CURS NR. 11, REZOLVĂRI
EDCO, AIA

CALCUL OPERAŢIONAL

Una dintre ideile Calculului Operaţional constă în introducerea transformărilor integrale pentru a reduce rezolvarea unor ecuaţii diferenţiale sau sisteme de ecuaţii diferenţiale la rezolvarea unor ecuaţii sau sisteme algebrice care, cel puţin din punct de vedere teoretic, sunt mai uşor de analizat.

7. TRANSFORMATA LAPLACE

Utilizarea transformatei Laplace este o metodă alternativă de rezolvare ecuaţiilor şi sistemelor de ecuaţii diferenţiale studiate în cursurile anterioare.

Transformata Laplace a fost introdusă de matematicianul, fiziacianul şi astronomul Pierre-Simon (marchiz) de Laplace (1749-1827), în lucrarea "*Essai philosophique sur les probabilités*" (1814), unde a folosit o formulă similară cu cea actuală şi cu un alt scop. Teoria a fost dezvoltată de matematicieni ca Mathias Lerch (1860-1922), Oliver Heaviside (1850-1925) şi Thomas Bromwich (1875-1929), iar forma actuală a transformatei Laplace şi utilizarea acesteia s-a conturat în preajma celui de-Al Doilea Război Mondial. Denumirea de transformată Laplace i se datorează matematicianului Gustav Doetsch (1892-1977), care a evidenţiat avantajele folosirii acestei transformări în inginerie şi pentru rezolvarea unor ecuaţii/sisteme diferenţiale.

O manieră de înţelegere grafică/ vizuală a transformatei Laplace va fi prezentată şi ulterior, la Matematici Speciale, după înţelegerea analizei matematice a funcţiilor complexe. A se vedea Eugene Khutoryansky, "Laplace Transform Explained and Visualized Intuitively",

https://www.youtube.com/watch?v=6MXMDrs6ZmA .

Transformata Laplace are aplicabilitate în studiul proceselor aproape continue din matematică, fizică, optică, inginerie electrică, automatică, prelucrarea semnalelor şi teoria probabilităţilor. În matematică, este folosită la rezolvarea ecuaţiilor diferenţiale şi integrale. În fizică, este folosită la analiza sistemelor liniare invariante în timp, cum ar fi circuitele electrice, oscilatorii armonici, dispozitive optice şi sistemele mecanice.

7.1. Definiţii. Determinare de tranformată Laplace (funcţie imagine) pentru o funcţie original dată, respectiv de funcţie original pentru o funcţie imagine dată

Transformata Laplace se utilizează în studiul proceselor aproape continue, în rezolvarea unor ecuaţii şi sisteme de ecuaţii diferenţiale, integro-diferenţiale.

Definiţia 7.1.1. O funcţie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ (sau $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}, f(t)=x(t)+iy(t)$) se numeşte *funcţie original* dacă:

(i) $f(t)=0, \forall t\in\,]-\infty,0[$ ($\operatorname{supp} f\subset[0,+\infty[$);

(ii) pe orice interval mărginit, f are cel mult un număr finit de puncte de discontinuitate de speţa întâi (există limite laterale finite);

(iii) f are o creştere de tip exponenţial, adică $\exists M\in\mathbb{R}$, $M>0$, $\exists\sigma\in\mathbb{R}$, astfel încât

$|f(t)| \leq Me^{\sigma t}, \forall t \in \left]0, +\infty\right[$.
Numărul real $\sigma_f = \inf \left\{\sigma \in \mathbb{R}; |f(t)| \leq Me^{\sigma t}, \forall t \in \left]0, +\infty\right[\right\}$ se numeşte *abscisă de convergenţă* sau *indice de creştere.*

Se notează cu $\mathcal{O}$ mulţimea tuturor funcţiilor original.

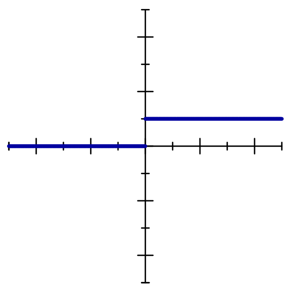
$\bigcirc$**Observaţie Matematici Speciale.**

a) (ii) şi **(iii)** se pot înlocui cu
$\exists \sigma \in \mathbb{R}$ astfel încât $t \longmapsto e^{-\sigma t} \cdot f(t)$ este în $L^1(\mathbb{R})$.
Atunci,
-pentru $\sigma > \sigma_f \Rightarrow t \longmapsto e^{-\sigma t} \cdot f(t)$ este în $L^1(\mathbb{R})$,
-pentru $\sigma \leq \sigma_f \Rightarrow t \longmapsto e^{-\sigma t} \cdot f(t)$ nu este în $L^1(\mathbb{R})$.

b) Se numeşte *spaţiu Heaviside* de ordin α spaţiul
$H(\alpha) = \{f \in \mathcal{O}; f \text{ are indicele de creştere } \sigma_f \leq \alpha\}$.
$f \in H(\alpha)$ dacă $f \in \mathcal{O}$ şi $\forall \sigma > \alpha, t \longmapsto e^{-\sigma t} \cdot f(t)$ este în $L^1(\mathbb{R})$, adică $\exists g \in L^1(\mathbb{R})$ astfel încât $f(t) = e^{\sigma t} g(t)$.

Observaţia 7.1.1. Dacă f şi g sunt două funcţii original cu acelaşi indice de creştere σ, atunci combinaţia liniară $\alpha f + \beta g$ este funcţie original cu acelaşi indice de creştere. A se vedea Teorema de Liniaritate. Atunci mulţimea funcţiilor original (chiar dacă au indicele de creştere diferit) este un spaţiu liniar/ vectorial complex.

Exemplul 7.1.1. a) Funcţia $\eta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (sau $\eta : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$), $\eta(t) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } t < 0 \\ 1, & \text{dacă } t \geq 0. \end{cases}$
se numeşte f*uncţia treapta unitate* (*funcţia Heaviside*). În alte materiale pot apărea notaţii diverse, precum $H(t), u(t), \theta(t) -$ a se vedea https://mathworld.wolfram.com/HeavisideStepFunction.html sau Mary Attenborough, *Mathematics For Electrical Engineering And Computing.*



$\eta \in \mathcal{O}$ cu abscisa de convergenţă $\sigma_\eta = 0$.

b) Dacă f verifică (ii) şi (iii) din Definiţia 1 atunci funcţia $f \cdot \eta$ este funcţie original. Din acest motiv, în unele dintre exerciţii se va scrie doar f, subînţelegând $f \cdot \eta$.

c) Dacă $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este o funcţie elementară, atunci $f \cdot \eta$ îndeplineşte (i) şi (ii). Dacă există $\beta \geq 0$ astfel încât $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) e^{-\beta t} = 0$, atunci este îndeplinită şi condiţia (iii).

d) Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(t) = e^{\alpha t}(P(t) \cos \beta t + Q(t) \sin \beta t)$,
unde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, iar P, Q sunt polinoame. Atunci funcţia $f \cdot \eta$ este funcţie original.

În particular, funcţia
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}, f(t) = \begin{cases} 0 & , t < 0 \\ a_0 t^n + a_1 t^{n-1} + \cdots + a_{n-1} t + a_n & , t \geq 0 \end{cases}$
este funcţie original, deoarece:
(i) $f(t) = 0, \forall t \in \left]-\infty, 0\right[$;
(ii) pe orice interval mărginit, f are cel mult un număr finit de puncte de discontinuitate, iar în aceste puncte de discontinuitate există limite laterale finite. Într-adevăr, $t_1 = 0$ şi
$\left\{ \; l_s(0) = 0 \text{ şi } l_d(0) = a_n; \right.$

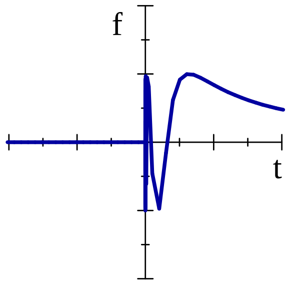
(iii) f are o creştere de tip exponenţial, adică $\exists M>0$, $\exists\sigma=0\in\mathbb{R}$, astfel încât
$\left|a_0t^n+a_1t^{n-1}+\cdots+a_{n-1}t+a_n\right|\le M\cdot\left(1+\frac{1}{1!}t+...+\frac{1}{n!}t^n\right)\le Me^t,\forall t\in\left]0,+\infty\right[$
unde
$M=\max\left\{n!\cdot|a_0|,(n-1)!\cdot|a_1|,...,1!\cdot|a_{n-1}|,|a_n|\right\}.$
Atunci $f\in\mathcal{O}$, cu abscisa de convergenţă $\sigma_f=1$.

e) Dacă $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ (sau $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$) este o funcţie continuă şi mărginită (sau îndeplineşte (ii) şi este mărginită), atunci $f\cdot\eta$ este funcţie original cu abscisa de convergenţă $\sigma_{f\cdot\eta}=0$.

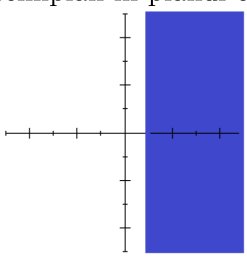
f) Funcţia

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{C},f(t)=\begin{cases}0 & ,t\le 0\\ \sin\dfrac{1}{t} & ,t>0\end{cases}$$

nu este funcţie original, deşi (i) şi (iii) sunt îndeplinite, deoarece $t_1=0$ este punct de discontinuitate de speţa a doua, $\nexists l_d(0)$ (oscilaţii mari înspre 0).



Definiţia 7.1.2. Fie $f\in\mathcal{O}$ o funcţie original cu abscisa de convergenţă σ_f. Fie $D=\{s\in\mathbb{C};\operatorname{Re}s>\sigma_f\}$- un semiplan în planul complex ca în imagine.



În unele studii, $D=\{s\in\mathbb{C};\operatorname{Re}s>\sigma_f\}$ iniţial şi ulterior se prelungeşte sau nu cu frontiera, devenind $D=\{s\in\mathbb{C};\operatorname{Re}s\ge\sigma_f\}$
Funcţia

$$\boxed{F:D\to\mathbb{C},F(s)=\int_0^{+\infty}e^{-st}f(t)\,dt}$$

se numeşte *transformata Laplace a funcţiei* f sau *imaginea funcţiei* f *prin transformata Laplace*. Se notează

$$\boxed{F(s)=\mathcal{L}\{f(t)\}(s).}$$

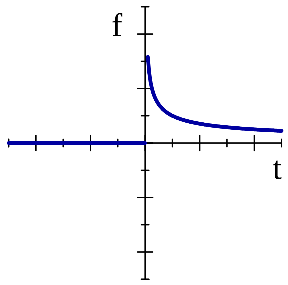
Comentariul 7.2.1 a) Transformata Lapace "transformă" o funcţie original într-o funcţie complexă de variabilă complexă, numită funcţie imagine. Aceasta are domeniul de definiţie semiplanul situat la dreapta verticalei $x=\operatorname{Re}\sigma_f$.

În studiul general, se consideră că funcţiile original au valori numere complexe, $f(t)=x(t)+iy(t)$. Acestea includ funcţiile reale de variabilă reală $(y\equiv 0)$.

b) Transformata are proprietăţi care o fac utilă în analiza liniară a sistemelor dinamice. Cel mai semnificativ avantaj este acela că derivarea şi integrarea devin, respectiv, înmulţire cu s şi împărţire la s (similar cu modul în care logaritmii transformă o operaţie de înmulţire a numerelor în adunare a logaritmilor lor). Aceasta transformă ecuaţiile integrale şi diferenţiale în ecuaţii polinomiale, care sunt mult mai uşor de rezolvat. Odată rezolvate ecuaţiile în domeniul frecvenţă, se foloseşte transformata Laplace inversă pentru a aduce rezultatele înapoi în domeniul timp.

○**c)** Transformata Laplace poate fi extinsă la toate funcţiile pentru care integrala există, chiar dacă funcţia nu este original Laplace. De exemplu, fie funcţia

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(t)=\begin{cases}0 & \text{, dacă } t\le 0\\ \dfrac{1}{\sqrt{t}} & \text{, dacă } t>0.\end{cases}$$



Se observă că $f\notin\mathcal{O}$, deoarece $l_d(0)=+\infty$.

Totuşi, pe baza teoriei de la funcţia Γ (Gamma) a lui Euler,

$\Gamma:]0,+\infty[\ \to\mathbb{R}, \Gamma(p)=\int_0^{+\infty}e^{-t}\cdot t^{p-1}dx,$

cu proprietăţile enunţate în Cursul anterior:

•Funcţia $\Gamma:]0,+\infty[\ \to\mathbb{R}$ este bine definită şi continuă pe $]0,+\infty[$.

• $\boxed{\Gamma(p)>0,\forall p>0.}$

• $\boxed{\Gamma(1)=1.}$

(formula de recurenţă): $\boxed{\Gamma(p+1)=p\Gamma(p),\forall p>0}$

• $\boxed{\Gamma(n+1)=n!,\forall n\in\mathbb{N},}$

se poate arăta că integrala din Definiţia 7.1.2 este convergentă pentru $\operatorname{Re}s>0$ şi

$$F(s)=\int_0^{+\infty}e^{-st}\frac{1}{\sqrt{t}}dt\underset{t=u^2/s}{=}\frac{2}{\sqrt{s}}\int_0^{+\infty}e^{-u^2}du\overset{\text{funcţii Euler}}{=}\sqrt{\frac{\pi}{s}}.$$

Mai mult, chiar pentru $\alpha\in\ ]-1,\infty[$, funcţia

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(t)=\begin{cases}0 & \text{, dacă } t\le 0\\ t^{\alpha} & \text{, dacă } t>0\end{cases}\quad\text{are}$$

$$F(s)=\int_0^{+\infty}e^{-st}t^{\alpha}dt\underset{st=u}{=}\frac{1}{s^{\alpha+1}}\int_0^{+\infty}e^{-t}u^{\alpha}du=\frac{\Gamma(\alpha+1)}{s^{\alpha+1}},\operatorname{Re}s>0,\alpha>-1.$$

Observaţie Matematici Speciale. Transformata Laplace provine dintr-o transformată Fourier. Într-adevăr, pentru $f\in H(\alpha)$,

$$\mathcal{F}\left\{e^{-\sigma t}f(t)\right\}(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\sigma t}f(t)\,e^{-\mathrm{j}\,\omega t}dt=\int_0^{+\infty}e^{-(\sigma+\mathrm{j}\,\omega)t}f(t)\,dt=\int_0^{+\infty}e^{-st}f(t)\,dt=$$
$$=\mathcal{L}\{f(t)\}(s)=F(s),\ \text{unde } s=\sigma+\mathrm{j}\,\omega,\ \text{cu } \operatorname{Re}s=\sigma\ge\sigma_f>\alpha.$$

Observaţia 7.1.2 (**Teorema fundamentală a transformatei Laplace**). Dacă $f\in\mathcal{O}$ este o funcţie original cu abscisa de convergenţă σ_f, atunci integrala improprie pe interval nemărginit, cu parametrul $s\in D$, din Definiţia 7.1.2, este absolut convergentă şi uniform convergentă pe D, deci transformata Laplace f este bine definită. Mai mult, este *continuă* şi *mărginită*, cu

$\lim\limits_{|s|\to\infty}F(s)=0.$

Schiţă de demonstraţie. Într-adevăr

$$\left|\int_a^{+\infty} e^{-st} f(t)\,dt\right| \le \int_0^{+\infty} \left|e^{-st} f(t)\right| dt = \int_0^{+\infty} \left|e^{-st}\right| |f(t)|\,dt \le$$
$$\le \int_0^{\infty} e^{-\operatorname{Re} s\cdot t} \cdot M \cdot e^{\sigma_f t} dt = M \int_0^{\infty} e^{\left(\sigma_f - \operatorname{Re} s\right)t} dt = M \left.\frac{e^{\left(\sigma_f-\operatorname{Re} s\right)t}}{\sigma_f - \operatorname{Re} s}\right|_{t=0}^{t\to+\infty} = \frac{M}{\operatorname{Re} s - \sigma_f}.$$

Observaţie Matematici Speciale. Fie $f \in H(\alpha)$ cu F transformata sa Laplace. Atunci are loc *formula de inversare Mellin-Fourier*

$$\boxed{f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}(t) = \frac{1}{2\pi \mathrm{j}} \int_{c-\mathrm{j}\infty}^{c+\mathrm{j}\infty} F(s) \cdot e^{st} ds, \forall t \in \mathbb{R}, c > \alpha.}$$

A se vedea din nou filmul propus, Eugene Khutoryansky, "Laplace Transform Explained and Visualized Intuitively".
Din acest motiv, apare şi notaţia

$\boxed{f(t) \longleftrightarrow F(s)}$,

punându-se în evidenţă variabila t a originalului (în domeniul timp) şi variabila s a transformatei (în domeniul frecvenţă).

Exemplul 7.1.2. Utilizând definiţia, să se determine transformata Laplace pentru:

a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(t) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } t < 0, \\ t^2, & \text{dacă } 0 \le t \le 1, \\ 0, & \text{dacă } t > 1. \end{cases}$; ○**b)** $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(t) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } t < 1 \\ (t-1)^n, & \text{dacă } t \ge 1, \end{cases}$

unde $n \in \mathbb{N}^*$ este dat.

c) $\eta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \eta(t) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } t < 0 \\ 1, & \text{dacă } t \ge 0, \end{cases}$; **d)** $\eta_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \eta_a(t) = \eta(t-a) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } t < a \\ 1, & \text{dacă } t \ge a, \end{cases}$

unde $a > 0$ este dat.

e) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(t) = e^{\lambda t} \cdot \eta(t)$, unde $\lambda \in \mathbb{R}$;.($f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, pentru $\lambda \in \mathbb{C}$);

f) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(t) = (\operatorname{ch} \omega t) \cdot \eta(t)$, unde $\omega \in \mathbb{R}, \omega > 0$; ($f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, pentru $\omega \in \mathbb{C}^*$);

g) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(t) = (\operatorname{sh} \omega t) \cdot \eta(t)$, unde $\omega \in \mathbb{R}, \omega > 0$; ($f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, pentru $\omega \in \mathbb{C}^*$);

h) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(t) = (\cos \omega t) \cdot \eta(t)$, unde $\omega \in \mathbb{R}, \omega > 0$; ($f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, pentru $\omega \in \mathbb{C}^*$);

i) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(t) = (\sin \omega t) \cdot \eta(t)$, unde $\omega \in \mathbb{R}, \omega > 0$; ($f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, pentru $\omega \in \mathbb{C}^*$);

j) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(t) = t^n \cdot \eta(t)$.

Rezolvare. c) Fie $\eta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \eta(t) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } t < 0 \\ 1, & \text{dacă } t \ge 0 \end{cases}$

•Se observă că $f \in \mathcal{O}$, cu abscisa de convergenţă $\sigma_f = 0$.

•$D = \{s \in \mathbb{C}; \operatorname{Re} s > 0\}$. Se calculează

$$F(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} \eta(t)\,dt = \int_0^{+\infty} e^{-st} dt \underset{\text{de integrare}}{\overset{t \text{ este variabilă}}{=}} \left.\frac{-1}{s} e^{-st}\right|_{t=0}^{t\to+\infty} =$$
$$= \lim_{t\to\infty} \left(\frac{-1}{s} e^{-st}\right) - \frac{-1}{s} e^{-s\cdot 0} = 0 - \frac{-1}{s} = \frac{1}{s}, \forall s \in D.$$

Deci $F : D \to \mathbb{C}$, $F(s) = \dfrac{1}{s}$. Se scrie

$\boxed{\mathcal{L}\{\eta(t)\}(s) = \frac{1}{s}}$ sau $\boxed{f(t) = \eta(t) \Rightarrow F(s) = \frac{1}{s}.}$

d) Se obţine, cu definiţia, pentru $a > 0$ dat,

$\boxed{\mathcal{L}\{\eta(t-a)\}(s) = \frac{e^{-as}}{s}}$ sau $\boxed{f(t) = \eta(t-a) \Rightarrow F(s) = \frac{e^{-as}}{s}.}$

e) Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(t) = e^{\lambda t} \cdot \eta(t)$, unde $\lambda \in \mathbb{R}$ ($f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, pentru $\lambda \in \mathbb{C}$).

•Se observă că $f \in \mathcal{O}$, cu abscisa de convergenţă $\sigma_f = \lambda$(respectiv $\sigma_f = \operatorname{Re}\lambda$).
•$D = \{s \in \mathbb{C}; \operatorname{Re} s > \sigma_f\}$. Se calculează

$$F(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t)\,dt = \int_0^{+\infty} e^{-st} e^{\lambda t} dt = \int_0^{+\infty} e^{-(s-\lambda)t} dt dt \overset{t \text{ este variabilă}}{\underset{\text{de integrare}}{=}} \left.\frac{-1}{s-\lambda} e^{-(s-\lambda)t}\right|_{t=0}^{t\to+\infty} =$$
$$= \lim_{t\to\infty}\left(\frac{-1}{s-\lambda}e^{-(s-\lambda)t}\right) - \frac{-1}{s-\lambda}e^{-(s-\lambda)\cdot 0} = 0 - \frac{-1}{s-\lambda}.$$

Deci $F : D \to \mathbb{C}, F(s) = \dfrac{1}{s-\lambda}$. Se scrie

$\boxed{\mathcal{L}\left\{e^{\lambda t}\cdot\eta(t)\right\}(s) = \dfrac{1}{s-\lambda}}$ sau $\boxed{f(t) = e^{\lambda t}\cdot\eta(t) \Rightarrow F(s) = \dfrac{1}{s-\lambda}.}$

f), **g**) analog cu **e**). Se obţine

$\boxed{\mathcal{L}\{(\operatorname{ch}\omega t)\cdot\eta(t)\}(s) = \dfrac{s}{s^2-\omega^2};\ \mathcal{L}\{(\operatorname{sh}\omega t)\cdot\eta(t)\}(s) = \dfrac{\omega}{s^2-\omega^2}.}$

h) Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(t) = (\cos\omega t)\cdot\eta(t)$.- a se vedea Seminar:

$\boxed{\mathcal{L}\{(\cos\omega t)\cdot\eta(t)\}(s) = \dfrac{s}{s^2+\omega^2}}$ sau $\boxed{f(t) = (\cos\omega t)\cdot\eta(t) \Rightarrow F(s) = \dfrac{s}{s^2+\omega^2}.}$

i) analog cu **h**). Se obţine

$\boxed{\mathcal{L}\{(\sin\omega t)\cdot\eta(t)\}(s) = \dfrac{\omega}{s^2+\omega^2}}$ sau $\boxed{f(t) = (\sin\omega t)\cdot\eta(t) \Rightarrow F(s) = \dfrac{\omega}{s^2+\omega^2}.}$

Teorema 1 (**de liniaritate**). *Transformata Laplace este o funcţie liniară, adică* $\forall f, g \in \mathcal{O}, \forall\alpha, \beta \in \mathbb{C}$:

$\boxed{\mathcal{L}\{\alpha f(t) + \beta g(t)\}(s) = \alpha\mathcal{L}\{f(t)\}(s) + \beta\mathcal{L}\{g(t)\}(s),}\ \forall s \in \mathbb{C}$ *cu* $\operatorname{Re} s > \max\{\sigma_f, \sigma_g\}$.

Observaţia 7.1.2. Transformatele Laplace pentru

$$f(t) = (\operatorname{ch}\omega t)\cdot\eta(t);\ f(t) = (\operatorname{sh}\omega t)\cdot\eta(t);\ f(t) = (\cos\omega t)\cdot\eta(t);\ f(t) = (\sin\omega t)\cdot\eta(t)$$

se pot determina folosind Teorema 7.2.1 şi $\mathcal{L}\left\{e^{\lambda t}\cdot\eta(t)\right\}(s) = \dfrac{1}{s-\lambda}$.

Folosind $\boxed{\operatorname{ch}\omega t = \dfrac{e^{\omega t}+e^{-\omega t}}{2};\ \operatorname{sh}\omega t = \dfrac{e^{\omega t}-e^{-\omega t}}{2}} \Rightarrow$

$$\mathcal{L}\{(\operatorname{ch}\omega t)\cdot\eta(t)\}(s) = \mathcal{L}\left\{\left(\frac{e^{\omega t}+e^{-\omega t}}{2}\right)\cdot\eta(t)\right\}(s) \overset{\text{T1, de lin}}{=}$$
$$= \frac{1}{2}\mathcal{L}\left\{\left(e^{\omega t}\right)\cdot\eta(t)\right\}(s) + \frac{1}{2}\mathcal{L}\left\{\left(e^{-\omega t}\right)\cdot\eta(t)\right\}(s) = \frac{1}{2}\frac{1}{s-\omega} + \frac{1}{2}\frac{1}{s+\omega} = \frac{s}{s^2-\omega^2};$$
$$\mathcal{L}\{(\operatorname{sh}\omega t)\cdot\eta(t)\}(s) = \mathcal{L}\left\{\left(\frac{e^{\omega t}-e^{-\omega t}}{2}\right)\cdot\eta(t)\right\}(s) \overset{\text{T1, de lin}}{=}$$
$$= \frac{1}{2}\mathcal{L}\left\{\left(e^{\omega t}\right)\cdot\eta(t)\right\}(s) - \frac{1}{2}\mathcal{L}\left\{\left(e^{-\omega t}\right)\cdot\eta(t)\right\}(s) = \frac{1}{2}\frac{1}{s-\omega} - \frac{1}{2}\frac{1}{s+\omega} = \frac{\omega}{s^2-\omega^2}.$$

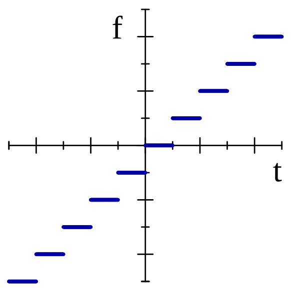
Folosind $\boxed{\cos\omega t = \dfrac{e^{\mathrm{j}\omega t}+e^{-\mathrm{j}\omega t}}{2};\ \sin\omega t = \dfrac{e^{\mathrm{j}\omega t}-e^{-\mathrm{j}\omega t}}{2\mathrm{j}}} \Rightarrow$

$$\mathcal{L}\{(\cos\omega t)\cdot\eta(t)\}(s) = \mathcal{L}\left\{\left(\frac{e^{\mathrm{j}\omega t}+e^{-\mathrm{j}\omega t}}{2}\right)\cdot\eta(t)\right\}(s) \overset{\text{T1, de lin}}{=}$$
$$= \frac{1}{2}\mathcal{L}\left\{\left(e^{\mathrm{j}\omega t}\right)\cdot\eta(t)\right\}(s) + \frac{1}{2}\mathcal{L}\left\{\left(e^{-\mathrm{j}\omega t}\right)\cdot\eta(t)\right\}(s) = \frac{1}{2}\frac{1}{s-\mathrm{j}\omega} + \frac{1}{2}\frac{1}{s+\mathrm{j}\omega} = \frac{s}{s^2+\omega^2};$$
$$\mathcal{L}\{(\sin\omega t)\cdot\eta(t)\}(s) = \mathcal{L}\left\{\left(\frac{e^{\mathrm{j}\omega t}-e^{-\mathrm{j}\omega t}}{2\mathrm{j}}\right)\cdot\eta(t)\right\}(s) \overset{\text{T1, de lin}}{=}$$
$$= \frac{1}{2\mathrm{j}}\mathcal{L}\left\{\left(e^{\mathrm{j}\omega t}\right)\cdot\eta(t)\right\}(s) - \frac{1}{2\mathrm{j}}\mathcal{L}\left\{\left(e^{-\mathrm{j}\omega t}\right)\cdot\eta(t)\right\}(s) = \frac{1}{2\mathrm{j}}\frac{1}{s-\mathrm{j}\omega} - \frac{1}{2\mathrm{j}}\frac{1}{s+\mathrm{j}\omega} = \frac{\omega}{s^2+\omega^2}.$$

○**Exemplul 7.1.3. a)** Fie *funcţia parte întreagă*:

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(t)=[t]$, unde $[t]=n\in\mathbb{Z}$, dacă $n\le t<n+1$, adică

$$f(t)=\begin{cases} \ldots \\ -1, & \text{dacă } -1\le t<0 \\ 0, & \text{dacă } 0\le t<1 \\ 1, & \text{dacă } 1\le t<2 \\ 2, & \text{dacă } 2\le t<3 \\ \ldots \end{cases}$$



Formal, dacă există,

$$F(s)=\mathcal{L}\{[t]\cdot\eta(t)\}(s)\overset{d.\exists}{=}\int_0^{+\infty}e^{-st}f(t)\,dt=\int_0^{+\infty}e^{-st}[t]\,dt=$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\int_k^{k+1}e^{-st}[t]\,dt\right)=\sum_{k=0}^{\infty}\left(k\int_k^{k+1}e^{-st}dt\right)=\sum_{k=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{s}ke^{-st}\Big|_{t=k}^{t=k+1}\right)=$$

$$=-\frac{1}{s}\sum_{k=0}^{\infty}k\left(e^{-(k+1)s}-e^{-ks}\right)=\frac{1-e^{-s}}{s}\sum_{k=0}^{\infty}ke^{-ks}=-\frac{1-e^{-s}}{s}\cdot\frac{d}{ds}\left(\sum_{k=0}^{\infty}e^{-ks}\right).$$

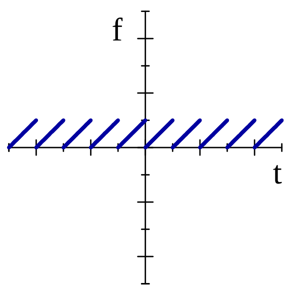
Ultima sumă este o serie geometică de raţie e^{-s} şi atunci

$$F(s)=-\frac{1-e^{-s}}{s}\cdot\frac{d}{ds}\left(\frac{e^{-s}}{1-e^{-s}}\right)=-\frac{1-e^{-s}}{s}\cdot\frac{-e^{-s}}{(1-e^{-s})^2}=\frac{e^{-s}}{s(1-e^{-s})}.$$

b) Fie *funcţia parte fracţionară*:

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(t)=\{t\}=t-[t]$, unde $[t]=n\in\mathbb{Z}$, dacă $n\le t<n+1$, adică

$$f(t)=\begin{cases} \ldots \\ t+1, & \text{dacă } -1\le t<0 \\ t-0, & \text{dacă } 0\le t<1 \\ t-1, & \text{dacă } 1\le t<2 \\ t-2, & \text{dacă } 2\le t<3 \\ \ldots \end{cases}$$



Formal, dacă există,

$$F(s)=\mathcal{L}\{\{t\}\cdot\eta(t)\}(s)\overset{d.\exists}{=}\mathcal{L}\{(t-[t])\cdot\eta(t)\}(s)=\mathcal{L}\{(t)\cdot\eta(t)\}(s)-\mathcal{L}\{([t])\cdot\eta(t)\}(s)\overset{\text{tabel}}{=}$$
$$=\frac{1}{s^2}-\frac{e^{-s}}{s(1-e^{-s})}.$$

Teorema 7.1.2 (**a asemănării, comportarea la omotetie**). *Fie $f\in\mathcal{O}$ cu σ_f abscisa de convergenţă şi $F(s)=\mathcal{L}\{f(t)\}(s)$. Atunci, $\forall\omega\in\mathbb{R},\omega>0$*

$$\boxed{\mathcal{L}\{f(\omega t)\}(s)=\frac{1}{\omega}F\left(\frac{s}{\omega}\right),}\ \forall s\in\mathbb{C} \text{ cu } \operatorname{Re}s>\sigma_f.$$

Observaţia 7.1.3. Transformatele Laplace pentru
a) $f(t)=(\operatorname{ch}\omega t)\cdot\eta(t)$; **b)** $f(t)=(\operatorname{sh}\omega t)\cdot\eta(t)$;
c) $f(t)=(\cos\omega t)\cdot\eta(t)$; **d)** $f(t)=(\sin\omega t)\cdot\eta(t)$
se pot determina folosind Teorema 2 şi transformatele funcţiilor f cu $\omega=1$. Într-adevăr:

a) $\widetilde{f}(t)=(\operatorname{ch}t)\cdot\eta(t)\Rightarrow\widetilde{F}(s)=\mathcal{L}\{(\operatorname{ch}t)\cdot\eta(t)\}(s)=\dfrac{s}{s^2-1}\Rightarrow$

$$\mathcal{L}\{(\operatorname{ch}(\omega t))\cdot\eta(t)\}(s)=\frac{1}{\omega}\widetilde{F}\left(\frac{s}{\omega}\right)=\frac{1}{\omega}\frac{\frac{s}{\omega}}{\left(\frac{s}{\omega}\right)^2-1}=\frac{s}{s^2-\omega^2}.$$

b) $\widetilde{f}(t)=(\operatorname{sh}t)\cdot\eta(t)\Rightarrow\widetilde{F}(s)=\mathcal{L}\{(\operatorname{sh}t)\cdot\eta(t)\}(s)=\dfrac{\omega}{s^2-1}\Rightarrow$

$$\mathcal{L}\{(\operatorname{sh}(\omega t))\cdot\eta(t)\}(s)=\frac{1}{\omega}\widetilde{F}\left(\frac{s}{\omega}\right)=\frac{1}{\omega}\frac{\omega}{\left(\frac{s}{\omega}\right)^2-1}=\frac{\omega}{s^2-\omega^2}.$$

c) $\widetilde{f}(t)=(\cos t)\cdot\eta(t)\Rightarrow\widetilde{F}(s)=\mathcal{L}\{(\cos t)\cdot\eta(t)\}(s)=\dfrac{s}{s^2+1}\Rightarrow$

$$\mathcal{L}\{(\cos(\omega t))\cdot\eta(t)\}(s)=\frac{1}{\omega}\widetilde{F}\left(\frac{s}{\omega}\right)=\frac{1}{\omega}\frac{\frac{s}{\omega}}{\left(\frac{s}{\omega}\right)^2+1}=\frac{s}{s^2+\omega^2}.$$

d) $\widetilde{f}(t)=(\sin t)\cdot\eta(t)\Rightarrow\widetilde{F}(s)=\mathcal{L}\{(\sin t)\cdot\eta(t)\}(s)=\dfrac{\omega}{s^2+1}\Rightarrow$

$$\mathcal{L}\{(\sin(\omega t))\cdot\eta(t)\}(s)=\frac{1}{\omega}\widetilde{F}\left(\frac{s}{\omega}\right)=\frac{1}{\omega}\frac{\omega}{\left(\frac{s}{\omega}\right)^2+1}=\frac{\omega}{s^2+\omega^2}.$$

Teorema 7.1.3 (**a deplasării, frequency-shift**). *Fie $f\in\mathcal{O}$ cu σ_f abscisa de convergenţă şi $F(s)=\mathcal{L}\{f(t)\}(s)$. Atunci, $\forall\lambda\in\mathbb{C}$,*

$$\boxed{\mathcal{L}\left\{e^{-\lambda t}f(t)\right\}(s)=F(s+\lambda),}\ \forall s\in\mathbb{C} \text{ cu } \operatorname{Re}s>\sigma_f-\operatorname{Re}\lambda.$$

Exemplul 7.2.4. Utilizând teorema deplasării , să se determine transformata Laplace pentru :
a) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(t)=e^{-\lambda t}(\operatorname{ch}(\omega t))\cdot\eta(t),\lambda\in\mathbb{C},\omega\in\mathbb{R},\omega>0$;
b) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(t)=e^{-\lambda t}(\operatorname{sh}(\omega t))\cdot\eta(t),\lambda\in\mathbb{C},\omega\in\mathbb{R},\omega>0$;
c) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(t)=e^{-\lambda t}(\cos(\omega t))\cdot\eta(t),\lambda\in\mathbb{C},\omega\in\mathbb{R},\omega>0$;
d) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(t)=e^{-\lambda t}(\sin(\omega t))\cdot\eta(t),\lambda\in\mathbb{C},\omega\in\mathbb{R},\omega>0$;
(rezultatele sunt valabile şi pentru $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$, dacă $\omega\in\mathbb{R}^\star$);
e) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(t)=e^{-2t}(\sin(3t))\cdot\eta(t)$;
f) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(t)=e^{-\lambda t}t^n\cdot\eta(t),\lambda\in\mathbb{C},n\in\mathbb{N}^*$.
Rezolvare. A se vedea Seminar.

Teorema 7.1.4 (**a întârzierii argumentului, comportarea la translaţie, positive time-shift.**). *Fie $f\in\mathcal{O}$ cu σ_f abscisa de convergenţă şi $F(s)=\mathcal{L}\{f(t)\}(s)$. Atunci, $\forall t_0\in\mathbb{R},t_0>0$,*

$$\boxed{\mathcal{L}\{f(t-t_0)\}(s)=e^{-t_0s}F(s),}\ \forall s\in\mathbb{C} \text{ cu } \operatorname{Re}s>\sigma_f.$$

Exemplul 7.1.5. Utilizând teorema întârzierii argumentului, să se determine transformata Laplace pentru :
a) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(t)=\left(\sin\left(t-\frac{\pi}{12}\right)\right)\cdot\eta(t)$; **b)** $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(t)=e^{7t-14}\cdot\eta(t)$.
Rezolvare. A se vedea Seminar.

Teorema 7.1.5 (de periodicitate). *Fie $f\in\mathcal{O}$ cu σ_f abscisa de convergenţă şi $F(s)=\mathcal{L}\{f(t)\}(s)$. Dacă f este funcţie periodică pentru $t\geq 0$, de perioadă $T>0$, atunci*

$$\boxed{\mathcal{L}\{f(t)\}(s)=\frac{1}{1-e^{-sT}}\int_0^T e^{-st}f(t)\,dt,}\ \forall s\in\mathbb{C}\ \textit{cu}\ \operatorname{Re}s>\sigma_f.$$

Exemplul 7.1.6. Utilizând teorema de periodicitate, să se determine transformata Laplace pentru :
a) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(t)=\begin{cases}0, & \text{dacă } t<0\\ |\sin t|, & \text{dacă } t\geq 0.\end{cases}$; ○**b)** $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(t)=\{t\}$.
Rezolvare. A se vedea Seminar.

Teorema 7.1.6 (de derivare a originalului, i**maginea derivatei originalului).**
a) *Fie f o funcţie continuă pentru $t>0$ astfel încât $f\in\mathcal{O}$ cu σ_f abscisa de convergenţă şi $F(s)=\mathcal{L}\{f(t)\}(s)$. Se presupune că $\exists f'$ peste tot, eventual cu excepţia originii, şi $f'\in\mathcal{O}$ cu $\sigma_{f'}$ abscisa de convergenţă. Se notează $f(0_+)=\lim\limits_{t\to 0,t>0}f(t)$. Atunci*

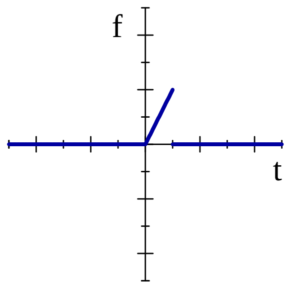
$$\boxed{\mathcal{L}\{f'(t)\}(s)=sF(s)-f(0_+),}\ \forall s\in\mathbb{C}\ \textit{cu}\ \operatorname{Re}s>\max\{\sigma_f,\sigma_{f'}\}.$$

b) *Fie f o funcţie continuă pentru $t>0$ astfel încât $f\in\mathcal{O}$ cu σ_f abscisa de convergenţă şi $F(s)=\mathcal{L}\{f(t)\}(s)$. Se presupune că f este de n ori derivabilă, $f',...,f^{(n)}\in\mathcal{O}$ cu $\sigma_{f'},...,\sigma_{f^{(n)}}$ abscise de convergenţă şi cu $f',...,f^{(n-1)}$ continue pentru $t>0$. Se notează $f(0_+)=\lim\limits_{t\to 0,t>0}f(t)$,..., $f^{(n-1)}(0_+)=\lim\limits_{t\to 0,t>0}f^{(n-1)}(t)$. Atunci, $\forall n\in\mathbb{N}^*$,*

$$\boxed{\mathcal{L}\left\{f^{(n)}(t)\right\}(s)=s^nF(s)-\left[s^{n-1}f(0_+)+s^{n-2}f'(0_+)+...+sf^{(n-2)}(0_+)+f^{(n-1)}(0_+)\right],}$$
$$\forall s\in\mathbb{C}\ \textit{cu}\ \operatorname{Re}s>\max\left\{\sigma_f,\sigma_{f'},...,\sigma_{f^{(n)}}\right\}.$$

○**Exerciţiul 7.1.7**. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(t)=\begin{cases}0, & \text{dacă } t<0\\ 2t, & \text{dacă } 0\leq t\leq 1\\ 0, & \text{dacă } t>1\end{cases}$

a) Să se calculeze $\mathcal{L}\{f(t)\}$;
b) Să se calculeze $\mathcal{L}\{f'(t)\}$;
c) Se poate aplica formula $\mathcal{L}\{f'(t)\}(s)=sF(s)-f(0+)$? Justificare.



Rezolvare. a) •Se observă că $f\in\mathcal{O}$, cu abscisa de convergenţă $\sigma_f=0$.
•$D=\{s\in\mathbb{C};\operatorname{Re}s\geq 0\}$. Se calculează

$$F(s)=\int_0^{+\infty}e^{-st}f(t)\,dt=\int_0^1 e^{-st}2tdt.$$
$$\mathcal{I}(t;c)=\int e^{-st}2tdt=\frac{1}{-s}\int 2t\frac{d}{dt}\left(e^{-st}\right)dt \overset{t\text{ este variabilă}}{\underset{\text{de integrare}}{=}} \frac{1}{-s}\left(2te^{-st}-\int 2e^{-st}dt\right)=$$
$$=\frac{1}{-s}\left(2te^{-st}-2\frac{e^{-st}}{-s}\right)+c,\text{ pentru }\forall t\in[0,1],\forall c\in\mathbb{R},\forall s\in D.\text{ Atunci}$$
$$\int_0^1 e^{-st}2tdt=\mathcal{I}(t;c)\Big|_{t=0}^{t=1}=\frac{1}{-s}\left(2e^{-s}-2\frac{e^{-s}}{-s}\right)-\frac{1}{-s}\left(0-2\frac{1}{-s}\right)=\frac{2}{-s}\left(e^{-s}-\frac{e^{-s}}{-s}+\frac{1}{-s}\right).$$

Deci $F:D\to\mathbb{C}, F(s)=\dfrac{2}{-s}\left(e^{-s}-\dfrac{e^{-s}}{-s}+\dfrac{1}{-s}\right).$

b) Se observă că $f':\mathbb{R}\backslash\{0,1\}\to\mathbb{R}, f'(t)=\begin{cases}0, & \text{dacă } t<0\\ 2, & \text{dacă } 0<t<1\\ 0, & \text{dacă } t>1\end{cases}$

•Se observă că $f'\in\mathcal{O}$, cu abscisa de convergenţă $\sigma_{f'}=0$.

•$D_1=\{s\in\mathbb{C};\operatorname{Re}s\geq 0\}$. Se calculează

$$F_1(s)=\int_0^{+\infty}e^{-st}f'(t)\,dt=\int_0^1 e^{-st}2dt \overset{t\text{ este variabilă}}{\underset{\text{de integrare}}{=}} 2\frac{e^{-st}}{-s}\Bigg|_{t=0}^{t=1}=2\frac{e^{-s}}{-s}-2\frac{1}{-s},\forall s\in D.$$

Deci $F_1:D_1\to\mathbb{C},\ F_1(s)=2\dfrac{e^{-s}}{-s}-2\dfrac{1}{-s}.$

c) Nu se poate aplica formula $\mathcal{L}\{f'(t)\}(s)=sF(s)-f(0_+)$, deoarece f nu este continuă în $t=1$.

Teorema 7 (**de derivare a imaginii**). *Fie $f\in\mathcal{O}$ cu σ_f abscisa de convergenţă şi $F(s)=\mathcal{L}\{f(t)\}(s)$. Atunci*

a) $\boxed{\mathcal{L}\{(-t)f(t)\}(s)=F'(s),}$ $\forall s\in\mathbb{C}$ *cu* $\operatorname{Re}s>\sigma_f$.

b) $\forall n\in\mathbb{N}^*,$ $\boxed{\mathcal{L}\{(-t)^n f(t)\}(s)=F^{(n)}(s),}$ $\forall s\in\mathbb{C}$ *cu* $\operatorname{Re}s>\sigma_f$.

Exemplul 7.1.8. Utilizând teorema de derivare a imaginii, să se determine transformata Laplace pentru :

a) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(t)=-te^{\lambda t}\cdot\eta(t),\lambda\in\mathbb{C}$;**b)** $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(t)=t^ne^{\lambda t}\cdot\eta(t),n\in\mathbb{N}^*$;
c) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(t)=t(\operatorname{ch}(\omega t))\cdot\eta(t)$;**d)** $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(t)=t(\operatorname{sh}(\omega t))\cdot\eta(t)$;
e) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(t)=t(\cos(\omega t))\cdot\eta(t)$;**f)** $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(t)=t(\sin(\omega t))\cdot\eta(t)$;
g) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(t)=t^2(\sin 2t)(\cos 3t)\cdot\eta(t)$.

Rezolvare. a) $\widetilde{f}(t)=e^{\lambda t}\cdot\eta(t)\Rightarrow\widetilde{F}(s)=\mathcal{L}\left\{e^{\lambda t}\cdot\eta(t)\right\}(s)=\dfrac{1}{s-\lambda}\Rightarrow$

$$\mathcal{L}\left\{(-t)e^{\lambda t}\cdot\eta(t)\right\}(s)=\widetilde{F}'(s)=\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s-\lambda}\right)=\frac{-1}{(s-\lambda)^2}.$$

b) $\widetilde{f}(t)=e^{\lambda t}\cdot\eta(t)\Rightarrow\widetilde{F}(s)=\mathcal{L}\left\{e^{\lambda t}\cdot\eta(t)\right\}(s)=\dfrac{1}{s-\lambda}\Rightarrow$

$$\mathcal{L}\left\{t^ne^{\lambda t}\cdot\eta(t)\right\}(s)\overset{T1,\text{de lin}}{=}(-1)^n\mathcal{L}\left\{(-t)^ne^{\lambda t}\cdot\eta(t)\right\}(s)=(-1)^n\widetilde{F}^{(n)}(s)=...=\frac{n!}{(s-\lambda)^{n+1}}.$$

Într-adevăr, $\widetilde{F}(s)=(s-\lambda)^{-1}$;
$\widetilde{F}'(s)=(-1)(s-\lambda)^{-2}$;
$\widetilde{F}''(s)=(-1)(-2)(s-\lambda)^{-3}$;
...
$\widetilde{F}^{(n)}(s)=(-1)^n n!(s-\lambda)^{-(n+1)}$;

Deci $\boxed{\mathcal{L}\left\{t^n e^{\lambda t} \cdot \eta(t)\right\}(s) = \dfrac{n!}{(s-\lambda)^{n+1}}.}$ În particular, $\boxed{\mathcal{L}\left\{t^n \cdot \eta(t)\right\}(s) = \dfrac{n!}{s^{n+1}}.}$

c)-g) -a se vedea Seminar

$$\boxed{\mathcal{L}\left\{t\left(\operatorname{ch}(\omega t)\right) \cdot \eta(t)\right\}(s) = \frac{s^2+\omega^2}{\left(s^2-\omega^2\right)^2}.} \boxed{\mathcal{L}\left\{t\left(\operatorname{sh}(\omega t)\right) \cdot \eta(t)\right\}(s) = \frac{2s\omega}{\left(s^2-\omega^2\right)^2};}$$

$$\boxed{\mathcal{L}\left\{t\left(\cos(\omega t)\right) \cdot \eta(t)\right\}(s) = \frac{s^2-\omega^2}{\left(s^2+\omega^2\right)^2};} \boxed{\mathcal{L}\left\{t\left(\sin(\omega t)\right) \cdot \eta(t)\right\}(s) = \frac{2s\omega}{\left(s^2+\omega^2\right)^2}.}$$

Teorema 7.1.8 (de integrare a imaginii). *Fie $f \in \mathcal{O}$ cu σ_f abscisa de convergenţă şi $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}(s)$. Fie $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (sau $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$) definită prin $g(t) = \dfrac{f(t)}{t}, \forall t \in \mathbb{R}^*$. Dacă $g \in \mathcal{O}$ cu σ_g abscisa de convergenţă, atunci*

$$\boxed{\mathcal{L}\left\{\frac{f(t)}{t}\right\}(s) = \int_s^{+\infty} F(p)\,dp,} \forall s \in \mathbb{C} \text{ cu } \operatorname{Re} s > \max\left\{\sigma_f, \sigma_g\right\}.$$

Exemplul 7.1.9. Utilizând teorema de integrare a imaginii, să se determine transformata Laplace pentru :

a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(t) = \dfrac{\sin t}{t} \cdot \eta(t)$.

Rezolvare. Deoarece $\widetilde{f}(t) = \sin t \cdot \eta(t) \Rightarrow \widetilde{F}(s) = \mathcal{L}\{\sin t \cdot \eta(t)\}(s) = \dfrac{1}{s^2+1}$,atunci

$$\mathcal{L}\left\{\frac{\sin t}{t} \cdot \eta(t)\right\}(s) \overset{T8}{=} \int_s^{+\infty} \widetilde{F}(p)\,dp = \int_s^{+\infty} \frac{1}{p^2+1}dp = \operatorname{arctg} p\big|_{p=s}^{p\to+\infty} = \tfrac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} s.$$

Transformata Laplace a funcţiei sinus atenuat conduce la valoarea integralei Dirichlet

$$\int_0^\infty e^{-st} \cdot \frac{\sin t}{t}dt = \tfrac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} s \overset{s=0}{\Rightarrow} \boxed{\int_0^\infty \frac{\sin t}{t}dt = \tfrac{\pi}{2}}$$

Teorema 7.1.9 (de integrare a originalului, imaginea originalului integrat). *Fie $f \in \mathcal{O}$ cu σ_f abscisa de convergenţă şi $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}(s)$. Atunci, fără a scrie "$\cdot\eta(t)$",*

a) $\boxed{\mathcal{L}\left\{\displaystyle\int_0^t f(\tau)\,d\tau\right\}(s) = \dfrac{1}{s}F(s),} \forall s \in \mathbb{C}$ *cu* $\operatorname{Re} s > \sigma_f$.

b) $\forall n \in \mathbb{N}^*,$ $\boxed{\mathcal{L}\left\{\underbrace{\int_0^t \left(\int_0^{\tau_1} \underbrace{\left(...\int_0^{\tau_{n-1}} f(\tau_n)\,d\tau_n\right)} d\tau_2\right) d\tau_1}\right\}(s) = \dfrac{1}{s^n}F(s),} \forall s \in \mathbb{C}$ *cu* $\operatorname{Re} s > \sigma_f$.

Exemplul 7.1.10. Utilizând teorema de integrare a originalului, să se determine transformata Laplace pentru :

a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(t) = \left(\displaystyle\int_0^t \frac{\sin\tau}{\tau}d\tau\right) \cdot \eta(t)$;

Rezolvare. a) Deoarece $\widetilde{f}(t) = \dfrac{\sin\tau}{\tau} \cdot \eta(t) \Rightarrow \widetilde{F}(s) = \mathcal{L}\left\{\dfrac{\sin\tau}{\tau} \cdot \eta(t)\right\}(s) = \tfrac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} s$, atunci

$$\mathcal{L}\left\{\left(\int_0^t \frac{\sin\tau}{\tau}d\tau\right) \cdot \eta(t)\right\}(s) \overset{T9}{=} \frac{1}{s}\widetilde{F}(s) = \frac{1}{s}\left(\tfrac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} s\right).$$

Definiţia 7.1.4. Fie $f, g \in \mathcal{O}$ funcţii original. Funcţia $f * g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (sau $f * g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$), definită prin

$$\boxed{(f*g)(t)=\begin{cases}0, & \text{dacă } t<0\\ \displaystyle\int_0^t f(\tau)\,g(t-\tau)\,d\tau, & \text{dacă } t\ge 0\end{cases}}$$

se numeşte *produs de convoluţie a funcţiilor original* f şi g, şi se notează $f*g$.

Operaţia de convolutare a două funcţii se regăseşte în teoria probabilităţilor şi are numeroase aplicaţii şi în procesarea imaginilor digitale sau a semnalelor. A se vedea ulterior Transformata Fourier pentru explicaţiile legate de regularizarea semnalului poartă temporală. Tot la Transformata Fourier se vor pune în evidenţă proprietăţi ale operaţiei (comutativitate, asociativitate).

Teorema 7.1.10 (Borel, a imaginii produsului de convoluţie a două funcţii original). Fie $f\in\mathcal{O}$ o funcţie original cu abscisa de convergenţă σ_f şi $F(s)=\mathcal{L}\{f(t)\}(s)$, respectiv $g\in\mathcal{O}$ o funcţie original cu abscisa de convergenţă σ_g şi $G(s)=\mathcal{L}\{g(t)\}(s)$. Atunci $f*g\in\mathcal{O}$ şi

$$\boxed{\mathcal{L}\{f*g\}(s)=F(s)\cdot G(s)\,,}\ \forall s\in\mathbb{C} \text{ cu } \operatorname{Re}s>\max\left\{s_0^f,s_0^g\right\}.$$

Se scrie, prin convenţie, şi

$$\boxed{\mathcal{L}\left\{\left(\int_0^t f(\tau)\,g(t-\tau)\,d\tau\right)\cdot\eta(t)\right\}(s)=\mathcal{L}\{f(t)\}(s)\cdot\mathcal{L}\{g(t)\}(s)\,.}$$

Exemplul 7.1.11. a) Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(t)=\sin t\cdot\eta(t)$. Să se determine $f*f$ şi $\mathcal{L}\{f*f\}$.

Rezolvare. •Pentru $t\ge 0$,

$$(f*f)(t)=\int_0^t f(\tau)\,f(t-\tau)\,d\tau=\int_0^t \sin\tau\cdot\sin(t-\tau)\,d\tau=$$

$$=\int_0^t\frac{\cos(\tau-(t-\tau))-\cos(\tau+(t-\tau))}{2}d\tau=\frac{1}{2}\int_0^t(\cos(2\tau-t)-\cos t)\,d\tau\overset{\tau\text{ var. de integrare}}{=}$$

$$=\frac{1}{2}\left(\tfrac{\sin(2\tau-t)}{2}-(\cos t)\cdot\tau\right)\Big|_{\tau=0}^{\tau=t}=\frac{1}{2}\left(\tfrac{\sin t}{2}-(\cos t)\cdot t-\tfrac{-\sin t}{2}+0\right)=\frac{1}{2}(\sin t-t\cos t)\,.$$

•Folosind Teorema Borel, se obţine imediat:

$$\mathcal{L}\{(f*f)(t)\}(s)=\mathcal{L}\{f(t)\}(s)\cdot\mathcal{L}\{f(t)\}(s)=\frac{1}{s^2+1}\cdot\frac{1}{s^2+1}.$$

TRANSFORMATA LAPLACE

	$f(t)$-funcţia original	$F(s)=\mathcal{L}\{f(t)\}(s)$-funcţia imagine
1.	$\delta(t)$-distribuţia Dirac (impuls unitar)	1
2.	$\eta(t)=\begin{cases}0, & \text{dacă } t<0\\ 1, & \text{dacă } t\geq 0,\end{cases}$	$\frac{1}{s}, \operatorname{Re} s>0$
3.	$e^{\lambda t}\cdot\eta(t), \lambda\in\mathbb{C}$	$\frac{1}{s-\lambda}, \operatorname{Re} s>\operatorname{Re}\lambda$
4.	$\operatorname{ch}(\omega t)\cdot\eta(t), \omega\in\mathbb{R}, \omega>0$	$\frac{s}{s^2-\omega^2}, \operatorname{Re} s>0$
5.	$\operatorname{sh}(\omega t)\cdot\eta(t), \omega\in\mathbb{R}, \omega>0$	$\frac{\omega}{s^2-\omega^2}, \operatorname{Re} s>0$
6.	$\cos(\omega t)\cdot\eta(t), \omega\in\mathbb{R}, \omega>0$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}, \operatorname{Re} s>0$
7.	$\sin(\omega t)\cdot\eta(t), \omega\in\mathbb{R}, \omega>0$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}, \operatorname{Re} s>0$
8.	$e^{-\lambda t}\cdot\operatorname{ch}(\omega t)\cdot\eta(t), \lambda\in\mathbb{C}$	$\frac{s+\lambda}{(s+\lambda)^2-\omega^2}, \operatorname{Re} s>-\operatorname{Re}\lambda$
9.	$e^{-\lambda t}\cdot\operatorname{sh}(\omega t)\cdot\eta(t), \lambda\in\mathbb{C}$	$\frac{\omega}{(s+\lambda)^2-\omega^2}, \operatorname{Re} s>-\operatorname{Re}\lambda$
10.	$e^{-\lambda t}\cdot\cos(\omega t)\cdot\eta(t), \lambda\in\mathbb{C}$	$\frac{s+\lambda}{(s+\lambda)^2+\omega^2}, \operatorname{Re} s>-\operatorname{Re}\lambda$
11.	$e^{-\lambda t}\cdot\sin(\omega t)\cdot\eta(t), \lambda\in\mathbb{C}$	$\frac{\omega}{(s+\lambda)^2+\omega^2}, \operatorname{Re} s>-\operatorname{Re}\lambda$
12.	$t^n\cdot e^{\lambda t}\cdot\eta(t), \lambda\in\mathbb{C}, n\in\mathbb{N}^*$	$\frac{n!}{(s-\lambda)^{n+1}}, \operatorname{Re} s>\operatorname{Re}\lambda$
13.	$t^n\cdot\eta(t), n\in\mathbb{N}^*$	$\frac{n!}{s^{n+1}}, \operatorname{Re} s>0$
14.	$t\cdot\operatorname{ch}(\omega t)\cdot\eta(t), \omega\in\mathbb{R}, \omega>0$	$\frac{s^2+\omega^2}{(s^2-\omega^2)^2}, \operatorname{Re} s>0$
15.	$t\cdot\operatorname{sh}(\omega t)\cdot\eta(t), \omega\in\mathbb{R}, \omega>0$	$\frac{2s\omega}{(s^2-\omega^2)^2}, \operatorname{Re} s>0$
16.	$t\cdot\cos(\omega t)\cdot\eta(t), \omega\in\mathbb{R}, \omega>0$	$\frac{s^2-\omega^2}{(s^2+\omega^2)^2}, \operatorname{Re} s>0$
17.	$t\cdot\sin(\omega t)\cdot\eta(t), \omega\in\mathbb{R}, \omega>0$	$\frac{2s\omega}{(s^2+\omega^2)^2}, \operatorname{Re} s>0$
18.	$\widetilde{f}(t-t_0)$	$e^{-t_0 s}\widetilde{F}(s)$
19.	$\begin{cases}0, & t<0\\ \int_0^t \widetilde{f}(\tau)\,\widetilde{g}(t-\tau)\,d\tau, & t\geq 0\end{cases}$	$\widetilde{F}(s)\cdot\widetilde{G}(s)$

$\cdot\,|\mathcal{L}\{x(t)\}(s)=X(s)$

$\cdot\,|\mathcal{L}\{x'(t)\}(s)=sX(s)-(x(0_+))$

$\cdot\,|\mathcal{L}\{x''(t)\}(s)=s^2X(s)-(sx(0_+)+x'(0_+))$

$\cdot\,|\mathcal{L}\{x'''(t)\}(s)=s^3X(s)-\left(s^2x(0_+)+sx'(0_+)+x''(0_+)\right)$

$\cdot\,\left|\mathcal{L}\left\{x^{(4)}(t)\right\}(s)=s^4X(s)-\left(s^3x(0_+)+s^2x'(0_+)+sx''(0_+)+x'''(0_+)\right)\right.$

$\overline{+}|$ ...

Exemplul 7.1.12. Să se determine funcţiile original pentru :
a) $F(s)=\dfrac{1}{s+3}$; **b)** $F(s)=\dfrac{1}{2s+3}$; **c)** $F(s)=\dfrac{3s+2}{s^2+16}$;**d)** $F(s)=\dfrac{6s+7}{s^2-25}$; **e)** $F(s)=\dfrac{e^{-s}}{s+2}$;
f) $F(s)=\dfrac{1}{s^2+4s+13}$;**g)** $F(s)=\dfrac{1}{s(s+1)(s^2+1)}$; **h)** $F(s)=\dfrac{1}{s^2-3s+2}$;
i) $F(s)=\dfrac{s}{s^4+5s^2+4}$; **j)** $F(s)=\dfrac{1}{s^4-s^2}$; **k)** $F(s)=\dfrac{s^3}{s^4-1}$
Rezolvare. Se caută $f(t)=?$ funcţie original astfel încât $F(s)=\mathcal{L}\{f(t)\}(s)$.
a)-j) A se vedea Seminar.

Se descompune F în fracţii din tabel (chiar simple) $\Rightarrow$

$$F(s)=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{s-1}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{s+1}+\frac{1}{2}\cdot\frac{s}{s^2+1}\overset{\text{tabel}}{\Rightarrow}$$

$$F(s)=\frac{1}{4}\mathcal{L}\left\{e^t\cdot\eta(t)\right\}(s)+\frac{1}{4}\mathcal{L}\left\{e^{-t}\cdot\eta(t)\right\}(s)+\frac{1}{2}\mathcal{L}\left\{(\cos t)\cdot\eta(t)\right\}(s)=$$

$$\overset{T1,\text{lin}}{=}\mathcal{L}\left\{\frac{1}{4}e^t\cdot\eta(t)+\frac{1}{4}e^{-t}\cdot\eta(t)+\frac{1}{2}(\cos t)\cdot\eta(t)\right\}(s)$$

$$\Rightarrow f(t)=\left(\frac{1}{4}e^t+\frac{1}{4}e^{-t}+\frac{1}{2}\cos t\right)\cdot\eta(t).$$

h) $F(s)=\dfrac{1}{s^2-3s+2}$;

<u>modul 1.</u> Se descompune F în fracţii din tabel (chiar simple) $\Rightarrow$

$$F(s)=-\frac{1}{s-1}+\frac{1}{s-2}\overset{\text{tabel}}{\Rightarrow}$$

$$F(s)=-\mathcal{L}\left\{e^t\cdot\eta(t)\right\}(s)+\mathcal{L}\left\{e^{2t}\cdot\eta(t)\right\}(s)\overset{T1,\text{lin}}{=}\mathcal{L}\left\{-e^t\cdot\eta(t)+e^{2t}\cdot\eta(t)\right\}(s)$$

$$\Rightarrow f(t)=\left(-e^t+e^{2t}\right)\cdot\eta(t)\text{ sau } f(t)=-e^t+e^{2t}, t\geq 0$$

<u>modul 2.</u> $F(s)=2\dfrac{\frac{1}{2}}{\left(s-\frac{3}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2}\underset{\text{sau } T3,\text{ a deplasării}}{\overset{\text{tabel}}{=}}$

$$=2\mathcal{L}\left\{e^{\frac{3}{2}t}\operatorname{sh}\left(\tfrac{1}{2}t\right)\cdot\eta(t)\right\}(s)\overset{T1,\text{lin}}{=}\mathcal{L}\left\{2e^{\frac{3}{2}t}\operatorname{sh}\left(\tfrac{1}{2}t\right)\cdot\eta(t)\right\}(s)$$

$$\Rightarrow f(t)=2e^{\frac{3}{2}t}\frac{e^{\frac{1}{2}t}-e^{-\frac{1}{2}t}}{2}\cdot\eta(t)=\left(-e^t+e^{2t}\right)\cdot\eta(t)\text{ sau } f(t)=-e^t+e^{2t}, t\geq 0$$

<u>modul 3.</u> Se foloseşte $T10$, a lui Borel:

$$F(s)=\underbrace{\frac{1}{s-1}}_{\widetilde{F}(s)}\cdot\underbrace{\frac{1}{s-2}}_{\widetilde{G}(s)}.$$

$$\widetilde{F}(s)=\frac{1}{s-1}\overset{\text{tabel}}{\Rightarrow}\widetilde{f}(t)=e^t\cdot\eta(t).$$

$$\widetilde{G}(s)=\frac{1}{s-2}\overset{\text{tabel}}{\Rightarrow}\widetilde{g}(t)=e^{2t}\cdot\eta(t).$$

Atunci $F(s)=\widetilde{F}(s)\cdot\widetilde{G}(s)\underset{\text{convenţie}}{\overset{T10,\text{a lui Borel}}{=}}\mathcal{L}\left\{\int_0^t\widetilde{f}(\tau)\,\widetilde{g}(t-\tau)\,d\tau\right\}(s)=\mathcal{L}\left\{\int_0^t e^{\tau}\cdot e^{2(t-\tau)}d\tau\right\}(s).$

$$\Rightarrow f(t)=\int_0^t e^{2t-\tau}d\tau=\left.\frac{e^{2t-\tau}}{-1}\right|_{\tau=0}^{\tau=t}=\frac{e^{2t-t}}{-1}-\frac{e^{2t-0}}{-1}=-e^t+e^{2t}, t\geq 0$$

sau $f(t)=\left(-e^t+e^{2t}\right)\cdot\eta(t)$.

Observaţie. Există o metodă de determinare a funcţiei original f atunci când se cunoaşte funcţia imagine F, bazată pe analiza matematică a funcţiilor complexe (se va studia la Matematici Speciale), şi anume:

Definiţie. Fie $G : D \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$.

a) $s_0 \in \mathbb{C}$ este *pol simplu* (sau pol de ordin 1) pentru G dacă

$\lim\limits_{s\to s_0} G(s) = \infty$ şi $\lim\limits_{s\to s_0} (s - s_0)G(s) \in \mathbb{C}$.

În acest caz *reziduul lui* G *în* s_0 este numărul complex notat $\text{rez}\,(G; s_0)$ dat de

$$\boxed{\text{rez}(G; s_0) = \lim_{s\to s_0} ((s - s_0)G(s)).}$$

b) $s_0 \in \mathbb{C}$ este *pol de ordin* $k \in \mathbb{N}^*$ pentru G dacă

$\lim\limits_{s\to s_0} (s - s_0)^{k-1}G(s) = \infty$ şi $\lim\limits_{s\to s_0} (s - s_0)^k G(s) \in \mathbb{C}$.

În acest caz se reziduul lui G în s_0 este numărul complex notat $Rez(G; s_0)$ dat de

$$\boxed{\text{rez}(G; s_0) = \frac{1}{(k-1)!} \lim_{s\to s_0} \left(\frac{d^{k-1}}{ds^{k-1}} \left((s - s_0)^k G(s)\right) \right).}$$

Teoremă. Fie o funcţie raţională

$F : D \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $F(s) = \dfrac{P(s)}{Q(s)}$,

unde P şi Q sunt polinoame cu coeficienţi din $\mathbb{C}$, $\text{grad}\, P < \text{grad}\, Q$. Atunci F este imaginea Laplace a originalului Laplace

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $f(t) = \sum\limits_j \text{rez}\left(e^{st} \cdot F(s); s_j\right)$,

unde suma este calculată după toţi polii s_j ai funcţiei F.

În particular, dacă F admite doar poli simpli $s_1, ..., s_m$ (sau, echivalent, Q are rădăcini distincte), atunci

$$\boxed{f(t) = \sum_{j=1}^{m} \frac{P(s_j)}{Q'(s_j)} e^{s_j t}, t \geq 0.}$$

Exemplul 7.1.13. Să se determine funcţiile original pentru :

a) $F(s) = \dfrac{s^2 + 1}{s^2 (s^2 + 4)}$.

Rezolvare. Se caută $f(t) =?$ funcţie original astfel încât $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}(s)$.

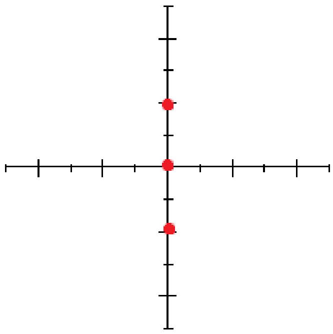
<u>modul 1.</u> Se descompune F în fracţii din tabel (chiar simple)-uşor folosind calculatorul:

$F(s) = \dfrac{s^2 + 1}{s^2 (s^2 + 4)} = \frac{1}{4} \dfrac{1}{s^2} + \frac{3}{4} \dfrac{1}{s^2 + 4} \stackrel{\text{tabel}}{\Rightarrow}$

$f(t) = \left(\frac{1}{4} t + \frac{3}{8} \sin 2t\right) \cdot \eta(t)$.

<u>modul 4.</u> Cu reziduuri.

$F(s) = \dfrac{s^2 + 1}{s^2 (s^2 + 4)}$



$*s_1 = 2i$ este pol de ordin 1 pentru F, şi pentru $e^{st}F(s)$.
$*s_2 = -2i$ este pol de ordin 1 pentru F, şi pentru $e^{st}F(s)$.
$*s_3 = 0$ este pol de ordin 2 pentru F, şi pentru $e^{st}F(s)$.
$\boxed{!!!}$ Se poate aplica teorema de calcul a reziduurilor pentru reziduurile lui F :

$$\text{rez}(F;2i) \underset{\text{conform } 2^{\cdot}}{\overset{2i \text{ e pol de ordin } 1}{=}} \lim_{s\to 2i}\left((s-2i)\frac{s^2+1}{s^2(z-2i)(s+2i)}\right) = \frac{-3}{-16i} = \frac{-3}{16}i.$$

$$\text{rez}(F;-2i) \underset{\text{conform } 2^{\cdot}}{\overset{-2i \text{ e pol de ordin } 1}{=}} \lim_{s\to -2i}\left((s+2i)\frac{s^2+1}{s^2(z-2i)(s+2i)}\right) = \frac{-3}{16i} = \frac{3}{16}i.$$

$$\text{rez}(F;0) \underset{\text{conform } 2^{\cdot}}{\overset{0 \text{ e pol de ordin } 2}{=}} = \frac{1}{(2-1)!}\lim_{s\to 0}\left((s-0)^2\frac{s^2+1}{s^2(z-2i)(s+2i)}\right)^{(2-1)} =$$

$$= \frac{1}{1!}\lim_{s\to 0}\left(\frac{s^2+1}{s^2+4}\right)' = \lim_{s\to 0}\left(\frac{2s\left(s^2+4\right)-\left(s^2+1\right)\cdot 2s}{\left(s^2+4\right)^2}\right) = 0.$$

Se observă că, în urma calculelor, se obţin numere complexe. Prin sumare, rezultatul ar fi mereu un număr complex şi nu o lege de asociere pentru o funcţie. $\boxed{!!!}$

Este de dorit să nu se facă o confuzie în calcul, ci să se aplice mereu modularea în frecvenţă, adică să se calculeze reziduurile funcţiei $G(s) = e^{st}\cdot F(s)$:

$$\text{rez}\left(e^{st}\cdot F(s);2i\right) \underset{\text{conform } 2^{\cdot}}{\overset{2i \text{ e pol de ordin } 1}{=}} \lim_{s\to 2i}\left((s-2i)\frac{s^2+1}{s^2(z-2i)(s+2i)}e^{st}\right) = \frac{-3}{-16i}e^{2it} = \frac{-3}{16}ie^{2it}.$$

$$\text{rez}\left(e^{st}\cdot F(s);-2i\right) \underset{\text{conform } 2^{\cdot}}{\overset{-2i \text{ e pol de ordin } 1}{=}} \lim_{s\to -2i}\left((s+2i)\frac{s^2+1}{s^2(z-2i)(s+2i)}e^{st}\right) = \frac{-3}{16i}e^{-2it} = \frac{3}{16}ie^{-2it}.$$

$$\text{rez}\left(e^{st}\cdot F(s);0\right) \underset{\text{conform } 2^{\cdot}}{\overset{0 \text{ e pol de ordin } 2}{=}} = \frac{1}{(2-1)!}\lim_{s\to 0}\left((s-0)^2\frac{s^2+1}{s^2(z-2i)(s+2i)}e^{st}\right)^{(2-1)} =$$

$$= \frac{1}{1!}\lim_{s\to 0}\left(\frac{s^2+1}{s^2+4}e^{st}\right)' \overset{s \text{ este variabilă de derivare}}{=} \lim_{s\to 0}\left(\frac{\left(2se^{st}+\left(s^2+1\right)e^{st}\cdot t\right)\left(s^2+4\right)-\left(s^2+1\right)e^{st}\cdot 2s}{\left(s^2+4\right)^2}\right)$$

$$= \lim_{s\to 0}\left(\frac{e^{st}\left(\left(2s+\left(s^2+1\right)\cdot t\right)\left(s^2+4\right)-\left(s^2+1\right)\cdot 2s\right)}{\left(s^2+4\right)^2}\right) = \frac{4t}{4^2} = \frac{1}{4}t.$$

Atunci, din Teoremă şi din formula Euler $\boxed{e^{x+iy} = e^x(\cos y + i\sin y)}$, rezultă

$$f(t) = \frac{-3}{16}ie^{2it} + \frac{3}{16}ie^{-2it} + \frac{1}{4}t =$$

$$= \frac{-3}{16}i(\cos 2t + i\sin 2t) + \frac{3}{16}i(\cos 2t - i\sin 2t) + \frac{1}{4}t = \frac{3}{8}\sin 2t + \frac{1}{4}t.$$