CURS NR. 12
EDCO, AIA

7.2. Metode operaţionale folosind operatorul Laplace

Conform teoremelor, utilizarea transformatei Laplace (a operatorului Laplace) permite ca operaţiile de integrare, derivare din clasa funcţiilor original să fie transformate în operaţii algebrice de adunare, înmulţire, ridicare la putere din clasa funcţiilor imagine şi invers.

7.2.1. Rezolvarea de ecuaţii şi sisteme de ecuaţii diferenţiale liniare cu coeficienţi constanţi, omogene sau neomogene (cu termeni liberi funcţii original) când se dau condiţii iniţiale în $t_0 = 0$

Regulă. Conform Teoremei Cauchy pentru problemele Cauchy cu ecuaţiile şi sistemele din titlu, acestea admit o soluţie unică, despre care se poate demonstra că este funcţie original (sau vector coloană de funcţii original); pentru neomogene se impune ca termenii liberi să fie funcţii original. Atunci:

•se aplică ecuaţiei (sau fiecărei ecuaţii a sistemului) transformata Laplace;

•se utilizează Teorema 1(de liniaritate);

•se utilizează Teorema 6(de derivare a originalului), CI şi tabelul (pentru neomogene);

•se obţine o ecuaţie funcţională algebrică sau sistem funcţional algebric (fără derivate sau integrale), având ca necunoscute funcţii imagine; o (îl) rezolvăm;

•se determină originalele corespunzătoare imaginilor găsite.

Observaţie. Utilizând metoda legată de transformata Laplace se obţin atât pentru ecuaţiile cât şi pentru sistemele de ecuaţii diferenţiale din titlu soluţiile definite doar pe $[0, +\infty[$.

Exemplul 7.2.1. Utilizând transformata Laplace să se rezolve următoarele probleme Cauchy cu ecuaţii diferenţiale:

a) $\begin{cases} x^{(4)} + x''' + 2x'' + x' + x = -2(\cos t)\,\eta(t), \\ CI: x(0) = 0, x'(0) = 2, x''(0) = 0, x'''(0) = -4; \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x''(t) - 2x'(t) = \left(e^{2t} + t^2 - 1\right)\eta(t), \\ CI: x(0) = \frac{1}{8}, x'(0) = 1; \end{cases}$

c) $\begin{cases} x''(t) + \omega^2 x(t) = a e^{-\lambda t}\eta(t), \\ CI: x(0) = l_1, x'(0) = l_2; \end{cases}$, unde $a, \omega, \lambda, l_1, l_2 \in \mathbb{R}, \omega, \lambda > 0$.

Rezolvare. a) Fie $\begin{cases} (*_{EN})\ \ x^{(4)}(t) + x'''(t) + 2x''(t) + x'(t) + x(t) = -2(\cos t)\,\eta(t), \\ CI: x(0) = 0, x'(0) = 2, x''(0) = 0, x'''(0) = -4; \end{cases}$

Ecuaţia $(*_{EN})$ este o ecuaţie diferenţială de ordin 4, liniară, cu coeficienţii constanţi $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 1$, $a_4 = 1$, neomogenă cu termenul liber $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(t) = -2(\cos t)\,\eta(t)$.

Metoda clasică. Pentru $t \geq 0$, variabilă independentă din domeniul de definiţie al soluţiei, se poate determina $x(t; c_1, ..., c_4)$, soluţia generală pentru ecuaţia $(*_{EN})$ ca anterior, etapele $1, 2, 3$. Apoi se impune asupra soluţiei generale CI şi se determină acea soluţie particulară a $(*_{EN})$ ce verifică (CI). Altă metodă de rezolvare este

Metoda transformatei Laplace. Se observă că ecuaţia $(*_{EN})$ este o ecuaţie diferenţială de ordin 4, liniară, cu coeficienţii constanţi, neomogenă cu termenul liber

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(t) = -2(\cos t)\,\eta(t)$,

care este funcţie original. Se dau CI în $t_0 = 0$. Se caută direct $x(t) =?$ unica soluţie a problemei Cauchy $(*_{EN}) + CI$. Atunci $x \in \mathcal{O}$ şi se notează

$X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\}(s)$.

•se aplică ecuaţiei $(*_{EN})$ transformata Laplace$\Rightarrow$

$\mathcal{L}\left\{x^{(4)}(t) + x'''(t) + 2x''(t) + x'(t) + x(t)\right\}(s) = \mathcal{L}\{-2(\cos t)\cdot\eta(t)\}(s)$

•se utilizează Teorema 1(de liniaritate) $\Rightarrow$

$\mathcal{L}\left\{x^{(4)}(t)\right\}(s)+\mathcal{L}\{x'''(t)\}(s)+2\mathcal{L}\{x''(t)\}(s)+\mathcal{L}\{x'(t)\}(s)+\mathcal{L}\{x(t)\}(s) = -2\mathcal{L}\{(\cos t)\cdot\eta(t)\}(s)$

Din tabel $\Rightarrow \mathcal{L}\{(\cos t)\cdot\eta(t)\}(s) = \dfrac{s}{s^2+1}$.

Se utilizeazăTeorema 6 (de derivare a originalului) $\Rightarrow$

$$\begin{array}{ll}
1 & \cdot|\mathcal{L}\{x(t)\}(s) = X(s) \\
1 & \cdot|\mathcal{L}\{x'(t)\}(s) = sX(s) - (x(0_+)) \\
2 & \cdot|\mathcal{L}\{x''(t)\}(s) = s^2X(s) - (sx(0_+) + x'(0_+)) \\
1 & \cdot|\mathcal{L}\{x'''(t)\}(s) = s^3X(s) - \left(s^2x(0_+) + sx'(0_+) + x''(0_+)\right) \\
1 & \cdot\left|\mathcal{L}\left\{x^{(4)}(t)\right\}(s) = s^4X(s) - \left(s^3x(0_+) + s^2x'(0_+) + sx''(0_+) + x'''(0_+)\right)\right. \\
\overline{+}| & -2\dfrac{s}{s^2+1} = \left(1+s+2s^2+s^3+s^4\right)X(s) - \left(1+2s+s^2+s^3\right)\underbrace{x(0_+)}_{0} -
\end{array}$$

$$-\left(2+s+s^2\right)\underbrace{x'(0_+)}_{2} - (1+s)\underbrace{x''(0_+)}_{0} - \underbrace{x'''(0_+)}_{-4}, \forall s\in D.$$

Se aplică $CI \Rightarrow$

$-2\dfrac{s}{s^2+1} = \left(s^2+1\right)\left(1+s+s^2\right)X(s) - 2\left(2+s+s^2\right) + 4, \forall s\in D.$

S-a obţinut o ecuaţie funcţională algebrică având ca necunoscută funcţia imagine $X(s)$; se rezolvă.

$$X(s) = \frac{\left(-2\dfrac{s}{s^2+1}\right) + \left(4+2s+2s^2-4\right)}{\left(s^2+1\right)\left(1+s+s^2\right)} = \frac{-2s+2s+2s^2+2s^3+2s^4}{\left(s^2+1\right)^2\left(1+s+s^2\right)} =$$

$$= \frac{2s^2\left(1+s+s^2\right)}{\left(s^2+1\right)^2\left(1+s+s^2\right)} = \frac{2s^2}{\left(s^2+1\right)^2}.$$

•se determină originalul $x(t)$ corespunzător funcţiei imagine $X(s)$ găsite.

<u>modul 1.</u> X este deja fracţie simplă. Descompunerea $X(s)$ în altfel de fracţii din tabel este dificilă.

<u>modul 2.</u> Se foloseşte $T10$, Borel:

$$X(s) = 2\underbrace{\frac{s}{s^2+1}}_{\widetilde{F}(s)}\cdot\underbrace{\frac{s}{s^2+1}}_{\widetilde{G}(s)}.$$

$\widetilde{F}(s) = \dfrac{s}{s^2+1} \overset{\text{tabel}}{\Rightarrow} \widetilde{f}(t) = (\cos t)\cdot\eta(t)$.

$\widetilde{G}(s) = \dfrac{s}{s^2+1} \overset{\text{tabel}}{\Rightarrow} \widetilde{g}(t) = (\cos t)\cdot\eta(t)$.

Atunci, prescurtat, fără "$\cdot\eta(t)$",

$$X(s) = 2\widetilde{F}(s)\cdot\widetilde{G}(s) \underset{\text{convenţie}}{\overset{T10,\text{ Borel}}{=}} 2\mathcal{L}\left\{\int_0^t \widetilde{f}(\tau)\,\widetilde{g}(t-\tau)\,d\tau\right\}(s) \overset{T1,\text{ de lin}}{=} \mathcal{L}\left\{2\int_0^t \cos\tau\cdot\cos(t-\tau)\,d\tau\right\}(s)$$

$$\Rightarrow x(t) = 2\int_0^t \frac{\cos(\tau+t-\tau)+\cos(\tau-t+\tau)}{2}d\tau = \int_0^t (\cos t + \cos(2\tau - t))\,d\tau =$$

$$= \left((\cos t)\tau + \frac{-\sin(2\tau-t)}{2}\right)\Bigg|_{\tau=0}^{\tau=t} = \left((\cos t)t + \frac{-\sin(2t-t)}{2}\right) - \left((\cos t)0 + \frac{-\sin(0-t)}{2}\right) =$$

$$= t\cos t + \sin t, t\geq 0 \text{ sau } x(t) = (t\cos t + \sin t)\cdot\eta(t).$$

Comentariu. Din exerciţiul precedent se observă că, aplicându-se transformata Laplace asupra unei EN se obţine ecuaţia algebrică:

$P(s)X(s) + Q(s) = F(s), s \in D,$
unde $P(s)$ este polinomul caracteristic ataşat,
$P(s) = s^n + a_1 s^{n-1} + \ldots + a_{n-1}s + a_n,$
iar

$$Q(s) = 1 \cdot \left(s^{n-1} \cdot x(0) + s^{n-2} \cdot x'(0) + \ldots + s \cdot x^{(n-2)}(0) + x^{(n-1)}(0)\right) + \\ +a_{n-1}\left(s^{n-2} \cdot x(0) + s^{n-3} \cdot x'(0) + \ldots + x^{(n-2)}(0)\right) + \\ \ldots \\ +a_0 \cdot (x(0)).$$

Se obţine

$$X(s) = \frac{F(s) + Q(s)}{P(s)}, s \in D.$$

Originalul $x(t)$, care există din formula de inversare Mellin-Fourier, se poate determina în exerciţii cu:

-metoda descompunerii în fracţii simple din tabel;

-metoda reziduurilor, mai ales pentru ecuaţii diferenţiale de ordin n mare, pentru care şi polinomul caracteristic, adică numitorul fracţiei, are grad mare; şi în cazul utilizării acestei metode, pentru n mare apare dificultatea rezolvarii ecuaţiei caracteristice pentru determinarea polilor cu ordinul corespunzător.

b) Fie $\begin{cases} (*_{EN}) \; x''(t) - 2x'(t) = e^t\left(t^2 + t + 3\right)\eta(t), \\ CI : x(0) = 2, x'(0) = 2; \end{cases}$

Ecuaţia $(*_{EN})$ este o ecuaţie diferenţială de ordin 2, liniară, cu coeficienţii constanţi $a_1 = -2$, $a_2 = 0$, neomogenă cu termenul liber $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(t) = e^t\left(t^2 + t + 3\right)\eta(t)$.

Metoda clasică. Pentru $t \geq 0$, variabilă independentă din domeniul de definiţie al soluţiei, se poate determina $x(t; c_1, c_2)$, soluţia generală pentru ecuaţia $(*_{EN})$ ca anterior, etapele $1, 2, 3$. Apoi se impune asupra soluţiei generale CI şi se determină acea soluţie particulară a $(*_{EN})$ ce verifică (CI). Altă metodă de rezolvare este

Metoda transformatei Laplace. Se observă că ecuaţia $(*_{EN})$ este o ecuaţie diferenţială de ordin 2, liniară, cu coeficienţii constanţi, neomogenă cu termenul liber $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(t) = e^t\left(t^2 + t + 3\right)\eta(t)$, care este funcţie original. Se dau CI în $t_0 = 0$. Se caută direct $x(t) =?$ unica soluţie a problemei Cauchy $(*_{EN}) + CI$. Atunci $x \in \mathcal{O}$ şi se notează

$$X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\}(s).$$

•se aplică ecuaţiei $(*_{EN})$ transformata Laplace$\Rightarrow$

$$\mathcal{L}\{x''(t) - 2x'(t)\}(s) = \mathcal{L}\left\{\left(t^2e^t + te^t + 3e^t\right) \cdot \eta(t)\right\}(s)$$

•se utilizează Teorema 1(de liniaritate) $\Rightarrow$

$$\mathcal{L}\{x''(t)\}(s) - 2\mathcal{L}\{x'(t)\}(s) = \mathcal{L}\left\{t^2e^t \cdot \eta(t)\right\}(s) + \mathcal{L}\left\{te^t \cdot \eta(t)\right\}(s) - 3\mathcal{L}\left\{e^t \cdot \eta(t)\right\}(s)$$

Din tabel$\Rightarrow \mathcal{L}\left\{t^n \cdot e^{\lambda t} \cdot \eta(t)\right\}(s) = \dfrac{n!}{(s-\lambda)^{n+1}}$.

Se utilizeazăTeorema 6 (de derivare a originalului) $\Rightarrow$

$$\begin{array}{rl} 0 & \cdot|\mathcal{L}\{x(t)\}(s) = X(s) \\ -2 & \cdot|\mathcal{L}\{x'(t)\}(s) = sX(s) - (x(0_+)) \\ 1 & \cdot|\mathcal{L}\{x''(t)\}(s) = s^2X(s) - (sx(0_+) + x'(0_+)) \\ \mp| & \dfrac{2!}{(s-1)^3} + \dfrac{1!}{(s-1)^2} + 3\dfrac{0!}{(s-1)^1} = \left(-2s + s^2\right)X(s) - (-2+s)\underbrace{x(0_+)}_{2} - \underbrace{x'(0_+)}_{2}, \forall s \in D. \end{array}$$

Se aplică $CI \Rightarrow$

$$\frac{2!}{(s-1)^3} + \frac{1!}{(s-1)^2} + 3\frac{1}{s-1} = s(s-2)X(s) - 2(s-2) - 2, \forall s \in D.$$

S-a obţinut o ecuaţie funcţională algebrică având ca necunoscută funcţia imagine $X(s)$; se rezolvă.

$$X(s) = \frac{\left(\frac{2!}{(s-1)^3} + \frac{1!}{(s-1)^2} + 3\frac{1}{s-1}\right) + (2(s-2)+2)}{s(s-2)} \Rightarrow$$

$$X(s) = \frac{2+s-1+3\left(s^2-2s+1\right)}{s(s-2)(s-1)^3} + \frac{2s-2}{s(s-2)} = \frac{3s^2-5s+4}{s(s-2)(s-1)^3} + \frac{1}{s-2} + \frac{1}{s} \overset{\text{descompunem în}}{\underset{\text{în fr. simple}}{=}}$$

$$= \left(2\frac{1}{s} + 3\frac{1}{s-2} - 5\frac{1}{s-1} - \frac{1}{(s-1)^2} - 2\frac{1}{(s-1)^3}\right) + \left(\frac{1}{s-2} + \frac{1}{s}\right) =$$

$$= 3\frac{1}{s} + 4\frac{1}{s-2} - 5\frac{1}{s-1} - \frac{1}{(s-1)^2} - 2\frac{1}{(s-1)^3}.$$

•se determină originalul $x(t)$ corespunzător funcţiei imagine $X(s)$ găsite.

Din tabel, folosind $T1$, de liniaritate$\Rightarrow$

$$x(t) = 3\cdot\eta(t) + 4e^{2t}\eta(t) - 5e^t\eta(t) - \frac{t}{1!}e^t\eta(t) - 2\frac{t^2}{2!}e^t\eta(t) =$$

$$= \left(3 + 4e^{2t} - 5e^t - te^t - t^2e^t\right)\eta(t).$$

sau $x(t) = 3 + 4e^{2t} - \left(5 + t + t^2\right)e^t, t \geq 0.$

Comentariu. •Descompunerea

$$\frac{3s^2-5s+4}{s(s-2)(s-1)^3} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s-2} + \frac{C}{s-1} + \frac{D}{(s-1)^2} + \frac{E}{(s-1)^3}$$

se poate face:

-folosind calculatorul;

-folosind modul general, adică rezolvarea sistemului liniar algebric neomogen cu necunoscutele A, B, C, D, E, obţinut prin identificarea coeficienţilor puterilor lui s;

-folosind modul general combinat cu un mod particular (a se vedea Anexa 4, AM), adică în sistemul liniar algebric neomogen cu necunoscutele A, B, C, D, E, necunoscutele A şi B corespunzătoare sunt determinate ca şi coeficienţi corespunzători rădăcinilor simple reale 0 şi 2.

•Mai mult, pentru funcţia

$G_1(s) = \dfrac{3s^2-5s+4}{s(s-2)(s-1)^3}$ se poate determina originalul folosind suma reziduurilor pentru $e^{st}G_1(s)$ calculaţi în polii simpli $0, 2$ şi în polul triplu 1.

c) Fie $\begin{cases} (*_{EN})\ x''(t) + \omega^2 x(t) = ae^{-\lambda t}\eta(t), \\ CI: x(0) = l_1, x'(0) = l_2; \end{cases}$ unde $a, \omega, \lambda, l_1, l_2 \in \mathbb{R}, \omega, \lambda > 0.$

Ecuaţia $(*_{EN})$ este o ecuaţie diferenţială de ordin 2, liniară, cu coeficienţii constanţi $a_1 = 0$, $a_2 = \omega^2$, neomogenă cu termenul liber $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(t) = ae^{-\lambda t}\eta(t)$. Modelează un oscilator armonic (circuit RLC, pendul, ...)

Metoda clasică. Pentru $t \geq 0$, variabilă independentă din domeniul de definiţie al soluţiei, se poate determina $x(t; c_1, c_2)$, soluţia generală pentru ecuaţia $(*_{EN})$ ca anterior, etapele $1, 2, 3$. Apoi se impune asupra soluţiei generale CI şi se determină acea soluţie particulară a $(*_{EN})$ ce verifică (CI). Altă metodă de rezolvare este

Metoda transformatei Laplace.

Se observă că ecuaţia $(*_{EN})$ este o ecuaţie diferenţială de ordin 2, liniară, cu coeficienţii constanţi, neomogenă cu termenul liber $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(t) = ae^{-\lambda t}\eta(t)$, care este funcţie original. Se dau CI în $t_0 = 0$. Se caută direct $x(t) =?$ unica soluţie a problemei Cauchy $(*_{EN}) + CI$. Atunci $x \in \mathcal{O}$ şi se notează

$$X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\}(s).$$

•se aplică ecuaţiei $(*_{EN})$ transformata Laplace$\Rightarrow$

$\mathcal{L}\left\{x''(t)+\omega^2 x(t)\right\}(s)=\mathcal{L}\left\{\left(ae^{-\lambda t}\right)\cdot\eta(t)\right\}(s)$
•se utilizează Teorema 1(de liniaritate) $\Rightarrow$
$\mathcal{L}\{x''(t)\}(s)+\omega^2\mathcal{L}\{x(t)\}(s)=a\mathcal{L}\left\{e^{-\lambda t}\cdot\eta(t)\right\}(s)$
Din tabel$\Rightarrow$ $\mathcal{L}\left\{e^{-\lambda t}\cdot\eta(t)\right\}(s)=\dfrac{1}{s+\lambda}$.
Se utilizeazăTeorema 6 (de derivare a originalului) $\Rightarrow$

$$\begin{array}{rl}
\omega^2 & \cdot|\mathcal{L}\{x(t)\}(s)=X(s)\\
0 & \cdot|\mathcal{L}\{x'(t)\}(s)=sX(s)-(x(0_+))\\
1 & \cdot|\mathcal{L}\{x''(t)\}(s)=s^2X(s)-(sx(0_+)+x'(0_+))\\
\hline + | & a\dfrac{1}{s+\lambda}=\left(\omega^2+s^2\right)X(s)-(0+s)\underbrace{x(0_+)}_{l_1}-\underbrace{x'(0_+)}_{l_2},\forall s\in D.
\end{array}$$

Se aplică $CI\Rightarrow$

$$a\frac{1}{s+\lambda}=\left(\omega^2+s^2\right)X(s)-l_1s-l_2,\forall s\in D.$$

S-a obţinut o ecuaţie funcţională algebrică având ca necunoscută funcţia imagine $X(s)$; se rezolvă.

$$X(s)=\frac{a\dfrac{1}{s+\lambda}+l_1s+l_2}{s^2+\omega^2}\Rightarrow$$

$$X(s)=\frac{a}{(s+\lambda)\left(s^2+\omega^2\right)}+\frac{l_1s+l_2}{s^2+\omega^2}\underset{\text{în fr. simple}}{\overset{\text{descompunem în}}{=}}$$

$$=\frac{a}{\lambda^2+\omega^2}\left(\frac{1}{s+\lambda}-\frac{s}{s^2+\omega^2}+\frac{\lambda}{s^2+\omega^2}\right)+\left(l_1\frac{s}{s^2+\omega^2}+l_2\frac{1}{s^2+\omega^2}\right)=$$

$$=\frac{a}{\lambda^2+\omega^2}\frac{1}{s+\lambda}+\left(\frac{-a}{\lambda^2+\omega^2}+l_1\right)\frac{s}{s^2+\omega^2}+\left(\frac{a\lambda}{\lambda^2+\omega^2}\frac{1}{\omega}+l_2\frac{1}{\omega}\right)\frac{\omega}{s^2+\omega^2}.$$

•se determină originalul $x(t)$ corespunzător funcţiei imagine $X(s)$ găsite.
Din tabel, folosind $T1$, de liniaritate$\Rightarrow$

$$x(t)=\frac{a}{\lambda^2+\omega^2}e^{-\lambda t}\cdot\eta(t)+\left(\frac{-a}{\lambda^2+\omega^2}+l_1\right)\cos(\omega t)\cdot\eta(t)+\left(\frac{a\lambda}{\lambda^2+\omega^2}\frac{1}{\omega}+l_2\frac{1}{\omega}\right)\frac{a\lambda+l_2}{\omega}\sin(\omega t)\cdot\eta(t)=$$

$$=\left(\frac{a}{\lambda^2+\omega^2}e^{-\lambda t}+\left(\frac{-a}{\lambda^2+\omega^2}+l_1\right)\cos(\omega t)+\left(\frac{a\lambda}{\lambda^2+\omega^2}\frac{1}{\omega}+l_2\frac{1}{\omega}\right)\sin(\omega t)\right)\eta(t).$$

sau $x(t)=\dfrac{a}{\lambda^2+\omega^2}e^{-\lambda t}+\left(\dfrac{-a}{\lambda^2+\omega^2}+l_1\right)\cos(\omega t)+\left(\dfrac{a\lambda}{\lambda^2+\omega^2}\dfrac{1}{\omega}+l_2\dfrac{1}{\omega}\right)\sin(\omega t),t\geq 0.$

Exemplul 7.2.2. Utilizând transformata Laplace să se rezolve următoarele probleme Cauchy cu sisteme diferenţiale:

a) $\left\{\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}x'=y+z\\ y'=z+x\\ z'=x+y\end{array}\right.\\ CI:x(0)=-1,y(0)=1,z(0)=0;\end{array}\right.$ **b)** $\left\{\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}x'+x-3y=0\\ y'-x-y=e^t\end{array}\right.\\ CI:x(0)=0,y(0)=0;\end{array}\right.$

Rezolvare. a) Fie $\left\{\begin{array}{l}(*_{SO})\left\{\begin{array}{l}x'(t)=0\cdot x(t)+1\cdot y(t)+1\cdot z(t)+0\\ y'(t)=1\cdot x(t)+0\cdot y(t)+1\cdot z(t)+0\\ z'(t)=1\cdot x(t)+1\cdot y(t)+0\cdot z(t)+0\end{array}\right.\\ CI:x(0)=-1,y(0)=1,z(0)=0;\end{array}\right.$

(poate apărea şi notaţia $\begin{cases} (*_{SO}) \begin{cases} x_1' = x_2 + x_3 \\ x_2' = x_3 + x_1 \\ x_3' = x_1 + x_2 \end{cases} \\ CI : x_1(0) = -1, x_2(0) = 1, x_3(0) = 0; \end{cases}$)

Sistemul $(*_{SO})$ este un sistem de ecuaţii diferenţiale de ordin 1, liniar, cu coeficienţii constanţi daţi de matricea $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, omogen cu termenul liber $\underline{\mathbf{b}}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

<u>**Metoda clasică.**</u> Pentru $t \geq 0$, variabilă independentă din domeniul de definiţie al soluţiei, se poate determina $\begin{pmatrix} x_o(t; c_1, c_2, c_3) \\ y_o(t; c_1, c_2, c_3) \\ z_o(t; c_1, c_2, c_3) \end{pmatrix}$, soluţia generală pentru sistemul $(*_{SO})$ ca anterior. Apoi se impune asupra soluţiei generale CI şi se determină acea soluţie particulară a $(*_{SO})$ ce verifică (CI).

Altă metodă de rezolvare este

<u>**Metoda transformatei Laplace**</u>. Se observă că sistemul $(*_{SO})$ este un sistem de ecuaţii diferenţiale de ordin 1, liniar, cu coeficienţii constanţi, omogen. Se dau CI în $t_0 = 0$. Se caută direct $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$ =? unica soluţie a problemei Cauchy $(*_{SO}) + CI$. Atunci $x, y, z \in \mathcal{O}$ şi se notează

$$X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\}(s).$$
$$Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}(s).$$
$$Z(s) = \mathcal{L}\{z(t)\}(s).$$

•se aplică fiecărei ecuaţii a sistemului $(*_{SO})$ transformata Laplace$\Rightarrow$

$$\begin{cases} \mathcal{L}\{x'(t)\}(s) = \mathcal{L}\{y(t) + z(t)\}(s) \\ \mathcal{L}\{y'(t)\}(s) = \mathcal{L}\{z(t) + x(t)\}(s) \\ \mathcal{L}\{z'(t)\}(s) = \mathcal{L}\{x(t) + y(t)\}(s) \end{cases}$$

•se utilizează Teorema 1(de liniaritate) $\Rightarrow$

$$\begin{cases} \mathcal{L}\{x'(t)\}(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}(s) + \mathcal{L}\{z(t)\}(s) \\ \mathcal{L}\{y'(t)\}(s) = \mathcal{L}\{z(t)\}(s) + \mathcal{L}\{x(t)\}(s) \\ \mathcal{L}\{z'(t)\}(s) = \mathcal{L}\{x(t)\}(s) + \mathcal{L}\{y(t)\}(s) \end{cases}$$

Se utilizează Teorema 6 (de derivare a originalului). Se aplică $CI \Rightarrow$

$$\begin{cases} sX(s) - \underbrace{x(0_+)}_{-1} = Y(s) + Z(s) \\ sY(s) - \underbrace{y(0_+)}_{1} = Z(s) + X(s) \\ sZ(s) - \underbrace{z(0_+)}_{0} = X(s) + Y(s) \end{cases}$$

<u>modul 1.</u> $\begin{cases} sX(s) - Y(s) - Z(s) = -1 \\ -X(s) + sY(s) - Z(s) = 1 \\ -X(s) - Y(s) + sZ(s) = 0 \end{cases}$

S-a obţinut un sistem funcţional algebric având ca necunoscute funcţiile imagine $X(s), Y(s), Z(s)$; se rezolvă (rezolvare de tip Cramer, deoarece problema Cauchy are soluţie unică). Se calculează:

$$\Delta(s) = \begin{vmatrix} s & -1 & -1 \\ -1 & s & -1 \\ -1 & -1 & s \end{vmatrix} = s^3 - 3s - 2 = (s+1)^2 (s-2) \neq 0, \forall s \in D.$$

$$\Delta_1(s) = \begin{vmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & s & -1 \\ 0 & -1 & s \end{vmatrix} = -s^2 + s + 2 = -(s+1)(s-2), \forall s \in D.$$

$$\Delta_2(s) = \begin{vmatrix} s & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & s \end{vmatrix} = s^2 - s - 2 = (s+1)(s-2), \forall s \in D.$$

$$\Delta_3(s) = \begin{vmatrix} s & -1 & -1 \\ -1 & s & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0, \forall s \in D.$$

$$\text{Atunci} \begin{cases} X(s) = \dfrac{\Delta_1(s)}{\Delta(s)} = -\dfrac{1}{s+1} \\ Y(s) = \dfrac{\Delta_2(s)}{\Delta(s)} = \dfrac{1}{s+1} \\ Z(s) = \dfrac{\Delta_3(s)}{\Delta(s)} = 0 \end{cases}$$

<u>modul 2.</u>(!!!bnumai pentru acest exerciţiu) $\begin{cases} sX(s) - (-1) = Y(s) + Z(s) \\ sY(s) - 1 = Z(s) + X(s) \\ sZ(s) - 0 = X(s) + Y(s) \end{cases}$

Se notează cu $S(s) = X(s) + Y(s) + Z(s), \forall s \in D$. Atunci, adunând ecuaţiile sistemului anterior$\Rightarrow$

$s \cdot S(s) - (-1 + 1 + 0) = S(s) + S(s) \Rightarrow (s-2) S(s) = 0, \forall s \in D \Rightarrow S(s) = 0, \forall s \in D.$

$$\text{Atunci} \begin{cases} sX(s) - (-1) = -X(s) \\ sY(s) - 1 = -Y(s) \\ sZ(s) - 0 = -Z(s) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X(s) = -\dfrac{1}{s+1} \\ Y(s) = \dfrac{1}{s+1} \\ Z(s) = 0 \end{cases}, , \forall s \in D.$$

•se determină originalele $x(t), y(t), z(t)$ corespunzătoare funcţiilor imagine $X(s), Y(s), Z(s)$ găsite. Din tabel$\Rightarrow$

$$\begin{cases} x(t) = -e^{-t} \cdot \eta(t) \\ y(t) = e^{-t} \cdot \eta(t) \\ z(t) = 0 \end{cases} \quad \text{sau} \begin{cases} x(t) = -e^{-t} \\ y(t) = e^{-t} \\ z(t) = 0 \end{cases}, \forall t \geq 0.$$

b) $\begin{cases} \begin{cases} x' + x - 3y = 0 \\ y' - x - y = e^t \end{cases} \\ CI : x(0) = 0, y(0) = 0; \end{cases}$ (poate apărea şi notaţia $\begin{cases} \begin{cases} x_1' + x_1 - 3x_2 = 0 \\ x_2' - x_1 - x_2 = e^t \end{cases} \\ CI : x_1(0) = 0, x_2(0) = 0; \end{cases}$)

Se scrie $\begin{cases} (*_{SN}) \begin{cases} x'(t) = -x(t) + 3y(t) + 0 \\ y' = x(t) + y(t) + e^t \cdot \eta(t) \end{cases} \\ CI : x(0) = 0, y(0) = 0; \end{cases}$

Sistemul $(*_{SN})$ este un sistem de ecuaţii diferenţiale de ordin 1, liniar, cu coeficienţii constanţi daţi de matricea $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, neomogen cu termenul liber $\underline{\mathbf{b}}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ e^t \end{pmatrix}, \forall t \geq 0.$

<u>**Metoda clasică.**</u> Pentru $t \geq 0$, variabilă independentă din domeniul de definiţie al soluţiei, se poate determina $\begin{pmatrix} x(t; c_1, c_2) \\ y(t; c_1, c_2) \end{pmatrix}$, soluţia generală pentru sistemul $(*_{SN})$ ca anterior. Apoi se impune asupra soluţiei generale CI şi se determină acea soluţie particulară a $(*_{SN})$ ce verifică (CI). Altă metodă de rezolvare este

<u>**Metoda transformatei Laplace**</u>. Se observă că sistemul $(*_{SN})$ este un sistem de ecuaţii diferenţiale de ordin 1, liniar, cu coeficienţii constanţi, neomogen. Se dau CI în $t_0 = 0$. Se caută direct

$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ =? unica soluţie a problemei Cauchy $(*_{SN}) + CI$. Atunci $x, y \in \mathcal{O}$ şi se notează

$X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\}(s)$.

$Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}(s)$.

•se aplică fiecărei ecuaţii a sistemului $(*_{SN})$ transformata Laplace⇒

$$\begin{cases} \mathcal{L}\{x'(t)\}(s) = \mathcal{L}\{-x(t) + 3y(t) + 0\}(s) \\ \mathcal{L}\{y'(t)\}(s) = \mathcal{L}\{x(t) + y(t) + e^t\}(s) \end{cases}$$

•se utilizează Teorema 1(de liniaritate) ⇒

$$\begin{cases} \begin{cases} \mathcal{L}\{x'(t)\}(s) = -\mathcal{L}\{x(t)\}(s) + 3\mathcal{L}\{y(t)\}(s) + 3\mathcal{L}\{0\}(s) \\ \mathcal{L}\{y'(t)\}(s) = \mathcal{L}\{x(t)\}(s) + \mathcal{L}\{y(t)\}(s) + \mathcal{L}\{e^t\}(s) \end{cases} \end{cases}$$

Se utilizează Teorema 6 (de derivare a originalului). Se aplică CI, tabelul⇒

$$\begin{cases} sX(s) - \underbrace{x(0_+)}_{0} = -X(s) + 3Y(s) + 0 \\ sY(s) - \underbrace{y(0_+)}_{0} = X(s) + Y(s) + \dfrac{1}{s-1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (s+1)X(s) - 3Y(s) = 0 \\ -X(s) + (s-1)Y(s) = \dfrac{1}{s-1} \end{cases}$$

S-a obţinut un sistem funcţional algebric având ca necunoscute funcţiile imagine $X(s), Y(s)$; se rezolvă (rezolvare de tip Cramer, deoarece problema Cauchy are soluţie unică). Se calculează:

$$\Delta(s) = \begin{vmatrix} s+1 & -3 \\ -1 & s-1 \end{vmatrix} = s^2 - 4 = (s+2)(s-2) \neq 0, \forall s \in D.$$

$$\Delta_1(s) = \begin{vmatrix} 0 & -3 \\ \dfrac{1}{s-1} & s-1 \end{vmatrix} = \frac{3}{s-1}, \forall s \in D.$$

$$\Delta_2(s) = \begin{vmatrix} s+1 & 0 \\ -1 & \dfrac{1}{s-1} \end{vmatrix} = \frac{s+1}{s-1}, \forall s \in D.$$

$$\text{Atunci} \begin{cases} X(s) = \dfrac{\Delta_1(s)}{\Delta(s)} = \dfrac{3}{(s-1)(s+2)(s-2)} \\ Y(s) = \dfrac{\Delta_2(s)}{\Delta(s)} = \dfrac{s+1}{(s-1)(s+2)(s-2)} \end{cases}$$

•se determină originalele $x(t), y(t)$ corespunzătoare funcţiilor imagine $X(s), Y(s)$ găsite.

Se descompun funcţiile imagine $X(s), Y(s)$ în fracţii simple

$$\begin{cases} X(s) = -\dfrac{1}{s-1} + \dfrac{3}{4}\dfrac{1}{s-2} + \dfrac{1}{4}\dfrac{1}{s+2} \\ Y(s) = -\dfrac{2}{3}\dfrac{1}{s-1} + \dfrac{3}{4}\dfrac{1}{s-2} - \dfrac{1}{12}\dfrac{1}{s+2} \end{cases}$$

Din tabel⇒

$$\begin{cases} x(t) = \left(-e^t + \dfrac{3}{4}e^{2t} + \dfrac{1}{4}e^{-2t}\right) \cdot \eta(t) \\ y(t) = \left(-\dfrac{2}{3}e^t + \dfrac{3}{4}e^{2t} - \dfrac{1}{12}e^{-2t}\right) \cdot \eta(t) \end{cases} \text{sau} \begin{cases} x(t) = -e^t + \dfrac{3}{4}e^{2t} + \dfrac{1}{4}e^{-2t} \\ y(t) = -\dfrac{2}{3}e^t + \dfrac{3}{4}e^{2t} - \dfrac{1}{12}e^{-2t} \end{cases}, \forall t \geq 0.$$

○4.2.2. Rezolvarea de ecuaţii şi sisteme de ecuaţii diferenţiale liniare având coeficienţi variabili, omogene sau neomogene cand se dau condiţii iniţiale în $t_0 = 0$

Sunt situaţii în care metoda Transformatei Laplace se poate folosi şi pentru rezolvarea de ecuaţii şi sisteme de ecuaţii având coeficienţi variabili de un anume tip (în general, monoame; în particular, pentru ecuaţii Euler) sau nu.

○**Exemplul 7.2.3**. Utilizând transformata Laplace să se rezolve următoarele probleme Cauchy:

$$\begin{cases} tx''(t) - 2x'(t) - tx(t) = 0 \cdot \eta(t), \\ CI : x(0) = 1, x'(0) = 0; \end{cases}$$

Rezolvare. Fie $\begin{cases} (*_{EO}) \ \ tx''(t) - 2x'(t) - tx(t) = 0 \cdot \eta(t), \\ CI : x(0) = 1, x'(0) = 0; \end{cases}$

Ecuaţia $(*_{EO})$ este o ecuaţie diferenţială de ordin 2, liniară, cu coeficienţii variabili $a_0(t) = t$, $a_1(t) = -2$, $a_2(t) = -t$, omogenă cu termenul liber $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(t) = 0 \cdot \eta(t)$.

Metoda clasică. Pentru $t \geq 0$, variabilă independentă din domeniul de definiţie al soluţiei, este dificil de determinat $x_o(t; c_1, c_2)$, adică un sistem fundamental de soluţii. Altă metodă de rezolvare este

Metoda transformatei Laplace.

Se observă că ecuaţia $(*_{EO})$ este o ecuaţie diferenţială de ordin 2, liniară, cu coeficienţii variabili, omogenă. Se dau CI în $t_0 = 0$. Se caută direct $x(t) =?$ unica soluţie a problemei Cauchy $(*_{EO})$+CI. Se presupune $x \in \mathcal{O}$ şi se notează

$$X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\}(s).$$

•se aplică ecuaţiei $(*_{EN})$ transformata Laplace$\Rightarrow$

$\mathcal{L}\{tx''(t) - 2x'(t) - tx(t)\}(s) = \mathcal{L}\{0 \cdot \eta(t)\}(s)$

•se utilizează Teorema 1(de liniaritate) $\Rightarrow$

$\mathcal{L}\{tx''(t)\}(s) - 2\mathcal{L}\{x'(t)\}(s) - \mathcal{L}\{tx'(t)\}(s) = 0.$

Se utilizează Teorema 6 (de derivare a originalului) $\Rightarrow$

$$\cdot|\mathcal{L}\{x(t)\}(s) = X(s)$$

$$\cdot|\mathcal{L}\{x'(t)\}(s) = sX(s) - \left(\underbrace{x(0_+)}_{1}\right) = sX(s) - 1$$

$$\cdot|\mathcal{L}\{x''(t)\}(s) = s^2X(s) - \left(s\underbrace{x(0_+)}_{1} + \underbrace{x'(0_+)}_{0}\right) = s^2X(s) - s$$

Conform Teoremei de derivare a imaginii$\Rightarrow$ $\boxed{\mathcal{L}\{(-t)^n f(t)\}(s) = F^{(n)}(s)}$ $\Rightarrow$

$$\begin{array}{ll} -1 & \cdot|\mathcal{L}\{tx(t)\}(s) = -X'(s) \\ -2 & \cdot|\mathcal{L}\{x'(t)\}(s) = sX(s) - 1 \\ 1 & \cdot|\mathcal{L}\{tx''(t)\}(s) = -\left(2sX(s) + s^2X'(s) - 1\right) \\ \overline{+}| & 0 = \left(1 - s^2\right)X'(s) + (-2s - 2s)X(s) + 2 + 1, \forall s \in D. \end{array}$$

S-a obţinut

$\left(1 - s^2\right)X'(s) + (-4s)X(s) + 3 = 0, \forall s \in D \Rightarrow$

$X'(s) = \dfrac{4s}{1 - s^2}X(s) + \dfrac{-3}{1 - s^2}, \forall s \in D_1 \subset D$, a.î. $s^2 - 1 > 0$,

care este o ecuaţie diferenţială liniară în necunoscuta $X(s) =?$

Un factor integrant este

$$\mu(t) = e^{-\int \frac{4s}{1 - s^2}ds} = e^{2\ln\left(s^2 - 1\right)} = \left(s^2 - 1\right)^2$$

Atunci ecuaţia devine:

$X'(s) \cdot \left(s^2 - 1\right)^2 + X(s) \cdot 4s\left(s^2 - 1\right) = \dfrac{-3}{1 - s^2}\left(s^2 - 1\right)^2, \forall s \in D_1 \Leftrightarrow$

$\dfrac{d}{ds}\left(X(s) \cdot \left(s^2 - 1\right)^2\right) = 3\left(s^2 - 1\right), \forall s \in D_1 \Rightarrow$

$X(s) \cdot \left(s^2 - 1\right)^2 = s^3 - 3s + c_1, \forall s \in D_1, \forall c_1 \in \mathbb{R} \Rightarrow$

$X(s) = \dfrac{s^3 - 3s + c_1}{\left(s^2 - 1\right)^2}, \forall s \in D_1, \forall c_1 \in \mathbb{R}.$

Se descompune $X(s)$ în fracţii simple, din tabel
$X(s) = \dfrac{A}{s-1} + \dfrac{B}{s+1} + \dfrac{C}{(s-1)^2} + \dfrac{D}{(s+1)^2} \Rightarrow$
$X(s) = \left(-\dfrac{c_1}{4} - \dfrac{1}{6}\right)\dfrac{1}{s-1} + \left(\dfrac{c_1}{4} - \dfrac{1}{6}\right)\dfrac{1}{s+1} + \left(\dfrac{c_1}{4} - \dfrac{1}{2}\right)\dfrac{1}{(s-1)^2} + \left(\dfrac{c_1}{4} + \dfrac{1}{2}\right)\dfrac{1}{(s+1)^2}.$
•se determină originalul $x(t)$ corespunzător funcţiei imagine $X(s)$ găsite.
Din tabel, folosind $T1$, de liniaritate$\Rightarrow$
$x(t) = \left(\left(-\dfrac{c_1}{4} - \dfrac{1}{6}\right)e^t + \left(\dfrac{c_1}{4} - \dfrac{1}{6}\right)e^{-t} + \left(\dfrac{c_1}{4} - \dfrac{1}{2}\right)te^t + \left(\dfrac{c_1}{4} + \dfrac{1}{2}\right)te^{-t}\right)\eta(t)$
sau $x(t) = \left(-\dfrac{c_1}{4} - \dfrac{1}{6}\right)e^t + \left(\dfrac{c_1}{4} - \dfrac{1}{6}\right)e^{-t} + \left(\dfrac{c_1}{4} - \dfrac{1}{2}\right)te^t + \left(\dfrac{c_1}{4} + \dfrac{1}{2}\right)te^{-t}, t \geq 0.$

7.2.3. Rezolvarea de ecuaţii integrale şi integro-diferenţiale

Regulă. În anumite ipoteze asupra ecuaţiilor din titlu, acestea admit o soluţie unică, ce poate fi presupusă drept funcţie original. Atunci
•se aplică ecuaţiei transformata Laplace;
•se utilizează Teorema 1(de liniaritate), Teorema 10(Borel), Teorema 6(de derivare a originalului), CI-pentru ecuaţii integro-diferenţiale$-$ şi tabelul; se obţine o ecuaţie funcţională, având ca necunoscută o funcţie imagine; se rezolvă;
•se determină originalul corespunzător imaginii găsite.
Observaţie. Utilizând metoda legată de transformata Laplace se obţine pentru ecuaţiile din titlu soluţiile definite doar pe $[0, +\infty[$.

Exemplul 7.2.4. Utilizând transformata Laplace să se rezolve următoarele ecuaţii integrale :
a) $\displaystyle\int_0^t \cos(t-\tau)\, x(\tau)\, d\tau = \operatorname{sh} t, t \geq 0.$
Rezolvare. a) Fie
$(*_I) \displaystyle\int_0^t \cos(t-\tau)\, x(\tau)\, d\tau = \operatorname{sh} t, t \geq 0$
Ecuaţia $(*_I)$ este o ecuaţie integrală, deoarece funcţia necunoscută $x(t)$ apare sub operatorul de integrare. Se caută $x(t) = ?, t \geq 0$ soluţia ecuaţiei $(*_I)$.
Metoda transformatei Laplace. Se presupune $x \in \mathcal{O}$ şi se notează $X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\}(s)$.
•se aplică ecuaţiei $(*_I)$ transformata Laplace$\Rightarrow$
$\mathcal{L}\left\{\displaystyle\int_0^t x(\tau)\cos(t-\tau)\, d\tau\right\}(s) = \mathcal{L}\{\operatorname{sh} t \cdot \eta(t)\}(s)$
•Din tabel $\Rightarrow \mathcal{L}\{\operatorname{sh} t \cdot \eta(t)\}(s) = \dfrac{s}{s^2-1}.$
Se utilizează Teorema 10, Borel:
$\widetilde{f}(t) = x(t), t \geq 0 \Rightarrow \widetilde{F}(s) = X(s).$
$\widetilde{g}(t) = \cos t, t \geq 0 \overset{\text{tabel}}{\Rightarrow} \widetilde{G}(s) = \dfrac{s}{s^2+1}$
Atunci
$X(s) \cdot \dfrac{s}{s^2+1} = \dfrac{1}{s^2-1} \Rightarrow X(s) = \dfrac{s^2+1}{s(s^2-1)}.$
•se determină originalul $x(t)$ corespunzător funcţiei imagine $X(s)$ găsite. Se descompune X în fracţii din tabel (simple) $\Rightarrow$

$X(s) = -\frac{1}{s} + 2\frac{s}{s^2-1}$

$\overset{\text{tabel}}{\Rightarrow} X(s) = -\mathcal{L}\{\eta(t)\}(s) + 2\mathcal{L}\{(\operatorname{ch} t)\cdot\eta(t)\}(s) \overset{T1,\text{lin}}{=} \mathcal{L}\{-\eta(t) + 2(\operatorname{ch} t)\cdot\eta(t)\}(s)$

$\Rightarrow x(t) = (-1 + 2\operatorname{ch} t)\cdot\eta(t)$ sau $x(t) = -1 + 2\operatorname{ch} t, t \geq 0.$

Comentariu. Fie o ecuaţie integrală de tip Volterra (al doilea tip)

$$x(t) = f(t) + \int_0^t k(t-\tau)\,x(\tau)\,d\tau, t \geq 0,$$

unde f (poate fi $\equiv 0$ sau $\neq 0$) şi k (kernel=nucleu) sunt funcţii continue date, originale Laplace, iar x este funcţia necunoscută (are necunoscuta sub operatorul de integrare).

Din exerciţiul precedent se observă că, aplicându-se transformata Laplace asupra ecuaţiei, se obţine ecuaţia algebrică:

$$X(s) = F(s) + K(s)\cdot X(s), s \in D,$$

de unde

$$X(s) = \frac{F(s)}{1-K(s)}, s \in D.$$

Originalul $x(t)$, care există din formula de inversare Mellin-Fourier, se poate determina în exerciţii ca în secţiunile anterioare.

Exemplul 7.2.5. Să se rezolve următoarele ecuaţii integrale :

a) $x(t) + 2\omega\int_0^t \cos\omega(t-\tau)\,x(\tau)\,d\tau = b\sin\omega t, \forall t \geq 0$, unde $b, \omega \in \mathbb{R}$.

Rezolvare. **a)** Fie

$$(*_I)\; x(t) + 2\omega\int_0^t \cos\omega(t-\tau)\,x(\tau)\,d\tau = b\sin\omega t, \forall t \geq 0, \text{ unde } b, \omega \in \mathbb{R}$$

Ecuaţia $(*_I)$ este o ecuaţie integrală, deoarece funcţia necunoscută $x(t)$ apare sub operatorul de integrare. Se caută $x(t) = ?, t \geq 0$ soluţia ecuaţiei $(*_I)$.

Metoda transformatei Laplace. Se presupune $x \in \mathcal{O}$ şi se notează $X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\}(s)$.

•se aplică ecuaţiei $(*_I)$ transformata Laplace$\Rightarrow$

$$\mathcal{L}\left\{x(t) + 2\omega\int_0^t \cos\omega(t-\tau)\,x(\tau)\,d\tau\right\}(s) = \mathcal{L}\{b\sin\omega t\cdot\eta(t)\}(s)$$

•se utilizează Teorema 1(de liniaritate) $\Rightarrow$

$$\mathcal{L}\{x(t)\}(s) + 2\omega\mathcal{L}\left\{\int_0^t x(\tau)\cos\omega(t-\tau)\,d\tau\right\}(s) = b\mathcal{L}\{\sin\omega t\cdot\eta(t)\}(s).$$

Din tabel $\Rightarrow \mathcal{L}\{\sin\omega t\cdot\eta(t)\}(s) = b\frac{\omega}{s^2+\omega^2}.$

Se utilizează Teorema 10, Borel:

$\widetilde{f}(t) = x(t), t \geq 0 \Rightarrow \widetilde{F}(s) = X(s).$

$\widetilde{g}(t) = \cos t, t \geq 0 \overset{\text{tabel}}{\Rightarrow} \widetilde{G}(s) = \frac{s}{s^2+\omega^2}$

Atunci

$$X(s) + 2\omega X(s)\cdot\frac{s}{s^2+\omega^2} = b\frac{\omega}{s^2+\omega^2} \Rightarrow X(s) = \frac{b\omega}{(s+\omega)^2}.$$

•se determină originalul $x(t)$ corespunzător funcţiei imagine $X(s)$ găsite

$\overset{\text{tabel}}{\Rightarrow} X(s) = \mathcal{L}\left\{b\omega te^{-\omega t}\cdot\eta(t)\right\}(s) \Rightarrow x(t) = b\omega te^{-\omega t}, t \geq 0.$

Exemplul 7.2.7. Să se rezolve următoarele probleme Cauchy ataşate unor ecuaţii integro-diferenţiale:

a) $\begin{cases} R\cdot i(t) + L\cdot i'(t) + \frac{1}{C}\int_0^t i(\tau)\,d\tau = u(t), \forall t \geq 0 \\ CI : i(0) = 0; \end{cases}$

unde funcţia necunoscută este $i(t)$, intensitatea curentului într-un circuit în care sunt înseriate o bobină cu inductanţa L, un rezistor cu rezistenţa R şi un condensator de capacitate C, constante în timp. Într-adevăr, dacă în circuit se aplică o tensiune $u(t)$, atunci, conform legii lui Kirchhoff,

$u_L(t) + u_L(t) + u_C(t) = u(t)$.

În ipoteza că L, R, C sunt constante, legile lui Faraday implică

$u_L(t) = L\frac{di}{dt}(t)$ şi $u_C(t) = \frac{1}{C}\int_0^t i(\tau)\,d\tau$,

iar legea lui Ohm implică

$u_R = Ri(t)$.

Rezolvare. a) Fie $\begin{cases} (*_{ID})\ R \cdot i(t) + L \cdot i'(t) + \frac{1}{C}\int_0^t i(\tau)\,d\tau = u(t), \forall t \geq 0 \\ CI : i(0) = 0; \end{cases}$

Ecuaţia $(*_{ID})$ este o ecuaţie integro-diferenţială, deoarece funcţia necunoscută $i(t)$ apare şi sub operatorul de integrare şi sub operatorul de derivare. Se caută $i(t) =?, t \geq 0$ soluţia problemei $(*_{ID}) + CI$.

Metoda transformatei Laplace. Se presupune $i \in \mathcal{O}$ şi se notează $I(s) = \mathcal{L}\{i(t)\}(s)$. Atunci, formal (matematic, u este o funcţie cu salt- a se vedea transformata Fourier, distribuţii, la Matematici Speciale):

•se aplică ecuaţiei $(*_{ID})$ transformata Laplace⇒

$$\mathcal{L}\left\{R \cdot i(t) + L \cdot i'(t) + \frac{1}{C}\int_0^t i(\tau)\,d\tau\right\}(s) = \mathcal{L}\{(u(t)) \cdot \eta(t)\}(s)$$

•se utilizează Teorema 1(de liniaritate) ⇒

$$R \cdot \mathcal{L}\{i(t)\}(s) + L \cdot \mathcal{L}\{i'(t)\}(s) + \frac{1}{C}\mathcal{L}\left\{\int_0^t i(\tau)\,d\tau\right\}(s) = \mathcal{L}\{(u(t)) \cdot \eta(t)\}(s) + \mathcal{L}\{(\operatorname{ch} t) \cdot \eta(t)\}(s).$$

Se utilizează Teorema 10, Borel:

$\widetilde{f}(t) = x(t), t \geq 0 \Rightarrow \widetilde{F}(s) = X(s)$.

$\widetilde{g}(t) = 1, t \geq 0 \overset{\text{tabel}}{\Rightarrow} \widetilde{G}(s) = \frac{1}{s}$.

Se utilizeazăTeorema 6 (de derivare a originalului) ⇒

$\mathcal{L}\{i'(t)\}(s) = sI(s) - \underbrace{i(0_+)}_{0}$

Atunci

$$R \cdot I(s) + L \cdot sI(s) + \frac{1}{C} \cdot I(s)\frac{1}{s} = U(s) \Rightarrow$$

$$\left(R + Ls + \frac{1}{C}\frac{1}{s}\right)I(s) = U(s) \Rightarrow I(s) = C\frac{s}{LCs^2 + RCs + 1} \cdot U(s)$$

•se determină originalul $x(t)$ corespunzător funcţiei imagine $I(s)$ găsite cu metoda reziduurilor, în ipoteza că $U(s)$ şi $LCs^2 + RCs + 1$ nu au rădăcini comune.

Polii funcţiei $I(s)$ sunt rădăcinile ecuaţiei

$LCs^2 + RCs + 1 = 0 \Rightarrow s_{1,2} = -\frac{L}{2R} \pm \frac{\sqrt{R^2C^2 - 4LC}}{2LC}$, cu ordinul de multiplicitate algebrică în discuţie după cazuri.

Se notează

$$\Delta = (RC)^2 - 4LC, \alpha = \frac{L}{2R} \text{ şi } \beta = \frac{\sqrt{R^2C^2 - 4LC}}{2LC}$$

şi se observă că

-dacă $R^2 > \frac{4L}{C}$ atunci $\beta > 0$,

-dacă $R^2 = \frac{4L}{C}$ atunci $\beta = 0$.

-dacă $R^2 < \dfrac{4L}{C}$ atunci $\beta = i\dfrac{\sqrt{4LC - R^2C^2}}{2LC}$.

<u>cazul 1.</u> (aperiodic) Dacă $\Delta > 0$, ecuaţia admite două soluţii reale distincte

$$s_{1,2} = -\alpha \pm \beta = -\frac{L}{2R} \pm \frac{\sqrt{R^2C^2 - 4LC}}{2LC}, m\left(s_{1,2}\right) = 1,$$

deci poli simpli.

<u>cazul 2.</u> Dacă $\Delta = 0$, ecuaţia admite două soluţii reale coincidente, $s_1 = s_2 = -\alpha = -\dfrac{R}{2L} \in \mathbb{R}$, deci pol de ordin 2.

<u>cazul 3.</u> (periodic) Dacă $\Delta < 0$, ecuaţia admite două soluţii complexe conjugate

$$s_{1,2} = -\alpha \pm \beta = -\frac{L}{2R} \pm i\frac{\sqrt{4LC - R^2C^2}}{2LC}, m\left(s_{1,2}\right) = 1,$$

deci poli simpli.

Se studiază separat:

<u>cazul $\beta \neq 0$</u> Se obţine $s_{1,2} = -\alpha \pm \beta$ şi descompunerea în fracţii simple din tabel

$$\frac{s}{LCs^2 + RCs + 1} = \frac{1}{LC}\left(\frac{-\alpha+\beta}{2\beta\left(s - s_1\right)} + \frac{\alpha+\beta}{2\beta\left(s - s_2\right)}\right).$$

Atunci

$$I\left(s\right) = \frac{1}{L}\left(\frac{-\alpha+\beta}{2\beta\left(s - s_1\right)} + \frac{\alpha+\beta}{2\beta\left(s - s_2\right)}\right) \cdot U\left(s\right) \overset{\text{Teorema Borel}}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow i\left(t\right) = \frac{1}{L}\left(\frac{-\alpha+\beta}{2\beta}\int_0^t e^{s_1(t-\tau)}u\left(\tau\right)d\tau + \frac{\alpha+\beta}{2\beta}\int_0^t e^{s_2(t-\tau)}u\left(\tau\right)d\tau\right) =$$

$$= \frac{1}{L}\left(\frac{-\alpha+\beta}{2\beta}\int_0^t e^{(-\alpha+\beta)(t-\tau)}u\left(\tau\right)d\tau + \frac{\alpha+\beta}{2\beta}\int_0^t e^{(-\alpha-\beta)(t-\tau)}u\left(\tau\right)d\tau\right), t \geq 0.$$

<u>cazul $\beta = 0$</u> Se obţine $s_{1,2} = -\alpha$ şi descompunerea în fracţii simple din tabel

$$\frac{s}{LCs^2 + RCs + 1} = \frac{1}{LC}\left(\frac{1}{\left(s - s_1\right)} + \frac{-\alpha}{\left(s - s_1\right)^2}\right).$$

Atunci

$$I\left(s\right) = \frac{1}{L}\left(\frac{1}{s+\alpha} + \frac{-\alpha}{\left(s+\alpha\right)^2}\right) \cdot U\left(s\right) \overset{\text{Teorema Borel}}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow i\left(t\right) = \frac{1}{L}\left(\int_0^t e^{-\alpha(t-\tau)}u\left(\tau\right)d\tau - \alpha\int_0^t e^{-\alpha(t-\tau)}\left(t-\tau\right)u\left(\tau\right)d\tau\right), t \geq 0.$$

○7.2.4. Calculul unor integrale improprii (cu parametri sau fără) cu operatorul Laplace

<u>**Regulă**</u>. Conform Teoremelor de la Transformata Laplace, de calcul pentru $F\left(s\right)$, se pot calcula integrale improprii cu parametrul s, de forma

$$\boxed{\int_0^{+\infty} e^{-st}f\left(t\right)dt = F\left(s\right), \forall s \in D,}$$

dacă $f \in \mathcal{O}$.

○**Exemplul 7.2.8**. Să se determine valoarea integralelor:

a) $I_0 = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}dt$ şi $I_1 = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}\sin t}{t}dt$;

b) $I\left(a,b\right) = \displaystyle\int_0^{+\infty} te^{-at}\sin btdt, a, b \in \mathbb{R}, a > 0.$

Rezolvare. a) Fie $F(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} \frac{\sin t}{t} dt, \operatorname{Re} s > 0.$
Conform Exemplului 7.1.9, utilizând teorema de integrare a imaginii, s-a arătat că

$\widetilde{f}(t) = \sin t \cdot \eta(t) \Rightarrow \widetilde{F}(s) = \mathcal{L}\{\sin t \cdot \eta(t)\}(s) = \frac{1}{s^2+1}$,atunci

$\mathcal{L}\left\{\frac{\sin t}{t} \cdot \eta(t)\right\}(s) \overset{T8}{=} \int_s^{+\infty} \widetilde{F}(p)\, dp = \int_s^{+\infty} \frac{1}{p^2+1} dp = \operatorname{arctg} p|_{p=s}^{p\to+\infty} = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} s.$

Atunci $F(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} s.$

$I_0 = \int_0^{+\infty} e^{-0t} \frac{\sin t}{t} dt = F(0) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} 0 = \frac{\pi}{2}.$

$I_1 = \int_0^{+\infty} e^{-t} \frac{\sin t}{t} dt = F(1) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}.$

b) Fie $F(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} t \sin bt dt, \operatorname{Re} s > 0.$
Utilizând teorema de derivare a imaginii, se arătat că

$\widetilde{f}(t) = \sin bt \cdot \eta(t) \Rightarrow \widetilde{F}(s) = \mathcal{L}\{\sin bt \cdot \eta(t)\}(s) = \frac{b}{s^2+b^2}$,atunci

$\mathcal{L}\{t \sin bt \cdot \eta(t)\}(s) \overset{T}{=} -\left(\frac{b}{s^2+b^2}\right)' = \frac{b \cdot 2s}{(s^2+b^2)^2}.$

Atunci $F(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} t \sin bt dt = \frac{2sb}{(s^2+b^2)^2}.$

$I(a,b) = \int_0^{+\infty} e^{-at} t \sin bt dt = F(a) = \frac{2ab}{(a^2+b^2)^2}.$

○7.2.5. Calculul unor sume de serii cu operatorul Laplace-...