CURS NR. 13
EDCO, AIA

8. SERII FOURIER. Dezvoltarea în serie Fourier a unei funcţii reale cu valori reale

Preliminarii 1. Dezvoltarea în serie Taylor a funcţiilor trigonometrice era utilizată pentru aproximarea funcţiilor transcendente cu funcţii polinomiale:

$$\cos x = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Aici se pune problema: dată $f(x)$, se poate scrie

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\underbrace{...} \cos \left(\underbrace{...} \right) + \underbrace{...} \sin \left(\underbrace{...} \right) \right)?$$

Răspunsul afirmativ se utilizează la transformarea semnalelor (unele liniare) în semnale sinusoidale/ cosinusoidale (unde). Uneori semnalele se raportează la spaţiul x, uneori la timpul t. Deoarece ecuaţiile diferenţiale sunt studiate cu funcţia necunoscută în variabila t, se va apela la această manieră de notaţie în acest material.

Seriile Fourier au utilizări practice în ingineria electrică, prelucrarea semnalelor şi a imaginilor, compresia datelor, analiza undelor, acustică, optică; în analiza armonică a modelelor mecanice (oscilatorul liniar); în spectroscopie şi astronomie. Inginerii pot optimiza proiectarea unui sistem de comunicaţii cu ajutorul informaţiilor pe care le oferă componentele spectrale ale unui semnal de date pe care sistemul le transportă.

Seriile Fourier sunt numite după matematicianul şi fizicianul francez Joseph Fourier (1768 − 1830), care a studiat exprimarea unei funcţii prin serii trigonometrice/ transformata Fourier. În 1822, în cartea "Teoria analitică a căldurii", a stabilit ecuaţia ecuaţia propagării căldurii, reprezentând pentru prima dată soluţia acestei ecuaţii (care poate fi şi discontinuă) sub formă de serie trigonometrică.

Preliminarii 2. De vizualizat "Fourier Transform, Fourier Series, and frequency spectrum" de profesor Eugene Khutoryansky,

https://www.youtube.com/watch?v=r18Gi8lSkfM ,

minutele 0 − 10, drept euristică pentru noţiunea de serie Fourier ataşată unui semnal. Pentru înţelegerea vizualizării spaţiale a funcţiei sin, plecând de la cercul trigonometric, a se vedea "Trigonometry - Easy to understand 3D animation" de profesor Eugene Khutoryansky,

https://www.youtube.com/watch?v=ovLbCvq7FNA&list=PLkyBCj4JhHt9G55u1vgx_
DF0C7DXVsBS8&index=19&t=244s ,

minutele 11 − 16.

Definiţia 1. Funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se numeşte *periodică* dacă $\exists T \in \mathbb{R}, T \neq 0$ a.î.

$$f(t+T) = f(t), \forall t \in \mathbb{R}.$$

Dacă există, numărul T minim cu proprietatea anterioară se numeşte *perioada principală* a f.

Definiţia 2. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ periodică, cu $T > 0$ perioada principală, a.î. $f \in \mathcal{R}([\alpha, \alpha+T]), \forall \alpha \in \mathbb{R}$. Se numeşte *serie Fourier* sau *serie trigonometrică* ataşată lui f pe $[\alpha, \alpha+T]$ (pe $\mathbb{R}$) seria

$$\boxed{\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\left(n\omega t\right)+b_n\sin\left(n\omega t\right)\right)}, \forall t\in\left[\alpha,\alpha+T\right], \text{ chiar } t\in\mathbb{R}, \tag{1}$$

unde numărul $\omega=\dfrac{2\pi}{T}$ se numeşte *pulsaţie* iar numerele

$$\boxed{\begin{cases} a_0=\dfrac{2}{T}\displaystyle\int_{\alpha}^{\alpha+T} f\left(t\right)dt;\\ a_n=\dfrac{2}{T}\displaystyle\int_{\alpha}^{\alpha+T} f\left(t\right)\cos\left(n\omega t\right)dt, \forall n\in\mathbb{N}^*;\\ b_n=\dfrac{2}{T}\displaystyle\int_{\alpha}^{\alpha+T} f\left(t\right)\sin\left(n\omega t\right)dt, \forall n\in\mathbb{N}^*;\end{cases}}$$

se numesc *coeficienţii Fourier* ai funcţiei f.

$F_n\left(t\right)=\dfrac{a_0}{2}+\sum\limits_{k=1}^{n}\left(a_k\cos\left(k\omega t\right)+b_k\sin\left(k\omega t\right)\right), \forall t\in\left[\alpha,\alpha+T\right]$, chiar $t\in\mathbb{R}, \forall n\in\mathbb{N}^*$

se numesc *polinoame Fourier* sau *polinoame trigonometrice.*

Propoziţia 1. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ periodică, cu $T>0$ perioada principală, a.î. $f\in\mathcal{R}\left(\left[\alpha,\alpha+T\right]\right), \forall\alpha\in\mathbb{R}$. Atunci $\displaystyle\int_{\alpha}^{\alpha+T} f\left(t\right)dt$ este un număr independent de $\alpha\in\mathbb{R}$.

Observaţia 1. Dacă, în definiţia anterioară, $\alpha=-l, T=2l>0$ şi $f\in\mathcal{R}\left(\left[-l,l\right]\right)$, atunci *seria Fourier* sau *seria trigonometrică* ataşată lui f pe $\left[-l,l\right]$ (pe $\mathbb{R}$) devine

$$\boxed{\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi t}{l}+b_n\sin\frac{n\pi t}{l}\right)}, \forall t\in\left[-l,l\right], \text{ chiar } t\in\mathbb{R}, \tag{2}$$

unde numărul $\omega=\dfrac{\pi}{l}$ este *pulsaţia* iar numerele

$$\boxed{\begin{cases} a_0=\dfrac{1}{l}\displaystyle\int_{-l}^{l} f\left(t\right)dt;\\ a_n=\dfrac{1}{l}\displaystyle\int_{-l}^{l} f\left(t\right)\cos\frac{n\pi t}{l}dt, \forall n\in\mathbb{N}^*;\\ b_n=\dfrac{1}{l}\displaystyle\int_{-l}^{l} f\left(t\right)\sin\frac{n\pi t}{l}dt, \forall n\in\mathbb{N}^*;\end{cases}}$$

sunt *coeficienţii Fourier* ai funcţiei f. Sunt coeficienţi chiar în raport cu sistemul trigonometric ortogonal

$$\left(\frac{1}{2},\cos\frac{\pi t}{l},\sin\frac{\pi t}{l},\cos\frac{2\pi t}{l},\sin\frac{2\pi t}{l},...,\cos\frac{n\pi t}{l},\sin\frac{n\pi t}{l},...\right).$$

Pentru $l=\pi$, sunt coeficienţi chiar în raport cu sistemul trigonometric ortogonal în $\left(C\left(\left[-\pi,\pi\right];\mathbb{R}\right),\langle\cdot,\cdot\rangle_{\text{standard}}\right)$

$$\left(\frac{1}{2},\cos t,\sin t,\cos 2t,\sin 2t,...,\cos nt,\sin nt,...\right).$$

Observaţia 2. Se impun următoarele întrebări:

•Seria Fourier (1) este punctual, uniform convergentă? Pe ce interval?

•Pe intervalul de convergenţă suma seriei $s\left(t\right)$ coincide cu $f\left(t\right)$?

Definiţia 3. Se spune că funcţia $f:\left[a,b\right]\to\mathbb{R}$ satisface *condiţia Dirichlet* pe $\left[a,b\right]$ dacă

(i) f este mărginită pe $\left[a,b\right]$ şi are un număr finit de puncte de discontinuitate de prima speţă pe $\left[a,b\right]$ (în punctele de discontinuitate are limite laterale diferite, dar finite);

(ii) intervalul $\left[a,b\right]$ poate fi descompus într-un număr finit de intervale pe care f este monotonă (este monotonă pe porţiuni).

Teorema 1. (**Dirichlet**) Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ o funcţie periodică cu perioada principală $T>0$ ce satisface condiţia Dirichlet pe $\left[\alpha,\alpha+T\right], \alpha\in\mathbb{R}$. Atunci seria Fourier (1) ataşată lui f este punctual convergentă pe $[\alpha, \alpha+T]$ (chiar pe $\mathbb{R}$) şi suma ei este

$$\boxed{s(t) = \begin{cases} f(t), & \text{dacă } t \text{ e punct de continuitate pentru } f \\ \dfrac{f(t-0)+f(t+0)}{2}, & \text{dacă } t \text{ e punct de discontinuitate pentru } f. \end{cases}.}$$

Observaţia 3. Se reaminteşte că:

•dacă f este impară şi integrabilă Riemann pe intervalul simetric $[-l, l] \Rightarrow \displaystyle\int_{-l}^{l} f(t)\,dt = 0$;

•dacă f este pară şi integrabilă Riemann pe intervalul simetric $[-l, l] \Rightarrow \displaystyle\int_{-l}^{l} f(t)\,dt = 2\int_{0}^{l} f(t)\,dt$.

Consecinţa 1. (*dezvoltarea unei funcţii în serie Fourier pe interval simetric*) Dacă $f : [-l, l] \to \mathbb{R}$ este o funcţie netedă pe porţiuni, atunci seria Fourier ataşată lui f

$$\boxed{\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi t}{l} + b_n \sin\frac{n\pi t}{l}\right)}, \forall t \in [-l, l], \tag{3}$$

$$\text{unde}\begin{cases} a_0 = \dfrac{1}{l}\displaystyle\int_{-l}^{l} f(t)\,dt; \\ a_n = \dfrac{1}{l}\displaystyle\int_{-l}^{l} f(t)\cos\frac{n\pi t}{l}dt, \forall n \in \mathbb{N}^*; \\ b_n = \dfrac{1}{l}\displaystyle\int_{-l}^{l} f(t)\sin\frac{n\pi t}{l}dt, \forall n \in \mathbb{N}^*; \end{cases}$$

este convergentă în $\forall t \in [-l, l]$ (chiar pe $\mathbb{R}$) şi suma ei este

$$\boxed{s(t) = \begin{cases} \dfrac{f(t-0)+f(t+0)}{2}, & \text{dacă } t \in \,]-l, l[\\ \dfrac{f(\pm l-0)+f(\pm l+0)}{2}, & \text{dacă } t = -l \text{ sau } t = l \end{cases}.}$$

Mai mult, dacă f este *pară pe* $[-l, l]$ (adică $f(-t) = f(t), \forall t \in [-l, l]$), atunci

$$\begin{cases} a_0 = \dfrac{2}{l}\displaystyle\int_{0}^{l} f(t)\,dt \\ a_n = \dfrac{2}{l}\displaystyle\int_{0}^{l} f(t)\cos\frac{n\pi t}{l}dt, \forall n \in \mathbb{N}^* \\ b_n = 0, \forall n \in \mathbb{N}^*, \end{cases}$$

iar dacă f este *impară pe* $[-l, l]$ (adică $f(-t) = -f(t), \forall t \in [-l, l]$), atunci

$$\boxed{\begin{cases} a_0 = 0 \\ a_n = 0, \forall n \in \mathbb{N}^* \\ b_n = \dfrac{2}{l}\displaystyle\int_{0}^{l} f(t)\sin\frac{n\pi t}{l}dt, \forall n \in \mathbb{N}^*. \end{cases}}$$

Consecinţa 2. (*dezvoltarea unei funcţii în serie de cosinusuri*) Dacă $f : [0, l] \to \mathbb{R}$ este o funcţie netedă pe porţiuni, atunci seria de cosinusuri ataşată lui f

$$\boxed{\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi t}{l}, \forall t \in [0, l],} \tag{4}$$

$$\text{unde}\boxed{\begin{cases} a_0 = \dfrac{2}{l}\displaystyle\int_{0}^{l} f(t)\,dt \\ a_n = \dfrac{2}{l}\displaystyle\int_{0}^{l} f(t)\cos\frac{n\pi t}{l}dt, \forall n \in \mathbb{N}^*, \end{cases}}$$

este convergentă în $\forall t \in [0, l]$ şi suma ei este

$$\boxed{s(t) = \begin{cases} \dfrac{f(t-0)+f(t+0)}{2}, & \text{dacă } t \in \left]0,l\right[\\ f(0+0), & \text{dacă } t = 0 \\ f(l-0), & \text{dacă } t = l. \end{cases}.}$$

(prin extindere, seria obţinută ar corespunde pentru prelungirea lui f prin paritate la $[-l,l]$, apoi prin periodicitate la $\mathbb{R}$; de menţionat că

$$f_p : \left]-l,l\right] \to \mathbb{R}, f_p(t) = \begin{cases} f(-t), & \text{dacă } t \in \left]-l,0\right[\\ f(t), & \text{dacă } t \in [0,l] \end{cases}$$

este funcţia pară pe intervalul simetric $\left]-l,l\right[$, utilizată ulterior pentru prelungirea prin periodicitate).

Consecinţa 3. (*dezvoltarea unei funcţii în serie de sinusuri*) Dacă $f : [0,l] \to \mathbb{R}$ este o funcţie netedă pe porţiuni, atunci seria de sinusuri ataşată lui f

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi t}{l}, \forall t \in [0,l],} \tag{5}$$

unde $\boxed{\left\{ b_n = \dfrac{2}{l}\displaystyle\int_0^l f(t)\sin\frac{n\pi t}{l}dt, \forall n \in \mathbb{N}^*, \right.}$

este convergentă în $\forall t \in [0,l]$ şi suma ei este

$$\boxed{s(t) = \begin{cases} \dfrac{f(t-0)+f(t+0)}{2}, & \text{dacă } t \in \left]0,l\right[\\ 0, & \text{dacă } t = 0 \text{ sau } t = l \end{cases}.}$$

(prin extindere, seria obţinută ar corespunde pentru prelungirea lui f prin imparitate la $[-l,l]$, apoi prin periodicitate la $\mathbb{R}$; de menţionat că

$$f_i : \left]-l,l\right] \to \mathbb{R}, f_i(t) = \begin{cases} -f(-t), & \text{dacă } t \in \left]-l,0\right[\\ f(t), & \text{dacă } t \in [0,l] \end{cases}$$

este funcţia impară pe intervalul simetric $\left]-l,l\right[$, utilizată ulterior pentru prelungirea prin periodicitate).

Exemplul 1. Să se studieze dacă următoarele funcţii satisfac condiţiile teoremei lui Dirichlet şi, dacă da, să dezvolte în *serie Fourier* funcţiile prelungite prin periodicitate:

a) $f : [-\pi,\pi] \to \mathbb{R}, f(t) = \begin{cases} t, & \text{dacă } -\pi < t < \pi \\ 0, & \text{dacă } t = -\pi \text{ şi } t = \pi \end{cases};$

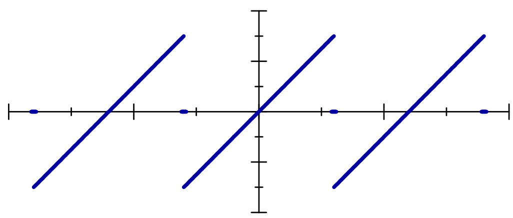
b) $f : [-l,l] \to \mathbb{R}, f(t) = \begin{cases} t, & \text{dacă } -l < t < l \\ 0, & \text{dacă } t = -l \text{ şi } t = l \end{cases}, l > 0;$

c) $f : [-\pi,\pi] \to \mathbb{R}, f(t) = |t|$; **d)** $f : [-l,l] \to \mathbb{R}, f(t) = t^2, l > 0;$

○**e)** $f : [-\pi,\pi] \to \mathbb{R}, f(t) = \arcsin(\sin t);$

Rezolvare: a) Fie $f : [-\pi,\pi] \to \mathbb{R}, f(t) = \begin{cases} t, & \text{dacă } -\pi < t < \pi \\ 0, & \text{dacă } t = -\pi \text{ şi } t = \pi \end{cases};$

Se reprezintă grafic f pe $[-\pi,\pi]$, apoi se prelungeşte prin periodicitate la $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.



Din grafic se observă că f este impară pe $[-\pi,\pi]$ (pe $[-\pi,\pi]$, G_f este simetric faţă de O).

<u>etapa 1.</u> Se ataşează lui f seria ei Fourier (trigonometrică) :

$$\boxed{[\alpha, \alpha+T] = [-\pi, \pi]} \Rightarrow \begin{cases} \boxed{T = 2\pi}\text{-perioada} \\ \alpha = -\pi \\ \omega = \frac{2\pi}{2\pi} \Rightarrow \boxed{\omega = 1} \text{ pulsaţia} \end{cases}$$

Se determină coeficienţii Fourier:

$$\boxed{a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,dt} \Rightarrow a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{t}_{\text{impară}}\,dt \overset{\text{impară pe } [-\pi,\pi]}{=} 0.$$

$$\boxed{a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(nt)\,dt, \forall n \in \mathbb{N}^*} \Rightarrow a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{t}_{\text{impară}} \cdot \underbrace{\cos(nt)}_{\text{pară}} dt \overset{\text{impară pe } [-\pi,\pi]}{=} 0, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

$$\boxed{b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(nt)\,dt, \forall n \in \mathbb{N}^*} \Rightarrow b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{t}_{\text{impară}} \cdot \underbrace{\sin(nt)}_{\text{impară}} dt \overset{\text{pară pe } [-\pi,\pi]}{=} \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} t\cdot\sin(nt)\,dt =$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} t\cdot\left(\frac{\cos(nt)}{-n}\right)' dt = \frac{2}{\pi}\left(t\cdot\frac{\cos(nt)}{-n}\Big|_{t=0}^{t=\pi} - \int_0^{\pi} 1\cdot\frac{\cos(nt)}{-n}dt\right) =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(\left(\pi\cdot\frac{\cos(n\pi)}{-n} - 0\cdot\frac{\cos 0}{-n}\right) + \frac{1}{n}\left(\frac{\sin(nt)}{n}\right)\Big|_{t=0}^{t=\pi}\right) =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(\pi\cdot\frac{\cos(n\pi)}{-n} + \frac{1}{n}\cdot\frac{\sin(n\pi)-\sin(0)}{n}\right) = \frac{2}{\pi}\left(\pi\cdot\frac{(-1)^n}{-n} + \frac{1}{n}\cdot\frac{0-0}{n}\right) = \frac{2}{n}(-1)^{n+1},$$

$\forall n \in \mathbb{N}^*$.

S-a folosit $\boxed{\begin{array}{l} \cos(n\pi) = (-1)^n, \forall n \in \mathbb{N}^*. \\ \sin(n\pi) = 0, \forall n \in \mathbb{N}^*. \end{array}}$

Atunci seria Fourier ataşată lui f este

$\frac{0}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(0\cdot\cos(nt) + \frac{2}{n}(-1)^{n+1}\cdot\sin(nt)\right), \forall t \in [-\pi, \pi]$, chiar $t \in \mathbb{R}$, adică

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n}(-1)^{n+1}\cdot\sin(nt), \forall t \in [-\pi,\pi], \text{ chiar } t \in \mathbb{R}. \qquad (*_1)$$

<u>etapa 2.</u> Se studiază dacă şi pe ce mulţime suma seriei $(*_1)$ coincide cu f.

Din grafic se observă că f verifică ipotezele Teoremei Dirichlet$\Rightarrow$ suma seriei $(*_1)$ este

$$s(t) = \begin{cases} f(t), & \text{dacă } t \in \bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}}]-\pi+2k\pi, \pi+2k\pi[\\ \frac{0+0}{2}, & \text{dacă } t = -\pi+2k\pi \text{ sau } t = \pi+2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}.$$

Deoarece pe $]-\pi,\pi[$ se observă că f nu are puncte de discontinuitate, se scrie chiar

$$\boxed{t = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n}(-1)^{n+1}\cdot\sin(nt), \forall t \in]-\pi,\pi[.} \qquad (*_2)$$

<u>etapa 3.</u> În particular, pentru $t = \frac{\pi}{2} \in]-\pi,\pi[$, din $(*_2)$ se obţine

$\frac{\pi}{2} = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n}(-1)^{n+1}\cdot\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$ sau

$$\boxed{\frac{\pi}{4} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\cdot\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)}$$

$\frac{\pi}{4} = \frac{(-1)^2}{1}\sin\frac{\pi}{2} + \frac{(-1)^3}{2}\sin\pi + \frac{(-1)^4}{3}\sin\frac{3\pi}{2} + \frac{(-1)^5}{4}\sin 2\pi + \frac{(-1)^6}{5}\sin\frac{5\pi}{2} + ... + \frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) +$
...

Se foloseşte $\boxed{\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) = \begin{cases} 1, & n=1 \\ 0 & n=2 \\ -1, & n=3 \\ 0, & n=4 \\ 1 & n=5 \\ ... & ... \end{cases} = \begin{cases} 0, & n=2\widetilde{n}, \widetilde{n}\in\mathbb{N}^* \\ (-1)^{\widetilde{n}}, & n=2\widetilde{n}+1, \widetilde{n}\in\mathbb{N} \end{cases}} \Rightarrow$

$\frac{\pi}{4} = \sum\limits_{\widetilde{n}=0}^{\infty} \frac{(-1)^{2\widetilde{n}+1+1}}{2\widetilde{n}+1} \cdot (-1)^{\widetilde{n}} \Leftrightarrow \frac{\pi}{4} = \sum\limits_{\widetilde{n}=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\widetilde{n}}}{2\widetilde{n}+1}$ sau, renotând $\widetilde{n}$ cu n,

$\boxed{\frac{\pi}{4} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}}$ sau $\boxed{\frac{\pi}{4} = \frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + ... + \frac{(-1)^n}{2n+1} + ...}$

Comentariu: Se reprezintă grafic pe $]-\pi, \pi[$, chiar pe $\mathbb{R}$.

$f(t) = t$-albastru

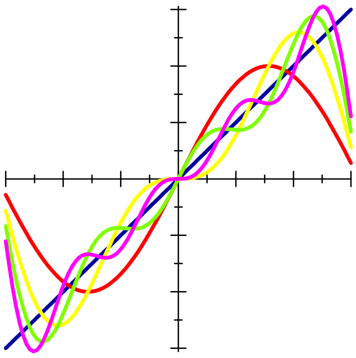
$F_1(t) = \frac{2}{1}\sin t$-roşu

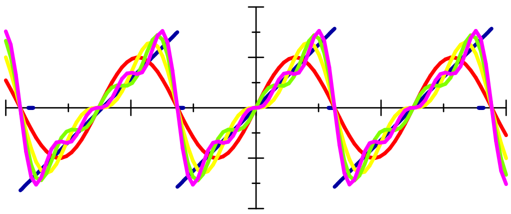
$F_2(t) = \frac{2}{1}\sin t - \frac{2}{2}\sin(2t)$-galben

$F_3(t) = \frac{2}{1}\sin t - \frac{2}{2}\sin(2t) + \frac{2}{3}\sin(3t)$-verde

$F_4(t) = \frac{2}{1}\sin t - \frac{2}{2}\sin(2t) + \frac{2}{3}\sin(3t) - \frac{2}{4}\sin(4t)$-magenta

şi se observă aproximarea din ce în ce mai bună a funcţiei cu polinoame Fourier, care sunt la acest exemplu combinaţii liniare de sinusuri, precum în filmul prezentat.

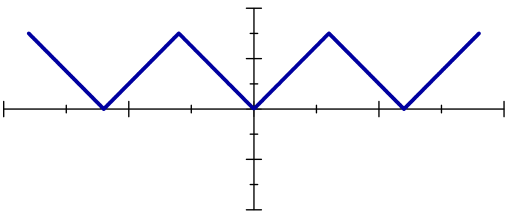




A se vedea din nou filmul propus iniţial.

c) Fie $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}, f(t) = |t| = \begin{cases} -t, & \text{dacă } -\pi \le t < 0 \\ t, & \text{dacă } 0 < t \le \pi \end{cases}$;

Se reprezintă grafic f pe $[-\pi, \pi]$, apoi se prelungeşte prin periodicitate la $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.



Din grafic se observă că f este <u>pară</u> pe $[-\pi, \pi]$ (pe $[-\pi, \pi]$, <u>G_f este simetric faţă de Oy</u>).

<u>etapa 1.</u> Se ataşează lui f seria ei Fourier (trigonometrică) :

$$\boxed{[\alpha, \alpha+T] = [-\pi, \pi]} \Rightarrow \begin{cases} \boxed{T = 2\pi}\text{-perioada} \\ \alpha = -\pi \\ \omega = \frac{2\pi}{2\pi} \Rightarrow \boxed{\omega = 1} \text{ pulsaţia} \end{cases}$$

Se determină coeficienţii Fourier:

$$\boxed{a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, dt} \Rightarrow a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{|t|}_{\text{pară}}\, dt = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} (-t)\, dt + \int_{0}^{\pi} tdt\right) \overset{|t| \text{ pară pe } [-\pi,\pi]}{=}$$

$$= \frac{1}{\pi}\cdot 2\int_0^{\pi} tdt = \frac{2}{\pi}\left.\frac{t^2}{2}\right|_{t=0}^{t=\pi} = \pi.$$

$$\boxed{a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(nt)\, dt, \forall n \in \mathbb{N}^*} \Rightarrow a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{|t|}_{\text{pară}} \cdot \underbrace{\cos(nt)}_{\text{pară}} dt \overset{\text{pară pe } [-\pi,\pi]}{=}$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} (-t)\cdot\cos(nt)\, dt + \int_0^{\pi} t\cdot\cos(nt)\, dt\right) = \frac{1}{\pi}\cdot 2\int_0^{\pi} t\cos(nt)\, dt =$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} t\cdot\left(\frac{\sin(nt)}{n}\right)' dt = \frac{2}{\pi}\left(t\cdot\left.\frac{\sin(nt)}{n}\right|_{t=0}^{t=\pi} - \int_0^{\pi} 1\cdot\frac{\sin(nt)}{n} dt\right) =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(\left(\pi\cdot\frac{\sin(n\pi)}{n} - 0\cdot\frac{\sin(0)}{n}\right) - \frac{1}{n}\left.\frac{-\cos(nt)}{n}\right|_{t=0}^{t=\pi}\right) =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(0 - \frac{1}{n}\frac{-\cos(n\pi)+\cos(0)}{n}\right) = \frac{2}{n^2\pi}\left((-1)^n - 1\right), \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

$$\boxed{b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(nt)\, dt, \forall n \in \mathbb{N}^*} \Rightarrow b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{|t|}_{\text{pară}} \cdot \underbrace{\sin(nt)}_{\text{impară}} dt \overset{\text{impară pe } [-\pi,\pi]}{=} 0, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Atunci seria Fourier ataşată lui f este

$\frac{\pi}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{n^2\pi}\left((-1)^n - 1\right)\cdot\cos(nt) + 0\cdot\sin(nt)\right), \forall t \in [-\pi, \pi]$, chiar $t \in \mathbb{R}$, adică

$\frac{\pi}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2\left((-1)^n - 1\right)}{n^2\pi}\cos(nt), \forall t \in [-\pi, \pi]$, chiar $t \in \mathbb{R}$. $(*_1)$

<u>etapa 2.</u> Se studiază dacă şi pe ce mulţime suma seriei $(*_1)$ coincide cu f.

Din grafic se observă că f verifică ipotezele Teoremei Dirichlet. Cum f este continuă pe $\mathbb{R}$ $\Rightarrow$suma seriei $(*_1)$ este

$s(t) = f(t), \forall t \in [-\pi, \pi]$, chiar $t \in \mathbb{R}$.

Se scrie chiar

$$\boxed{|t| = \frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\left((-1)^n - 1\right)}{n^2\pi}\cos(nt), \forall t \in \mathbb{R}.} \qquad (*_2)$$

<u>etapa 3.</u> În particular, pentru $t = \pi$, din $(*_2)$ se obţine

$\pi = \frac{\pi}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2\left((-1)^n - 1\right)}{n^2\pi}\cos(n\pi)$ sau $\frac{\pi}{2} = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2\left((-1)^n - 1\right)}{n^2\pi}\cos(n\pi)$ sau

$$\boxed{\frac{\pi^2}{4} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n - 1}{n^2}\cos(n\pi)}$$

$$\frac{\pi^2}{4} = \frac{-2}{1^2}\cos\pi + \frac{0}{2^2}\cos 2\pi + \frac{-2}{3^2}\cdot\cos 3\pi + \frac{0}{4^2}\cdot\cos 4\pi + \frac{-2}{5^2}\cdot\cos 5\pi + ... + \frac{(-1)^n - 1}{n^2}(-1)^n + ...$$

Se foloseşte $\boxed{\dfrac{1-(-1)^n}{n^2} = \begin{cases} 0, & n = 2\widetilde{n}, \widetilde{n} \in \mathbb{N}^* \\ \dfrac{2}{n^2}, & n = 2\widetilde{n}+1, \widetilde{n} \in \mathbb{N} \end{cases}}$

$\dfrac{\pi^2}{4} = \sum\limits_{\widetilde{n}=0}^{\infty} \dfrac{2}{(2\widetilde{n}+1)^2}$ sau, renotând $\widetilde{n}$ cu n, se obţine

$\boxed{\dfrac{\pi^2}{8} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{(2n+1)^2}}$ sau $\boxed{\dfrac{\pi^2}{8} = \dfrac{1}{1^2} + \dfrac{1}{3^2} + \dfrac{1}{5^2} + ... + \dfrac{1}{(2n+1)^2} + ...}$

Comentariu: Se reprezintă grafic pe $[-\pi, \pi]$, chiar pe $\mathbb{R}$

$f(t) = |t|$-albastru

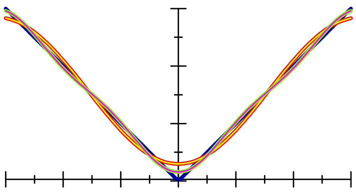
$F_1(t) = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{4}{\pi} \cos t$-roşu

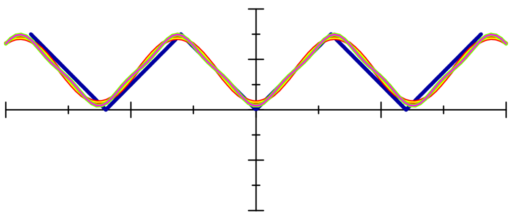
$F_2(t) = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{4}{\pi} \cos t + 0$-galben subţire

$F_3(t) = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{4}{\pi} \cos t + 0 - \dfrac{4}{9\pi} \cos(3t)$-verde

$F_4(t) = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{4}{\pi} \cos t + 0 - \dfrac{4}{9\pi} \cos(3t) + 0$-magenta subţire

şi se observă aproximarea din ce în ce mai bună a funcţiei cu "polinoame" Fourier.





Exemplul 2. Să se studieze dacă următoarele funcţii satisfac condiţiile teoremei lui Dirichlet şi, dacă da, să dezvolte în *serie Fourier* funcţiile prelungite prin periodicitate :

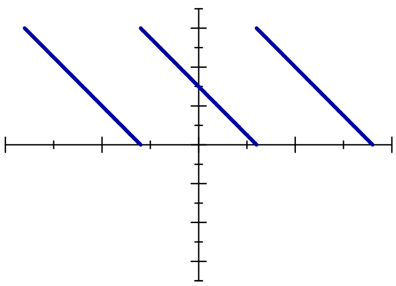
a) $f :]-\pi, \pi] \to \mathbb{R}, f(t) = \pi - t;$

b) $f :]-\pi, \pi] \to \mathbb{R}, f(t) = \begin{cases} 1, & \text{dacă } t \in]-\pi, 0[\\ t+1, & \text{dacă } t \in [0, \pi] \end{cases}$;**c)** $f :]-\pi, \pi] \to \mathbb{R}, f(t) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } t \in]-\pi, 0[\\ t, & \text{dacă } t \in [0, \pi] \end{cases}$;

d) $f :]-\pi, \pi] \to \mathbb{R}, f(t) = \begin{cases} \pi - t, & \text{dacă } t \in]-\pi, 0[\\ \pi, & \text{dacă } t \in [0, \pi] \end{cases}$;**e)** $f :]-1, 1] \to \mathbb{R}, f(t) = \begin{cases} 1, & \text{dacă } t \in]-1, 0[\\ e^t, & \text{dacă } t \in [0, 1] \end{cases}$.

Rezolvare: a) $f :]-\pi, \pi] \to \mathbb{R}, f(t) = \pi - t;$

Se reprezintă grafic f pe $]-\pi, \pi]$, apoi se prelungeşte prin periodicitate la $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.



Din grafic se observă că f NU este nici pară, nici impară pe $]-\pi, \pi[$.

<u>etapa 1.</u> Se ataşează lui f seria ei Fourier (trigonometrică) :

$$\boxed{[\alpha,\alpha+T]=[-\pi,\pi]}\Rightarrow\begin{cases}\boxed{T=2\pi}\text{-perioada}\\ \alpha=-\pi\\ \omega=\frac{2\pi}{2\pi}\Rightarrow\boxed{\omega=1}\text{ pulsaţia}\end{cases}$$

Se determină coeficienţii Fourier:

$$\boxed{a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\,dt}\Rightarrow a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\pi-t)\,dt=\frac{1}{\pi}\left(\pi t-\frac{t^2}{2}\right)\Big|_{t=-\pi}^{t=\pi}=2\pi.$$

$$\boxed{a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\cos(nt)\,dt,\forall n\in\mathbb{N}^*}\Rightarrow a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\pi-t)\cdot\cos(nt)\,dt=$$

$$=\int_{-\pi}^{\pi}\underbrace{\cos(nt)}_{\text{pară}}dt-\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\underbrace{t}_{\text{impară}}\cdot\underbrace{\cos(nt)}_{\text{pară}}dt=$$

$$=2\left(\frac{\sin(nt)}{n}\right)\Big|_{t=0}^{t=\pi}-\frac{1}{\pi}\cdot 0=2\frac{\sin(n\pi)-\sin(0)}{n}=0,\forall n\in\mathbb{N}^*$$

$$\boxed{b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\sin(nt)\,dt,\forall n\in\mathbb{N}^*}\Rightarrow b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\pi-t)\cdot\sin(nt)\,dt=$$

$$=\int_{-\pi}^{\pi}\underbrace{\sin(nt)}_{\text{impară}}dt-\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\underbrace{t}_{\text{impară}}\cdot\underbrace{\sin(nt)}_{\text{impară}}dt=0-\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}t\cdot\sin(nt)\,dt=$$

$$=\frac{-2}{\pi}\int_0^{\pi}t\cdot\left(\frac{\cos(nt)}{-n}\right)'dt=\frac{-2}{\pi}\left(t\cdot\frac{\cos(nt)}{-n}\Big|_{t=0}^{t=\pi}-\int_0^{\pi}1\cdot\frac{\cos(nt)}{-n}dt\right)=$$

$$=\frac{-2}{\pi}\left(\left(\pi\cdot\frac{\cos(n\pi)}{-n}-0\cdot\frac{\cos(0)}{-n}\right)+\frac{1}{n}\cdot\frac{\sin(nt)}{n}\Big|_{t=0}^{t=\pi}\right)=$$

$$=\frac{-2}{\pi}\left(\pi\cdot\frac{\cos(n\pi)}{-n}+\frac{1}{n}\cdot\frac{\sin(n\pi)-\sin(0)}{n}\right)=\frac{-2}{\pi}\left(\pi\cdot\frac{(-1)^n}{-n}+\frac{1}{n}\cdot\frac{0-0}{n}\right)=\frac{2}{n}(-1)^n,$$

$\forall n\in\mathbb{N}^*$.

Atunci seria Fourier ataşată lui f este

$$\frac{0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(0\cdot\cos(nt)+\frac{2}{n}(-1)^n\cdot\sin(nt)\right),\forall t\in\,]-\pi,\pi]\text{, chiar } t\in\mathbb{R}\text{, adică}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n}(-1)^n\cdot\sin(nt),\forall t\in\,]-\pi,\pi]\text{, chiar } t\in\mathbb{R}. \qquad (*_1)$$

<u>etapa 2.</u> Se studiază dacă şi pe ce mulţime suma seriei $(*_1)$ coincide cu f.

Din grafic se observă că f verifică ipotezele Teoremei Dirichlet$\Rightarrow$ suma seriei $(*_1)$ este

$$s(t)=\begin{cases}f(t), & \text{dacă } t\in\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\,]-\pi+2k\pi,\pi+2k\pi[\\ \frac{0+0}{2}, & \text{dacă } t=-\pi+2k\pi \text{ sau } t=\pi+2k\pi,k\in\mathbb{Z}\end{cases}.$$

Deoarece pe $]-\pi,\pi[$ se observă că f nu are puncte de discontinuitate, se scrie chiar

$$\pi-t=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n}(-1)^{n+1}\cdot\sin(nt),\forall t\in\,]-\pi,\pi[. \qquad (*_2)$$

Exemplul 3. Să se studieze dacă următoarele funcţii satisfac condiţiile teoremei lui Dirichlet şi, dacă da, să dezvolte în *serie Fourier* funcţiile prelungite prin periodicitate :

a) $f:[-\pi,\pi]\to\mathbb{R}, f(t)=\begin{cases}-1, & \text{dacă } -\pi<t<0\\ 0, & \text{dacă } t=-\pi \text{ sau } t=0 \text{ sau } t=\pi\\ 1, & \text{dacă } 0<t<\pi\end{cases};$

b) $f:[-\pi,\pi]\to\mathbb{R}, f(t)=\begin{cases} -a, & \text{dacă } -\pi\le t<\frac{-\pi}{2}\\ a, & \text{dacă } \frac{-\pi}{2}\le t\le\frac{\pi}{2}\\ -a, & \text{dacă } \frac{\pi}{2}<t\le\pi\end{cases}$, unde $a>0$;

c) $f:[-\pi,\pi]\to\mathbb{R}, f(t)=\begin{cases} -\frac{2a}{\pi}(t+\pi), & \text{dacă } -\pi\le t<\frac{-\pi}{2}\\ \frac{2a}{\pi}t, & \text{dacă } \frac{-\pi}{2}\le t\le\frac{\pi}{2}\\ \frac{2a}{\pi}(\pi-t), & \text{dacă } \frac{\pi}{2}<t\le\pi\end{cases}$, unde $a>0$;

În particular, $f:[-\pi,\pi]\to\mathbb{R}, f(t)=\begin{cases} -t-\pi, & \text{dacă } -\pi\le t<\frac{-\pi}{2}\\ t, & \text{dacă } \frac{-\pi}{2}\le t\le\frac{\pi}{2}\\ -t+\pi, & \text{dacă } \frac{\pi}{2}<t\le\pi\end{cases}$.

d) $f:[-\pi,\pi]\to\mathbb{R}, f(t)=\begin{cases} 1, & \text{dacă } -\pi\le t<-\pi+a\\ 0, & \text{dacă } -\pi+a\le t<0\\ 1, & \text{dacă } 0\le t<a\\ 0, & \text{dacă } a\le t\le\pi\end{cases}$, unde $a\in\,]0,\pi[$;

e) $f:[-\pi,\pi]\to\mathbb{R}, f(t)=\begin{cases} 0, & \text{dacă } -\pi\le t<0\\ 1, & \text{dacă } 0\le t\le\pi\end{cases}$;

Analog $f:[-1,1]\to\mathbb{R}, f(t)=\begin{cases} 0, & \text{dacă } -1\le t<0\\ 1, & \text{dacă } 0\le t\le 1\end{cases}$;

(provine din $\eta:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $\eta(t)=\begin{cases} 0, & \text{dacă } t<0\\ 1, & \text{dacă } 0\le t\end{cases}$, *funcţia treaptă unitate a lui Heaviside*)

f) $f:[-\pi,\pi]\to\mathbb{R}, f(t)=A\cdot(\eta(t)-\eta(t-\pi))+(\eta(t+\pi)-\eta(t))$, unde $A>0$ şi

$\eta:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $\eta(t)=\begin{cases} 0, & \text{dacă } t<0\\ 1, & \text{dacă } 0\le t\end{cases}$.

g) $f:[-\pi,\pi]\to\mathbb{R}, f(t)=|t|\cdot(\eta(t+\pi)-\eta(t-\pi))$, unde

$\eta:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $\eta(t)=\begin{cases} 0, & \text{dacă } t<0\\ 1, & \text{dacă } 0\le t\end{cases}$.

h) $d_\pi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, d_\pi(t)=\begin{cases} 1, & \text{dacă } -\pi\le t\le\pi\\ 0, & \text{în rest}\end{cases}$;

(provine din semnalul rectangular $d_A:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, *fereastra dreptunghiulară* centrată în origine de lăţime $2A$, $A>0$ sau *poarta temporală* cu $\tau=\pi$).

i) $f:[-l,l]\to\mathbb{R}$, $f(t)=\begin{cases} c_1, & \text{dacă } -l\le t\le 0\\ c_2, & \text{dacă } 0<t\le l\end{cases}$, unde $c_1\in\mathbb{R}$, $c_2\in\mathbb{R}$;

j) $f:[-\pi,\pi]\to\mathbb{R}, f(t)=\sin(at)$, unde $a\in\mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$;**k)** $f:[-\pi,\pi]\to\mathbb{R}, f(t)=\text{sh}\,(at)$, unde $a\in\mathbb{R}$;

l) $f:[-\pi,\pi]\to\mathbb{R}, f(t)=|\cos t|$.

Rezolvare: A se vedea Seminar.

Exemplul 4. Să se studieze dacă următoarele funcţii satisfac condiţiile Consecinţei 2 şi, dacă da, să dezvolte în *serie de cosinusuri* funcţiile:

a) $f:[0,\pi]\to\mathbb{R}, f(t)=\begin{cases} 1, & \text{dacă } 0\le t\le a\\ 0, & \text{dacă } a<t\le\pi\end{cases}$, unde $a\in\,]0,\pi[$;

b) $f:[0,\pi]\to\mathbb{R}, f(t)=\begin{cases} 1-\frac{1}{2a}t, & \text{dacă } 0\le t\le 2a\\ 0, & \text{dacă } 2a<t\le\pi\end{cases}$, unde $a\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$;

c) $f:[0,\pi]\to\mathbb{R}, f(t)=\begin{cases} \frac{\pi}{2\sqrt{3}}, & \text{dacă } 0\le t<\frac{\pi}{3}\\ \frac{\pi}{4\sqrt{3}}, & \text{dacă } t=\frac{\pi}{3}\\ 0, & \text{dacă } \frac{\pi}{3}<t<\frac{2\pi}{3}\\ \frac{-\pi}{4\sqrt{3}}, & \text{dacă } t=\frac{2\pi}{3}\\ \frac{-\pi}{2\sqrt{3}}, & \text{dacă } \frac{2\pi}{3}<t\le\pi\end{cases}$;

d) $f:[0,l]\to\mathbb{R}, f(t)=l-t$; **e)** $f:[0,\pi]\to\mathbb{R}, f(t)=e^t$;

Rezolvare: a) Fie

$$f:[0,\pi]\to\mathbb{R}, f(t)=\begin{cases}1, & \text{dacă } 0\le t\le a\\ 0, & \text{dacă } a<t\le\pi\end{cases}, \text{ unde } a\in\left]0,\pi\right[;$$

Se observă că f este netedă pe porţiuni pe $[0,\pi]$.

etapa 1. Se ataşează lui f seria ei de cosinusuri. Se determină coeficienţii:

$$\boxed{a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(t)\,dt}\Rightarrow a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(t)\,dt=\frac{2}{\pi}\left(\int_0^a 1dt+\int_a^\pi 0dt\right)=$$

$$=\frac{2}{\pi}\left(t|_{t=0}^{t=a}-c|_{t=a}^{t=\pi}\right)=\frac{2a}{\pi}.$$

$$\boxed{a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(t)\cos(nt)\,dt, \forall n\in\mathbb{N}^*}\Rightarrow a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(t)\cdot\cos(nt)\,dt=$$

$$=\frac{2}{\pi}\left(\int_0^a 1\cos(nt)\,dt+\int_a^\pi 0\cos(nt)\,dt\right)=\frac{2}{\pi}\left(\left.\frac{\sin(nt)}{n}\right|_{t=0}^{t=a}-c|_{t=a}^{t=\pi}\right)=$$

$$=\frac{2}{\pi}\left(\frac{\sin(na)-\sin(n0)}{n}-0\right)=\frac{2}{n\pi}\sin na, \forall n\in\mathbb{N}^*.$$

Atunci seria de cosinusuri ataşată lui f este

$$\frac{a}{\pi}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{n\pi}\sin na\cdot\cos(nt)\right), \forall t\in[0,\pi], \text{ adică}$$

$$\frac{a}{\pi}+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\sin na}{n}\cdot\cos(nt)\right), \forall t\in[0,\pi], \qquad (*_1)$$

etapa 2. Se studiază dacă suma seriei $(*_1)$ coincide cu f.

Conform Consecinţei 2 suma seriei $(*_1)$ este:

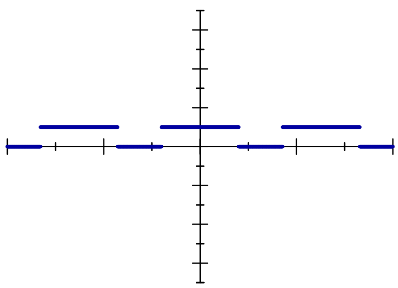
$$s(t)=\begin{cases}1, & \text{dacă } 0\le t<a\\ \frac{1}{2}, & \text{dacă } t=a\\ 0, & \text{dacă } a<t\le\pi\end{cases} \qquad (*_2)$$

Seria $(*_1)$ poate fi considerată ca fiind, prin extindere, seria funcţiei f prelungită prin paritate la $[-\pi,\pi]$, apoi prin periodicitate la $\mathbb{R}$.

Comentariu. De menţionat că

$$f_p:\left]-\pi,\pi\right]\to\mathbb{R}, f_p(t)=\begin{cases}f(-t), & \text{dacă } t\in\left]-\pi,0\right[\\ f(t), & \text{dacă } t\in[0,\pi]\end{cases}=\begin{cases}0 & \text{dacă } -\pi<t<a\\ 1, & \text{dacă } -a\le t<0\\ 1, & \text{dacă } 0\le t\le a\\ 0, & \text{dacă } a<t\le\pi\end{cases}$$

este funcţia pară pe intervalul simetric $]-\pi,\pi[$ ce are G_{f_p} obţinut prin simetrizarea G_f faţă de Oy, utilizată ulterior pentru prelungirea prin periodicitate.



Exemplul 5. Să se studieze dacă următoarele funcţii satisfac condiţiile Consecinţei 3 şi, dacă da,

să dezvolte în *serie de sinusuri* funcţiile:

a) $f:[0,\pi]\to\mathbb{R}, f(t)=\begin{cases}0, & \text{dacă } 0\le t\le a\\ 1, & \text{dacă } a<t\le\pi\end{cases}$, unde $a\in\,]0,\pi[$;

b) $f:[0,\pi]\to\mathbb{R}, f(t)=\begin{cases}t, & \text{dacă } 0\le t\le\frac{\pi}{2}\\ 0, & \text{dacă } \frac{\pi}{2}<t\le\pi\end{cases}$; **c)** $f:[0,\pi]\to\mathbb{R}, f(t)=\begin{cases}\frac{\pi t}{2\sqrt{3}}, & \text{dacă } 0\le t\le\frac{\pi}{3}\\ \frac{\pi^2}{6\sqrt{3}}, & \text{dacă } \frac{\pi}{3}<t<\frac{2\pi}{3}\\ \frac{\pi(\pi-t)}{2\sqrt{3}}, & \text{dacă } \frac{2\pi}{3}\le t\le\pi\end{cases}$;

d) $f:[0,l]\to\mathbb{R}, f(t)=l-t$; **e)** $f:[0,\pi]\to\mathbb{R}, f(t)=\cos(at)$, unde $a\in\mathbb{R}$.

Rezolvare: a) Fie

$$f:[0,\pi]\to\mathbb{R}, f(t)=\begin{cases}0, & \text{dacă } 0\le t\le a\\ 1, & \text{dacă } a<t\le\pi\end{cases}.$$

Se observă că f este netedă pe porţiuni pe $[0,\pi]$.

etapa 1. Se ataşează lui f seria ei de sinusuri. Se determină coeficienţii:

$$\boxed{b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(t)\sin(nt)\,dt, \forall n\in\mathbb{N}^*}\Rightarrow b_n=\frac{2}{\pi}\int_a^\pi 1\cdot\sin(nt)\,dt=$$

$$=\frac{2}{\pi}\cdot\left.\frac{-\cos(nt)}{n}\right|_{t=a}^{t=\pi}=\frac{2}{\pi}\left(\frac{-\cos(n\pi)}{n}-\frac{-\cos na}{n}\right)=$$

$$=\frac{2}{\pi}\left(\frac{-(-1)^n}{n}-\frac{-\cos(na)}{n}\right), \forall n\in\mathbb{N}^*.$$

Atunci seria de sinusuri ataşată lui f este

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{\pi n^2}\left(\sin\frac{n\pi}{2}-\frac{n\pi}{2}\cos\frac{n\pi}{2}\right)\cdot\sin(nt)\right), \forall t\in[0,\pi], \qquad (*_1)$$

etapa 2. Se studiază dacă suma seriei $(*_1)$ coincide cu f.

Conform Consecinţei 3 suma seriei $(*_1)$ este:

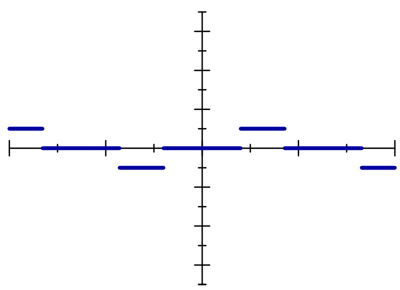
$$s(t)=\begin{cases}0, & \text{dacă } 0\le t<a\\ \frac{0+1}{2}, & \text{dacă } t=a\\ 1, & \text{dacă } a<t\le\pi\end{cases} \qquad (*_2)$$

Seria $(*_1)$ poate fi considerată ca fiind, prin extindere, seria funcţiei prelungită prin imparitate la $[-\pi,\pi]$, apoi prin periodicitate la $\mathbb{R}$.

Comentariu. De menţionat că

$$f_i:\,]-\pi,\pi]\to\mathbb{R}, f_i(t)=\begin{cases}-f(-t), & \text{dacă } t\in\,]-\pi,0[\\ f(t), & \text{dacă } t\in[0,\pi]\end{cases}=\begin{cases}-1 & \text{dacă } -\pi<t<a\\ 0, & \text{dacă } -a\le t<0\\ 0, & \text{dacă } 0\le t\le a\\ 1, & \text{dacă } a<t\le\pi\end{cases}$$

este funcţia impară pe intervalul simetric $]-\pi,\pi[$ ce are G_{f_i} obţinut prin simetrizarea G_f faţă de O, utilizată ulterior pentru prelungirea prin periodicitate.



Exemplul 6. Să se studieze dacă următoarele funcţii satisfac condiţiile Consecinţelor 2 şi 3 şi, dacă da, să dezvolte în *serie de cosinusuri, respectiv de sinusuri* funcţiile:

a) $f:[0,2]\to\mathbb{R}, f(t)=\begin{cases} t, & \text{dacă } 0\le t\le 1\\ 2-t, & \text{dacă } 1<t\le 2\end{cases}$;

b)$f:[0,\pi]\to\mathbb{R}, f(t)=\begin{cases} \dfrac{2}{\pi}t, & \text{dacă } 0\le t\le \frac{\pi}{2}\\ \dfrac{2}{\pi}(\pi-t), & \text{dacă } \frac{\pi}{2}<t\le \pi\end{cases}$;

c) $f:[0,\pi]\to\mathbb{R}, f(t)=1.$

Rezolvare. a) Fie $f:[0,2]\to\mathbb{R}, f(t)=\begin{cases} t, & \text{dacă } 0\le t\le 1\\ 2-t, & \text{dacă } 1<t\le 2\end{cases}$.

Se observă că f este netedă pe porţiuni pe $[0,2]$, cu

$[0,l]=[0,2]\Rightarrow\begin{cases} T=2\cdot 2=4\text{-perioada}\\ \omega=\frac{2\pi}{4}\Rightarrow\omega=\frac{\pi}{2} \text{ pulsaţia}\end{cases}$

etapa 1_c. Se ataşează lui f seria ei de cosinusuri. Se determină coeficienţii:

$$\boxed{a_0=\frac{2}{2}\int_0^2 f(t)\,dt}\Rightarrow a_0=\frac{2}{2}\int_0^2 f(t)\,dt=\frac{2}{2}\left(\int_0^1 t dt+\int_1^2(2-t)\,dt\right)=$$

$$=\frac{2}{2}\left(\left.\tfrac{t^2}{2}\right|_{t=0}^{t=1}-\left.\left(2t-\tfrac{t^2}{2}\right)\right|_{t=1}^{t=2}\right)=1.$$

$$\boxed{a_n=\frac{2}{2}\int_0^2 f(t)\cos\left(\frac{n\pi t}{2}\right)dt,\forall n\in\mathbb{N}^*}\Rightarrow a_n=\frac{2}{2}\left(\int_0^1 t\cdot\cos\left(\frac{n\pi t}{2}\right)dt+\int_1^2(2-t)\cos\left(\frac{n\pi t}{2}\right)dt\right)=$$

$$=\int_0^1 t\cdot\left(\frac{\sin\left(\frac{n\pi t}{2}\right)}{\frac{n\pi}{2}}\right)'dt+\int_1^2(2-t)\cdot\left(\frac{\sin\left(\frac{n\pi t}{2}\right)}{\frac{n\pi}{2}}\right)'dt=$$

$$=\left(\left.t\cdot\frac{\sin\left(\frac{n\pi t}{2}\right)}{\frac{n\pi}{2}}\right|_{t=0}^{t=1}-\int_0^1 1\cdot\frac{\sin\left(\frac{n\pi t}{2}\right)}{\frac{n\pi}{2}}dt\right)+\left(\left.(2-t)\cdot\frac{\sin\left(\frac{n\pi t}{2}\right)}{\frac{n\pi}{2}}\right|_{t=1}^{t=2}-\int_1^2(-1)\cdot\frac{\sin\left(\frac{n\pi t}{2}\right)}{\frac{n\pi}{2}}dt\right)$$

$$=\left(\left(1\cdot\frac{\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{\frac{n\pi}{2}}-0\right)-\left.\frac{-\cos\left(\frac{n\pi t}{2}\right)}{\left(\frac{n\pi}{2}\right)^2}\right|_{t=0}^{t=1}\right)+\left(\left(0-\frac{\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{\frac{n\pi}{2}}\right)-(-1)\left.\frac{-\cos\left(\frac{n\pi t}{2}\right)}{\left(\frac{n\pi}{2}\right)^2}\right|_{t=1}^{t=2}\right)=$$

$$=\left(\frac{\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{\frac{n\pi}{2}}-\frac{-\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)+\cos 0}{\left(\frac{n\pi}{2}\right)^2}\right)+\left(-\frac{\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{\frac{n\pi}{2}}-(-1)\left.\frac{-\cos\left(\frac{2n\pi}{2}\right)+\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{\left(\frac{n\pi}{2}\right)^2}\right|_{t=1}^{t=2}\right)=$$

$$=-\frac{-\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)+\cos 0-\cos(n\pi)+\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{\left(\frac{n\pi}{2}\right)^2}=-\frac{1-(-1)^n}{\left(\frac{n\pi}{2}\right)^2},\forall n\in\mathbb{N}^*.$$

Atunci seria de cosinusuri ataşată lui f este

$$\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1-(-1)^n}{\left(\frac{n\pi}{2}\right)^2}\cdot\cos\left(\frac{n\pi t}{2}\right)\right),\forall t\in[0,2]. \qquad (*_1)$$

etapa 2_c. Se studiază dacă suma seriei $(*_1)$ coincide cu f.

Conform Consecinţei 2 suma seriei $(*_1)$ este:

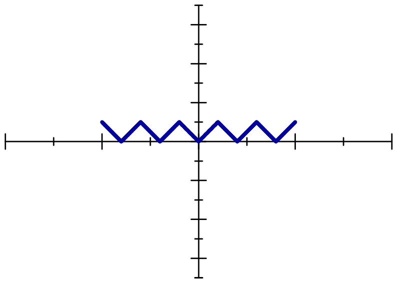
$$s(t)=\begin{cases} t, & \text{dacă } 0\le t<1\\ 1, & \text{dacă } t=1\\ 2-t, & \text{dacă } 1<t\le 2\end{cases} \qquad (*_2)$$

Seria $(*_1)$ poate fi considerată ca fiind, prin extindere, seria funcţiei f prelungită prin paritate la $[-2,2]$, apoi prin periodicitate la $\mathbb{R}$.

Comentariu$_c$. De menţionat că

$$f_p:\,]-2,2]\to\mathbb{R},\, f_p(t)=\begin{cases} f(-t), & \text{dacă } t\in\,]-2,0[\\ f(t), & \text{dacă } t\in[0,2]\end{cases} = \begin{cases} 2+t & \text{dacă } -2<t<-1\\ -t, & \text{dacă } -1\le t<0\\ t, & \text{dacă } 0\le t\le 1\\ 2-t, & \text{dacă } 1<t\le 2\end{cases}$$

este funcţia pară pe intervalul simetric $]-\pi,\pi[$ ce are G_{f_p} obţinut prin simetrizarea G_f faţă de Oy, utilizată ulterior pentru prelungirea prin periodicitate.



etapa 1_s. Se ataşează lui f seria ei de sinusuri. Se determină coeficienţii:

$$\boxed{b_n=\frac{2}{2}\int_0^2 f(t)\sin\left(\frac{n\pi t}{2}\right)dt,\forall n\in\mathbb{N}^*}\Rightarrow b_n=\frac{2}{2}\left(\int_0^1 t\cdot\sin\left(\frac{n\pi t}{2}\right)dt+\int_1^2(2-t)\sin\left(\frac{n\pi t}{2}\right)dt\right)=$$

$$=\int_0^1 t\cdot\left(\frac{\cos\left(\frac{n\pi t}{2}\right)}{-\frac{n\pi}{2}}\right)'dt+\int_1^2(2-t)\cdot\left(\frac{\cos\left(\frac{n\pi t}{2}\right)}{-\frac{n\pi}{2}}\right)'dt=$$

$$=\left(t\cdot\frac{\cos\left(\frac{n\pi t}{2}\right)}{-\frac{n\pi}{2}}\Bigg|_{t=0}^{t=1}-\int_0^1 1\cdot\frac{\cos\left(\frac{n\pi t}{2}\right)}{-\frac{n\pi}{2}}dt\right)+\left((2-t)\cdot\frac{\cos\left(\frac{n\pi t}{2}\right)}{-\frac{n\pi}{2}}\Bigg|_{t=1}^{t=2}-\int_1^2(-1)\cdot\frac{\cos\left(\frac{n\pi t}{2}\right)}{-\frac{n\pi}{2}}dt\right)$$

$$=\left(\left(1\cdot\frac{\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{-\frac{n\pi}{2}}-0\right)-\frac{\sin\left(\frac{n\pi t}{2}\right)}{-\left(\frac{n\pi}{2}\right)^2}\Bigg|_{t=0}^{t=1}\right)+\left(\left(0-\frac{\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{-\frac{n\pi}{2}}\right)-(-1)\frac{\sin\left(\frac{n\pi t}{2}\right)}{-\left(\frac{n\pi}{2}\right)^2}\Bigg|_{t=1}^{t=2}\right)=$$

$$=\left(\frac{\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{-\frac{n\pi}{2}}-\frac{\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)-\sin 0}{-\left(\frac{n\pi}{2}\right)^2}\right)+\left(-\frac{\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{-\frac{n\pi}{2}}-(-1)\frac{\sin\left(\frac{2n\pi}{2}\right)-\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{-\left(\frac{n\pi}{2}\right)^2}\Bigg|_{t=1}^{t=2}\right)=$$

$$=-\frac{\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)-\sin 0-\sin(n\pi)+\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{-\left(\frac{n\pi}{2}\right)^2}=+\left(\frac{2}{n\pi}\right)^2\cdot 2\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right),\forall n\in\mathbb{N}^*.$$

Atunci seria de sinusuri ataşată lui f este

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{8}{n^2\pi^2}\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{n\pi t}{2}\right)\right), \forall t\in[0,2]. \qquad (*_1)$$

<u>etapa 2_s.</u> Se studiază dacă suma seriei $(*_1)$ coincide cu f.

Conform Consecinţei 2 suma seriei $(*_1)$ este:

$$s(t)=\begin{cases} t, & \text{dacă } 0\le t<1\\ 1, & \text{dacă } t=1\\ 2-t, & \text{dacă } 1<t\le 2\end{cases} \qquad (*_2)$$

Seria $(*_1)$ poate fi considerată ca fiind, prin extindere, seria funcţiei prelungită prin imparitate la $[-\pi,\pi]$, apoi prin periodicitate la $\mathbb{R}$.

Comentariu$_s$. De menţionat că

$$f_i:]-\pi,\pi]\to\mathbb{R}, f_i(t)=\begin{cases}-f(-t), & \text{dacă } t\in\,]-\pi,0[\\ f(t), & \text{dacă } t\in[0,\pi]\end{cases}=\begin{cases}-2-t & \text{dacă } -2<t<-1\\ t, & \text{dacă } -1\le t<0\\ t, & \text{dacă } 0\le t\le 1\\ 2-t, & \text{dacă } 1<t\le 2\end{cases}$$

este funcţia impară pe intervalul simetric $]-\pi,\pi[$ ce are G_{f_i} obţinut prin simetrizarea G_f faţă de O, utilizată ulterior pentru prelungirea prin periodicitate.