CURS NR. 2
EDCO, AIA

1.ECUAŢII DIFERENŢIALE REZOLVABILE PRIN CUADRATURI

Se prezintă câteva tipuri de ecuaţii diferenţiale ordinare de ordinul 1, a căror soluţie generală poate fi determinată prin intermediul unui număr finit de operaţii de integrare (cuadrare), precizate sub forma unui algoritm de rezolvare. Despre istoric şi despre aplicaţiile acestora s-a menţionat în cursul anterior.

1.2. Ecuaţii diferenţiale cu variabile separabile

Forma generală a unei ecuaţii diferenţiale cu variabile separabile:

$\boxed{x'(t) = f(t)\, g(x(t))}$ sau (1)

$$\boxed{\frac{dx}{dt} = f(t)\, g(x),} \tag{1'}$$

unde $f : \mathbb{I} \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g : \mathbb{J} \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sunt două funcţii continue cu $g(z) \neq 0$, $\forall z \in \mathbb{J}$.
Rezolvare. Pentru $t \in \mathbb{I}_x \subseteq \mathbb{I}$, variabilă independentă din domeniul de definiţie a soluţiei, se caută $x = x(t)$ funcţie necunoscută de clasă $\mathcal{C}^1$, soluţie pentru ecuaţiile (1) sau (1′).
<u>mod detaliat.</u> Utilizând ipotezele,

$$(1) \Rightarrow \frac{x'(t)}{g(x(t))} = f(t), \forall t \in \mathbb{I}_x \Rightarrow \int \frac{x'(t)}{g(x(t))} dt = \int f(t)\, dt, \forall t \in \mathbb{I}_x \Rightarrow$$
$$x(t) = G^{-1}\left(\int f(t)\, dt + c\right), \forall t \in \mathbb{I}_x, c \in \mathbb{I}_c \subseteq \mathbb{R}.$$

Ultima relaţie reprezintă soluţia generală a ecuaţiilor (1) sau (1′) sub formă explicită. Domeniul de definiţie a soluţiei, $\mathbb{I}_x$, depinde de constanta c (pentru fiecare c se obţine o soluţie cu un anumit domeniu de definiţie şi o anumită lege de asociere).
<u>mod prescurtat.</u> Subînţelegând argumentele,

$$(1') \Rightarrow \frac{dx}{g(x)} = f(t)\, dt, \forall t \in \mathbb{I}_x \Big| \int_{EVS} \Rightarrow \int \frac{1}{g(x)} dx = \int f(t)\, dt, \forall t \in \mathbb{I}_x \Rightarrow$$
$$x(t) = G^{-1}\left(\int f(t)\, dt + c\right), \forall t \in \mathbb{I}_x, c \in \mathbb{I}_c \subseteq \mathbb{R}.$$

Comentariu. a) Funcţia soluţie $x : \mathbb{I}_x \subseteq \mathbb{I} \to \mathbb{R}$ ia valori în $\mathbb{J}$. Domeniul de definiţie este, de fapt, un interval cu interior nevid inclus în $\mathbb{I}_x$.
b) G este definită prin $G(u) = \displaystyle\int \frac{du}{g(u)}$. Deoarce g nu se anulează pe $\mathbb{J}$ şi este continuă, păstrează semn constant pe $\mathbb{J}$. Se poate presupune că $g(z) > 0, \forall z \in \mathbb{J}$, schimbând eventual semnul funcţiei f. Atunci G este bine definită şi strict crescătoare pe $\mathbb{J}$, deci inversabilă. De aici rezultatul.
c) Rezolvarea se poate face integrând Riemann, pe un interval $[t_0, t]$, cu $t_0 \in \mathbb{I}_x \subseteq \mathbb{I}$.
d) Soluţia nu este unică. Oricare două soluţii diferă printr-o constantă.

Exemplul 5. Să se determine soluţiile generale ale următoarelor ecuaţii diferenţiale cu variabile separabile:
a) $tx'(t) = x^3(t) + x(t), t \in \mathbb{I}$.
Rezolvare. a) Fie $(*)\, tx'(t) = x^3(t) + x(t), t \in \mathbb{I}$.
Pentru $t \in \mathbb{I}_x \subseteq \mathbb{I}$, variabilă independentă din domeniul de definiţie a soluţiei, se caută $x = x(t)$ funcţie necunoscută, soluţie pentru ecuaţia $(*)$.
•Se observă că

$x:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, x(t)=0$ este soluţie singulară pentru ecuaţia $(*)$.

•Se caută şi alte soluţii decât cea singulară.

mod detaliat. $(*)\Rightarrow \dfrac{x'(t)}{x^3(t)+x(t)}=\dfrac{1}{t}, \forall t\in\mathbb{I}_x$ a.î. $(t\neq 0$ şi $x(t)\neq 0)\Big| \int(\cdot)\,dt\Rightarrow$

$$\int\frac{x'(t)}{x^3(t)+x(t)}dt=\int\frac{1}{t}dt, \forall t\in\mathbb{I}_x \text{ a.î. } (t\neq 0, x(t)\neq 0)\Rightarrow$$

$$\int\left(\frac{x'(t)}{x(t)}-\frac{x(t)\,x'(t)}{x^2(t)+1}\right)dt=\int\frac{1}{t}dt, \forall t\in\mathbb{I}_x \text{ a.î. } (t\neq 0, x(t)\neq 0)\Rightarrow$$

$$\ln|x(t)|-\tfrac{1}{2}\ln\left|x^2(t)+1\right|=\ln|t|+\ln k, \forall t\in\mathbb{I}_x \text{ a.î. } (t\neq 0, x(t)\neq 0) \text{ şi } k>0\Rightarrow$$

$$\frac{\left|x^2(t)\right|}{\left|x^2(t)+1\right|}=k^2|t|^2, \forall t\in\mathbb{I}_x \text{ a.î. } (t\neq 0, x(t)\neq 0) \text{ şi } k>0\Rightarrow$$

$$(**)\ \frac{x^2}{x^2+1}=ct^2, \forall t\in\mathbb{I}_x \text{ a.î. } (t\neq 0, x(t)\neq 0) \text{ şi } c\in\mathbb{R}_+^*.$$

Ultima relaţie reprezintă soluţia generală a ecuaţiei $(*)$ sub formă implicită. Soluţia generală a ecuaţiei $(*)$ este dată, sub formă explicită, pentru fiecare $c\in\mathbb{R}_+^*$, de următoarele două familii de funcţii

$$x:\mathbb{I}_x^1\to\mathbb{R}, x(t)=\sqrt{\frac{ct^2}{1-ct^2}};\ x:\mathbb{I}_x^2\to\mathbb{R}, x(t)=-\sqrt{\frac{ct^2}{1-ct^2}},$$

unde domeniul de definiţie a soluţiei, $\mathbb{I}_x$, depinde de constanta c. Pentru fiecare $c\in\mathbb{R}_+^*$,

$$\mathbb{I}_x^1=\mathbb{I}_x^2\subseteq\left\{t\in\mathbb{R};\ \frac{ct^2}{1-ct^2}\geq 0, t\neq 0 \text{ şi } \frac{ct^2}{1-ct^2}\neq 0\right\}.$$

mod prescurtat. $(*)\Rightarrow \dfrac{dx}{x^3+x}=\dfrac{1}{t}dt, \forall t\in\mathbb{I}_x$ a.î. $(t\neq 0$ şi $x(t)\neq 0)\Big| \int_{EVS}\Rightarrow$

$$\int\frac{1}{x^3+x}dx=\int\frac{1}{t}dt, \forall t\in\mathbb{I}_x \text{ a.î. } (t\neq 0, x(t)\neq 0)\Rightarrow$$

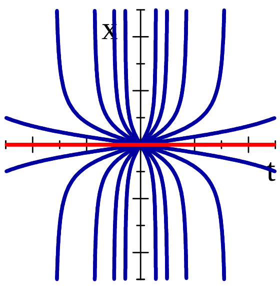
$$\int\left(\frac{1}{x}-\frac{x}{x^2+1}\right)dx=\int\frac{1}{t}dt, \forall t\in\mathbb{I}_x \text{ a.î. } (t\neq 0, x(t)\neq 0)\Rightarrow$$

$$\ln|x|-\tfrac{1}{2}\ln\left|x^2+1\right|=\ln|t|+\ln k, \forall t\in\mathbb{I}_x \text{ a.î. } (t\neq 0, x(t)\neq 0) \text{ şi } k>0\Rightarrow$$

$$\frac{|x|^2}{\left|x^2+1\right|}=k^2|t|^2, \forall t\in\mathbb{I}_x \text{ a.î. } (t\neq 0, x(t)\neq 0) \text{ şi } k>0\Rightarrow$$

$$\boxed{(**)\ \frac{x^2}{x^2+1}=ct^2, \forall t\in\mathbb{I}_x \text{ a.î. } (t\neq 0, x(t)\neq 0) \text{ şi } c\in\mathbb{R}_+^*.}$$

Ultima relaţie reprezintă soluţia generală a ecuaţiei $(*)$ sub formă implicită.



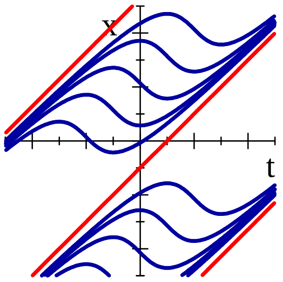
1.3. Ecuaţii diferenţiale reductibile la ecuaţii cu variabile separabile; ecuaţii diferenţiale omogene şi reductibile la ecuaţii diferenţiale omogene

1.3.1. Forma generală:

$$\boxed{x'(t) = f(at + bx(t) + c)} \text{ sau} \tag{2}$$
$$\boxed{\frac{dx}{dt} = f(at + bx + c)} \tag{2'}$$
unde $f : \mathbb{I} \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este funcţie continuă, $a, b, c \in \mathbb{R}$, cu $a + bf(z) \neq 0$, $\forall z \in \mathbb{I}$.
Rezolvare. Pentru $t \in \mathbb{I}_x \subseteq \mathbb{I}$, variabilă independentă din domeniul de definiţie a soluţiei, se caută $x(t) =?$, x funcţie necunoscută de clasă $\mathcal{C}^1$, soluţie pentru ecuaţiile (2) sau (2′). Se face schimbarea de funcţie necunoscută
$$\begin{cases} y(t) = at + bx(t) + c, \forall t \in \mathbb{I}_x | \frac{d}{dt}(\cdot) \\ y'(t) = a + bx'(t). \end{cases} \tag{3}$$
Se înlocuieşte x şi x' din (3) în (2) sau (2′), se obţine o ecuaţie cu variabile separabile în necunoscuta $y(t)$, se rezolvă şi se revine la substituţie. Domeniul de definiţie a soluţiei, $\mathbb{I}_x$, depinde de constanta c (pentru fiecare c se obţine o soluţie cu un anumit domeniu de definiţie şi o anumită lege de asociere).

Exemplul 6. Făcând o schimbare de funcţie convenabilă, să se rezolve următoarele ecuaţii diferenţiale ordinare
a) $x'(t) = \cos(t - x(t) - 1), t \in \mathbb{I}$.
Rezolvare. a) Se determină soluţia generală a ecuaţiei
$(*)\, x'(t) = \cos(t - x(t) - 1), t \in \mathbb{I}$.
Pentru $t \in \mathbb{I}_x \subseteq D$, variabilă independentă din domeniul de definiţie a soluţiei, se caută $x(t) =?$, x funcţie necunoscută, soluţie pentru ecuaţia $(*)$.
Se face schimbarea de funcţie necunoscută
$$\begin{cases} y(t) = t - x(t) - 1, \forall t \in \mathbb{I}_x | \frac{d}{dt}(\cdot) \\ y'(t) = 1 - x'(t). \end{cases}$$
Se înlocuieşte x şi x' în $(*)$, se obţine o ecuaţie cu variabile separabile în necunoscuta $y(t)$:
$1 - y'(t) = \cos y(t), \forall t \in \mathbb{I}_x \Rightarrow$
•Se observă că, pentru fiecare $l \in \mathbb{Z}$,
$y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, y(t) = 2\pi l$,
este soluţie pentru ecuaţia cu variabile separabile în necunoscuta $y(t)$, numită soluţie singulară. Corespunzător, pentru fiecare $l \in \mathbb{Z}$,
$x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x(t) = t - 2\pi l - 1$,
este soluţie singulară pentru ecuaţia $(*)$.
•Se caută şi alte soluţii decât cele singulare.
$$\frac{y'(t)}{1 - \cos y(t)} = 1, \forall t \in \mathbb{I}_y \text{ a.î. } y(t) \notin \{2\pi l; l \in \mathbb{Z}\} \Big| \int (\cdot)\, dt \Rightarrow$$
$$\int \frac{y'(t)}{1 - \cos y(t)} dt = \int dt, \forall t \in \mathbb{I}_y \text{ a.î. } y(t) \notin \{2\pi l; l \in \mathbb{Z}\} \Rightarrow$$
$$\int \frac{y'(t)}{2\sin^2 \frac{y(t)}{2}} dt = \int dt, \forall t \in \mathbb{I}_y \text{ a.î. } y(t) \notin \{2\pi l; l \in \mathbb{Z}\} \Rightarrow$$
$$-\operatorname{ctg} \frac{y(t)}{2} = t + c, \forall t \in \mathbb{I}_y \text{ a.î. } y(t) \notin \{2\pi l; l \in \mathbb{Z}\} \text{ şi } c \in \mathbb{R}.$$
Ultima relaţie reprezintă soluţia generală a ecuaţiei cu variabile separabile în necunoscuta $y(t)$ sub formă implicită. Se revine la substituţie şi se obţine
$$(**) - \operatorname{ctg} \frac{t - x(t) - 1}{2} = t + c, \forall t \in \mathbb{I}_x \text{ a.î. } x(t) \notin \{t - 2\pi l - 1; l \in \mathbb{Z}\} \text{ şi } c \in \mathbb{R}.$$
Ultima relaţie reprezintă soluţia generală a ecuaţiei $(*)$, în necunoscuta $x(t)$, sub formă implicită. Soluţia generală a ecuaţiei $(*)$ este dată, sub formă explicită, pentru fiecare $c \in \mathbb{R}$, de

$x : \mathbb{I}_x \to \mathbb{R}, x(t) = t - 1 - 2\operatorname{arcctg}(-t - c), \forall t \in \mathbb{I}_x,$
unde domeniul de definiţie a soluţiei, $\mathbb{I}_x$, depinde de constanta c. Pentru fiecare $c \in \mathbb{R}$,
$\mathbb{I}_x \subseteq \{t \in \mathbb{R}; t - 1 - 2\operatorname{arcctg}(-t - c) \notin \{t - 2\pi l - 1; l \in \mathbb{Z}\}\}.$



1.3.2. Ecuaţii diferenţiale omogene
Forma generală:

$$\boxed{x'(t) = f\left(\frac{x(t)}{t}\right)} \text{ sau} \tag{4}$$

$$\boxed{\frac{dx}{dt} = f\left(\frac{x}{t}\right),} \tag{4'}$$

unde $f : \mathbb{I} \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este funcţie continuă cu $f(z) \neq z$, $\forall z \in \mathbb{I}$.
Rezolvare. Pentru $t \in \mathbb{I}_x \subseteq \mathbb{I}$, variabilă independentă din domeniul de definiţie a soluţiei, se caută $x(t) =?$, x funcţie necunoscută de clasă $\mathcal{C}^1$, soluţie pentru ecuaţiile (4) sau (4′). Se face schimbarea de funcţie necunoscută $u(t) = \frac{x(t)}{t}$, adică

$$\begin{cases} x(t) = tu(t), \forall t \in \mathbb{I}_x | \frac{d}{dt}(\cdot) \\ x'(t) = 1u(t) + tu'(t). \end{cases} \tag{5}$$

Se înlocuieşte x şi x' din (5) în (4) sau (4′), se obţine o ecuaţie cu variabile separabile în necunoscuta $u(t)$, se rezolvă şi se revine la substituţie. Domeniul de definiţie a soluţiei, $\mathbb{I}_x$, depinde de constanta c (pentru fiecare c se obţine o soluţie cu un anumit domeniu de definiţie şi o anumită lege de asociere).

Exemplul 7. Să se determine soluţiile generale ale următoarelor ecuaţii diferenţiale omogene
a) $tx'(t) = x(t) - te^{\frac{x(t)}{t}}, t \in \mathbb{I}.$
Rezolvare. a) Se determină soluţia generală a ecuaţiei

$$(*)\, tx'(t) = x(t) - te^{\frac{x(t)}{t}}, t \in \mathbb{I}.$$

Pentru $t \in \mathbb{I}_x \subseteq I$, variabilă independentă din domeniul de definiţie a soluţiei, se caută $x(t) =?$, x funcţie necunoscută, soluţie pentru ecuaţia $(*)$.

$$(*) \Rightarrow x'(t) = \frac{x(t)}{t} - e^{\frac{x(t)}{t}}, \forall t \in \mathbb{I}_x \text{ a.î. } t \neq 0.$$

Este o ecuaţie diferenţială omogenă cu $f(z) = z - e^z$. Se face schimbarea de funcţie necunoscută $u(t) = \frac{x(t)}{t}$, adică

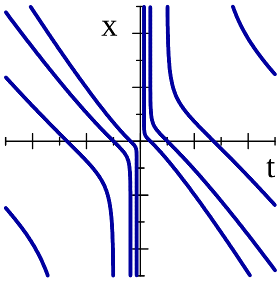
$$\begin{cases} x(t) = tu(t), \forall t \in \mathbb{I}_x | \frac{d}{dt}(\cdot) \\ x'(t) = u(t) + tu'(t). \end{cases}$$

Se înlocuieşte x şi x' şi se obţine o ecuaţie cu variabile separabile în necunoscuta $u(t)$,

$$u(t) + tu'(t) = u(t) - e^{u(t)}, \forall t \in \mathbb{I}_u \text{ a.î. } t \neq 0 \Rightarrow$$

$$e^{-u(t)}u'(t) = \frac{-1}{t}, \forall t \in \mathbb{I}_u \text{ a.î. } t \neq 0 \,\Big|\, \int (\cdot)\, dt \Rightarrow$$

$\int e^{-u(t)} u'(t)\, dt = \int \frac{-1}{t} dt \Rightarrow$
$-e^{-u(t)} = -\ln|t| + c, \forall t \in \mathbb{I}_u$ a.î. $t \neq 0$ şi $c \in \mathbb{R}$.
Ultima relaţie reprezintă soluţia generală a ecuaţiei cu variabile separabile în necunoscuta $u(t)$ sub formă implicită. Se revine la substituţie şi se obţine
$(**) - e^{-\frac{x(t)}{t}} = -\ln|t| + c, \forall t \in \mathbb{I}_x$ a.î. $t \neq 0$ şi $c \in \mathbb{R}$.
Ultima relaţie reprezintă soluţia generală a ecuaţiei $(*)$ sub formă implicită. Soluţia generală a ecuaţiei $(*)$ este dată, sub formă explicită, pentru fiecare $c \in \mathbb{R}$, de
$x : \mathbb{I}_x \to \mathbb{R}, x(t) = -t \ln(\ln|t| - c), \forall t \in \mathbb{I}_x,$
unde domeniul de definiţie a soluţiei, $\mathbb{I}_x$, depinde de constanta c. Pentru fiecare $c \in \mathbb{R}$,
$\mathbb{I}_x \subseteq \{t \in \mathbb{R}; \ln|t| - c > 0, t \neq 0\}$.



1.3.3. Ecuaţii diferenţiale reductibile la ecuaţii diferenţiale omogene sau direct la ecuaţii cu variabile separabile
Forma generală:

$$\boxed{x'(t) = f\left(\frac{a_1 t + b_1 x(t) + c_1}{a_2 t + b_2 x(t) + c_2}\right)} \text{ sau} \qquad (6)$$

$$\boxed{\frac{dx}{dt} = f\left(\frac{a_1 t + b_1 x + c_1}{a_2 t + b_2 x + c_2}\right),} \qquad (6')$$

unde $f : \mathbb{I} \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este funcţie, $a_i, b_i, c_i \in \mathbb{R}$, $a_i^2 + b_i^2 + c_i^2 \neq 0$, $i \in \{1, 2\}$.
Rezolvare. Pentru $t \in \mathbb{I}_x \subseteq \mathbb{I}$, variabilă independentă din domeniul de definiţie a soluţiei, se caută $x(t) =?$, x funcţie necunoscută de clasă $\mathcal{C}^1$, soluţie pentru ecuaţiile (6) sau (6′). Se ataşează ecuaţiilor (6) sau (6′) sistemul algebric

$$\begin{cases} a_1 t + b_1 x + c_1 = 0 & \text{-ecuaţia unei drepte în } tOx \\ a_2 t + b_2 x + c_2 = 0 & \text{-ecuaţia unei drepte în } tOx \end{cases} \qquad (7)$$

Se disting următoarele cazuri:
Cazul 0. Dacă sistemul (7) are $(c_1, c_2) = (0, 0)$ şi este compatibil unic determinat cu soluţia $(t_0, x_0) = (0, 0)$ (drepte ce se intersectează în O) atunci ecuaţia (6) devine, pt $t \neq 0$,

$$x'(t) = f\left(\frac{a_1 + b_1 \frac{x(t)}{t}}{a_2 + b_2 \frac{x(t)}{t}}\right)$$

adică o ecuaţie omogenă (4).
Cazul 1. Dacă sistemul (7) are $(c_1, c_2) \neq (0, 0)$ şi este compatibil unic determinat cu soluţia $(t_0, x_0) \neq (0, 0)$ (drepte ce se intersectează în $M_0 \neq O$) atunci se face substituţia

$$\begin{cases} s = t - t_0 \text{-schimbare de variabilă} \\ y = x - x_0 \text{-schimbare de funcţie necunoscută} \end{cases} \qquad (8)$$

şi ecuaţia (6) devine, pt $s \neq 0$,

$$y'(s) = f\left(\frac{a_1 + b_1 \frac{y(s)}{s}}{a_2 + b_2 \frac{y(s)}{s}}\right)$$

adică o ecuaţie omogenă (4). Se rezolvă şi se revine la substituţie.
Cazul 2. Dacă sistemul (7) este compatibil nedeterminat (drepte confundate), atunci există $\lambda \neq 0$ astfel încât $(a_1, b_1, c_1) = \lambda (a_2, b_2, c_2)$ şi ecuaţia (6) sau (6′) se reduce la

$$x'(t) = f(\lambda), \forall t \in \mathbb{I}_x \text{ cu } a_2t + b_2x + c_2 \neq 0.$$

adică o ecuaţie cu variabile separabile (1).
Cazul 3. Dacă sistemul (7) este un sistem incompatibil (drepte paralele) atunci există $\lambda \neq 0$ astfel încât $(a_1, b_1) = \lambda (a_2, b_2)$ şi $(a_1, b_1, c_1) \neq \lambda (a_2, b_2, c_2)$. Se face schimbarea de funcţie necunoscută

$$\begin{cases} u(t) = a_1t + b_1x(t), \forall t \in \mathbb{I}_x | \frac{d}{dt}(\cdot) \\ u'(t) = a_1 + b_1x'(t). \end{cases} \text{ sau } \begin{cases} u(t) = a_2t + b_2x(t), \forall t \in \mathbb{I}_x | \frac{d}{dt}(\cdot) \\ u'(t) = a_2 + b_2x'(t). \end{cases}$$

Se înlocuieşte x şi x' în (6) sau (6′), se obţine o ecuaţie cu variabile separabile în necunoscuta $u(t)$, se rezolvă şi se revine la substituţie.

Domeniul de definiţie a soluţiei, $\mathbb{I}_x$, depinde de constanta c (pentru fiecare c se obţine o soluţie cu un anumit domeniu de definiţie şi o anumită lege de asociere).

Exemplul 8. Să se determine soluţiile generale ale următoarelor ecuaţii diferenţiale
a) $\frac{dx}{dt}(t) = \frac{-2t + 4x(t) - 6}{t + x(t) - 3}, t \in \mathbb{I}$; **b)** $x'(t) = \frac{x(t) + 3t - 2}{6x(t) + 18t - 12}, t \in \mathbb{I}$;
c) $\frac{dx}{dt} = -\frac{3t + 3x - 1}{t + x - 1}, t \in \mathbb{I}$.
Rezolvare. A se vedea Seminar.

1.4. Ecuaţii diferenţiale cu diferenţială exactă şi reductibile la ecuaţii cu diferenţială exactă

1.4.1. Ecuaţii cu diferenţială exactă

Forma generală a unei ecuaţii cu diferenţială exactă:

$$\boxed{x'(t) = -\frac{P(t, x(t))}{Q(t, x(t))}} \text{ sau} \tag{11}$$

$$\boxed{\underbrace{P(t, x)\,dt + Q(t, x)\,dx}_{\omega(t,x)} = 0,} \tag{11'}$$

unde $P, Q : \mathbb{D} \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sunt două funcţii de clasa $\mathcal{C}^1$ pe $\mathbb{D}$ astfel încât să existe o funcţie $F : \mathbb{D} \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, de clasa $\mathcal{C}^2$ pe $\mathbb{D}$, cu $\omega = dF$, adică

$$\begin{cases} (12.1)\ \frac{\partial F}{\partial t}(t, x) = P(t, x), \forall (t, x) \in \mathbb{D}, \\ (12.2)\ \frac{\partial F}{\partial x}(t, x) = Q(t, x), \forall (t, x) \in \mathbb{D}. \end{cases}$$

(ecuaţia diferenţială (11′) este *cu diferenţială exactă* dacă forma diferenţială
$\omega(t, x) = P(t, x)\,dt + Q(t, x)\,dx$ este exactă)

Rezolvare. Se caută $x(t) = ?$ (de clasă $\mathcal{C}^1$), sau $t(x) = ?$, sau o relaţie de dependenţa algebrico-funcţională între t şi x (fără operatorii de derivare sau integrare), soluţie pentru ecuaţiile (11) sau (11′). Înlocuind (12.1) şi (12.2) în (11′), se obţine

$$\frac{\partial F}{\partial t}(t, x)\,dt + \frac{\partial F}{\partial x}(t, x)\,dx = 0, \forall (t, x) \in \mathbb{D} \Rightarrow dF(t, x) = 0, \forall (t, x) \in \mathbb{D} \Rightarrow$$

$$\boxed{F(t, x) = c, \forall (t, x) \in \mathbb{D}, c \in \mathbb{I}_c \subseteq \mathbb{R}.} \tag{13}$$

Ultima relaţie reprezintă soluţia generală a ecuaţiilor (11) sau (11′) sub formă implicită. Domeniul de definiţie a soluţiei, $\mathbb{D}$, depinde de constanta c (pentru fiecare c se obţine o soluţie cu un anumit domeniu de definiţie şi o anumită lege de dependenţă între t şi x). Local, s-ar putea explicita $x : \mathbb{I}_x \rightarrow \mathbb{R}$,unde domeniul de definiţie a soluţiei, $\mathbb{I}_x$, depinde de constanta c (pentru fiecare c se obţine o soluţie cu un anumit domeniu de definiţie şi o anumită lege de asociere).

Teoremă: În ipotezele anterioare, dacă $\mathbb{D}$ este domeniu simplu conex şi ω este formă închisă, adică

$$\boxed{\frac{\partial P}{\partial x}(t,x) = \frac{\partial Q}{\partial t}(t,x), \forall (t,x) \in \mathbb{D}.} \tag{14}$$

atunci ω este formă exactă şi ecuaţia diferenţială $(11')$ este cu diferenţială exactă pe $\mathbb{D}$.

Justificare:

$$\frac{\partial P}{\partial x}(t,x) \overset{\frac{\partial}{\partial x} \text{ în } (12.1)}{=} \frac{\partial^2 F}{\partial t \partial x}(t,x) \overset{\text{cr. Schwartz}}{=} \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial t}(t,x) \overset{\frac{\partial}{\partial t} \text{ în } (12.2)}{=} \frac{\partial Q}{\partial t}(t,x).$$

Exemplul 9. Să se determine soluţiile generale ale următoarelor ecuaţii diferenţiale cu diferenţială exactă

a) $x'(t) = -\dfrac{2tx(t) - 2x^3(t)}{t^2 - 6tx^2(t)}, t \in \mathbb{I};$

b) $(\sin x + (1-x)\cos t)\, dt + ((1+t)\cos x - \sin t)\, dx = 0, t \in \mathbb{I};$

c) $\left(\dfrac{t}{\sqrt{t^2 + x^2(t)}} + \dfrac{1}{t} + \dfrac{1}{x(t)}\right) dt + \left(\dfrac{x(t)}{\sqrt{t^2 + x^2(t)}} + \dfrac{1}{x(t)} - \dfrac{t}{x^2(t)}\right) dx(t) = 0, t \in \mathbb{I}\ ;$

d) $8tx(t) - 5x^2(t) + 2t(2t - 5x(t))\, x'(t) = 0, t \in \mathbb{I};$

e) $3t\left(t + 2x^2(t)\right) dt + 2x(t)\left(3t^2 + 2x^2(t)\right) dx(t) = 0, t \in \mathbb{I};$

f) $(t\cos x - x\sin x)\, dx + \sin x dt = 0, t \in \mathbb{I};$ **g)** $(t + \sin x)\, dt + (t\cos x + \sin x)\, dx = 0, t \in \mathbb{I};$

h) $\left(t + e^t \sin x\right) dt + \left(e^t \cos x + \sin x\right) dx = 0, t \in \mathbb{I};$ **i)** $\left(t^2 + \sin x\right) dt + (1 + t\cos x)\, dx = 0, t \in \mathbb{I};$

j) $\left(e^t + x + \sin x\right) dt + \left(e^x + t + t\cos x\right) dx = 0, t \in \mathbb{I};$ **k)** $xe^t dt + \left(x + e^t\right) dx = 0, t \in \mathbb{I};$

l) $\left(3t^2 x - x^2\right) x' - t^2 + 3tx^2 - 2 = 0, t \in \mathbb{I};$ **m)** $\dfrac{dx}{dt} = -\dfrac{2tx^3 + 2}{3t^2x^2 + 8e^{4x}}, t \in \mathbb{I};$

Rezolvare. a) Se determină soluţia generală a ecuaţiei

$$(*)\ x'(t) = -\frac{2tx(t) - 2x^3(t)}{t^2 - 6tx^2(t)}, t \in \mathbb{I}.$$

Pentru $t \in \mathbb{I}_x \subseteq \mathbb{I}$, variabilă independentă din domeniul de definiţie a soluţiei, se caută $x(t) =?$, x funcţie necunoscută, soluţie pentru ecuaţia $(*)$. De fapt, se caută $x(t) =?$, sau $t(x) =?$, sau o relaţie de dependenţa algebrică între t şi x (fără operatorii de derivare sau integrare), soluţie pentru ecuaţia $(*)$.

Folosind Convenţiile, se observă că $(*) \Rightarrow$

$$(*')\ \left(2tx - 2x^3\right) dt + \left(t^2 - 6tx^2\right) dx = 0, \forall (t,x) \in \mathbb{D} \text{ a.î. } t^2 - 6tx^2 \neq 0.$$

Se notează cu $\mathbb{D}$ un domeniu simplu conex, $\mathbb{D} \subset \left\{(t,x) \in \mathbb{R}^2; t^2 - 6tx^2 \neq 0\right\}$ şi

$$\begin{cases} P : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}, P(t,x) = 2tx - 2x^3 \\ Q : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}, Q(t,x) = t^2 - 6tx^2. \end{cases}$$

<u>Etapa 1:</u> Se studiază dacă ecuaţia $(*)$ este cu diferenţială exactă. P şi Q sunt de clasă C^1 pe D şi se verifică (14).

$$\begin{cases} \dfrac{\partial P}{\partial x}(t,x) = 2t - 6x^2, \forall (t,x) \in \mathbb{D} \\ \dfrac{\partial Q}{\partial t}(t,x) = 2t - 6x^2, \forall (t,x) \in \mathbb{D}. \end{cases}$$

Atunci $\dfrac{\partial P}{\partial x}(t,x) - \dfrac{\partial Q}{\partial t}(t,x) = 0, \forall (t,x) \in \mathbb{D} \Rightarrow$ ecuaţia $(*)$ *poate fi* cu diferenţială exactă. Cum $\mathbb{D}$ este ales domeniu simplu conex$\Rightarrow$ ecuaţia $(*)$ este cu diferenţială exactă.

<u>Etapa 2:</u> Se determină acea funcţie (există conform Etapei 1) $F : \mathbb{D} \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, de clasa $\mathcal{C}^2$ pe $\mathbb{D}$,

din a cărei diferenţială să provină ecuaţia, adică

$$\begin{cases} (12.1)\ \dfrac{\partial F}{\partial t}(t,x) = 2tx - 2x^3, \forall (t,x) \in \mathbb{D}, \\ (12.2)\ \dfrac{\partial F}{\partial x}(t,x) = t^2 - 6tx^2, \forall (t,x) \in \mathbb{D}. \end{cases}$$

Sistemul anterior este un sistem de ecuaţii cu derivate parţiale în necunoscuta $F(t,x)$. Se rezolvă.

modul 12.1. $(12.1) | \int (\cdot)\, dt \Rightarrow$

$$\int \frac{\partial F}{\partial t}(t,x)\, dt = \int \left(2tx - 2x^3\right) dt + \varphi(x), \forall (t,x) \in \mathbb{D} \Rightarrow$$

$$(\circ_1)\ F(t,x) \overset{t \text{ este var.}}{\underset{\text{de integrare}}{=}} xt^2 - 2x^3 t + \varphi(x), \forall (t,x) \in \mathbb{D},$$

unde $\varphi(x)$ este o funcţie necunoscută, constantă în raport cu variabila de integrare t. Se determină φ folosind şi (12.2) din sistem. Se derivează ultima relaţie în raport cu $x \Rightarrow$

$$\frac{\partial F}{\partial x}(t,x) \overset{x \text{ este var.}}{\underset{\text{de derivare}}{=}} t^2 - 6x^2 t + \frac{d\varphi}{dx}(x), \forall (t,x) \in \mathbb{D}.$$

Se înlocuieşte (12.2) $\Rightarrow$

$$t^2 - 6tx^2 = t^2 - 6x^2 t + \frac{d\varphi}{dx}(x), \forall (t,x) \in \mathbb{D} \Rightarrow$$

$$\frac{d\varphi}{dx}(x) = 0 \Rightarrow \varphi(x) = c_1, c_1 \in \mathbb{R}.$$

Se înlocuieşte în expresia lui F, $(\circ_1) \Rightarrow$

$$F(t,x) = xt^2 - 2x^3 t + c_1, \forall (t,x) \in \mathbb{D} \text{ şi } c_1 \in \mathbb{R}.$$

modul 12.2. $(12.2) | \int (\cdot)\, dx \Rightarrow$

$$\int \frac{\partial F}{\partial x}(t,x)\, dx \overset{x \text{ este var.}}{\underset{\text{de integrare}}{=}} \int \left(t^2 - 6tx^2\right) dx + \psi(t), \forall (t,x) \in \mathbb{D} \Rightarrow$$

$$(\circ_2)\ F(t,x) = t^2 x - 2tx^3 + \psi(t), \forall (t,x) \in \mathbb{D},$$

unde $\psi(t)$ este o funcţie necunoscută, constantă în raport cu variabila de integrare x. Se determină ψ folosind şi (12.1) din sistem. Se derivează ultima relaţie în raport cu $t \Rightarrow$

$$\frac{\partial F}{\partial t}(t,x) \overset{t \text{ este var.}}{\underset{\text{de derivare}}{=}} 2tx - 2x^3 + \frac{d\psi}{dt}(t), \forall (t,x) \in \mathbb{D}.$$

Se înlocuieşte (12.1) $\Rightarrow$

$$2tx - 2x^3 = 2tx - 2x^3 + \frac{d\psi}{dt}(t), \forall (t,x) \in \mathbb{D} \Rightarrow$$

$$\frac{d\psi}{dt}(t) = 0 \Rightarrow \psi(t) = c_2, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Se înlocuieşte în expresia lui F, $(\circ_2) \Rightarrow$

$$F(t,x) = t^2 x - 2tx^3 + c_2, \forall (t,x) \in \mathbb{D} \text{ şi } c_2 \in \mathbb{R}$$

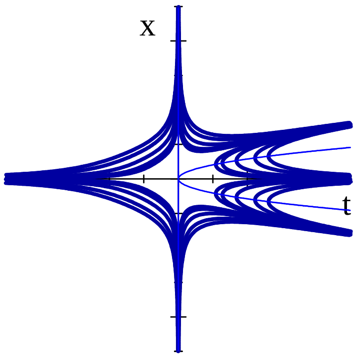
Etapa 3: Cu F determinată la Etapa 2, soluţia generală a ecuaţiei $(*)$ este data sub forma implicită de

$$F(t,x) = c_3, c_3 \in \mathbb{R},$$

adică, notând $c = c_3 - c_1$ sau $c = c_3 - c_2$, de

$$(**)\ xt^2 - 2x^3 t = c, \forall (t,x) \in \mathbb{D} \text{ şi } c \in \mathbb{R}.$$

Local, s-ar putea explicita $x : \mathbb{I}_x \to \mathbb{R}$,unde domeniul de definiţie a soluţiei, $\mathbb{I}_x$, depinde de constanta c (pentru fiecare c se obţine o soluţie cu un anumit domeniu de definiţie şi o anumită lege de asociere).



Observaţie: La Etapa 2 se apelează la modul 1 sau modul 2 în funcţie de simplitatea determinării integralelor ce apar in calcul. Există ecuaţii cu diferenţială exactă pentru care în Etapa 2, la unul dintre moduri, sau chiar la ambele, apar integrale nedefinite care există, dar nu sunt exprimabile cu funcţii elementare. Se evită o astfel de "rezolvare" a ecuaţiei. Dacă necunoscuta apare sub operatorul de integrare, nu s-a rezolvat ecuaţia, ci s-a transformat într-o ecuaţie integrală. Dacă în rezolvare se folosesc integrale definite şi dacă apare de calculat o integrala definită fără parametru, de exemplu $\int_0^1 e^{-t^2}dt$, atunci se apeleză la metode numerice, implementabile pe calculator.

○1.4.2. Ecuaţii cu factor integrant

Forma generală a unei ecuaţii cu factor integrant: Este tot (11) sau (11′) unde $P, Q : \mathbb{D} \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ sunt două funcţii de clasa $\mathcal{C}^1$ pe $\mathbb{D}$ astfel încât ecuaţiile (11) sau (11′) nu sunt cu diferenţială exactă (nu se verifică (14)), dar există o funcţie $\mu : \mathbb{D}_1 \subseteq \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}$, numită *factor integrant*, astfel încât

- μ să fie de clasă $\mathcal{C}^1$ pe $\mathbb{D}_1$,
- $\mu(t,x) \neq 0$, $\forall (t,x) \in \mathbb{D}_1$ şi
- $(11') \cdot \mu(t,x)$ sa fie ecuaţie cu diferenţială exactă pe $\mathbb{D}_1$.

Rezolvare. Se caută $x(t) =?$ (funcţie necunoscută de clasă $\mathcal{C}^1$), sau $t(x) =?$, sau o relaţie de dependenţa algebrică între t şi x (fără operatorii de derivare sau integrare), soluţie pentru ecuaţiile (11) sau (11′).

a) Dacă $Q(t,x) \neq 0$, $\forall (t,x) \in \mathbb{D}_1$ şi $\dfrac{1}{Q(t,x)}\left(\dfrac{\partial P}{\partial x}(t,x) - \dfrac{\partial Q}{\partial t}(t,x)\right) = f(t)$, (15)

atunci se caută $\mu = \mu(t)$ factor integrant a.î. $\boxed{\dfrac{\mu'(t)}{\mu(t)} = f(t).}$ (16)

b) Dacă $P(t,x) \neq 0$, $\forall (t,x) \in \mathbb{D}_1$ şi $\dfrac{-1}{P(t,x)}\left(\dfrac{\partial P}{\partial x}(t,x) - \dfrac{\partial Q}{\partial t}(t,x)\right) = g(x)$, (17)

atunci se caută $\mu = \mu(x)$ factor integrant a.î. $\boxed{\dfrac{\mu'(x)}{\mu(x)} = g(x).}$ (18)

c) Există situaţii în care nu are loc nici a), nici b). În acest caz se poate căuta un factor integrant $\mu(t,x)$, de o anumită formă, apriori precizată, impunând ca $(11')\cdot\mu(t,x)$ sa fie ecuaţie cu diferenţială exactă pe $\mathbb{D}_1$.

Se rezolvă ecuaţia cu diferenţială exactă $(11') \cdot \mu(t,x)$, se obţine

$\widetilde{F}(t,x) = c, \forall (t,x) \in \mathbb{D}_1, c \in \mathbb{I}_c \subseteq \mathbb{R},$ (19)

soluţie generală a ecuaţiei $(11') \cdot \mu(t,x)$, precum şi a ecuaţiilor (11) sau (11′), sub formă implicită, pe $\mathbb{D}_1 \subseteq \mathbb{D}$. Domeniul de definiţie a soluţiei, $\mathbb{D}_1$, depinde de constanta c (pentru fiecare c se obţine o soluţie cu un anumit domeniu de definiţie şi o anumită lege de dependenţă între t şi x). Local, s-ar putea explicita $x : \mathbb{I}_x \rightarrow \mathbb{R}$,unde domeniul de definiţie a soluţiei, $\mathbb{I}_x$, depinde de constanta c (pentru fiecare c se obţine o soluţie cu un anumit domeniu de definiţie şi o anumită lege de asociere).

○**Exemplul 10**. Să se determine soluţiile generale ale următoarelor ecuaţii diferenţiale reductibile la ecuaţii cu diferenţială exactă, prin metoda factorului integrant:
a) $\left(t^3 \sin x - 2x\right) dt + \left(t^4 \cos x + t\right) dx = 0, t \in \mathbb{I}$;
b) $\left(3t^2 + x\right) dt + t\left(1 + 2t^2 x + 2x^2\right) dx = 0, t \in \mathbb{I}$;
c) $2txx' - \left(t + x^2\right) = 0, t \in \mathbb{I}$;
d) $\left(1 - t^2 x(t)\right) dt + t^2 (x(t) - t)\, dx(t) = 0, t \in \mathbb{I}$;
e) $\left(t^2 + x^2 + 2t\right) dt + 2xdx = 0, t \in \mathbb{I}$;
f) $\left(tx^2 - x^3\right) dt + \left(1 - tx^2\right) dx = 0, t \in \mathbb{I}$;
g) $xdt - \left(t + x^2\right) dx = 0, t \in \mathbb{I}$;
h) $2txdt + \left(3x^2 - t^2 + 3\right) dx = 0, t \in \mathbb{I}$.
Rezolvare. A se vedea Seminar.

○**Exemplul 11.** Să se determine câte un factor integrant de forma indicată pentru ecuaţiile diferenţiale de mai jos şi apoi să se rezolve aceste ecuaţii
a) $t(1 - x(t))\, dt + \left(t^2 + x(t)\right) dx(t) = 0, \mu = \mu(t^2 + x^2)$;
b) $\left(x^3 - 1\right) + \left(2t^2 x + tx^2 - 1\right) x' = 0, \mu = \mu(t + x)$;
c) $\left(x + t^3 x^2\right) dt + \left(t + x^3 t^2\right) dx = 0, \mu = \mu(tx)$;
d) $(t - x)\, dt + (t + x)\, dx = 0, \mu = \mu\left(t^2 + x^2\right)$;
e) $\left(2tx - x - x^2\right) dt + \left(2tx - t - t^2\right) dx = 0, \mu = \mu(t + x)$;
f) $\left(tx^2 + 3x\right) dt - \left(2t^2 x - 6t\right) dx = 0, \mu = \mu(tx)$.
Rezolvare. A se vedea Seminar.