

CURS NR. 14
EDCO, AIA

9 TRANSFORMATĂ FOURIER

În Teoria Semnalelor, transformata Fourier se utilizează pentru a modela ca reprezentare spectrală semnale aperiodice, iar seriile Fourier pentru cele periodice. A se vedea *Fourier Transform, Fourier Series and frequency spectrum*, de prof. Eugene Khutoryansky:

<https://www.youtube.com/watch?v=r18Gi8lSkfM>.

Separat se studiază cazul semnalelor digitale. În toate aceste situații se poate realiza și operația inversă, de sinteză Fourier, adică de reconstrucție a semnalului în timp din cunoașterea componentelor lui spectrale. Dacă spectrul unui semnal periodic este discret, cu linii spectrale la frecvențe $k\omega_0$ date de teoria seriilor Fourier, în schimb spectrul unui semnal neapărat periodic este continuu.

Ideea lui Fourier de a descompune unele entități din natură ca sumă / suprapunere de entități mai simple a condus ca, în matematică, unele ecuații diferențiale ce le modelează să fie transformate în ecuații mai simple. S-a reușit măsurarea lungimii de undă a luminii absorbite în diverse medii și, cu ajutorul tehnologiilor informatice, s-a realizat compresia semnalelor și imaginilor prin reducerea lor la șiruri de numere; acestea fiind regăsite în transmisiile fără fir, în studiul vibrațiilor, în muzica electronică etc. Transformata unui semnal nu este un alt semnal, ci o altă reprezentare, aptă de alte interpretări, fără pierdere de informație.

Definiția 9.1.1. a) O funcție $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ (sau $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$) se numește *funcție absolut integrabilă pe $\mathbb{R}$* sau *funcție din $L^1(\mathbb{R})$* dacă

$$\exists \int_{\mathbb{R}} |g(t)| dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |g(t)| dt < +\infty.$$

b) O funcție $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ (sau $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$) se numește *funcție local integrabilă pe $\mathbb{R}$* sau *funcție din $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$* dacă este integrabilă pe orice interval compact din $\mathbb{R}$.

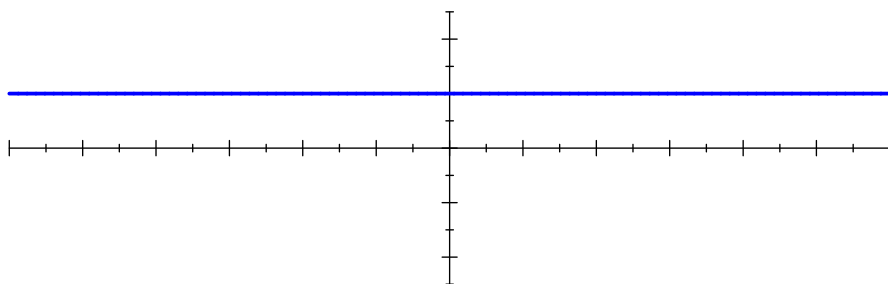
c) O funcție $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ (sau $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$) se numește *funcție integrabilă pe $\mathbb{R}$* dacă

$$\exists \int_{\mathbb{R}} g(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) dt \text{ finit în } \mathbb{R} \text{ (sau } \mathbb{C} \text{)}.$$

Observația 9.1.1. a) Orice funcție absolut integrabilă pe $\mathbb{R}$ este și local integrabilă pe $\mathbb{R}$. Într-adevăr, dacă $g \in L^1(\mathbb{R})$ atunci, $\forall [a, b]$ interval mărginit din $\mathbb{R}$,

$$\left| \int_a^b g(t) dt \right| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |g(t)| dt < +\infty.$$

Reciproca nu este adevărată, există funcții local integrabile pe $\mathbb{R}$ care nu sunt absolut integrabile pe $\mathbb{R}$. De exemplu, $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(t) = 23$ este din $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$, dar nu este din $L^1(\mathbb{R})$.



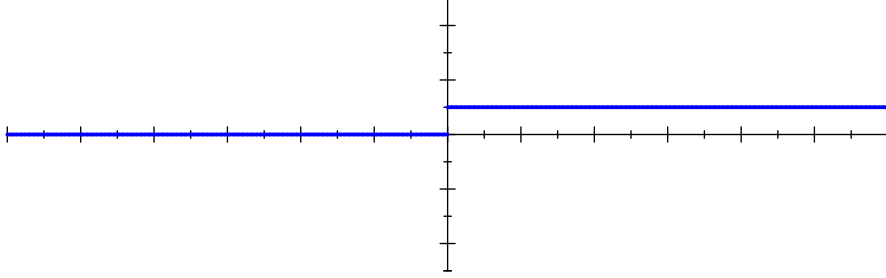
Se observă că, pe orice interval compact, există arie de subgrafic; dar pe $\mathbb{R}$, aria benzii orizontale situate sub grafic și deasupra axei Ot este infinită.

b) Orice funcție absolut integrabilă pe $\mathbb{R}$ este și integrabilă pe $\mathbb{R}$.

Reciproca nu este adevărată, există funcții integrabile pe $\mathbb{R}$ care nu sunt absolut integrabile pe $\mathbb{R}$. De exemplu, $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(t) = \frac{\sin t}{t} \cdot \eta(t)$, unde funcția

$$\eta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ (sau } \eta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}), \eta(t) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } t < 0 \\ 1, & \text{dacă } t \geq 0. \end{cases}$$

este funcția treaptă unitate (funcția Heaviside). În alte materiale pot apărea notații diverse, precum $H(t)$, $u(t)$, $\theta(t)$ – a se vedea <https://mathworld.wolfram.com/HeavisideStepFunction.html> sau Mary Attenborough, *Mathematics For Electrical Engineering And Computing*.

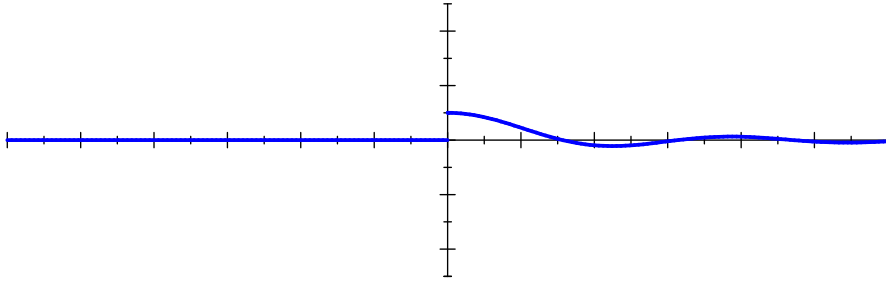


$\eta \in \mathcal{O}$ este funcție original, cu abscisa de convergență $\sigma_\eta = 0$.

• g este integrabilă pe $\mathbb{R}$. Într-adevăr, s-a arătat că

$$\mathcal{L} \left\{ \frac{\sin t}{t} \cdot \eta(t) \right\} (s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{2} - \arctg s \Rightarrow \int_0^{+\infty} e^{-0t} \frac{\sin t}{t} dt = F(0) = \frac{\pi}{2} - \arctg 0 = \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow \exists \int_{\mathbb{R}} g(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) dt = \frac{\pi}{2} < +\infty.$$



Se observă că, pe $\mathbb{R}$, suma ariilor regiunilor situate sub grafic (cu + unde graficul este deasupra axei) și deasupra graficului (cu – unde graficul este sub axă), limitate de Ot este finită pentru sinusul atenuat.

• g nu este absolut integrabilă pe $\mathbb{R}$. Într-adevăr,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{\sin t}{t} \right| dt &= \int_0^{+\infty} \frac{|\sin t|}{t} dt = \\ &= \int_0^\pi \frac{\sin t}{t} dt + \int_\pi^{2\pi} \frac{-\sin t}{t} dt + \int_{2\pi}^{3\pi} \frac{\sin t}{t} dt + \int_{3\pi}^{4\pi} \frac{-\sin t}{t} dt + \dots + \\ &\quad + \int_{2k\pi}^{(2k+1)\pi} \frac{\sin t}{t} dt + \int_{(2k+1)\pi}^{(2k+2)\pi} \frac{-\sin t}{t} dt + \dots \stackrel{\text{formal}}{\geq} \\ &\geq \int_0^\pi \frac{\sin t}{t} dt + \int_\pi^{2\pi} \frac{-\sin t}{\pi} dt + \int_{2\pi}^{3\pi} \frac{\sin t}{2\pi} dt + \int_{3\pi}^{4\pi} \frac{-\sin t}{3\pi} dt + \dots + \\ &\quad + \int_{2k\pi}^{(2k+1)\pi} \frac{\sin t}{2k\pi} dt + \int_{(2k+1)\pi}^{(2k+2)\pi} \frac{-\sin t}{(2k+1)\pi} dt + \dots \geq \\ &\geq \int_0^\pi \frac{\sin t}{t} dt + \frac{2}{\pi} + \frac{2}{2\pi} + \frac{2}{3\pi} + \dots + \frac{2}{2k\pi} + \frac{2}{(2k+1)\pi} + \dots \geq \\ &\geq \int_0^\pi \frac{\sin t}{t} dt + \frac{2}{\pi} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2k} + \dots \right) = \end{aligned}$$

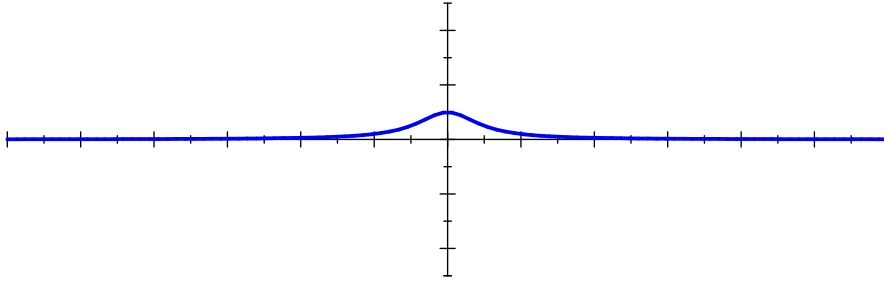
$$= \underbrace{\int_0^\pi \frac{\sin t}{t} dt}_{\text{număr real}} + \underbrace{\frac{2}{\pi} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2k} + \dots \right)}_{\infty, \text{ ca sumă a seriei } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}} = \infty.$$

Se observă că, pe $\mathbb{R}$, suma ariilor regiunilor situate sub grafic (cu + unde graficul este deasupra axei), limitate de Ot , este infinită pentru modulul sinusului atenuat.

c) Definiția este consistentă, adică există funcții care sunt absolut integrabile pe $\mathbb{R}$.

De exemplu, $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(t) = \frac{1}{t^2 + 1}$ este absolut integrabilă pe $\mathbb{R}$, $g \in L^1(\mathbb{R})$. Într-adevăr,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{1}{t^2 + 1} \right| dt \stackrel{\text{formal}}{=} \arctg t \Big|_{t \rightarrow -\infty}^{t \rightarrow +\infty} = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2} \right) = \pi < +\infty.$$



(este aria subgraficului pentru $|g|$)

Definiția 9.1.2. Fie $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ (sau $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$), $g \in L^1(\mathbb{R})$. Funcția

$$G : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}, G(\omega) = \int_{\mathbb{R}} g(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) e^{-j\omega t} dt$$

se numește *transformata Fourier a funcției g* sau *imaginea funcției g prin transformata Fourier* (sau *funcție de densitate spectrală*, *spectru în frecvență*, *funcție de distribuție a frecvențelor* cu notația $\hat{g}(\omega)$). Se notează

$$G(\omega) = \mathcal{F}\{g(t)\}(\omega) \text{ sau } G(\omega) = \hat{g}(\omega).$$

Provenite din formula Euler, $e^z = e^x (\cos y + j \sin y)$, funcțiile:

$$G_c(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) \cos(\omega t) dt = \operatorname{Re} G(\omega) \text{ și } G_s(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) \sin(\omega t) dt = -\operatorname{Im} G(\omega)$$

se numesc *transformatele Fourier ale funcției g prin cos*, respectiv *prin sin*.

Teorema 9.1.1 (teorema fundamentală a transformatei Fourier). Dacă $g \in L^1(\mathbb{R})$ atunci integrala improprie pe interval nemărginit din Definiție, cu parametrul $\omega \in \mathbb{R}$, este absolut convergentă și uniform convergentă pe $\mathbb{R}$, adică transformata Fourier G este bine definită. Mai mult, este continuă și mărginită pe $\mathbb{R}$, cu $\lim_{|\omega| \rightarrow \infty} G(\omega) = 0$.

Operatorul $\mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{C}^0(\mathbb{R}; \mathbb{C})$ se numește *operatorul Fourier (transformarea Fourier)*.

Demonstrație. Convergența se demonstrează utilizând Criteriul Comparăției cu Inegalități, iar continuitatea și mărginirea utilizând proprietățile integralei cu parametru.

Observația 9.1.2. De menționat că

$$e^{-j\omega t} = \cos(\omega t) - j \sin(\omega t) = \overline{\cos(\omega t) + j \sin(\omega t)} = \overline{e^{j\omega t}}$$

și că $e^{j\omega t}$ este un semnal unitar, periodic, de perioadă principală $T = \frac{2\pi}{\omega}$ și frecvență $\nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$ (în ipoteza că pulsația $\omega > 0$ pentru modelare). Atunci:

$$G(\nu) = \int_{\mathbb{R}} g(t) e^{-2\pi j \nu t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) e^{-2\pi j \nu t} dt.$$

Observația 9.1.3. a) Transformata Fourier este o funcție complexă. Conform teoremei de inversare dată ulterior, va permite un transfer bilateral de informație între domeniul "timp" și domeniul "frecvență". Așa cum o melodie (adică un șir de note muzicale) este transformată în unde electromagnetice, este transmisă cu viteza luminii și ascultată apoi, prin recompunere.

b) Numărul complex $G(\omega)$ se poate scrie sub formă exponențială:

$$G(\omega) = A(\omega) e^{j\Phi(\omega)},$$

unde $A(\omega) = |G(\omega)|$ este *amplitudinea în frecvență* a semnalului g și $\Phi(\omega) = \arg G(\omega)$ este *faza în frecvență* a semnalului g . Mulțimea $\{(\omega, A(\omega)); \omega \in \mathbb{R}\}$ se numește *spectrul în amplitudine* (în frecvență) al semnalului g . ν se măsoară în Hz , ω în rad/s , iar A în decibeli.

Se mai spune că transformata Fourier $G(\omega)$ a răspunsului la impuls $g(t)$ al unui sistem se corelează cu *răspunsul în frecvență al sistemului*. Dependența magnitudinii $|G(\omega)|$ în funcție de frecvență va fi *caracteristica de modul a sistemului*. Dependența fazei $\arg G(\omega)$ în funcție de frecvență va fi *caracteristica de faze a sistemului*.

c) Se utilizează numere complexe pentru că oscilațiile armonice au amplitudine și frecvență (a se vedea Anexa 4 din Curs AM), deci o pereche de proprietăți, pe care numerele complexe le pot încorpora împreună.

d) Funcțiile sinus, cosinus, exponențială, treapta unitate, signum, constantele reale, polinoamele și altele nu sunt în $L^1(\mathbb{R})$, nici măcar înmulțite cu $\eta(t)$ (încât să devină funcții original Laplace și să admită transformată Laplace), deci nu admit transformată Fourier în sensul definiției date. Aceasta se va corecta utilizând *distribuțiile*.

e) Transformata Fourier a unui semnal g din $L^1(\mathbb{R})$ nu aparține neapărat mulțimii $L^1(\mathbb{R})$, cum se observă din exemplul 2c) următor. Deci operatorul Fourier $\mathcal{F}$ nu este un operator al spațiului $L^1(\mathbb{R})$.

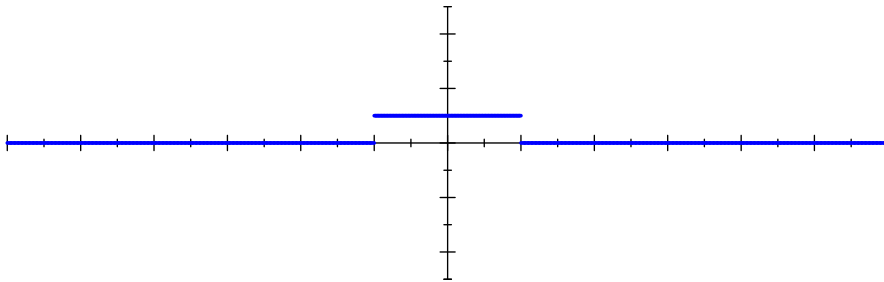
f) Dacă g este original Laplace din $L^1(\mathbb{R})$ atunci transformata Fourier coincide cu transformata Laplace în $s = j\omega$:

$$\boxed{\mathcal{F}\{f(t)\}(\omega) = \mathcal{L}\{f(t)\}(j\omega)}.$$

Exemplul 9.1.1. Utilizând definiția, să se determine transformata Fourier pentru:

$$g_\tau : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g_\tau(t) = \begin{cases} 1, & \text{dacă } |t| \leq \tau \\ 0, & \text{dacă } |t| > \tau, \end{cases} \text{ unde } \tau > 0 \text{ este dat.}$$

(semnalul rectangular, poarta temporală, fereastra dreptunghiulară)



Rezolvare. Fie $g_\tau : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g_\tau(t) = \begin{cases} 1, & \text{dacă } t \in [-\tau, \tau] \\ 0, & \text{dacă } t \in]-\infty, -\tau[\cup]\tau, +\infty[\end{cases}$.

• Se observă că $g_\tau \in L^1(\mathbb{R})$, deoarece

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |g_\tau(t)| dt \stackrel{(C)}{=} \int_{-\infty}^{-\tau} |0| dt + \int_{-\tau}^{\tau} |1| dt + \int_{\tau}^{+\infty} |0| dt = 2\tau < +\infty.$$

(este aria subgraficului pentru $|g_\tau|$)

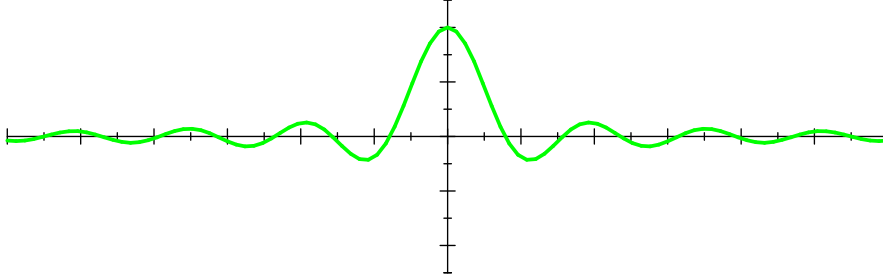
• Se calculează

$$G(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} g_\tau(t) e^{-j\omega t} dt \stackrel{(C)}{=} \int_{-\infty}^{-\tau} 0 e^{-j\omega t} dt + \int_{-\tau}^{\tau} 1 e^{-j\omega t} dt + \int_{\tau}^{+\infty} 0 e^{-j\omega t} dt =$$

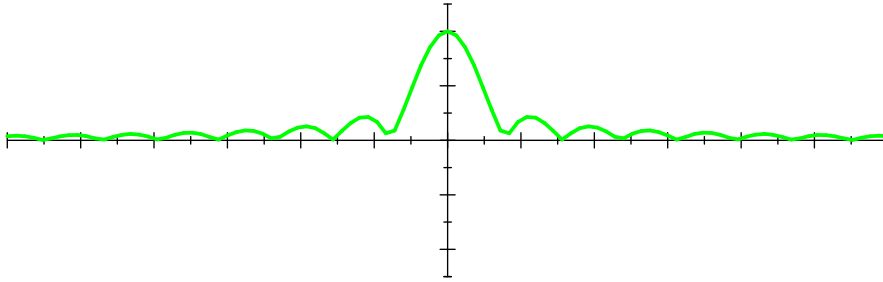
$$\begin{array}{l} t \text{ este variabilă} \\ \text{de integrare} \end{array} 0 + \frac{e^{-j\omega t}}{-j\omega} \Big|_{t=-\tau}^{t=\tau} + 0 = \frac{e^{-j\omega\tau} - e^{-j\omega(-\tau)}}{-j\omega} = \frac{2}{\omega} \sin(\omega\tau) = 2\tau \cdot \frac{\sin(\omega\tau)}{\omega\tau}.$$

Deci $G: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, $G(\omega) = 2\tau \cdot \frac{\sin(\omega\tau)}{\omega\tau}$ sau $\mathcal{F}\{g_\tau(t)\}(\omega) = 2\tau \cdot \frac{\sin(\omega\tau)}{\omega\tau}$.

Mai mult, pentru această transformată, care are valori reale, se poate reprezenta graficul (*anvelopa*)



iar *amplitudinea în frecvență* este $A(\omega) = |G(\omega)| = \sqrt{\left(\frac{2}{\omega} \sin(\omega\tau)\right)^2 + (0)^2} = 2\tau \left| \frac{\sin(\omega\tau)}{\omega\tau} \right|$ cu reprezentarea



Deoarece semnalul rectangular g este un semnal real și par (grafic simetric față de axa verticală), atunci spectrul G este real și par

Comentariu. În limbaj spațial, fie semnalul rectangular de înălțime $A > 0$ și lungime $l > 0$

$$g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(t) = \begin{cases} A, & \text{dacă } t \in [-l, l] \\ 0, & \text{dacă } t \in]-\infty, -l[\cup]l, +\infty[\end{cases}.$$

• Se observă că $g \in L^1(\mathbb{R})$, deoarece

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |g(t)| dt \stackrel{(C)}{=} \int_{-\infty}^{-l} |0| dt + \int_{-l}^l |A| dt + \int_l^{+\infty} |0| dt = 2l < +\infty.$$

• Se calculează

$$G(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) e^{-j\omega t} dt \stackrel{(C)}{=} \int_{-\infty}^{-l} 0 e^{-j\omega t} dt + \int_{-l}^l A e^{-j\omega t} dt + \int_l^{+\infty} 0 e^{-j\omega t} dt =$$

$$\begin{array}{l} t \text{ este variabilă} \\ \text{de integrare} \end{array} 0 + A \frac{e^{-j\omega t}}{-j\omega} \Big|_{t=-l}^{t=l} + 0 = A \frac{e^{-j\omega l} - e^{-j\omega(-l)}}{-j\omega} = \frac{2A}{\omega} \sin(\omega l) = 2Al \frac{\sin(\omega l)}{\omega l}.$$

Deci $G: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, $G(\omega) = 2Al \frac{\sin(\omega l)}{\omega l}$ sau $\mathcal{F}\{g(t)\}(\omega) = 2Al \frac{\sin(\omega l)}{\omega l}$.

Se mai scrie $G(\omega) = 2Al \text{sa}(\omega l)$, unde funcția *sinus atenuat* este $\text{sa}(u) = \frac{\sin u}{u}$.

Comentariu: Se va arăta că

- dacă $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g \in L^1(\mathbb{R})$ este un semnal real aleator, atunci partea reală a spectrului $\operatorname{Re} G(\omega)$ și modulul spectrului $A(\omega) = |G(\omega)|$ sunt funcții pare, iar partea imaginară a spectrului $\operatorname{Im} G(\omega)$ și faza spectrului $\Phi(\omega) = \arg G(\omega)$ sunt funcții impare;

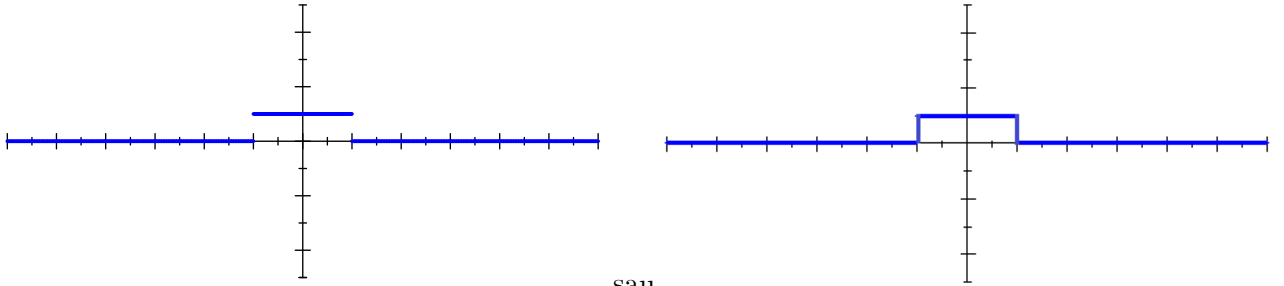
- dacă $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g \in L^1(\mathbb{R})$ este un semnal real și par, atunci spectrul $G(\omega)$ este real și par, unde $\operatorname{Re} G(\omega) = G_c(\omega)$

- dacă $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g \in L^1(\mathbb{R})$ este un semnal real și impar, atunci spectrul $G(\omega)$ este pur imagină și $\operatorname{Im} G(\omega)$ este impar, unde $-\operatorname{Im} G(\omega) = G_s(\omega)$.

Observația 9.1.4. Fie semnalul rectangular

$$g_\tau : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g_\tau(t) = \begin{cases} 1, & \text{dacă } |t| \leq \tau \\ 0, & \text{dacă } |t| > \tau, \end{cases} \text{ unde } \tau = T_1 > 0.$$

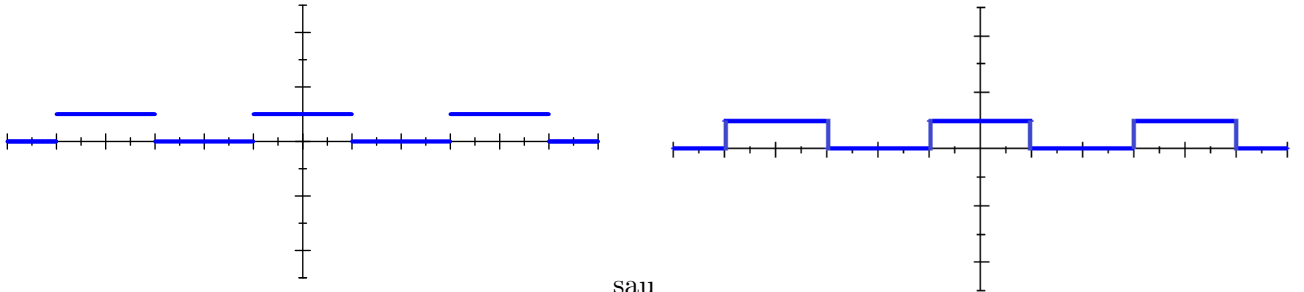
În teoria semnalelor, semnalul rectangular aperiodic apare reprezentat



sau

și se studiază cu transformata Fourier, unde $G(\omega) = \frac{2}{\omega} \sin(\omega T_1)$, în timp ce semnalul rectan-

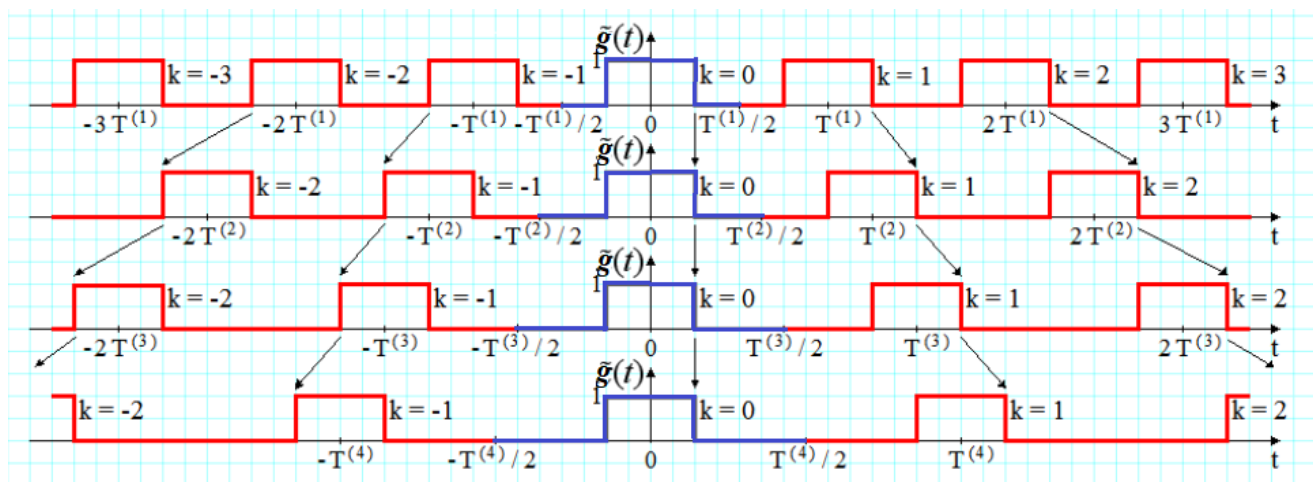
gular periodic corespunzător $\tilde{g}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} g(t - kT)$ apare reprezentat



sau

și se studiază cu serii Fourier, unde $T \cdot c_k = \begin{cases} \frac{2 \sin(k\omega_0 T_1)}{k\omega_0}, & k \neq 0 \\ 2T_1, & k = 0 \end{cases}$.

Creșterea perioadei T face ca semnalul periodic să se apropie de cel aperiodic ($T \rightarrow \infty \Rightarrow \tilde{g}(t) \rightarrow g(t)$).



De menționat o teoremă de la calculul de integrale reale cu reziduuri, de la Matematici Speciale, rescrisă:

○**T 1.** (la MS) Fie $\mathcal{I} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(t)}{Q(t)} e^{-j\omega t} dt$, $a = -\omega > 0$, unde

$P, Q \in \mathbb{R}[t]$, $\text{grad } Q \geq \text{grad } P + 1$, $Q(t) \neq 0, \forall t \in \mathbb{R}$. Atunci:

$$\mathcal{I} = 2\pi j \sum_{k=1}^n \text{rez } f(z_k), \text{ unde } f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} e^{-j\omega z}, \text{ iar } z_k \text{ sunt acei poli cu } \text{Im } z_k > 0.$$

Exemplul 9.1.2. Utilizând definiția sau T1, să se determine transformata Fourier pentru

a) $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(t) = e^{-a|t|}$, unde $a > 0$ (semnalul simetric exponențial căzător, cu $a = \omega_0$);

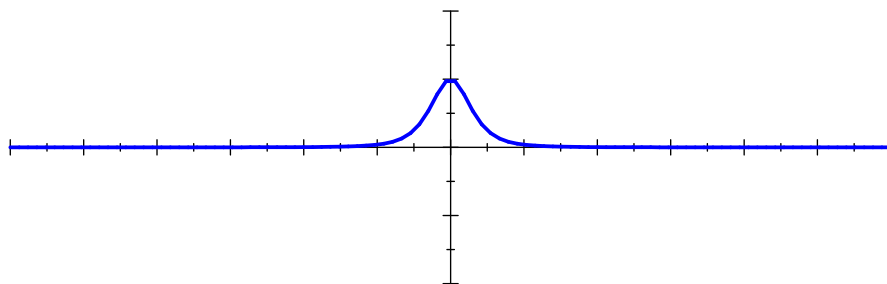
b) $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(t) = e^{-a^2 t^2}$, unde $a > 0$ (semnalul Gaussian);

c) $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(t) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } t < 0 \\ e^{-t}, & \text{dacă } t \geq 0, \end{cases}$; **d)** $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(t) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } t < 0 \\ e^{-3t}, & \text{dacă } t \geq 0, \end{cases}$

și, în general, $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(t) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } t < 0 \\ e^{-at}, & \text{dacă } t \geq 0, \end{cases}$ unde $a > 0$ (interpretat ca produs între exponențială și treapta unitate, semnalul exponențial căzător, cu $a = \omega_0$).

○**e)** (la MS) Utilizând definiția sau T1, să se determine transformata Fourier prin cos pentru:

$$g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(t) = \frac{1}{(t^2 + 1)^2}.$$



Rezolvare. a), b), c), d) A se vedea Seminar.

○**e)** (la MS) •Se observă că $g \in L^1(\mathbb{R})$, deoarece

$$\int_{\mathbb{R}} |g(t)| dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{1}{(t^2 + 1)^2} \right| dt \stackrel{\substack{t \text{ este variabilă} \\ \text{de integrare, dacă } (C)}}{=} \left(\frac{-\pi + 2t - \pi t^2}{4(t^2 + 1)} + \frac{1}{2} \arctg t \right) \Bigg|_{t \rightarrow -\infty}^{t \rightarrow \infty} = \frac{\pi}{2} < +\infty.$$

SAU

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{(t^2+1)^2} &\leq \frac{1}{t^2+1}, \forall t \in \mathbb{R} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{t^2+1} dt &= \pi - (C) \end{aligned} \right\} \text{Criteriul comparației} \Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(t^2+1)^2} dt = (C).$$

• Se calculează transformata Fourier prin cos

$$G_c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, G_c(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(t^2+1)^2} \cos(\omega t) dt,$$

folosind transformata Fourier și $e^{-j\omega t} = \cos(\omega t) - j \sin(\omega t)$, deci:

$$G : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}, G(\omega) = G_c(\omega) - j G_s(\omega).$$

Se calculează, pentru $\omega < 0$, $G(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(t^2+1)^2} e^{-j\omega t} dt$ $\begin{matrix} t \text{ este variabilă?} \\ \text{de integrare} \end{matrix}$

Aici $P(t) = 1$; $Q(t) = (t^2+1)^2$; $\text{grad } Q \geq \text{grad } P + 1$, $Q(t) \neq 0, \forall t \in \mathbb{R}$.

$$\text{Fie } f(z) = \frac{1}{(z^2+1)^2} e^{-j\omega z}.$$

$(z^2+1)^2 = 0 \Rightarrow z = \pm j$ sunt poli de ordin 2 pentru f , cu $\text{Im}(+j) > 0$.

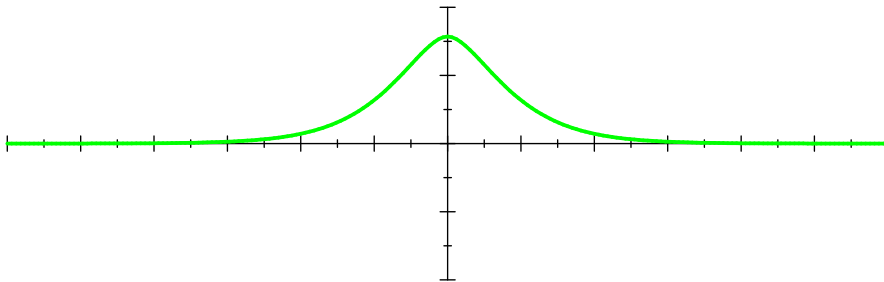
Atunci $G(\omega) = \mathcal{I} \stackrel{T1}{=} 2\pi j \text{ rez } f(j) \stackrel{\substack{0+j \text{ e pol de ordin 2} \\ \text{conform 2}}}{=}$

$$\begin{aligned} &= 2\pi j \frac{1}{(2-1)!} \lim_{z \rightarrow 0+j} \left(\left((z-j)^2 \frac{1}{(z-j)^2 (z+j)^2} e^{-j\omega z} \right)^{(2-1)}_z \right) = \\ &= 2\pi j \lim_{z \rightarrow 0+j} \left(\left(\frac{1}{(z+j)^2} e^{-j\omega z} \right)'_z \right) = 2\pi j \lim_{z \rightarrow 0+j} \frac{e^{-j\omega z} \cdot (-j\omega)(z+j)^2 - e^{-j\omega z} \cdot 2(z+j)}{(z+j)^4} = \\ &= 2\pi j \lim_{z \rightarrow 0+j} \frac{e^{-j\omega z} \cdot (-j\omega(z+j) - 2)}{(z+j)^3} = 2\pi j \frac{e^{-j\omega j} \cdot (-j\omega(j+j) - 2)}{(j+j)^3} = 2\pi j \frac{e^{\omega} \cdot (2\omega - 2)}{2j \cdot (-4)} = \\ &= \frac{\pi e^{\omega} \cdot (-\omega + 1)}{2} + 0j, \omega < 0. \end{aligned}$$

Conform Observației 9.1.5 ulterioare, pentru $\omega > 0$, $G(\omega) \stackrel{\substack{\text{Obs. 9.1.5} \\ g \text{ pară}}}{=} G(-\omega) \stackrel{\omega \geq 0}{=} \frac{\pi e^{-\omega} \cdot (\omega + 1)}{2} + 0j$.

În plus, $G(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(t^2+1)^2} dt = \frac{1}{2}\pi$.

$$\text{Deci } G(\omega) = \begin{cases} \frac{\pi e^{\omega} \cdot (-\omega + 1)}{2} + 0j, & \omega < 0 \\ \frac{1}{2}\pi + 0j, & \omega = 0 \\ \frac{\pi e^{-\omega} \cdot (\omega + 1)}{2} + 0j, & \omega > 0 \end{cases} \Rightarrow G_c(\omega) = \text{Re}(G(\omega)) = \begin{cases} \frac{\pi e^{\omega} \cdot (-\omega + 1)}{2}, & \omega < 0 \\ \frac{1}{2}\pi, & \omega = 0 \\ \frac{\pi e^{-\omega} \cdot (\omega + 1)}{2}, & \omega > 0 \end{cases}.$$



Se observă că semnalul g este real și par (grafic simetric față de axa verticală) și spectrul G este real și par

Teorema 9.1.2 (de liniaritate). Operatorul Fourier este liniar, adică $\forall g, h \in L^1(\mathbb{R}), \forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}$

are loc

$$\mathcal{F}\{\alpha g(t) + \beta h(t)\}(\omega) = \alpha \mathcal{F}\{g(t)\}(\omega) + \beta \mathcal{F}\{h(t)\}(\omega), \forall \omega \in \mathbb{R}$$

Teorema 9.1.3 (spectrul semnalului conjugat). Dacă $g \in L^1(\mathbb{R})$ cu $G(\omega) = \mathcal{F}\{g(t)\}(\omega)$, atunci

$$\mathcal{F}\{\bar{g}(t)\}(\omega) = \overline{G(-\omega)}, \forall \omega \in \mathbb{R}$$

(spectrul conjugatului este simetricul conjugatului spectrului)

Demonstrație. $\forall \omega \in \mathbb{R}$,

$$\mathcal{F}\{\bar{g}(t)\}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{g}(t) e^{-j\omega t} dt = \overline{\int_{-\infty}^{+\infty} g(t) e^{j\omega t} dt} = \overline{G(-\omega)}.$$

Teorema 9.1.4 (spectrul semnalului simetric, reflectarea în timp). Dacă $g \in L^1(\mathbb{R})$ cu $G(\omega) = \mathcal{F}\{g(t)\}(\omega)$, atunci

$$\mathcal{F}\{g(-t)\}(\omega) = G(-\omega), \forall \omega \in \mathbb{R}$$

(spectrul simetricului este simetricul spectrului)

Demonstrație. $\forall \omega \in \mathbb{R}$,

$$\mathcal{F}\{g(-t)\}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(-t) e^{-j\omega t} dt \stackrel{t=-s}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} g(s) e^{j\omega s} ds = \int_{-\infty}^{+\infty} g(s) e^{j\omega t} dt = G(-\omega).$$

Observația 9.1.5. a) Din Teorema de liniaritate și Teoremele 9.1.3 și 9.1.4 se observă că:

Dacă $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g \in L^1(\mathbb{R})$ este un semnal real și par, atunci spectrul G este real și par.

Într-adevăr, $\bar{g}(t) = g(t) = g(-t) \Rightarrow \overline{G(-\omega)} = G(\omega) = G(-\omega)$.

Dacă $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g \in L^1(\mathbb{R})$ este un semnal real și impar, atunci spectrul G este pur imagină și impar.

Într-adevăr, $\bar{g}(t) = g(t) = -g(-t) \Rightarrow \overline{G(-\omega)} = G(\omega) = -G(-\omega)$.

b) Dacă $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g \in L^1(\mathbb{R})$, atunci

$$G_c(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) \cos(\omega t) dt \in \mathbb{R} \text{ și } G_s(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) \sin(\omega t) dt \in \mathbb{R}$$

definesc $G(\omega) = G_c(\omega) - j G_s(\omega) \Rightarrow G(-\omega) = G_c(\omega) + j G_s(\omega) = \overline{G(\omega)}$,

deci frecvențele negative dau o informație redundantă și de aceea sunt fizic ignorate.

c) Dacă $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g \in L^1(\mathbb{R})$, atunci partea reală și modulul spectrului sunt funcții pare, iar partea imagină și faza spectrului sunt funcții impare.

Într-adevăr, fie $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g \in L^1(\mathbb{R})$, cu

$G(\omega) = \text{Re}(G(\omega)) + j \text{Im}(G(\omega))$ sau

$G(\omega) = A(\omega) \cdot e^{j\Phi(\omega)}$, unde $A(\omega) = |G(\omega)|$, $\Phi(\omega) = \arg G(\omega)$.

Atunci $\bar{g}(t) = g(t) \Rightarrow \overline{G(-\omega)} = G(\omega) \Leftrightarrow$

$$\bullet \text{Re}(G(-\omega)) - j \text{Im}(G(-\omega)) = \text{Re}(G(\omega)) + j \text{Im}(G(\omega)) \Leftrightarrow \begin{cases} \text{Re}(G(-\omega)) = \text{Re}(G(\omega)) \\ -\text{Im}(G(-\omega)) = \text{Im}(G(\omega)) \end{cases}$$

$$\bullet \overline{A(-\omega) \cdot e^{j\Phi(-\omega)}} = A(\omega) e^{j\Phi(\omega)} \Leftrightarrow A(-\omega) \cdot e^{-j\Phi(-\omega)} = A(\omega) e^{j\Phi(\omega)} \Leftrightarrow \begin{cases} A(-\omega) = A(\omega) \\ -\Phi(-\omega) = \Phi(\omega) \end{cases}$$

Teorema 9.1.5 (a asemănării, comportarea la omotetie, scalarea variabilei timp). Fie $g \in L^1(\mathbb{R})$ cu $G(\omega) = \mathcal{F}\{g(t)\}(\omega)$. Atunci, $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \alpha > 0$.

$$\mathcal{F}\{g(\alpha t)\}(\omega) = \frac{1}{\alpha} G\left(\frac{\omega}{\alpha}\right) \left(\text{pentru } \alpha \in \mathbb{R}^* \frac{1}{|\alpha|} G\left(\frac{\omega}{\alpha}\right) \right), \forall \omega \in \mathbb{R}.$$

Demonstrație. $\forall \omega \in \mathbb{R}, \alpha > 0$,

$$\mathcal{F}\{g(\alpha t)\}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(\alpha t) e^{-j\omega t} dt \stackrel{\alpha t=s}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} g(s) e^{-j\frac{\omega}{\alpha}s} \frac{1}{\alpha} ds = \frac{1}{\alpha} G\left(\frac{\omega}{\alpha}\right).$$

Observația 9.1.6. Rezolvarea Exercițiului 1, d) se putea face folosind Teorema 2 și rezultatul de la 1, c) :

$$\mathcal{F}\{g(t)\}(\omega) \stackrel{1,c)}{=} \frac{1-j\omega}{1^2+\omega^2} \Rightarrow$$

$$\mathcal{F}\{g_d(t)\}(\omega) = \mathcal{F}\{g(3t)\}(\omega) = \frac{1}{|3|} G\left(\frac{\omega}{3}\right) = \frac{1-j\frac{\omega}{3}}{1^2+\left(\frac{\omega}{3}\right)^2} = \frac{3-j\omega}{3^2+\omega^2}.$$

Exemplul 9.1.3. Utilizând Teorema de scalare a timpului, să se determine transformata Fourier pentru $g_\tau(2t)$ și $g_\tau(\frac{1}{2}t)$, unde g_τ este semnalul rectangular

$$g_\tau : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g_\tau(t) = \begin{cases} 1, & \text{dacă } |t| \leq \tau \\ 0, & \text{dacă } |t| > \tau, \end{cases} \quad \tau > 0 \text{ este dat.}$$

Rezolvare. De precizat că

$$g_\tau : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g_\tau(2t) = \begin{cases} 1, & \text{dacă } |2t| \leq \tau \\ 0, & \text{dacă } |2t| > \tau \end{cases} = g_{\frac{\tau}{2}}(t).$$

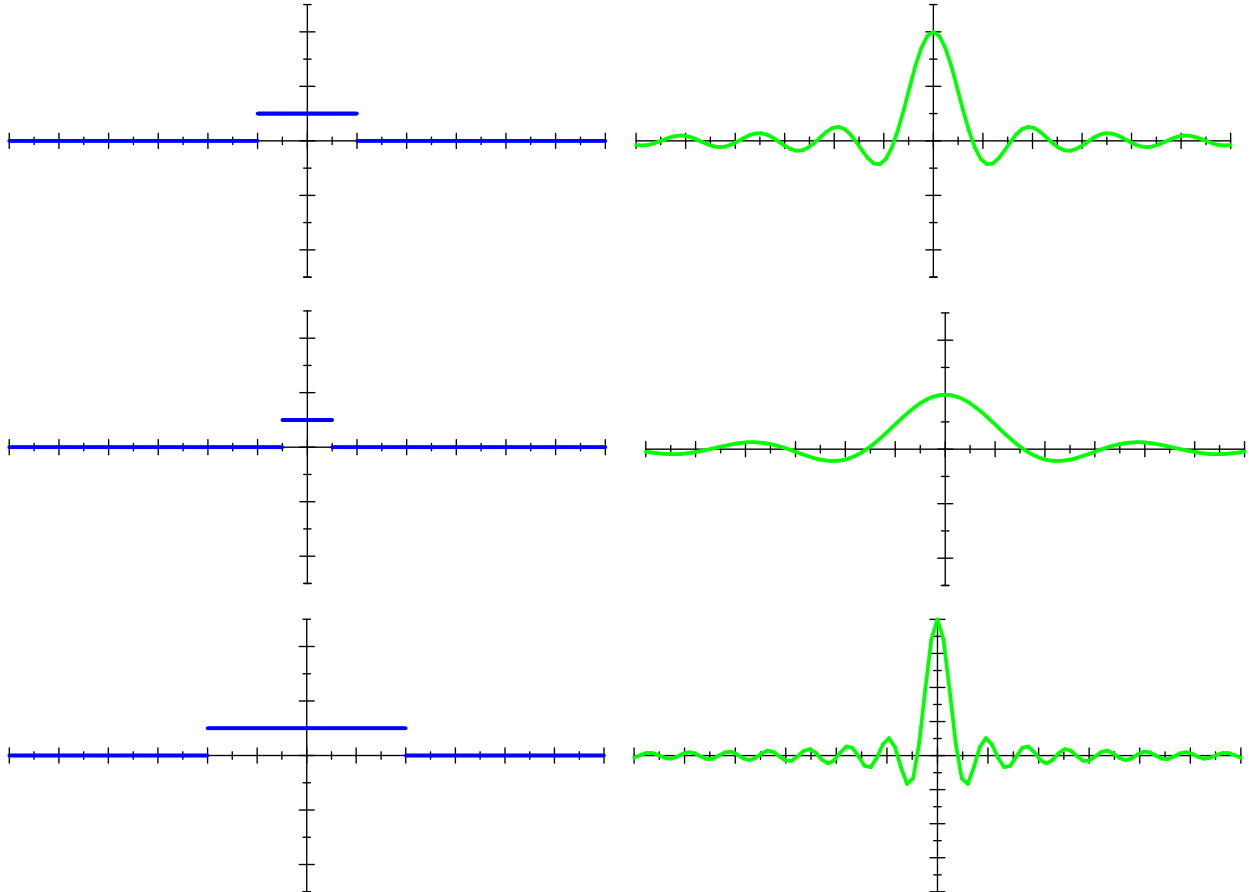
$$g_\tau : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g_\tau\left(\frac{1}{2}t\right) = \begin{cases} 1, & \text{dacă } \left|\frac{1}{2}t\right| \leq \tau \\ 0, & \text{dacă } \left|\frac{1}{2}t\right| > \tau \end{cases} = g_{2\tau}(t).$$

S-a arătat, în Exemplul 9.1.1 că $\mathcal{F}\{g_\tau(t)\}(\omega) = 2 \frac{\sin(\omega\tau)}{\omega}$.

Atunci, conform Teoremei de scalare a timpului,

$$\mathcal{F}\{g_\tau(2t)\}(\omega) = \frac{1}{2} 2 \frac{\sin\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)}{\frac{\omega}{2}} = 2 \frac{\sin\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)}{\omega} \quad (\text{comprimarea în timp} \Rightarrow \text{expandare în frecvență}) \text{ și}$$

$$\mathcal{F}\{g_\tau\left(\frac{1}{2}t\right)\}(\omega) = 2 \cdot 2 \frac{\sin(2\omega\tau)}{2\omega} = 2 \frac{\sin(2\omega\tau)}{\omega} \quad (\text{expandare în timp} \Rightarrow \text{comprimare în frecvență}).$$



Teorema 9.1.6 (a întârzierii-deplasării în timp, comportarea la translație). Fie $g \in L^1(\mathbb{R})$ cu $G(\omega) = \mathcal{F}\{g(t)\}(\omega)$. Atunci, $\forall t_0 \in \mathbb{R}, t_0 > 0$,

$$\boxed{\mathcal{F}\{g(t - t_0)\}(\omega) = e^{-j t_0 \omega} G(\omega)}.$$

(întârzierea-deplasarea în timp a unui semnal cu $t_0 \Rightarrow$ multiplicarea spectrului cu $e^{-j t_0 \omega}$)

Demonstrație. $\forall \omega \in \mathbb{R}, \forall t_0 \in \mathbb{R}, t_0 > 0$,

$$\mathcal{F}\{g(t - t_0)\}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t - t_0) e^{-j \omega t} dt \stackrel{t-t_0=s}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} g(s) e^{-j \omega(s+t_0)} ds = e^{-j t_0 \omega} G(\omega).$$

Teorema 9.1.7. (a întârzierii-deplasării în frecvență, comportarea la modulație). Fie $g \in L^1(\mathbb{R})$ cu $G(\omega) = \mathcal{F}\{g(t)\}(\omega)$. Atunci, $\forall \omega_0 \in \mathbb{R}, \omega_0 > 0$,

$$\boxed{\mathcal{F}\{e^{j \omega_0 t} g(t)\}(\omega) = G(\omega - \omega_0)}.$$

(modulare în timp-multiplicare a unui semnal cu o armonică $e^{j \omega_0 t} \Rightarrow$ întârziere cu ω_0 -deplasare în frecvență)

Demonstrație. $\forall \omega \in \mathbb{R}, \forall \omega_0 \in \mathbb{R}, \omega_0 > 0$,

$$\mathcal{F}\{e^{j \omega_0 t} g(t)\}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j \omega_0 t} g(t) e^{-j \omega t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) e^{-j(\omega - \omega_0)t} dt = G(\omega - \omega_0).$$

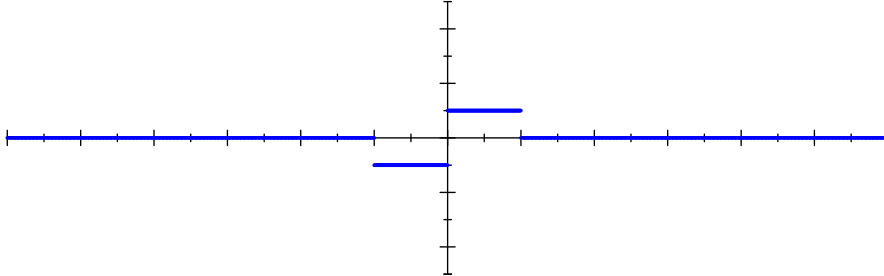
Exemplul 9.1.4. Să se determine transformata Fourier pentru:

$$g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(t) = g_{\frac{\tau}{2}}\left(t - \frac{\tau}{2}\right) - g_{\frac{\tau}{2}}\left(t + \frac{\tau}{2}\right), \text{ unde}$$

$$g_{\tau}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g_{\tau}(t) = \begin{cases} 1, & \text{dacă } |t| \leq \tau \\ 0, & \text{dacă } |t| > \tau, \end{cases} \quad \tau > 0 \text{ este semnalul rectangular.}$$

Rezolvare. Se observă că:

$$g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(t) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } t \in]-\infty, -\tau[\\ -1, & \text{dacă } t \in [-\tau, 0[\\ 0, & \text{dacă } t = 0 \\ 1, & \text{dacă } t \in]0, \tau] \\ 0, & \text{dacă } t \in]\tau, +\infty[\end{cases} \quad \text{—funcție impară.}$$



• Se observă că $g \in L^1(\mathbb{R})$, din teoremele anterioare.

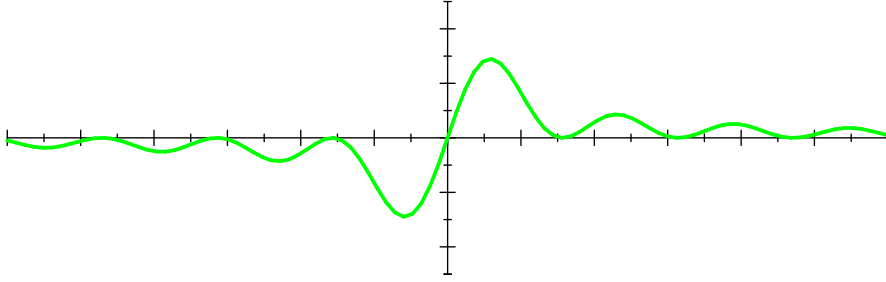
• Se calculează, pe baza teoremelor anterioare

$$G(\omega) = \frac{2}{\omega} \left(\sin\left(\frac{\omega\tau}{2}\right) \right) \left(e^{-j \frac{\omega\tau}{2}} - e^{j \frac{\omega\tau}{2}} \right) = \frac{2}{\omega} \left(\sin\left(\frac{\omega\tau}{2}\right) \right) (-2j) \left(\sin\left(\frac{\omega\tau}{2}\right) \right) = j \frac{-4}{\omega} \left(\sin\left(\frac{\omega\tau}{2}\right) \right)^2.$$

Deci $G: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}, G(\omega) = j \frac{2}{\omega} (\cos(\omega\tau) - 1)$ - funcție pur imaginară și $\text{Im } G$ este impară.

Se scrie și că $\mathcal{F}\{g(t)\}(\omega) = j \frac{2}{\omega} (\cos(\omega\tau) - 1)$.

Mai mult, pentru această transformată, care are cu valori pur imaginare, se poate reprezenta $-\text{Im } G(\omega) = G_s(\omega)$



Deoarece semnalul g este un semnal real și impar (grafic simetric față de origine), atunci spectrul G este pur imaginar și impar și $-\operatorname{Im} G(\omega) = G_s(\omega)$.

Teorema 9.1.8 (continuitatea operatorului Fourier). Dacă $g_n \rightarrow g$ în $L^1(\mathbb{R})$, adică $\|g_n - g\|_{L^1(\mathbb{R})} \rightarrow 0$ atunci

$$\lim_{n \rightarrow \infty} G_n(\omega) = G(\omega), \forall \omega \in \mathbb{R}.$$

Teorema 9.1.9 (spectrul semnalului derivat). Fie $n \in \mathbb{N}$ și $g \in \mathcal{C}^n(\mathbb{R})$ a.î.

$$g^{(k)} \in L^1(\mathbb{R}) \text{ cu } \lim_{|t| \rightarrow \infty} g^{(k)}(t) = 0, \forall 0 \leq k \leq n.$$

Atunci $\mathcal{F}\{g^{(k)}(t)\}(\omega) = (j\omega)^k \cdot \mathcal{F}\{g(t)\}(\omega), \forall \omega \in \mathbb{R}, \forall 0 \leq k \leq n$

(derivarea de k ori în domeniul "timp" $\Rightarrow$ multiplicare cu $(j\omega)^k$ în domeniul "frecvență").

În particular

$$\mathcal{F}\{g'(t)\}(\omega) = j\omega \cdot \mathcal{F}\{g(t)\}(\omega), \forall \omega \in \mathbb{R} \text{ și } \mathcal{F}\{g''(t)\}(\omega) = -\omega^2 \cdot \mathcal{F}\{g(t)\}(\omega), \forall \omega \in \mathbb{R}$$

Teorema 9.1.10 (derivarea spectrului unui semnal). Fie $g \in L^1(\mathbb{R})$ a.î.

$$t^k g \in L^1(\mathbb{R}), \forall 0 \leq k \leq n.$$

Atunci $G \in \mathcal{C}^n(\mathbb{R}; \mathbb{C})$ și

$$\frac{d^k}{d\omega^k} \mathcal{F}\{g(t)\}(\omega) = \mathcal{F}\{(-jt)^k \cdot g(t)\}(\omega), \forall \omega \in \mathbb{R}$$

(derivarea de k ori a spectrului, în domeniul "frecvență" $\Rightarrow$ multiplicare cu $(-jt)^k$ în domeniul "timp").

$$\frac{d}{d\omega} \mathcal{F}\{g(t)\}(\omega) = \mathcal{F}\{-jt \cdot g(t)\}(\omega) = -j \cdot \mathcal{F}\{t \cdot g(t)\}(\omega), \forall \omega \in \mathbb{R} \text{ și}$$

$$\frac{d^2}{d\omega^2} \mathcal{F}\{g(t)\}(\omega) = \mathcal{F}\{(-jt)^2 \cdot g(t)\}(\omega) = -\mathcal{F}\{t^2 \cdot g(t)\}(\omega), \forall \omega \in \mathbb{R}$$

Exemplul 9.1.4. Utilizând Teorema 9.1.9, să se determine $\mathcal{F}\{-jt \cdot e^{-a|t|}\}(\omega)$, unde $a > 0$.

Rezolvare. A se vedea Seminar.

Observația 9.1.7. Rezolvarea Exemplului 2, b) se putea face folosind Teoremele de liniaritate și de derivare. A se vedea Seminar.

Teorema 9.1.11. (spectrul semnalului integrat). Fie $g \in L^1(\mathbb{R})$ a.î. g să fie continuă. Atunci

$$\mathcal{F}\left\{\left(\int_{-\infty}^t g(t) dt\right)\right\}(\omega) = \frac{\mathcal{F}\{g(t)\}(\omega)}{j\omega}, \forall \omega \in \mathbb{R}$$

Teorema 9.1.12 (integrarea spectrului unui semnal). ...

Definiția 9.1.4. Fie $g, h \in L^1(\mathbb{R})$. Se numește *produs de convoluție a funcțiilor din $L^1(\mathbb{R})$* g și h , funcția $g * h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ (sau $g * h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$), definită prin

$$(g * h)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(\tau) h(t - \tau) d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) g(t - \tau) d\tau.$$

De menționat că, dacă g, h sunt originale Laplace, atunci

$$(g * h)(t) = \eta(t) \left(\int_0^t g(\tau) h(t - \tau) d\tau \right) = \eta(t) \left(\int_0^t h(\tau) g(t - \tau) d\tau \right),$$

unde η este funcția Heaviside.

Teorema 9.1.13 (spectrul produsului de convoluție a două semnale). Fie $g, h \in L^1(\mathbb{R})$ cu transformatele Fourier $G(\omega) = \mathcal{F}\{g(t)\}(\omega)$, respectiv $H(\omega) = \mathcal{F}\{h(t)\}(\omega)$. Atunci $g * h \in L^1(\mathbb{R})$ și

$$\mathcal{F}\{g * h\}(\omega) = G(\omega) \cdot H(\omega), \forall \omega \in \mathbb{R}.$$

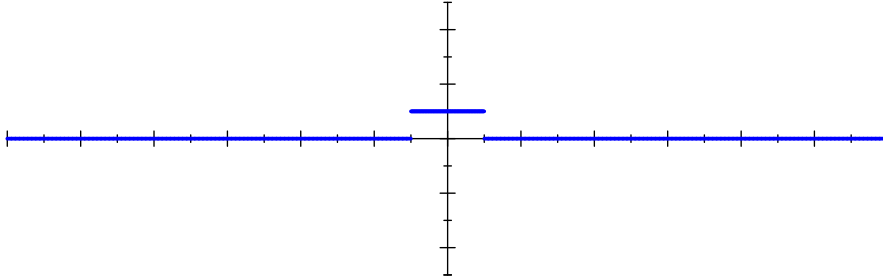
(convoluția în timp $\Rightarrow$ produs în frecvență).

Demonstrație. $\forall \omega \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{g * h\}(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} (g * h)(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} g(\tau) h(t - \tau) d\tau \right) e^{-j\omega t} dt \stackrel{\text{Fubini}}{=} \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} h(t - \tau) e^{-j\omega t} dt \right) g(\tau) d\tau \stackrel{t-\tau=s}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} h(s) e^{-j\omega(s+\tau)} ds \right) g(\tau) d\tau = \\ &= \left(\int_{-\infty}^{+\infty} g(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \right) \cdot \left(\int_{-\infty}^{+\infty} h(s) e^{-j\omega s} ds \right) = \mathcal{F}\{g(t)\}(\omega) \cdot \mathcal{F}\{h(t)\}(\omega). \end{aligned}$$

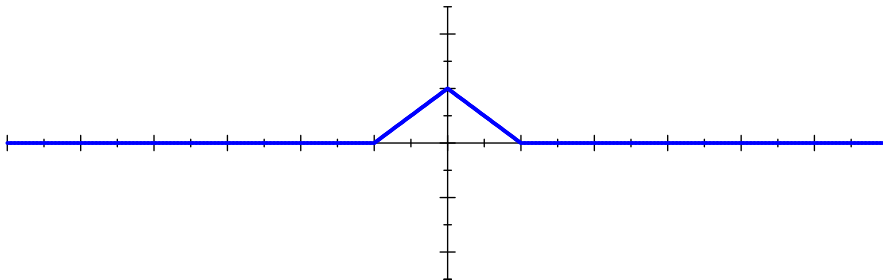
Observația 9.1.8. Produsul de convoluție are proprietăți de regularizare.

Fie semnalul rectangular cu $\tau = 1$, $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(t) = \begin{cases} 1, & \text{dacă } |t| \leq 1 \\ 0, & \text{dacă } |t| > 1 \end{cases}$.



Produsul de convoluție a semnalului rectangular cu el însuși este unul triunghiular

$$(g * g)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(\tau) g(t - \tau) d\tau = \begin{cases} 0 & \text{dacă } t \in]-\infty, -2[\\ 2 + t, & \text{dacă } t \in [-2, 0] \\ 2 - t, & \text{dacă } t \in]0, 2] \\ 0 & \text{dacă } t \in]2, +\infty[\end{cases}$$



Se poate scrie chiar că $\left(g_{\frac{\tau}{2}} * g_{\frac{\tau}{2}}\right)(t) = \tau \left(1 - \frac{|t|}{\tau}\right) g_{\frac{\tau}{2}}(t), \forall t \in \mathbb{R}$.

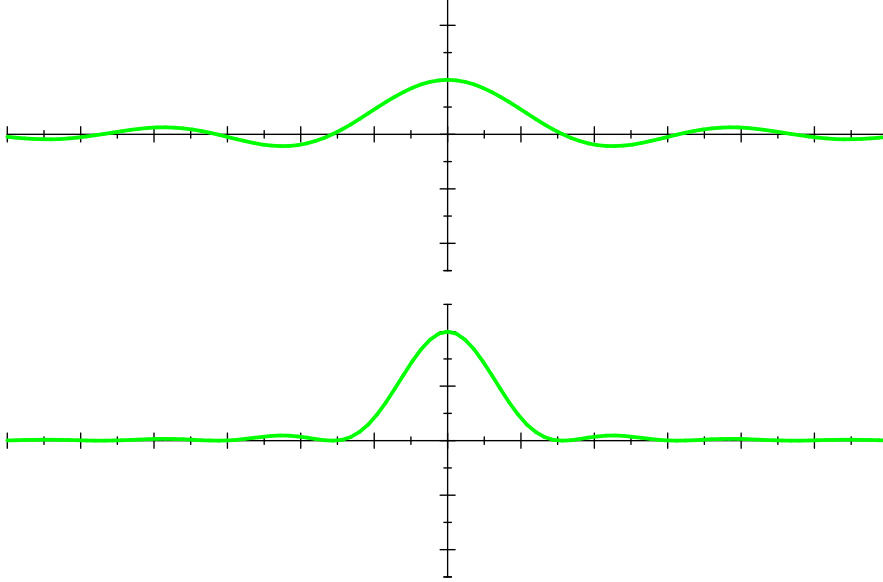
Se observă că g din exemplul anterior este discontinuă, iar $g * g$ este continuă. Mai mult, se

poate arăta că $g * (g * g)$ este restricția unui polinom de grad 2, că $g * \underbrace{(g * \dots * g)}_{n-1 \text{ ori}}$ este restricția unui polinom de grad $n - 1$, iar la limită, pentru $n \rightarrow \infty$, se obține o funcție cu un grafic reprezentabil de tip clopotul lui Gauss.

Transformatele Fourier pentru cele două semnale reprezentate vor fi

$$\mathcal{F}\{g(t)\}(\omega) = \frac{2}{\omega} \sin \omega \Rightarrow \mathcal{F}\{(g * g)(t)\}(\omega) = \left(\frac{2}{\omega} \sin \omega\right)^2.$$

Mai mult, pentru aceste transformate, se pot reprezenta:



Observația 9.1.9. Operația de convoluție nu are element neutru în clasa $L^1(\mathbb{R})$ (va avea în clasa distribuțiilor, la MS).

Exemplul 9.1.5. Utilizând Teorema 9.1.11, să se determine $\mathcal{F}\{g * h\}(\omega)$, unde

$$g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(t) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } t < 0 \\ e^{-t}, & \text{dacă } t \geq 0, \end{cases} \text{ și } h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, h(t) = e^{-t^2}.$$

Rezolvare. La Exemplul 9.1.2 s-a arătat că $g, h \in L^1(\mathbb{R})$ și

$$\mathcal{F}\{g(t)\}(\omega) = G(\omega) = \frac{1 - j\omega}{1^2 + \omega^2}; \mathcal{F}\{h(t)\}(\omega) = H(\omega) = \mathcal{F}\{e^{-t^2}\}(\omega) \stackrel{a=1}{=} \sqrt{\pi} \cdot e^{-\frac{\omega^2}{4}}.$$

Atunci, conform Teoremei 9.1.11, se obține:

$$\mathcal{F}\{g * h\}(\omega) = G(\omega) \cdot H(\omega) = \frac{1 - j\omega}{1^2 + \omega^2} \cdot \sqrt{\pi} \cdot e^{-\frac{\omega^2}{4}}, \forall \omega \in \mathbb{R}.$$

Comentariu. Determinarea transformatei precedente se putea face și direct, cu definiția, dar greoi.

Definiția 9.1.5. Fie $g \in L^1(\mathbb{R})$. Dacă g are valori reale, se numește *autocorelația funcției* g funcția

$$\Lambda : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}, \Lambda(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(\tau) g(t + \tau) d\tau.$$

Teorema 9.1.14. Fie $g \in L^1(\mathbb{R})$. Dacă g are valori reale,

$$\mathcal{F}\{\Lambda(t)\}(\omega) = |\mathcal{F}\{g(t)\}(\omega)|^2, \forall \omega \in \mathbb{R}.$$

Demonstrație. $\forall \omega \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{\Lambda(t)\}(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \Lambda(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} g(\tau) g(t + \tau) d\tau \right) e^{-j\omega t} dt \stackrel{\text{Fubini}}{=} \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} g(t + \tau) e^{-j\omega t} dt \right) g(\tau) d\tau \stackrel{t+\tau=s}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} g(s) e^{-j\omega(s-\tau)} ds \right) g(\tau) d\tau = \end{aligned}$$

$$= \left(\int_{-\infty}^{+\infty} g(\tau) e^{+j\omega\tau} d\tau \right) \cdot \left(\int_{-\infty}^{+\infty} g(s) e^{-j\omega s} ds \right) = \overline{\mathcal{F}\{g(t)\}(\omega)} \cdot \mathcal{F}\{g(t)\}(\omega) = |\mathcal{F}\{g(t)\}(\omega)|^2.$$

Teorema 9.1.15 (inversarea transformatei Fourier). Fie $g \in L^1(\mathbb{R})$ a.î. $G \in L^1(\mathbb{R})$. Atunci are loc formula de inversare a transformatei Fourier:

$$g(t) = \mathcal{F}^{-1}\{G(\omega)\}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} G(\omega) \cdot e^{jt\omega} d\omega, \forall t \in \mathbb{R}$$

Comentariu. Dacă $\mathcal{F}\{g(t)\}(\omega) = \mathcal{F}\{h(t)\}(\omega)$, atunci $g(t) = h(t)$, a.p.t. $t \in \mathbb{R}$.

Egalitatea "aproape peste tot" înseamnă că are loc cu excepția unei mulțimi de măsură Lebesgue nulă.

Observația 9.1.10. Dacă în formula de inversare se face schimbarea de variabilă $\omega = -\eta$, atunci integrala devine

$$\int_{-\infty}^{+\infty} G(\omega) \cdot e^{jt\omega} d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} G(-\eta) \cdot e^{jt(-\eta)} d\eta,$$

sau, renotând η cu ω ,

$$\mathcal{F}^{-1}\{G(\omega)\}(t) = \frac{1}{2\pi} \mathcal{F}\{G(-\omega)\}(t) \Leftrightarrow 2\pi g(t) = \mathcal{F}\{G(-\omega)\}(t).$$

În concluzie, determinarea transformatei Fourier inverse revine tot determinarea unei transformate Fourier directe.

Observația 9.1.11. Se poate arăta că, dacă g este pară, atunci

$$g(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} G_c(\omega) \cdot \cos(t\omega) d\omega, \forall t \in \mathbb{R}.$$

Se poate arăta că, dacă g este impară, atunci

$$g(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} G_s(\omega) \cdot \sin(t\omega) d\omega, \forall t \in \mathbb{R}.$$

Comentariu. a) Are loc o teoremă ce oferă **spectrul produsului a două semnale**. Fie $g, h \in L^1(\mathbb{R})$ cu transformatele Fourier $G(\omega) = \mathcal{F}\{g(t)\}(\omega)$, respectiv $H(\omega) = \mathcal{F}\{h(t)\}(\omega)$ în $L^1(\mathbb{R})$. Atunci $G * H \in L^1(\mathbb{R})$ și

$$\mathcal{F}\{g \cdot h\}(\omega) = \frac{1}{2\pi} (G * H)(\omega), \forall \omega \in \mathbb{R}.$$

b) Are loc **formula lui Parseval**. Fie g care verifică anumite ipoteze. Atunci:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |g(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |G(\omega)|^2 d\omega.$$

De menționat o teoremă de la calculul de integrale reale cu reziduuri, de la Matematici Speciale, rescrisă:

○ **T 1'.** (la MS) Fie $\mathcal{I} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(\omega)}{Q(\omega)} e^{jt\omega} d\omega$, $a = t > 0$, unde

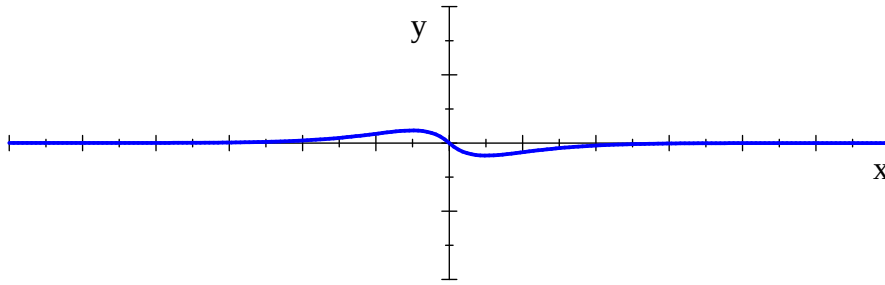
$P, Q \in \mathbb{R}[\omega]$, $\text{grad } Q \geq \text{grad } P + 1$, $Q(\omega) \neq 0, \forall \omega \in \mathbb{R}$. Atunci:

$$\mathcal{I} = 2\pi j \sum_{k=1}^n \text{rez } f(z_k), \text{ unde } f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} e^{jtz}, \text{ iar } z_k \text{ sunt acei poli cu } \text{Im } z_k > 0.$$

Exemplul 9.1.6. Să se rezolve ecuația integrală

$$(*) \int_{-\infty}^{+\infty} f(\omega) e^{jt\omega} d\omega = e^{-a|t|}, t \in \mathbb{R}, \text{ unde } a > 0 \text{ este dat.}$$

Rezolvare. A se vedea Seminar



○ **Exemplul 9.1.8.** (la MS) Să se rezolve ecuația integrală

$$(*) \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) e^{-j\omega t} dt = \frac{\omega}{j(\omega^2 + a^2)(\omega^2 + b^2)}, \omega \in \mathbb{R}, \text{ unde } a > 0 \text{ și } b > 0 \text{ sunt date.}$$

Caz particular: $(*) \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) e^{-jyt} dt = \frac{y}{j(y^2 + 1)(y^2 + 4)}, y \in \mathbb{R}$ -temă.

Rezolvare. A se vedea Seminar.