty} \dfrac{1}{1+x^2} dx = \int_{-\infty}^{0} \dfrac{1}{1+x^2} dx + \int_0^{+\infty} \dfrac{1}{1+x^2} dx = \dfrac{\pi}{2} + \dfrac{\pi}{2} = \pi.$

5.2. Criterii de convergenţă a integralelor improprii

Observaţia 5.2.1. Există funcţii care admit primitive, dar acestea nu sunt exprimabile cu funcţii elementare. Sau nuse poate studia limita ce apare în definiţia integralei improprii. În aceste situaţii nu se poate determina natura şi eventual valoarea integralelor improprii cu definiţia. Atunci:

-se aplică unul dintre criteriile de mai jos pentru a determina natura integralei;

-în caz de convergenţă, se poate încerca un calcul al valorii integralei, folosind

–metoda integrării prin părţi în integralele improprii convergente;

–schimbare de variabilă de integrare în integralele improprii convergente;

–altele, chiar şi metode numerice (calculator).

Observaţia 5.2.2. Fie $\int_{\mathbb{I}} f(x)\, dx$ -integrală improprie de speţa întâi sau a doua sau mixtă.

a) Integrala $\int_{\mathbb{I}} f(x)\, dx$ este *absolut convergentă* (AC) dacă $\int_{\mathbb{I}} |f(x)|\, dx$ este convergentă.

b) Dacă $\int_{\mathbb{I}} f(x)\, dx$ (AC) atunci $\int_{\mathbb{I}} f(x)\, dx$ (C). Reciproca nu este adevărată.

c) Integrala $\int_{\mathbb{I}} f(x)\, dx$ este *semiconvergentă* (SC) dacă $\int_{\mathbb{I}} f(x)\, dx$ este (C), dar nu este (AC).

Teorema 5.2.1.(**Criteriul comparaţiei-cu inegalităţi**)

Fie $\int_{\mathbb{I}} f(x)\, dx$ -integrală improprie de speţa întâi sau a doua.

a) Dacă $\exists g$ a.î. $\left.\begin{array}{l} 0 \le |f(x)| \le g(x), \forall x \in \mathbb{I} \\ \int_{\mathbb{I}} g(x)\, dx\, (C) \end{array}\right\}$, atunci $\int_{\mathbb{I}} f(x)\, dx\, (AC)$.

b) Dacă $\exists g$ a.î. $\left.\begin{array}{l} f(x) \geq g(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{I} \\ \int_{\mathbb{I}} g(x)\,dx\,(D) \end{array}\right\}$, atunci $\int_{\mathbb{I}} f(x)\,dx\,(D)$.

Observaţia 5.2.3. Şi folosind criteriile de convergenţă este suficient să se studieze convergenţa integralei improprii $\int_{[a,b[} f(x)\,dx$ pe intervale $[c,b[$, cu c "suficient de aproape" de punctul singular b.

$$\underbrace{\int_{[a,b[} f(x)\,dx}_{\text{improprie}} = \underbrace{\int_{[a,c]} f(x)\,dx}_{\text{Riemann, deci } (C)} + \underbrace{\int_{[c,b[} f(x)\,dx}_{\text{improprie}}.$$

Analog, este suficient să se studieze convergenţa integralei $\int_{]a,b]} f(x)\,dx$ pe intervale $]a,c]$, cu c "suficient de aproape" de punctul singular a.

$$\underbrace{\int_{]a,b]} f(x)\,dx}_{\text{improprie}} = \underbrace{\int_{]a,c]} f(x)\,dx}_{\text{improprie}} + \underbrace{\int_{[c,b]} f(x)\,dx}_{\text{Riemann, deci } (C)}.$$

Exemplul 5.2.1. Să se studieze natura integralelor

a) $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x(x+1)}dx$.

Rezolvare. etapa 1. $f : [1,+\infty[\to \mathbb{R}, f(x) = \frac{\sin x}{x(x+1)}$.

f este bine definită şi continuă pe $[1,+\infty[\Rightarrow f \in \mathcal{R}_{\text{loc}}([1,+\infty[)$

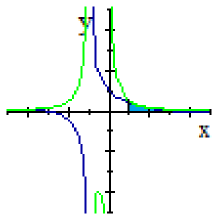
$b = +\infty$ este unicul punct singular pentru integrala improprie de speţa 1, pe interval nemărginit.

etapa 2. Se studiază natura şi valoarea integralei, utilizând Definiţia.

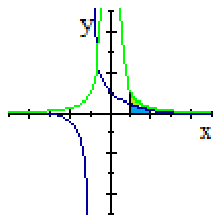
f este bine definită şi continuă pe $[1,+\infty[\Rightarrow f$ admite primitive pe $[1,+\infty[$. Dar aceste primitive nu pot fi exprimate cu funcţii elementare. Nu se poate parcurge etapa 2.

etapa 3. Se studiază natura integralei, utilizând Criterii:

modul 1. Criteriul comparaţiei cu inegalităţi



sau



$$\left.\begin{array}{l} 0 \leq |f(x)| = \left|\frac{\sin x}{x(x+1)}\right| = \frac{|\sin x|}{x(x+1)} \leq \underbrace{\frac{1}{x(x+1)}}_{g(x)}, \forall x \in [1,+\infty[. \\ \int_1^{+\infty} \frac{1}{x(x+1)}dx\,(C) \text{ deoarece, direct} \\ \quad \int_1^{+\infty} \frac{1}{x(x+1)}dx \overset{\text{d. }\exists}{=} \ln \frac{x}{x+1}\Big|_{x=1}^{x\to+\infty} = \ln 1 - \ln \frac{1}{2}. \end{array}\right\} \overset{\text{Crit. Comp.}}{\Rightarrow} \int_1^{+\infty} f(x)\,dx\,(AC).$$

sau

$$\left.\begin{array}{l} 0 \leq |f(x)| = \left|\dfrac{\sin x}{x(x+1)}\right| = \dfrac{|\sin x|}{x(x+1)} \leq \dfrac{1}{x(x+1)} < \underbrace{\dfrac{1}{x^2}}_{g(x)}, \forall x \in [1, +\infty[\,. \\ \int_1^{+\infty} \dfrac{1}{x^2} dx\,(C) \text{ deoarece, direct} \\ \qquad \int_1^{+\infty} \dfrac{1}{x^2} dx \overset{\text{d. } \exists}{=} \left(-\dfrac{1}{x}\right)\Bigg|_{x=1}^{x\to+\infty} = -0+1. \end{array}\right\} \overset{\text{Crit. Comp.}}{\Rightarrow} \int_1^{+\infty} f(x)\,dx\,(AC)\,.$$

Comentariu.

$$\underbrace{\int_1^{+\infty} \frac{1}{x(x+1)} dx}_{(C),=\ln 2} \neq \underbrace{\int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx}_{(D),=\infty} - \underbrace{\int_1^{+\infty} \frac{1}{x+1} dx}_{(D),=\infty}.$$

$\overset{\text{Crit. Comp.}}{\Rightarrow} \int_0^{+\infty} f(x)\,dx\,(AC)\,.$

Exemplul 5.2.2. Să se studieze natura integralelor

a) $\int_0^2 \dfrac{x^5}{\sqrt{4-x^2}} dx.$

Rezolvare. etapa 1. $f : [0, 2[\to \mathbb{R}, f(x) = \dfrac{x^5}{\sqrt{4-x^2}}$

f este bine definită şi continuă pe $[0, 2[\Rightarrow f \in \mathcal{R}_{\text{loc}}([0, 2[)\,.$

$b = 2$ este unicul punct singular pentru integrala improprie de speţa 2, cu integrant nemărginit, deoarece $\lim\limits_{x\to2, x<2} \dfrac{x^5}{\sqrt{4-x^2}} = +\infty.$

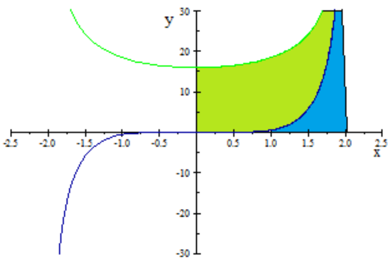
etapa 2. Se studiază natura şi valoarea integralei, utilizând Definiţia. Aici este posibil, dar greoi.

$$\int \frac{x^5}{\sqrt{4-x^2}} dx = -\frac{128}{15}\sqrt{4-x^2} - \frac{16}{15}x^2\sqrt{4-x^2} - \tfrac{1}{5}x^4\sqrt{4-x^2} + c, \forall x \in [0, 2[\,, \forall c \in \mathbb{R}.$$

$$\int_0^2 \frac{x^5}{\sqrt{4-x^2}} dx \overset{\text{d.}\exists}{=} \left(-\frac{128}{15}\sqrt{4-x^2} - \frac{16}{15}x^2\sqrt{4-x^2} - \tfrac{1}{5}x^4\sqrt{4-x^2}\right)\Bigg|_{x=0}^{x\to2, x<2} = \tfrac{256}{15}.$$

etapa 3. Se studiază natura integralei improprii date, utilizând Criterii:

modul 1. Criteriul comparaţiei cu inegalităţi



$$\left.\begin{array}{l} 0 \leq |f(x)| = \left|\dfrac{x^5}{\sqrt{4-x^2}}\right| \overset{x\geq0}{=} \dfrac{x^5}{\sqrt{4-x^2}} \overset{0\leq x<2}{<} \dfrac{2^5}{\sqrt{4-x^2}}, \forall x \in [0, 2[\,. \\ \int_0^2 \dfrac{2^5}{\sqrt{4-x^2}} dx\,(C) \text{ deoarece, direct} \\ \qquad \int_0^{2-0} \dfrac{2^5}{\sqrt{4-x^2}} dx \overset{\text{d. } \exists}{=} \left(2^5 \arcsin \dfrac{x}{2}\right)\Bigg|_{x=0}^{x\to2, x<2} = 2^5 \cdot \dfrac{\pi}{2}. \end{array}\right\} \overset{\text{Crit. Comp.}}{\Rightarrow} \int_0^2 f(x)\,dx\,(AC)\,.$$

Teorema 5.2.2.(Criteriul în α pentru integrale improprii de speţa 1)

I. Fie $\int_{[a,+\infty[} f(x)\,dx$ -integrală improprie de speţa întâi, cu $b = +\infty$ unicul punct singular. Se presupune că f are semn constant pe intervalul de integrare.

a) Dacă $\left.\begin{array}{l} \exists \alpha \in \left]1,+\infty\right[\text{ a.î.} \\ \exists \lim\limits_{x\to+\infty} x^{\alpha}\left|f(x)\right| = l \text{ şi } 0 \le l < +\infty \end{array}\right\} \Rightarrow \int_{[a,+\infty[} f(x)\,dx\,(AC)$.

b) Dacă $\left.\begin{array}{l} \exists \alpha \in \left]-\infty,1\right] \text{ a.î.} \\ \exists \lim\limits_{x\to+\infty} x^{\alpha}\left|f(x)\right| = l \text{ şi } 0 < l \le +\infty \end{array}\right\} \Rightarrow \int_{[a,+\infty[} f(x)\,dx\,(D)$.

II. Fie $\int_{]-\infty,b]} f(x)\,dx$ -integrală improprie de speţa întâi, cu $a = -\infty$ unicul punct singular. Se presupune că f are semn constant pe intervalul de integrare.

a) Dacă $\left.\begin{array}{l} \exists \alpha \in \left]1,+\infty\right[\text{ a.î.} \\ \exists \lim\limits_{x\to-\infty} (-x)^{\alpha}\left|f(x)\right| = l \text{ şi } 0 \le l < +\infty \end{array}\right\} \Rightarrow \int_{]-\infty,b]} f(x)\,dx\,(AC)$.

b) Dacă $\left.\begin{array}{l} \exists \alpha \in \left]-\infty,1\right] \text{ a.î.} \\ \exists \lim\limits_{x\to-\infty} (-x)^{\alpha}\left|f(x)\right| = l \text{ şi } 0 < l \le +\infty \end{array}\right\} \Rightarrow \int_{]-\infty,b]} f(x)\,dx\,(D)$.

Teorema 5.2.3.(Criteriul în α pentru integrale improprii de speţa 2)

I. Fie $\int_{[a,b[} f(x)\,dx$ -integrală improprie de speţa a doua, cu $b < +\infty$ unicul punct singular, adică $\lim\limits_{x\to b, x<b} f(x) = +\infty$ (sau $= -\infty$). Se presupune că f are semn constant pe intervalul de integrare.

a) Dacă $\left.\begin{array}{l} \exists \alpha \in \left]0,1\right[\text{ a.î.} \\ \exists \lim\limits_{x\to b, x<b} (b-x)^{\alpha}\left|f(x)\right| = l \text{ şi } 0 \le l < +\infty \end{array}\right\} \Rightarrow \int_{[a,b[} f(x)\,dx\,(AC)$.

b) Dacă $\left.\begin{array}{l} \exists \alpha \in \left[1,+\infty\right[\text{ a.î.} \\ \exists \lim\limits_{x\to b, x<b} (b-x)^{\alpha}\left|f(x)\right| = l \text{ şi } 0 < l \le +\infty \end{array}\right\} \Rightarrow \int_{[a,b[} f(x)\,dx\,(D)$.

II. Fie $\int_{]a,b]} f(x)\,dx$ -integrală improprie de speţa a doua, cu $a > -\infty$ unicul punct singular, adică $\lim\limits_{x\to a, x>a} f(x) = +\infty$ (sau $= -\infty$). Se presupune că f are semn constant pe intervalul de integrare.

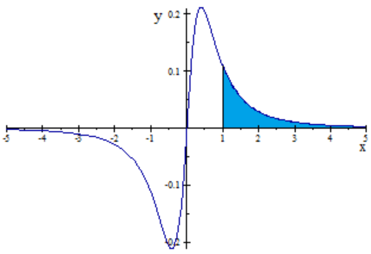
a) Dacă $\left.\begin{array}{l} \exists \alpha \in \left]0,1\right[\text{ a.î.} \\ \exists \lim\limits_{x\to a, x>a} (x-a)^{\alpha}\left|f(x)\right| = l \text{ şi } 0 \le l < +\infty \end{array}\right\} \Rightarrow \int_{]a,b]} f(x)\,dx\,(AC)$.

b) Dacă $\left.\begin{array}{l} \exists \alpha \in \left[1,+\infty\right[\text{ a.î.} \\ \exists \lim\limits_{x\to a, x>a} (x-a)^{\alpha}\left|f(x)\right| = l \text{ şi } 0 < l \le +\infty \end{array}\right\} \Rightarrow \int_{]a,b]} f(x)\,dx\,(D)$.

Exemplul 5.2.3. Să se studieze natura integralelor

a) $\int_1^{+\infty} \dfrac{x}{3x^4+5x^2+1}dx$.

Rezolvare. etapa 1. $f : [1,+\infty[\to \mathbb{R}, f(x) = \dfrac{x}{3x^4+5x^2+1}$.



f este bine definită şi continuă pe $[1,+\infty[\Rightarrow f \in \mathcal{R}_{\text{loc}}([1,+\infty[)$

$b = +\infty$ este unicul punct singular pentru integrala improprie de speţa 1, pe interval nemărginit.

etapa 2. Se studiază natura şi valoarea integralei improprii date, utilizând Definiţia, dacă este posibil-aici este este posibil, dar greoi.

$F(x;c) = \int \dfrac{x}{3x^4+5x^2+1}dx$.

Facem schimbarea de variabilă de integrare: $\begin{cases} x^2 = t, t \in [1, +\infty[\text{ se diferenţiază} \\ 2xdx = 1dt \end{cases}$

Se înlocuieşte$\Rightarrow \dfrac{1}{2}\displaystyle\int \dfrac{1}{3t^2+5t+1}dt = \dfrac{1}{2\cdot 3}\displaystyle\int \dfrac{1}{t^2+\frac{5}{3}t+\frac{1}{3}}dt = \dfrac{1}{2\cdot 3}\displaystyle\int \dfrac{\left(t+\frac{5}{6}\right)'}{\left(t+\frac{5}{6}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{13}}{6}\right)^2}dt =$

$$= \frac{1}{2\cdot 3}\frac{1}{2\frac{\sqrt{13}}{6}} \ln \frac{t+\frac{5}{6}-\frac{\sqrt{13}}{6}}{t+\frac{5}{6}+\frac{\sqrt{13}}{6}} + \widetilde{c}, \forall t \in [1, +\infty[\,, \forall \widetilde{c} \in \mathbb{R}.$$

Se revine la substituţie$\Rightarrow F(x;c) = \dfrac{1}{2\sqrt{13}} \ln \dfrac{x^2+\frac{5}{6}-\frac{\sqrt{13}}{6}}{x^2+\frac{5}{6}+\frac{\sqrt{13}}{6}} + c, \forall x \in [1, +\infty[\,, \forall c \in \mathbb{R}.$

$$\int_1^{+\infty} \frac{x}{3x^4+5x^2+1}dx = \left(\frac{1}{2\sqrt{13}} \ln \frac{x^2+\frac{5}{6}-\frac{\sqrt{13}}{6}}{x^2+\frac{5}{6}+\frac{\sqrt{13}}{6}}\right)\Bigg|_{x=1}^{x\to+\infty} = \frac{1}{2\sqrt{13}} \ln \frac{1^2+\frac{5}{6}-\frac{\sqrt{13}}{6}}{1^2+\frac{5}{6}+\frac{\sqrt{13}}{6}} = \frac{1}{2\sqrt{13}} \ln \frac{11-\sqrt{13}}{11+\sqrt{13}}.$$

<u>etapa 3.</u> Se studiază natura integralei improprii date, utilizând Criterii:
<u>modul 1.</u> <u>Criteriul comparaţiei cu inegalităţi</u>

$$\left.\begin{array}{l} 0 \le |f(x)| = \left|\dfrac{x}{3x^4+5x^2+1}\right| = \dfrac{x}{3x^4+5x^2+1} \le \dfrac{x}{3x^4+0+0} \le \underbrace{\dfrac{1}{3x^3}}_{g(x)}, \forall x \in [1, +\infty[\,. \\ \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{3x^3}dx\,(C) \text{ deoarece, direct} \\ \quad \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{3x^3}dx \overset{\text{d. }\exists}{=} \frac{1}{3}\cdot\frac{x^{-2}}{-2}\Bigg|_{x=1}^{x\to+\infty} = 0 - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{-2}. \end{array}\right\}$$

$$\overset{\text{Crit. Comp}}{\Rightarrow} \int_1^{+\infty} \frac{x}{3x^4+5x^2+1}dx\,(AC).$$

<u>modul 2.</u> <u>Criteriul în α cu limită pentru integrale improprii de speţa 1.</u>

$f(x) = \dfrac{x}{3x^4+5x^2+1} \ge 0, \forall x \in [1, +\infty[\,.$

$l = \displaystyle\lim_{x\to+\infty} x^\alpha |f(x)| = \lim_{x\to+\infty} x^\alpha \frac{x}{3x^4+5x^2+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^{\alpha+1}}{3x^4+5x^2+1}.$

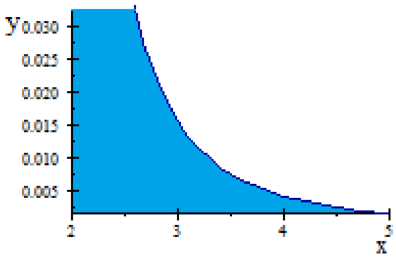
•Se încearcă $\alpha = 3$.$\exists? \displaystyle\lim_{x\to+\infty} x^\alpha |f(x)| \overset{\alpha=3}{=} \lim_{x\to+\infty} x^3 \frac{x}{3x^4+5x^2+1} = \frac{1}{3}.$

$$\left.\begin{array}{l} \exists \alpha = 3 \in]1, +\infty[\text{ a.î.} \\ \exists \displaystyle\lim_{x\to+\infty} x^\alpha |f(x)| = l = \frac{1}{3} \text{ şi } 0 \le l < +\infty \end{array}\right\} \overset{\text{Crit. în } \alpha}{\Rightarrow} \int_1^{+\infty} \frac{x}{3x^4+5x^2+1}dx\,(AC).$$

Exemplul 5.2.4. Să se studieze natura integralelor

a) $\displaystyle\int_2^3 \frac{1}{x^2\left(x^3-8\right)^{\frac{2}{3}}}dx.$

Rezolvare. <u>etapa 1.</u> $f :]2, 3] \to \mathbb{R}, f(x) = \dfrac{1}{x^2\left(x^3-8\right)^{\frac{2}{3}}}.$



f este bine definită şi continuă pe $]2,3] \Rightarrow f \in \mathcal{R}_{\text{loc}}(]2,3])$.

$a=2$ este unicul punct singular pentru integrala improprie de speţa 2, cu integrant nemărginit, deoarece $\lim\limits_{x\to 2, x>2} f(x) = \lim\limits_{x\to 2, x>2} \dfrac{1}{x^2\left[(x-2)\left(x^2+2x+4\right)\right]^{\frac{2}{3}}} = +\infty.$

○etapa 2. Se studiază natura şi valoarea integralei improprii date, utilizând Definiţia, dacă este posibil-aici este este posibil, dar greoi.

pasul 1. $F(x;c) = \int \dfrac{1}{x^2\left(x^3-8\right)^{\frac{2}{3}}}dx = \int x^{-2}\left(x^3-8\right)^{-\frac{2}{3}}dx$-integrală binomă cu $a=1, b=-8$, $m=-2, n=3, p=-\frac{2}{3}$. Conform teoriei de la substituţii Cebâşev, deoarece

$$p = \tfrac{-2}{3} \notin \mathbb{Z} \text{ şi } \frac{m+1}{n} = \frac{-2+1}{3} \notin \mathbb{Z} \text{ şi } \frac{m+1}{n} + p = \frac{-2+1}{3} + \tfrac{-2}{3} \in \mathbb{Z}$$

$\Rightarrow$facem schimbarea de variabilă de integrare $\dfrac{1\cdot x^3-8}{x^3} = t^3$.

$$x^3 \in]8,27] \Leftrightarrow \frac{1}{x^3} \in \left[\tfrac{1}{27}, \tfrac{1}{8}\right[\Leftrightarrow -8\frac{1}{x^3} \in \left]-\tfrac{8}{8}, -\tfrac{8}{27}\right] \Leftrightarrow 1-8\frac{1}{x^3} \in \left]0, \tfrac{19}{27}\right]$$

$$\begin{cases} 1-8\dfrac{1}{x^3} = t^3,\ t \in \left]0, \frac{\sqrt[3]{19}}{3}\right] \Big| \text{ inversăm} \\ x^3 = \dfrac{8}{1-t^3},\ t \in \left]0, \frac{\sqrt[3]{19}}{3}\right] \Big| \\ x = \dfrac{2}{\sqrt[3]{1-t^3}},\ t \in \left]0, \frac{\sqrt[3]{19}}{3}\right] \Big| \text{ diferenţiem} \\ dx = 2\frac{-1}{3}\left(1-t^3\right)^{\frac{-4}{3}}\left(-3t^2\right)dt \end{cases}$$

$$\int \frac{1}{x^2\left(x^3-8\right)^{\frac{2}{3}}}dx = \int \frac{1}{x^2\left(x^3\right)^{\frac{2}{3}}\left(1-8\dfrac{1}{x^3}\right)^{\frac{2}{3}}}dx$$

$$F(t;\widetilde{c}) = \int \frac{1}{\dfrac{16}{\left(\sqrt[3]{1-t^3}\right)^4}t^2} 2\frac{-1}{3}\left(1-t^3\right)^{\frac{-4}{3}}\left(-3t^2\right)dt = \frac{1}{8}\int dt = \frac{1}{8}t + \widetilde{c}, \forall t \in \left]0, \frac{\sqrt[3]{19}}{3}\right], \forall \widetilde{c} \in \mathbb{R}.$$

$$F(x;c) = \frac{1}{8x}\sqrt[3]{x^3-8} + c, \forall x \in]2,3], \forall c \in \mathbb{R}.$$

pasul 2– direct. $\int_{2+0}^{3} \dfrac{1}{x^2\left(x^3-8\right)^{\frac{2}{3}}}dx = \left(\dfrac{1}{8x}\sqrt[3]{x^3-8}\right)\Bigg|_{x\to 2, x>2}^{x=3} = \dfrac{1}{8\cdot 3}\sqrt[3]{3^3-8} - 0$

etapa 3. Se studiază natura integralei improprii date, utilizând Criterii:

modul 1. Criteriul comparaţiei . NU.

modul 2. Criteriul în α cu limită pentru integrale improprii de speţa 2.

$$f(x) = \frac{1}{x^2\left(x^3-8\right)^{\frac{2}{3}}} \geq 0, \forall x \in]2,3].$$

$$l=\lim_{x\to 2,x>2}(x-2)^{\alpha}|f(x)|=\lim_{x\to 2,x>2}(x-2)^{\alpha}\frac{1}{x^2(x-2)^{\frac{2}{3}}(x^2+2x+4)^{\frac{2}{3}}}.$$

$\bullet$Se încearcă $\alpha=\frac{2}{3}$.$\exists$? $\lim_{x\to 2,x>2}(x-2)^{\alpha}|f(x)|\overset{\alpha=\frac{2}{3}}{=}\lim_{x\to 2,x>2}\frac{1}{x^2(x^2+2x+4)^{\frac{2}{3}}}=\frac{1}{4\cdot 12^{\frac{2}{3}}}$.

$$\left.\begin{array}{l}\exists\alpha=\frac{2}{3}\in\,]0,1[\text{ a.î.}\\ \exists\lim_{x\to 2,x>2}(x-2)^{\alpha}|f(x)|=l=\frac{1}{4\cdot 12^{\frac{2}{3}}}\text{ şi }0\le l<+\infty\end{array}\right\}\overset{\text{Crit. în }\alpha}{\Rightarrow}\int_2^3\frac{1}{x^2(x^3-8)^{\frac{2}{3}}}dx\,(AC).$$

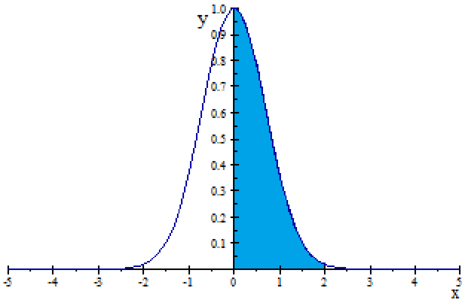
Exemplul 5.2.5. Să se studieze natura integralelor

a) $\int_0^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}+\sqrt[5]{x}}dx-$ a se vedea Seminar.

Exerciţiul 5.2.6. Să se studieze natura integralelor:

a) *integrala Gauss-Poisson* sau *a probabilităţilor*

$\int_0^{+\infty}e^{-x^2}dx$



– a se vedea Seminar.

b) Pentru $p>0$ dat, *integralele Dirichlet* $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x^p}dx$ şi $\int_1^{+\infty}\frac{\cos x}{x^p}dx-$ a se vedea Seminar.

Concluzii:

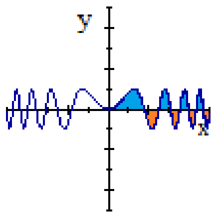
$$\boxed{\begin{cases}\text{-pentru } p\in\,]0,2[\,\Rightarrow\mathcal{I}_1-(C)\text{ şi }\mathcal{I}_2-(C)\Rightarrow\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x^p}dx\,(C)\,(\text{ chiar }(SC)).\\ \text{-pentru } p\in[2,+\infty[\,\Rightarrow\mathcal{I}_1-(D)\text{ şi }\mathcal{I}_2-(C)\Rightarrow\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x^p}dx\,(D).\end{cases}}$$

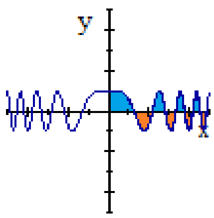
$$\boxed{\begin{cases}\text{-pentru } p\in\,]0,1[\,\Rightarrow\mathcal{I}_1-(C)\text{ şi }\mathcal{I}_2-(C)\Rightarrow\int_0^{+\infty}\frac{\cos x}{x^p}dx\,(C)\,(\text{ chiar }(SC)).\\ \text{-pentru } p\in[1,+\infty[\,\Rightarrow\mathcal{I}_1-(D)\text{ şi }\mathcal{I}_2-(C)\Rightarrow\int_0^{+\infty}\frac{\cos x}{x^p}dx\,(D).\end{cases}}$$

c) Pentru $p>0$ dat, *integralele Fresnel* (folosite în optică)

$\int_0^{+\infty}\sin x^2dx$ şi $\int_0^{+\infty}\cos x^2dx$

Rezolvare





-a se vedea Seminar

$\boxed{\int_0^{+\infty} \sin\left(x^2\right) dx\,(C)\,.}$ $\boxed{\int_0^{+\infty} \cos\left(x^2\right) dx\,(C)\,.}$

Observaţia 5.2.4. Teorema de liniaritate a integralei improprii
$\int_{\mathbb{I}} (\alpha f(x) + \beta g(x))\, dx = \alpha \int_{\mathbb{I}} f(x)\, dx + \beta \int_{\mathbb{I}} g(x)\, dx$,
teorema integrării prin părţi, precum şi teoremele de schimbare de variabilă se pot aplica numai dacă, anterior, s-a stabilit, pe baza unui criteriu, că integralele şi limitele ce apar în formule sunt convergente.

Este posibil ca, printr-o schimbare de variabilă, o integrală improprie să se transforme într-o integrală Riemann şi reciproc.

Exemplul 5.2.6. Să se studieze natura următoarelor integrale şi, în caz de convergenţă, să se determine valoarea lor

a) $\int_0^1 x \cdot \sqrt{\dfrac{x}{1-x}} dx.$

Rezolvare. etapa 1. $f : [0,1[\to \mathbb{R}, f(x) = x \cdot \sqrt{\dfrac{x}{1-x}}.$

f este bine definită şi continuă pe $[0,1[\Rightarrow f \in \mathcal{R}_{\text{loc}}([0,1[)\,.$

$b = 1$ este unicul punct singular pentru integrala improprie de speţa 2, cu integrant nemărginit, deoarece $\lim\limits_{x\to 1, x<1} f(x) = \lim\limits_{x\to 1, x<1} x \cdot \sqrt{\dfrac{x}{1-x}} = +\infty.$

etapa 2. Se studiază natura şi valoarea integralei improprii date, utilizând Definiţia, dacă este posibil-aici este posibil, dar greoi.

pasul 1. $F(x;c) = \int x \cdot \sqrt{\dfrac{x}{1-x}} dx = \int x^{-2}\left(x^3 - 8\right)^{-\frac{2}{3}} dx$-integrală binomă cu $a = 1, b = -8$, $m = -2, n = 3, p = -\frac{2}{3}$.

Se face schimbarea de variabilă de integrare:$\begin{cases} x = \sin^2 t,\ t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[\mid \text{diferenţiem} \\ dx = 2\sin t \cos t dt \end{cases}$

$$F(t;\widetilde{c}) = \int \sin^2 t \cdot \frac{\sin t}{\cos t} 2\sin t \cos t dt =$$
$$= 2\int (\sin t)^4 dt = 2\int \left(\frac{1-\cos 2t}{2}\right)^2 dt = \tfrac{1}{2}\int \left(1 - 2\cos 2t + \frac{1+\cos 4t}{2}\right) dt =$$
$$= \tfrac{1}{2}\left(t - 2\frac{\sin 2t}{2} + \tfrac{1}{2}t + \tfrac{1}{2}\frac{\sin 4t}{4}\right) + \widetilde{c}, \forall t \in \left[0, \tfrac{\pi}{2}\right[, \forall \widetilde{c} \in \mathbb{R}.$$

Se revine la substituţie$\Rightarrow$greoi.

etapa 3. Se studiază natura integralei improprii date, utilizând Criterii:

Criteriul în α cu limită pentru integrale improprii de speţa 2.

$f(x) = x \cdot \sqrt{\dfrac{x}{1-x}} \geq 0, \forall x \in [0,1[\,.$

$l = \lim\limits_{x\to 1, x<1} (1-x)^\alpha |f(x)| = \lim\limits_{x\to 1, x<1} (1-x)^\alpha \cdot x \cdot \sqrt{\dfrac{x}{1-x}}.$

$\bullet$Se încearcă $\alpha = \frac{1}{2}$.$\exists?\ \lim\limits_{x\to 1, x<1} (1-x)^\alpha |f(x)| \overset{\alpha=\frac{1}{2}}{=} \lim\limits_{x\to 1, x<1} x \cdot x^{\frac{1}{2}} = 1.$

$$\left.\begin{array}{l} \exists \alpha = \frac{1}{2} \in]0,1[\text{ a.î.} \\ \exists \lim\limits_{x\to 1, x<1} (1-x)^\alpha |f(x)| = l = 1 \text{ şi } 0 \leq l < +\infty \end{array}\right\} \overset{\text{Crit. în } \alpha}{\Rightarrow} \int_0^1 x \cdot \sqrt{\frac{x}{1-x}} dx\,(AC)\,.$$

etapa 3. Se calculează integrala improprie folosind integrare prin părţi sau schimbare de variabilă în integrala improprie convergentă:

$\int_0^{1-0} x \cdot \sqrt{\dfrac{x}{1-x}} dx = ?$

Se face schimbarea de variabilă de integrare

$$\begin{cases} x = \sin^2 t,\ t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[\mid \text{diferenţiem} \\ dx = 2\sin t \cos t dt \\ \text{capete:} \begin{cases} x = 0 \Rightarrow t = 0 \\ x \to 1, x < 1 \Rightarrow t \to \frac{\pi}{2}, t < \frac{\pi}{2} \end{cases} \end{cases}$$

$\int_0^{1-0} x \cdot \sqrt{\dfrac{x}{1-x}} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}-0} \sin^2 t \cdot \dfrac{\sin t}{\cos t} 2\sin t \cos t dt =$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}-0} (\sin t)^4 dt = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}-0} \left(\frac{1-\cos 2t}{2}\right)^2 dt = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}-0} \left(1 - 2\cos 2t + \frac{1+\cos 4t}{2}\right) dt =$$

$$= \frac{1}{2}\left(t - 2\frac{\sin 2t}{2} + \frac{1}{2}t + \frac{1}{2}\frac{\sin 4t}{4}\right)\Bigg|_{t=0}^{t\to\frac{\pi}{2}, t<\frac{\pi}{2}} = \frac{3\pi}{8}.$$

○6. INTEGRALA IMPROPRIE CU PARAMETRI. FUNCŢIILE EULER Γ şi B

-se va studia la Statistică şi Prelucrarea Datelor

○6.1. Integrala improprie cu parametri. Definiţii. Exemple. Criterii...

○6.2. Funcţiile Γ şi B ale lui Euler

Propoziţia 1. Este bine definită *funcţia gamma a lui Euler*

$$\boxed{(1)\ \Gamma :]0, +\infty[\to \mathbb{R}, \Gamma(p) = \int_0^{+\infty} x^{p-1} e^{-x} dx}$$

ca şi integrală improprie cu parametri punctual convergentă.

○**Demonstraţie.** Integrala Γ are tipul, natura şi valoarea în funcţie de parametrul p.

etapa 1.•Pentru parametrul $p \geq 1 \Rightarrow f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}, f(x) = x^{p-1}e^{-x}$.

f este bine definită şi continuă pe $[0, +\infty[\Rightarrow f \in \mathcal{R}_{\text{loc}}([0, +\infty[)$

$b = +\infty$ este unicul punct singular pentru integrala improprie de speţa 1, pe interval nemărginit.

•Pentru parametrul $p \in]0, 1[\Rightarrow f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}, f(x) = \dfrac{e^{-x}}{x^{1-p}}$.

f este bine definită şi continuă pe $]0, +\infty[\Rightarrow f \in \mathcal{R}_{\text{loc}}(]0, +\infty[)$

$b = +\infty$ este punct singular pentru integrala improprie de speţa 1, pe interval nemărginit.

$a = 0$ este punct singular pentru integrala improprie de speţa 2, cu integrant nemărginit, deoarece $\lim\limits_{x\to 0, x>0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0, x>0} \dfrac{e^{-x}}{x^{1-p}} = +\infty$

etapa 2. Se studiază natura şi valoarea integralei, utilizând Definiţia-aici nu este posibil.

etapa 3. Se studiază natura integralei improprii date, utilizând Criterii. Se studiază separat

$\Gamma_1 :]0, +\infty[\to \mathbb{R}, \Gamma_1(p) = \int_0^1 x^{p-1}e^{-x}dx$ şi $\Gamma_2 :]0, +\infty[\to \mathbb{R}, \Gamma_2(p) = \int_1^{+\infty} x^{p-1}e^{-x}dx$.

•Se studiază Γ_1 :

-pentru $p \geq 1 \Rightarrow \Gamma_1(p) = \int_0^1 x^{p-1}e^{-x}dx\ (C)$ ca şi integrală Riemann, chiar (AC).

-pentru $p \in]0, 1[\Rightarrow \Gamma_1(p) = \int_0^1 x^{p-1}e^{-x}dx$-se studiază natura cu

Criteriul în α pentru integrale improprii de speţa 2.

$f(x) = x^{p-1}e^{-x} \geq 0, \forall x \in]0, 1]$

$l_1 = \lim\limits_{x\to 0, x>0} (x-0)^{\alpha_1} f(x) = \lim\limits_{x\to 0, x>0} x^{\alpha_1}x^{p-1}e^{-x} = \lim\limits_{x\to 0, x>0} x^{\alpha_1}\dfrac{e^{-x}}{x^{1-p}}$.

•Se încearcă $\alpha_1 = 1 - p \in]0, 1[.\exists? \lim\limits_{x\to 0, x>0} (x-0)^{\alpha_1} f(x) \overset{\alpha_1 = 1-p}{=} \lim\limits_{x\to 0, x>0} e^{-x} = 1.$

$$\left.\begin{array}{l}\exists\alpha_1 = 1-p \in \left]0,1\right[\text{ a.î.}\\ \exists \lim\limits_{x\to 0, x>0} (x-0)^{\alpha}\left|f(x)\right| = l_1 = 1 \text{ şi } 0 \le l < +\infty\end{array}\right\} \stackrel{\text{Crit. în } \alpha}{\Rightarrow} \Gamma_1(p)\,(AC).$$

Deci $\Gamma_1(p)-(C)$ pentru $p\in\left]0,1\right[$ şi $\Gamma_1(p)-(C)$ pentru $p\in\left[1,+\infty\right[$.

•Se studiază Γ_2 :

-pentru $p\in\left]0,+\infty\right[\Rightarrow \Gamma_2(p)=\int_1^{+\infty} x^{p-1}e^{-x}dx$-se studiază natura cu <u>Criteriul în α pentru integrale improprii de speţa 1.</u>

$f(x) = x^{p-1}e^{-x} \ge 0, \forall x\in\left[1,+\infty\right[$

$$l_2 = \lim_{x\to+\infty} x^{\alpha_2} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x^{\alpha_2}x^{p-1}e^{-x} = \lim_{x\to+\infty} x^{\alpha_2}\frac{x^{p-1}}{e^x}.$$

•Se încearcă $\alpha_2 = p+1 \in \left]1,+\infty\right[. \exists? \lim\limits_{x\to+\infty} x^{\alpha_2} f(x) \stackrel{\alpha_2=p+1}{=} \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^{2p}}{e^x} = 0.$

$$\left.\begin{array}{l}\exists\alpha_2 = p+1 \in \left]1,+\infty\right[\text{ a.î.}\\ \exists \lim\limits_{x\to +\infty} x^{\alpha_2}\left|f(x)\right| = l_2 = 0 \text{ şi } 0 \le l < +\infty\end{array}\right\} \stackrel{\text{Crit. în } \alpha}{\Rightarrow} \Gamma_2(p)\,(AC).$$

Deci $\Gamma_2(p)-(C)$ pentru $p>0$.

<u>Concluzie.</u> $\forall p>0$ parametru dat, $\Gamma_1(p)-(C)$ şi $\Gamma_2(p)-(C) \Rightarrow \Gamma(p)-(C)$.

Propoziţia 2. (**Proprietăţi ale** Γ)

a) Funcţia $\Gamma:\left]0,+\infty\right[\to\mathbb{R}$ este bine definită şi continuă pe $\left]0,+\infty\right[$.

b) $\boxed{(2)\ \Gamma(p)>0, \forall p>0.}$

c) $\boxed{\Gamma(1)=1.}$

(**formula de recurenţă**): $\boxed{(3)\ \Gamma(p+1) = p\Gamma(p), \forall p>0}$

În particular, $\boxed{(4)\ \Gamma(n+1) = n!, \forall n\in\mathbb{N}.}$

d) (**relaţia complementelor**): (5) $\Gamma(p)\cdot\Gamma(1-p) = \dfrac{\pi}{\sin\pi p}, \forall 0<p<1$

e) (**relaţia de dedublare**): (6) $2^{2p-1}\cdot\Gamma(p)\cdot\Gamma(p+1) = \sqrt{\pi}\cdot\Gamma(2p), \forall p>0.$

Demonstraţie.

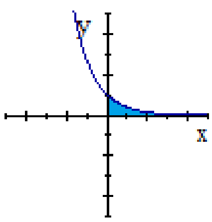
a) Fie $\forall[a,b]\subset\left]0,+\infty\right[$. Cum $\forall p\in[a,b]$ rezultă $-1<a-1\leqslant p-1\leqslant b-1$, se deduce

$$\begin{cases}\text{dacă } x\geqslant 1 & \text{atunci } x^{p-1}e^{-x}\leqslant x^{a-1}\\ \text{dacă } 0\leqslant x\leqslant 1 & \text{atunci } x^{p-q}e^{-x}\leqslant x^{b-1}\end{cases}.$$

Atunci se obţin pentru $\Gamma_1(p)$ şi $\Gamma_2(p)$ majorări independente de p. De aici uniforma convergenţă a integralei $\Gamma(p)$, şi deci continuitatea lui Γ.

b) Are loc deoarece, acolo unde este definit, integrantul $f(x) = x^{p-1}\cdot e^{-x}$ este pozitiv.

c) $\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-x}dx = \left.\frac{e^{-x}}{-1}\right|_{x=0}^{x\to+\infty} = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^{-x}}{-1} - \frac{e^{-0}}{-1} = 1.$



$$\Gamma(p+1) = \int_0^{+\infty} x^{(p+1)-1}\cdot e^{-x}dx = \int_0^{+\infty} x^p\cdot\left(\frac{e^{-x}}{-1}\right)' dx \stackrel{\text{Obs.}}{=} x^p\cdot\left.\left(\frac{e^{-x}}{-1}\right)\right|_{x\to0,x>0}^{x\to+\infty} - \int_0^{+\infty} px^{p-1}\frac{e^{-x}}{-1}dx =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} x^p\cdot\left(\frac{e^{-x}}{-1}\right) - \lim_{x\to0,x>0} x^p\cdot\left(\frac{e^{-x}}{-1}\right) + p\int_0^{+\infty} x^{p-1}e^{-x}dx =$$

$$= -\lim_{x\to+\infty}\frac{x^p}{e^x} + \lim_{x\to 0, x>0}\left(e^{-x}\cdot x^p\right) + p\cdot\Gamma(p) = p\cdot\Gamma(p).$$

Exerciţiul 1.a) $\boxed{(7)\ \int_0^{+\infty} e^{-x^n}dx = \Gamma\left(1+\frac{1}{n}\right), \forall n\in\mathbb{N}^*.}$

Indicaţie: Se obţine din (1), făcând schimbarea de varibailă $y = x^n$.

b) (8) $\int_0^{+\infty} x^\alpha \cdot e^{-ax^\beta}dx = \frac{1}{\beta a^{\frac{\alpha+1}{\beta}}}\ \Gamma\left(\frac{\alpha+1}{\beta}\right)$, unde $\beta>0, \alpha>-1, a>0$.

Indicaţie: Se face schimbarea de variabilă

$$\begin{cases} ax^\beta = y \\ x = \left(\frac{y}{a}\right)^{\frac{1}{\beta}}; \\ dx = \frac{1}{\beta}\left(\frac{y}{a}\right)^{\frac{1}{\beta}-1}\cdot\frac{1}{a}dy \\ \text{capete: } \begin{cases} x\to 0, x>0 \Rightarrow y\to 0, y>0 \\ x\to+\infty \Rightarrow y\to+\infty \end{cases} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\int_0^{+\infty} x^a\cdot e^{-ax^\beta}dx = \int_0^{+\infty}\left(\frac{y}{a}\right)^{\frac{\alpha}{\beta}}\cdot e^{-y}\cdot\frac{1}{\beta}\left(\frac{y}{a}\right)^{\frac{1}{\beta}-1}\cdot\frac{1}{a}dy = \frac{1}{\beta a^{\frac{\alpha+1}{\beta}}}\int_0^{+\infty} y^{\frac{\alpha+1}{\beta}-1}\cdot e^{-y}dy = \frac{1}{\beta a^{\frac{\alpha+1}{\beta}}}\Gamma\left(\frac{a+1}{\beta}\right).$$

Propoziţia 3. Este bine definită *funcţia beta a lui Euler*

$$\boxed{(9)\ B:]0,+\infty[\times]0,+\infty[\to\mathbb{R}, B(p,q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx,}$$

ca şi integrală improprie cu parametri punctual convergentă.

○**Demonstraţie.** Într-adevăr:

•Pentru $p\geqslant 1, q\geqslant 1$, integrantul $f:[0,1]\to\mathbb{R}, f(x) = x^{p-1}(1-x)^{q-1}$ este mărginit şi continuu pe $[0,1]$, deci $B(p,q)$ este convergentă ca integrală Riemann.

•Pentru $0<p<1$ şi $q\geqslant 1$, integrantul $f:]0,1]\to\mathbb{R}, f(x) = \dfrac{(1-x)^{q-1}}{x^{1-p}}$ este nemărginit în $x=0$, deoarece $\lim\limits_{x\to 0,x>0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0,x>0}\dfrac{(1-x)^{q-1}}{x^{1-p}} = +\infty$. Deci $B(p,q)$ este integrală improprie cu integrant nemărginit.

Cum $\lim\limits_{x\to 0,x>0}(x-0)^\alpha\cdot\dfrac{(1-x)^{q-1}}{x^{1-p}} \overset{\text{pentru } \alpha=1-p}{=} 1 \overset{\text{Criteriul în } \alpha}{\Rightarrow}$ integrala $B(p,q)$ este convergentă.

•Pentru $p\geqslant 1$ şi $0<q<1$ integrantul $f: [0,1[\to\mathbb{R}, f(x) = \dfrac{x^{p-1}}{(1-x)^{1-q}}$ este nemărginit în $x=1$, deoarece $\lim\limits_{x\to 1,x<1} f(x) = \lim\limits_{x\to 1,x<1}\dfrac{x^{p-1}}{(1-x)^{1-q}} = +\infty$. Deci $B(p,q)$ este integrală improprie cu integrant nemărginit.

Cum $\lim\limits_{x\to 1,x<1}(1-x)^\alpha\cdot\dfrac{x^{p-1}}{(1-x)^{1-q}} \overset{\text{pentru } \alpha=1-q}{=} 1 \overset{\text{Criteriul în } \alpha}{\Rightarrow}$ integrala $B(p,q)$ este convergentă.

•Pentru $0<p<1$ şi $0<q<1$ integrantul $f:]0,1[\to\mathbb{R}, f(x) = \dfrac{1}{x^{1-p}\cdot(1-x)^{1-q}}$ este nemărginit şi în $x=0$ şi în $x=1$.

Se studiază analog cu situaţiile anterioare.

Propoziţia 4. (**Proprietăţi ale** B)

a) $\boxed{(10)\ B(p,q) = B(q,p), \forall p,q>0;}$

b) (11) $B(p,q) = \int_0^{+\infty} y^{p-1}\cdot\dfrac{1}{(1+y)^{p+q}}dy;$

c) (12) $B(p,q) = \frac{1}{(b-a)^{p+q-1}}\cdot\int_a^b (y-a)^{p-1}\cdot(b-y)^{q-1}dy;$

d) (13) $B(p,q) = 2\int_0^2 (\cos y)^{2p-1}\cdot(\sin y)^{2q-1}dy.$

Demonstraţie: În (2) se fac schimbările de variabile
a) $y = 1 - x$; **b)** $y = \frac{x}{1+x}$; **c)** $y = a + (b - a)x$; **d)** $y = (\cos x)^2$.

Exerciţiul 2. $\boxed{(14)\ B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \pi.}$

Rezolvare. <u>modul 1.</u> Din (13) $\Rightarrow B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} dy = 2\left(\frac{\pi}{2} - 0\right) = \pi$.
<u>modul 2.</u> Din Definiţia (9) $\Rightarrow B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \int_0^1 x^{\frac{1}{2}-1}(1-x)^{\frac{1}{2}-1} dx = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x - x^2}} dx$ este integrală improprie cu punctele singulare $0, 1$; integrala este cu integrant nemărginit, deoarece

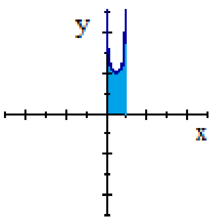
$$\lim_{x\to 0, x>0} f(x) = \lim_{x\to 0, x>0} \frac{1}{\sqrt{x - x^2}} = +\infty \text{ şi } \lim_{x\to 1, x<1} f(x) = \lim_{x\to 1, x<1} \frac{1}{\sqrt{x - x^2}} = +\infty.$$

Din definiţia funcţiei B, integrala este convergentă.

$$B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(x - \frac{1}{2}\right)^2}} dx = \arcsin \frac{x - \frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} \Bigg|_{x\to 0, x>0}^{x\to 1, x<1} =$$

$$= \lim_{x\to 1, x<1} \left(\arcsin \frac{x - \frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}\right) - \lim_{x\to 0, x>0} \left(\arcsin \frac{x - \frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}\right) = \arcsin 1 - \arcsin(-1) = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) =$$

π.



Propoziţia 5. (**Legătura între funcţiile Γ şi B**) $\boxed{(15)\ B(p, q) = \frac{\Gamma(p) \cdot \Gamma(q)}{\Gamma(p + q)}, \forall p, q > 0.}$

Exerciţiul 3. Să se arate că:
a) $\boxed{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.}$

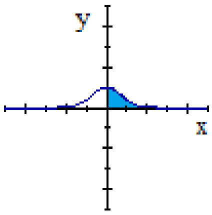
Rezolvare. $B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \overset{(15)}{=} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(1)} \Rightarrow \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$ sau
$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \cdot \Gamma(1 - \frac{1}{2}) = \frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{2}} \Rightarrow \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$.

b) $\boxed{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.}$

Rezolvare. $\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \Gamma\left(1 + \frac{1}{2}\right) \overset{(3)}{=} \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$.

c) $\boxed{\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}}$ (*integrala Euler-Poisson-Laplace*)

Rezolvare. $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx \overset{x^2 = y}{=} \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.



Exerciţiul 4. Să se calculeze:
a) $\int_0^1 \sqrt{x-x^2}dx$; **b)** $\int_0^1 \sqrt{x^5(1-x)}dx$; **c)** $\int_0^1 x\sqrt[4]{x^4(1-x)}dx$.
Rezolvare. În toate cazurile, presupunem ca s-au parcurs etapele de studiu a integralei (este Riemann sau este improprie), încât să se poată trece direct la calcul.
a) $\int_0^1 \sqrt{x-x^2}dx = \int_0^1 x^{\frac{3}{2}-1}\cdot(1-x)^{\frac{3}{2}-1}dx = B(\frac{3}{2},\frac{3}{2}) = \frac{\Gamma(\frac{3}{2})\cdot\Gamma(\frac{3}{2})}{\Gamma(3)} = \frac{\frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2})\cdot\frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2})}{2!} = \frac{\frac{1}{2}\cdot\sqrt{\pi}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\pi}}{2} = \frac{\pi}{8}$;
b) $\int_0^1 \sqrt{x^5(1-x)}dx = \int_0^1 x^{\frac{7}{2}-1}(1-x)^{\frac{3}{2}-1}dx = B\left(\frac{7}{2},\frac{3}{2}\right) = \frac{\Gamma(\frac{7}{2})\cdot\Gamma(\frac{3}{2})}{\Gamma(5)} = \frac{\frac{5}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\pi}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\pi}}{4!} = \frac{5\pi}{128}$;
c) $\int_0^1 x\sqrt[4]{x^4(1-x)}dx = \int_0^1 x^{\frac{7}{4}}(1-x)^{\frac{1}{4}}dx = B\left(\frac{11}{4},\frac{5}{4}\right) = \frac{\Gamma(\frac{7}{2})\cdot\Gamma(\frac{5}{4})}{\Gamma(\frac{16}{4})} = \frac{\frac{7}{4}\cdot\frac{3}{4}\cdot\Gamma(\frac{3}{4})\cdot\frac{1}{4}\cdot\Gamma(\frac{1}{4})}{3!} =$
$= \frac{7}{2\cdot4^3}\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\cdot\Gamma\left(1-\frac{1}{4}\right) = \frac{7}{2\cdot4^3}\cdot\frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{4}} = \frac{7\pi\sqrt{2}}{128}$.
Exerciţiul 5. Să se calculeze:
a) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx$; **b)** $\int_0^{+\infty} \dfrac{1}{1+x^n}dx$.
Rezolvare. În toate cazurile, presupunem ca s-au parcurs etapele de studiu a integralei (este Riemann sau este improprie), încât să se poată trece direct la calcul.
a) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx \overset{y=\sin^3 x}{=} \frac{1}{2}\int_0^1 y^{\frac{n+1}{2}-1}\cdot(1-y)^{\frac{1}{2}-1}dy = \frac{1}{2}B\left(\frac{n+1}{2},\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{n+2}{2})} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\Gamma(\frac{n+2}{2})}$.
b) $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^n}dx \overset{y=\frac{1}{1+x^n}}{=} \int_0^1 y\cdot\left(\frac{y-1}{y}\right)^{\frac{1}{n}-1}\cdot\frac{1}{n}\cdot\frac{-1}{y^2}dy = -\frac{1}{n}\int_0^1 y^{-\frac{1}{n}}(1-y)^{\frac{1}{n}-1}dy =$
$= \frac{1}{n}B\left(-\frac{1}{n}+1,\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n}\frac{\Gamma(-\frac{1}{n}+1)\cdot\Gamma(\frac{1}{n})}{\Gamma(1)} = \frac{1}{n}\frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{n}}$.