CURS NR. 3
EDCO, AIA

1.5. Ecuaţii diferenţiale liniare de ordinul întâi şi ecuaţii reductibile la acestea: ecuaţii Bernoulli, ecuaţii Riccati

1.5.1. Ecuaţii diferenţiale liniare de ordinul întâi

Forma generală a unei ecuaţii diferenţiale liniare de ordinul întâi :

$$\boxed{x'(t) = a(t)\,x(t) + b(t)} \tag{1}$$

sau $$\boxed{\frac{dx}{dt} = ax + b} \tag{1'}$$

unde $a : \mathbb{I} \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $b : \mathbb{I} \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sunt două funcţii continue, a neidentic nulă pe $\mathbb{I}$. Dacă $b \equiv 0$ pe $\mathbb{I}$, ecuaţia se numeşte liniară şi *omogenă*; dacă $b \neq 0$ pe $\mathbb{I}$, ecuaţia se numeşte liniară şi *neomogenă*.

Rezolvare. Pentru $t \in \mathbb{I}_x \subseteq \mathbb{I}$, variabilă independentă din domeniul de definiţie a soluţiei, se caută $x = x(t)$ funcţie necunoscută de clasă $\mathcal{C}^1$, soluţie pentru ecuaţiile (1) sau (1′). Se schiţează două metode de rezolvare a acestei ecuaţii diferenţiale.

Metoda variaţiei constantelor (Lagrange) :

Etapa 1 : Se determină soluţia generală a *ecuaţiei omogene ataşate* ecuaţiei (1), adică

$$\boxed{x'(t) = a(t)\,x(t),} \tag{2}$$

care este o ecuaţie cu variabile separabile, şi se obţine

$$x_o(t;c) = ce^{\int a(t)dt}, \forall t \in \mathbb{I} \text{ şi } c \in \mathbb{R}. \tag{3}$$

Etapa 2 : Se determină o *soluţie particulară* a ecuaţiei neomogene (1), folosind metoda variaţiei constantelor, de forma

$$x_p(t) = u(t)\,e^{\int a(t)dt}, \forall t \in \mathbb{I}. \tag{4}$$

$u : \mathbb{I} \to \mathbb{R}$ este o funcţie derivabilă care se determină impunând ca x_p dată de (4) să verifice (1). Se înlocuieşte expresia lui u în (4) şi se obţine

$$x_p(t) = \left(\int b(t)\,e^{-\int a(t)dt}dt\right) e^{\int a(t)dt}, \forall t \in \mathbb{I}. \tag{5}$$

Etapa 3 : Soluţia generală a ecuaţiei neomogene (1) este dată de

$$x(t;c) = x_o(t;c) + x_p(t), \forall t \in \mathbb{I} \text{ şi } c \in \mathbb{R}. \tag{6'}$$

Înlocuind în formula anterioară relaţiile (3) şi (5) se obţine

$$\boxed{x(t;c) = e^{\int a(t)dt}\left(c + \int b(t)\,e^{-\int a(t)dt}dt\right), \forall t \in \mathbb{I} \text{ şi } c \in \mathbb{R}.} \tag{6}$$

Ultima relaţie reprezintă soluţia generală a ecuaţiilor (1) sau (1′), sub formă explicită. Domeniul de definiţie a soluţiei este chiar $\mathbb{I}_x = \mathbb{I}$.

Convenţie : În calculul integralelor nedefinite ce apar în formulele (3), (5) şi (6) se consideră toate constantele 0. În formulele (3) şi (6) apare o singura constantă c, deoarece formulele respective sunt pentru soluţii generale ale unor ecuaţii diferenţiale de ordin întâi. În formula (4) nu apare nici o constantă deoarece formula dă o soluţie particulară pentru ecuaţia diferenţială (1).

Metoda factorului integrant : Ecuaţia (1) este reductibilă la o ecuaţie cu diferenţială exactă, folosind factorul integrant

$$\boxed{\mu(t) = e^{-\int a(t)dt}, \forall t \in \mathbb{I}.} \tag{7}$$

Se înmulţeşte ecuaţia (1) cu $\mu(t)$ pe $\mathbb{I}$, se trec termenii ce conţin x, x' în membrul stâng şi se restrâng ca şi derivata unei funcţii $(x(t) \cdot \mu(t))'$, se integrează ecuaţia şi se obţine formula (6). La pasul în care se integrează ecuaţia se pune în evidenţa constanta $c \in \mathbb{R}$. Pentru formula (6) se utilizează Convenţia. În calculul integralei nedefinite ce apare în formula (7) se cosideră constanta 0, deoarece se utilizează un singur factor integrant.

Exemplul 1. Să se determine soluţiile generale ale următoarelor ecuaţii diferenţiale liniare
a) $x'(t) = -2tx(t) + t^3, t \in \mathbb{I}$.
Rezolvare. a) Fie $(*_{LN1})\ x'(t) = -2tx(t) + t^3, t \in \mathbb{I}$.
Pentru $t \in \mathbb{I}_x \subseteq D$, variabilă independentă din domeniul de definiţie a soluţiei, se caută $x = x(t)$ funcţie necunoscută, soluţie pentru ecuaţia $(*_{LN1})$. Se observă că ecuaţia $(*_{LN1})$ este ecuaţie diferenţială liniară de ordin întâi neomogenă, cu

$$\begin{cases} a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, a(t) = -2t, \\ b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, b(t) = t^3. \end{cases}$$

○**Metoda variaţiei constantelor (Lagrange) :**

Etapa 1 : Se determină soluţia generală a ecuaţiei omogene ataşate ecuaţiei (1),
$(*_{LO1})\ x'(t) = -2tx(t), t \in \mathbb{R}$, care este o ecuaţie cu variabile separabile.
•Se observă că
$x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x(t) = 0$, este soluţie pentru ecuaţia $(*_{LO1})$, numită soluţie singulară.
•Se caută şi alte soluţii decât cea singulară. $(*_{LO1}) \Rightarrow$

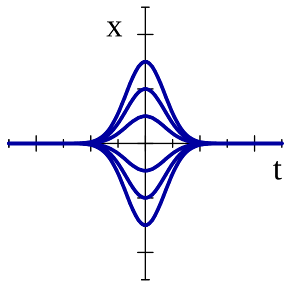
$$\frac{x'(t)}{x(t)} = -2t, \forall t \in \mathbb{I}_x \text{ a.î. } x(t) \neq 0 \Big| \int (\cdot)\, dt \Rightarrow \int \frac{x'(t)}{x(t)} dt = \int -2t dt \Rightarrow$$

$$\ln|x(t)| = -t^2 + \ln k, \forall t \in \mathbb{I}_x \text{ a.î. } x(t) \neq 0 \text{ şi } k > 0 \Rightarrow$$

$$|x(t)| = ke^{-t^2}, \forall t \in \mathbb{I}_x \text{ a.î. } x(t) \neq 0 \text{ şi } k > 0 \Rightarrow$$

$$x(t) = ce^{-t^2}, \forall t \in \mathbb{I}_x \text{ a.î. } x(t) \neq 0 \text{ şi } c \in \mathbb{R}^*.$$

Ultima relaţie reprezintă soluţia generală a ecuaţiei $(*)$ sub formă explicită, unde $\mathbb{I}_x$ este domeniul de definiţie a soluţiei.
•Atunci toate soluţiile ecuaţiei $(*_{LO1})$ sunt date explicit de
$x_o(t; c) = ce^{-t^2}, \forall t \in \mathbb{R}$ şi $c \in \mathbb{R}$.



Etapa 2 : Se determină o soluţie particulară a ecuaţiei neomogene $(*_{LN1})$, folosind metoda variaţiei constantelor, de forma
$x_p(t) = u(t) e^{-t^2}, \forall t \in \mathbb{R}$.
$u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este o funcţie derivabilă care se determină impunând ca x_p dată anterior să verifice $(*_{LN1})$, adică

$$u'(t) e^{-t^2} + u(t) \left(-2te^{-t^2}\right) = -2tu(t) e^{-t^2} + t^3, \forall t \in \mathbb{R} \Rightarrow$$

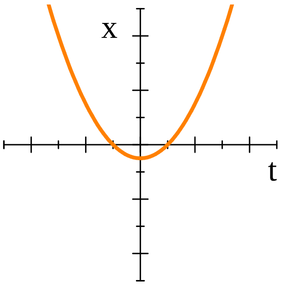
$$u'(t) = t^3 e^{t^2}, \forall t \in \mathbb{R} \Big| \int (\cdot)\, dt \Rightarrow \int u'(t)\, dt = \int t^3 e^{t^2} dt.$$

Se determină

$$\mathcal{I}(t; c) = \int t^3 e^{t^2} dt = \int \tfrac{1}{2} t^2 \left(e^{t^2}\right)' dt = \tfrac{1}{2} t^2 e^{t^2} - \int \tfrac{1}{2} \left(e^{t^2}\right)' dt = \tfrac{1}{2} t^2 e^{t^2} - \tfrac{1}{2} e^{t^2} + c, \forall t \in \mathbb{R} \text{ şi } c \in \mathbb{R}.$$

Atunci $u(t) = \frac{1}{2}t^2e^{t^2} - \frac{1}{2}e^{t^2} + 0, \forall t \in \mathbb{R}$.
S-a ales constanta 0 deoarece se caută o singură soluţie particulară x_p. Se înlocuieşte expresia lui u în cea a lui x_p şi se obţine

$x_p(t) = \left(\frac{1}{2}t^2e^{t^2} - \frac{1}{2}e^{t^2}\right)e^{-t^2} = \frac{1}{2}\left(t^2 - 1\right), \forall t \in \mathbb{R}$.

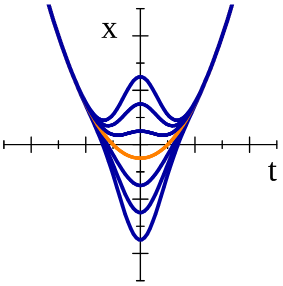


<u>Etapa 3 :</u> Soluţia generală a ecuaţiei neomogene $(*_{LN1})$ este dată de

$x(t;c) = x_o(t;c) + x_p(t), \forall t \in \mathbb{R}$ şi $c \in \mathbb{R}$, adică

$x(t;c) = ce^{-t^2} + \frac{1}{2}\left(t^2 - 1\right), \forall t \in \mathbb{R}$ şi $c \in \mathbb{R}$.

Ultima relaţie reprezintă soluţia generală a ecuaţiei $(*_{LN1})$, sub formă explicită. Domeniul de definiţie a soluţiilor este chiar $\mathbb{I} = \mathbb{R}$, pentru fiecare $c \in \mathbb{R}$.



<u>Metoda variaţiei constantelor -redusă la formulă :</u> Aplicând direct formula (6) şi Convenţia se obţine

$x(t;c) = e^{\int(-2t)dt}\left(c + \int t^3e^{-\int(-2t)dt}dt\right), \forall t \in \mathbb{R}$ şi $c \in \mathbb{R} \Rightarrow$

$x(t;c) = e^{-t^2+0}\left(c + \int t^3e^{t^2+0}dt\right), \forall t \in \mathbb{R}$ şi $c \in \mathbb{R} \Rightarrow$

$x(t;c) = e^{-t^2}\left(c + \frac{1}{2}t^2e^{t^2} - \frac{1}{2}e^{t^2} + 0\right), \forall t \in \mathbb{R}$ şi $c \in \mathbb{R}$.

<u>Metoda factorului integrant :</u> Se determină factorul integrant

$\mu(t) = e^{-\int -2tdt} = e^{t^2+0} = e^{t^2}, \forall t \in \mathbb{R}$.

În calculul integralei nedefinite ce apare în formula anterioară se cosideră constanta 0, deoarece se utilizează un singur factor integrant. Se înmulţeşte ecuaţia $(*_{LN1})$ cu

$\mu(t) = e^{t^2} \Rightarrow x'(t)e^{t^2} = -2tx(t)e^{t^2} + t^3e^{t^2}, \forall t \in \mathbb{R}$.

Se trec termenii ce conţin x, x' în membrul stâng $\Rightarrow$

$x'(t)e^{t^2} + x(t)\left(2te^{t^2}\right) = t^3e^{t^2}, \forall t \in \mathbb{R} \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(x(t)e^{t^2}\right) = t^3e^{t^2}, \forall t \in \mathbb{R} \Big| \int(\cdot)\,dt \Rightarrow$

$x(t)e^{t^2} = \int t^3e^{-t^2}dt, \forall t \in \mathbb{R} \overset{\text{se foloseşte } \mathcal{I}(t;c)}{\Rightarrow}$

$x(t;c) = e^{-t^2}\left(\frac{1}{2}t^2e^{t^2} - \frac{1}{2}e^{t^2} + c\right), \forall t \in \mathbb{R}$ şi $c \in \mathbb{R}$.

Ultima relaţie reprezintă soluţia generală a ecuaţiei $(*_{LN1})$, sub formă explicită. Domeniul de definiţie a soluţiilor este chiar $\mathbb{I}=\mathbb{R}$, pentru fiecare $c\in\mathbb{R}$.

○1.5.2. Ecuaţii diferenţiale Bernoulli

Forma generală a unei ecuaţii diferenţiale Bernoulli :

$$\boxed{x'(t)=a(t)\,x(t)+b(t)\,x^{\alpha}(t)} \tag{8}$$

sau
$$\boxed{\frac{dx}{dt}=ax+bx^{\alpha}} \tag{8'}$$

unde $\alpha\in\mathbb{R}\setminus\{0,1\}$, $a:\mathbb{I}\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $b:\mathbb{I}\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ sunt două funcţii continue, neidentic nule şi neproporţionale pe $\mathbb{I}$.

Rezolvare. Pentru $t\in\mathbb{I}_x\subseteq\mathbb{I}$, variabilă independentă din domeniul de definiţie al soluţiei, se caută $x=x(t)$ funcţie necunoscută de clasă $\mathcal{C}^1$, soluţie pentru ecuaţiile (8) sau (8′). Se face schimbarea de funcţie necunoscută

$$y(t)=x^{1-\alpha}(t), \tag{9}$$

pe un interval corespunzător. Se înlocuiesc x şi x' obţinuţi din (9) în (8) sau (8′), se obţine o ecuaţie diferenţială liniară în necunoscuta $y(t)$, se rezolvă şi se revine la substituţie. Domeniul de definiţie a soluţiei, $\mathbb{I}_x$, depinde de constanta c (pentru fiecare c se obţine o soluţie cu un anumit domeniu de definiţie şi o anumită lege de asociere).

○**Exerciţiul 2**. Să se determine soluţiile generale ale următoarelor ecuaţii diferenţiale Bernoulli

a) $x'+\frac{1}{t}x=\frac{1}{t^2x^2}, t\in\mathbb{I}$. **b)** $x'=\frac{4}{t}x+t\sqrt{x}, t\in\mathbb{I}$;

c) $tx'(t)+x(t)+t^5x^3(t)\,e^t=0, t\in\mathbb{I}$. **d)** $\frac{dx}{dt}(t)=\frac{x(t)}{2t}+\frac{t^2}{2x(t)}, t\in\mathbb{I}$.

e) $\frac{dx}{dt}(t)+2x(t)=e^tx^2(t), t\in\mathbb{I}$. **f)** $x'-\frac{2t}{1+t^2}x=\frac{4\operatorname{arctg}t}{\sqrt{1+t^2}}\sqrt{x}, t\in\mathbb{I}$.

g) $x't^3\sin x=tx'-2x, t\in\mathbb{I}$; **h)** $t^2x'=x(t-x), t\in\mathbb{I}$.

Rezolvare. a) Fie $x'+\frac{1}{t}x=\frac{1}{t^2x^2}, t\in\mathbb{I}\Rightarrow$

$$(*_B)\ \ x'(t)=\frac{-1}{t}x(t)+\frac{1}{t^2}x^{-2}(t), t\in\mathbb{I}.$$

Pentru $t\in\mathbb{I}_x\subseteq D$, variabilă independentă din domeniul de definiţie al soluţiei, se caută $x=x(t)$ funcţie necunoscută, soluţie pentru ecuaţia $(*_B)$. Se observă că ecuaţia $(*_B)$ este ecuaţie Bernoulli, cu $\alpha=-2$ şi

$$\begin{cases} a:\mathbb{I}\to\mathbb{R}, a(t)=\frac{-1}{t}, \\ b:\mathbb{I}\to\mathbb{R}, b(t)=\frac{1}{t^2}. \end{cases}$$

$\mathbb{I}$ este un interval ce nu conţine $t=0$, adică $\mathbb{I}\subseteq\,]-\infty,0[$ sau $\mathbb{I}\subseteq\,]0,+\infty[$.

<u>modul 1.</u> Pentru a aduce ecuaţia $(*_B)$ la o forma similară cu cea a uneia diferenţiale liniare intr-o necunoscută $y=y(t)$, se înmulţeşte $(*_B)$ cu $x^2(t)$, $\forall t\in\mathbb{I}_x$ a.î. ($t\neq0$ şi $x(t)\neq0$) (pentru ca termenul ce conţine $b(t)$ să nu mai conţină şi $x(t)$). Se obţine

$$x^2(t)\,x'(t)=\frac{-1}{t}x^3(t)+\frac{1}{t^2}, \forall t\in\mathbb{I}_x \text{ a.î. } (t\neq0 \text{ şi } x(t)\neq0).$$

Se face schimbarea de funcţie necunoscută

$$\begin{cases} y(t)=x^3(t), \forall t\in\mathbb{I}_x \left|\ \frac{d}{dt}(\cdot)\right. \\ y'(t)=3x^2(t)\,x'(t), \forall t\in\mathbb{I}_x. \end{cases}$$

Se înlocuieşte x şi x' şi se obţine o ecuaţie diferenţială liniară în necunoscuta $y(t)$,

$$\frac{1}{3}y'(t)=\frac{-1}{t}y(t)+\frac{1}{t^2}, \forall t\in\mathbb{I}_x \text{ a.î. } (t\neq0 \text{ şi } x(t)\neq0)\Rightarrow$$

$(*_{LN1})\ y'(t) = \dfrac{-3}{t} y(t) + \dfrac{3}{t^2}, \forall t \in \mathbb{I}_x$ a.î. $(t \neq 0$ şi $x(t) \neq 0)$.

<u>modul 1′.</u> O variantă de lucru este înlocuirea directă a substituţiei. Adică se face schimbarea de funcţie necunoscută

$$\left\{ y(t) = x^3(t), \forall t \in \mathbb{I}_x \text{ a.î. } (t \neq 0, x(t) \gneqq 0) \right. \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x(t) = y^{\frac{1}{3}}(t), \forall t \in \mathbb{I}_x \text{ a.î. } (t \neq 0, x(t) \gneqq 0) \\ x'(t) = \frac{1}{3} y^{\frac{1}{3}-1}(t) y'(t) \end{cases}$$

Se înlocuieşte x şi x' în $(*_B)$ şi se obţine o ecuaţie diferenţială liniară în necunoscuta $y(t)$,

$$\tfrac{1}{3} y^{\frac{1}{3}-1}(t) y'(t) = \frac{-1}{t} y^{\frac{1}{3}}(t) + \frac{1}{t^2}\left(y^{\frac{1}{3}}(t)\right)^{-2}, \forall t \in \mathbb{I}_x \text{ a.î. } (t \neq 0, x(t) \gneqq 0) \Big| \cdot 3y^{\frac{-2}{3}}(t) \Rightarrow$$

$$(*_{LN1})\ y'(t) = \frac{-3}{t} y(t) + \frac{3}{t^2}, \forall t \in \mathbb{I}_x \text{ a.î. } (t \neq 0 \text{ şi } x(t) \gneqq 0).$$

În ambele variante se observă că ecuaţia $(*_{LN1})$ este ecuaţie diferenţială liniară de ordin întâi neomogenă, cu

$$\begin{cases} a_1 : \mathbb{I} \to \mathbb{R}, a_1(t) = \dfrac{-3}{t}, \\ b_1 : \mathbb{I} \to \mathbb{R}, b_1(t) = \dfrac{3}{t^2}. \end{cases}$$

Ecuaţia $(*_{LN1})$ se poate rezolva prin una din cele două metode descrise în Exerciţiul 1:

<u>Metoda variaţiei constantelor</u> detaliat-temă

<u>Metoda variaţiei constantelor</u> redusă la formula (6) pentru ecuaţia în necunoscuta $y(t)$ şi Convenţia. Se obţine

$$y(t;c) = e^{\int\left(\frac{-3}{t}\right)dt}\left(c + \int \frac{3}{t^2} e^{-\int\left(\frac{-3}{t}\right)dt} dt\right), \forall t \in \mathbb{I}_x \text{ şi } c \in \mathbb{R} \Rightarrow$$

$$y(t;c) = e^{-3\ln|t|+0}\left(c + \int \frac{3}{t^2} e^{3\ln|t|+0} dt\right), \forall t \in \mathbb{I}_x \text{ şi } c \in \mathbb{R} \Rightarrow$$

$$y(t;c) = \frac{1}{|t|^3}\left(c + \int 3|t|\,dt\right), \forall t \in \mathbb{I}_x \text{ şi } c \in \mathbb{R}.$$

<u>Metoda factorului integrant</u> **:** Ecuaţia $(*_{LN1})$ este reductibilă la o ecuaţie cu diferenţială exactă, folosind factorul integrant

$$\mu(t) = e^{-\int\left(\frac{-3}{t}\right)dt} = e^{3\ln|t|+0} = |t|^3, \forall t \in \mathbb{I}.$$

În calculul integralei nedefinite ce apare în formula anterioară se cosideră constanta 0, deoarece se utilizează un singur factor integrant.

$$\mu(t) = |t|^3 = \begin{cases} t^3, & \text{dacă } t \in \mathbb{I}, \mathbb{I} \subseteq]0, +\infty[\\ -t^3, & \text{dacă } t \in \mathbb{I}, \mathbb{I} \subseteq]-\infty, 0[\end{cases}$$

Pentru $\forall t \in \mathbb{I} \subseteq]0, +\infty[$ se înmulţeşte ecuaţia $(*_{LN1})$ cu $\mu(t) = t^3 \Rightarrow$

$$y'(t) \cdot t^3 = \frac{-3}{t} y(t) \cdot t^3 + \frac{3}{t^2} \cdot t^3, \forall t \in \mathbb{I}_x.$$

Se trec termenii ce conţin y, y' în membrul stâng$\Rightarrow$

$$y'(t) \cdot t^3 + y(t)\left(3t^2\right) = 3t, \forall t \in \mathbb{I}_x \Rightarrow$$

$$\frac{d}{dt}\left(y(t) \cdot t^3\right) = 3t, \forall t \in \mathbb{I}_x \Big| \int (\cdot)\, dt \Rightarrow$$

$$y(t) \cdot t^3 = 3\tfrac{t^2}{2} + c, \forall t \in \mathbb{I}_x \Rightarrow$$

$$(**)\, y(t;c) = \tfrac{1}{t^3}\left(3\tfrac{t^2}{2} + c\right), \forall t \in \mathbb{I}_x \text{ şi } c \in \mathbb{R}.$$

Pentru $\forall t \in \mathbb{I}, \mathbb{I} \subseteq]-\infty, 0[$ se înmulţeşte ecuaţia $(*_{LN1})$ cu $\mu(t) = -t^3 \Rightarrow$analog. $\square$

Ultima relaţie reprezintă soluţia generală a ecuaţiei $(*_{LN1})$, sub formă explicită. Se revine la substituţie $\Rightarrow$

$$(**)\ x^3(t) = \frac{1}{|t|^3}\left(c + \int 3|t|\,dt\right), \forall t \in \mathbb{I}_x \text{ şi } c \in \mathbb{R}.$$

Ultima relaţie reprezintă soluţia generală a ecuaţiei $(*_B)$, sub formă implicită. Pentru $\mathbb{I}_x \subseteq]0, +\infty[$ $\Rightarrow$

$$x^3(t) = \frac{1}{t^3}\left(c + \frac{3t^2}{2} + 0\right), \forall t \in \mathbb{I}_x \text{ şi } c \in \mathbb{R} \Rightarrow$$

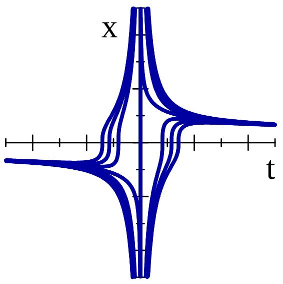
$$x(t;c) = \left(\frac{1}{t^3}\left(c + \frac{3t^2}{2}\right)\right)^{\frac{1}{3}}, \forall t \in \mathbb{I}_x \text{ şi } c \in \mathbb{R}.$$

Domeniul de definiţie a soluţiei, $\mathbb{I}_x$, depinde de constanta c (pentru fiecare c se obţine o soluţie cu un anumit domeniu de definiţie şi o anumită lege de asociere) ($\mathbb{I}_x$ se obţine impunând $t > 0$ şi $c + \frac{3t^2}{2} \neq 0$). Pentru $\mathbb{I}_x \subseteq]-\infty, 0[$,

$$x^3(t) = \frac{1}{-t^3}\left(c - \frac{3t^2}{2} + 0\right), \forall t \in \mathbb{I}_x \text{ şi } c \in \mathbb{R} \Rightarrow$$

$$x(t;c) = \left(\frac{1}{t^3}\left(-c + \frac{3t^2}{2}\right)\right)^{\frac{1}{3}}, \forall t \in \mathbb{I}_x \text{ şi } c \in \mathbb{R}.$$

Domeniul de definiţie a soluţiei, $\mathbb{I}_x$, depinde de constanta c (pentru fiecare c se obţine o soluţie cu un anumit domeniu de definiţie şi o anumită lege de asociere) ($\mathbb{I}_x$ se obţine impunând $t < 0$ şi $-c + \frac{3t^2}{2} \neq 0$).



○1.5.3. Ecuaţii diferenţiale Riccati

Forma generală a unei ecuaţii diferenţiale Riccati:

$$\boxed{x'(t) = a(t)\,x(t) + b(t)\,x^2(t) + c(t)} \tag{10}$$

sau

$$\boxed{\frac{dx}{dt} = ax + bx^2 + c} \tag{10'}$$

unde $a : \mathbb{I} \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $b : \mathbb{I} \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $c : \mathbb{I} \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sunt trei funcţii continue, b, c neidentic nule pe $\mathbb{I}$.

Rezolvare. Pentru $t \in \mathbb{I}_x \subseteq \mathbb{I}$, variabilă independentă din domeniul de definiţie al soluţiei, se caută $x = x(t)$ funcţie necunoscută de clasă $\mathcal{C}^1$, soluţie pentru ecuaţiile (10) sau (10′). Ecuaţia Riccati se poate rezolva numai dacă se cunoaşte sau se observă o soluţie particulară a ecuaţiei, notată $x_1(t)$. Se face schimbarea de funcţie necunoscută

$$y(t) = x(t) - x_1(t), \tag{11}$$

pe un interval corespunzător. Se înlocuiesc x şi x' obţinuţi din (11) în (10) sau (10′), se obţine o ecuaţie diferenţială Bernoulli cu $\alpha = 2$ în necunoscuta $y(t)$, se rezolvă şi se revine la substituţie. Se poate face şi schimbarea de funcţie necunoscută

$$\frac{1}{u(t)} = x(t) - x_1(t), \tag{12}$$
pe un interval corespunzător. Se înlocuiesc x şi x' obţinuţi din (12) în (10) sau (10′), se obţine o ecuaţie diferenţială Bernoulli liniară în necunoscuta $u(t)$, se rezolvă şi se revine la substituţie. Domeniul de definiţie a soluţiei, $\mathbb{I}_x$, depinde de constanta c (pentru fiecare c se obţine o soluţie cu un anumit domeniu de definiţie şi o anumită lege de asociere).

○**Exerciţiul** 3. Să se determine soluţiile generale ale următoarelor ecuaţii diferenţiale Riccati
a) $x'(t) = x^2(t) - \dfrac{2}{t^2}, t \in \mathbb{I}$, observând că admite o anumită soluţie particulară ;
b) $x' = x^2 + x \operatorname{ctg} t - \sin^2 t, t \in \mathbb{I}$, ştiind că admite o soluţie particulară $x_1(t) = \sin t$;
c) $x' = x^2 - tx - t$, ştiind că admite o soluţie particulară de forma $x_1(t) = mt + n$ cu $m, n \in \mathbb{R}$ de determinat;
d) $x'(t) + x^2(t) - \dfrac{1}{2t^2} = 0$, ştiind că admite o soluţie particulară de forma $x_1(t) = \dfrac{m}{t}$ cu $m \in \mathbb{R}$ de determinat.
Rezolvare. a) Fie $(*_R)\;\; x'(t) = x^2(t) - \dfrac{2}{t^2}, t \in \mathbb{I}$.
Pentru $t \in \mathbb{I}_x \subseteq D$, variabilă independentă din domeniul de definiţie al soluţiei, se caută $x = x(t)$ funcţie necunoscută, soluţie pentru ecuaţia $(*_R)$. Se observă că ecuaţia $(*_R)$ este ecuaţie Riccati, cu
$$\begin{cases} a : \mathbb{I} \to \mathbb{R}, a(t) = 0, \\ b : \mathbb{I} \to \mathbb{R}, b(t) = 1, \\ c : \mathbb{I} \to \mathbb{R}, c(t) = -\dfrac{2}{t^2}. \end{cases}$$
$\mathbb{I}$ este un interval ce nu conţine $t = 0$, adică $\mathbb{I} \subseteq \,]-\infty, 0[$ sau $\mathbb{I} \subseteq \,]0, +\infty[$. Se observă, de asemenea, că
$$x_1 : \mathbb{I} \to \mathbb{R},\; x_1(t) = \frac{1}{t}$$
este soluţie particulară pentru $(*_R)$ (este de clasă $\mathcal{C}_1$ pe $\mathbb{I}$ şi verifică identic $(*_R)$).
<u>modul 1.</u> Se face schimbarea de funcţie necunoscută $y(t) = x(t) - x_1(t)$, adică
$$\begin{cases} x(t) = y(t) + \dfrac{1}{t}, \forall t \in \mathbb{I} \,\Big|\, \frac{d}{dt}(\cdot) \\ x'(t) = y'(t) + \dfrac{-1}{t^2}, \forall t \in \mathbb{I} \end{cases}$$
Se înlocuiesc x şi x' obţinuţi în $(*_R) \Rightarrow$
$$y'(t) + \frac{-1}{t^2} = y^2(t) + 2y(t)\frac{1}{t} + \frac{1}{t^2} - \frac{2}{t^2}, \forall t \in \mathbb{I} \Rightarrow$$
$$(*_B)\;\; y'(t) = \frac{2}{t} y(t) + y^2(t), \forall t \in \mathbb{I}.$$
Se observă că ecuaţia $(*_B)$ este ecuaţie Bernoulli, în necunoscuta $y(t)$, cu $\alpha = 2$ şi
$$\begin{cases} a_1 : \mathbb{I} \to \mathbb{R}, a(t) = \dfrac{4}{t}, \\ b_1 : \mathbb{I} \to \mathbb{R}, b(t) = 1. \end{cases}$$
<u>modul 1.1.</u> Pentru a aduce ecuaţia $(*_B)$ la o forma similară cu cea a uneia diferenţiale liniare intr-o necunoscută $u = u(t)$, se înmulţeşte $(*_B)$ cu $y^{-2}(t)$, $\forall t \in \mathbb{I}_x$ a.î. ($t \neq 0$ şi $y(t) \neq 0$) (pentru ca termenul ce conţine $b_1(t)$ să nu mai conţină şi $y(t)$). Se obţine
$$y^{-2}(t)\, y'(t) = \frac{2}{t} y^{-1}(t) + 1, \forall t \in \mathbb{I}_x \text{ a.î. } (t \neq 0 \text{ şi } y(t) \neq 0).$$
Se face schimbarea de funcţie necunoscută
$$\begin{cases} u(t) = y^{-1}(t), \forall t \in \mathbb{I}_x \,\big|\, \frac{d}{dt}(\cdot) \\ u'(t) = -y^{-2}(t)\, y'(t), \forall t \in \mathbb{I}_x. \end{cases}$$

Se înlocuieşte y şi y' şi se obţine o ecuaţie diferenţială liniară în necunoscuta $u(t)$,

$$-u'(t) = \frac{2}{t}u(t) + 1, \forall t \in \mathbb{I}_x \text{ a.î. } (t \neq 0 \text{ şi } y(t) \neq 0) \Rightarrow$$

$$(*_{LN1})\ u'(t) = \frac{-2}{t}u(t) - 1, \forall t \in \mathbb{I}_x \text{ a.î. } (t \neq 0 \text{ şi } y(t) \neq 0).$$

modul 1.1$'$. O variantă de lucru este înlocuirea directă a substituţiei. Adică se face schimbarea de funcţie necunoscută

$$\left\{ u(t) = y^{-1}(t), \forall t \in \mathbb{I}_x \text{ a.î. } (t \neq 0, y(t) \gneqq 0) \right. \Rightarrow$$

$$\begin{cases} y(t) = u^{-1}(t), \forall t \in \mathbb{I}_x \text{ a.î. } (t \neq 0, y(t) \gneqq 0) \\ y'(t) = -u^{-2}(t)\, u'(t) \end{cases}$$

Se înlocuieşte y şi y' în $(*_B)$ şi se obţine o ecuaţie diferenţială liniară în necunoscuta $y(t)$,

$$-u^{-2}(t)\, u'(t) = \frac{2}{t}u^{-1}(t) + \left(u^{-1}(t)\right)^2, \forall t \in \mathbb{I}_x \text{ a.î. } (t \neq 0, y(t) \gneqq 0) \Big| \cdot \left(-u^2(t)\right) \Rightarrow$$

$$(*_{LN1})\ u'(t) = \frac{-2}{t}u(t) - 1, \forall t \in \mathbb{I}_x \text{ a.î. } (t \neq 0 \text{ şi } y(t) \gneqq 0).$$

În ambele variante se observă că ecuaţia $(*_{LN1})$ este ecuaţie diferenţială liniară de ordin întâi neomogenă, cu

$$\begin{cases} a_2 : \mathbb{I} \to \mathbb{R}, a_2(t) = \dfrac{-2}{t}, \\ b_2 : \mathbb{I} \to \mathbb{R}, b_2(t) = -1. \end{cases}$$

Ecuaţia $(*_{LN1})$ se poate rezolva prin una din cele două metode descrise în Exerciţiul 1 (Metoda variaţiei constantelor sau Metoda factorului integrant). La acest exerciţiu se va utiliza direct formula (6) pentru ecuaţia în necunoscuta $u(t)$ şi Convenţia. Se obţine

$$u(t;c) = e^{\int\left(\frac{-2}{t}\right)dt}\left(c + \int (-1)\, e^{-\int\left(\frac{-2}{t}\right)dt} dt\right), \forall t \in \mathbb{I}_x \text{ şi } c \in \mathbb{R} \Rightarrow$$

$$u(t;c) = e^{-2\ln|t|+0}\left(c + \int (-1)\, e^{2\ln|t|+0} dt\right), \forall t \in \mathbb{I}_x \text{ şi } c \in \mathbb{R} \Rightarrow$$

$$u(t;c) = \frac{1}{t^2}\left(c - \frac{t^3}{3}\right), \forall t \in \mathbb{I}_x \text{ şi } c \in \mathbb{R}.$$

Ultima relaţie reprezintă soluţia generală a ecuaţiei $(*_{LN1})$, sub formă explicită. Se revine la substituţie$\Rightarrow$

$$y^{-1}(t) = \frac{1}{t^2}\left(c - \frac{t^3}{3}\right), \forall t \in \mathbb{I}_x \text{ şi } c \in \mathbb{R}.$$

Ultima relaţie reprezintă soluţia generală a ecuaţiei $(*_B)$, sub formă implicită. Se revine la substituţie$\Rightarrow$

$$\left(x(t) - \frac{1}{t}\right)^{-1} = \frac{1}{t^2}\left(c - \frac{t^3}{3}\right), \forall t \in \mathbb{I}_x \text{ şi } c \in \mathbb{R}.$$

Ultima relaţie reprezintă soluţia generală a ecuaţiei $(*_R)$, sub formă implicită. Se explicitează$\Rightarrow$

$$x(t;c) = \frac{1}{t} + \left(\frac{1}{t^2}\left(c - \frac{t^3}{3}\right)\right)^{-1}.$$

Domeniul de definiţie a soluţiei, $\mathbb{I}_x$, depinde de constanta c (pentru fiecare c se obţine o soluţie cu un anumit domeniu de definiţie şi o anumită lege de asociere) ($\mathbb{I}_x$ se obţine impunând $t \neq 0$ şi $c - \frac{t^3}{3} \neq 0$).

modul 2. Se face direct schimbarea de funcţie necunoscută $u^{-1}(t) = x(t) - x_1(t)$, adică

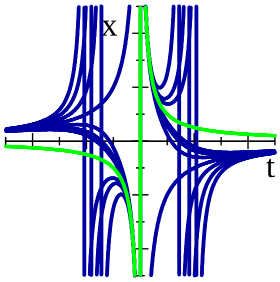
$$\begin{cases} x(t) = \dfrac{1}{u(t)} + \dfrac{1}{t}, \forall t \in \mathbb{I}_x \Big| \frac{d}{dt}(\cdot) \\ x'(t) = \dfrac{-1}{u(t)} u'(t) + \dfrac{-1}{t^2}, \forall t \in \mathbb{I}_x \end{cases}$$

Se înlocuiesc x şi x' obţinuţi în $(*_R) \Rightarrow$

$$\frac{-1}{u(t)} u'(t) + \frac{-1}{t^2} = \left(\frac{1}{u(t)} + \frac{1}{t}\right)^2 - \frac{2}{t^2}, \forall t \in \mathbb{I}_x \Rightarrow$$

$$(*_{LN1})\ u'(t) = \frac{-2}{t} u(t) - 1, \forall t \in \mathbb{I}_x \text{ a.î. } (t \neq 0 \text{ şi } u(t) \neq 0).$$

S-a obţinut exact ecuaţia diferenţială liniară de la modul 1, care se rezolvă în continuare ca la modul 1.



○**1.6.1. Ecuaţii diferenţiale Clairaut**

Forma generală a unei ecuaţii diferenţiale Clairaut:

$$\boxed{x(t) = t \cdot x'(t) + \psi(x'(t))} \text{ sau} \tag{13}$$

$$\boxed{x = t \cdot \frac{dx}{dt} + \psi\left(\frac{dx}{dt}\right),} \tag{13'}$$

unde $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este o funcţie de clasă $\mathcal{C}^1$.

Rezolvare. Pentru $t \in \mathbb{I}_x \subseteq \mathbb{I}$, variabilă independentă din domeniul de definiţie a soluţiei, se caută $x = x(t)$ funcţie necunoscută de clasă $\mathcal{C}^1$, soluţie pentru ecuaţiile (13) sau $(13')$, chiar de clasă C^2 (sau $t = t(x)$, sau o relaţie algebrică între t şi x, sau x şi t legate parametric). Se derivează ecuaţia Clairaut (13) şi se obţine, formal

$$x'(t) = x'(t) + t \cdot x''(t) + \psi'(x'(t)) \cdot x''(t) \Rightarrow$$

$$x''(t) \cdot \big(t + \psi'(x'(t))\big) = 0.$$

Se notează $x'(t) = p \Rightarrow$

$$p'(t) \cdot (t + \psi'(p)) = 0.$$

•Pe un interval pe care $p' = 0$, se obţine x ca soluţie a $x'(t) = 0$, adică

$$x(t) = ct + d$$

şi, impunând ca x să fie soluţie pentru ecuaţia Clairaut,

$$x(t) = ct + \psi(c), c \in \mathbb{R}.$$

•Pe un interval pe care $t + \psi'(p) = 0$, se obţine x ca soluţie a sistemului parametric

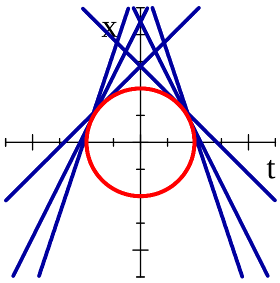
$$\begin{cases} t = -\psi'(p) \\ x = -p\psi'(p) + \psi(p), p \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

soluţie numită *soluţie singulară* a ecuaţiei Clairaut.

○**Exerciţiul 4.** Să se determine o funcţie $x : \mathbb{I} \to \mathbb{R}$ pentru care distanţa de la un punct fixat la orice tangentă la graficul funcţiei să fie constantă.

Rezolvare. Fără să se restrângă generalitatea, se presupune că punctul fixat este originea. Ecuaţia

tangentei la curba x în punctul $(t, x(t))$ este
$$Y - x(t) = x'(t) \cdot (X - t)$$
iar distanţa de la origine la această tangentă este
$$\frac{|-tx'(t) + x(t)|}{\sqrt{1 + (x'(t))^2}} = k.$$
Din motive de continuitate, cantitatea din modul are semn constant şi atunci ecuaţia se rescrie în forma
$$x(t) = tx'(t) + k\sqrt{1 + (x'(t))^2},$$
care este o ecuaţie Clairaut cu $\psi(z) = k\sqrt{1 + z^2}$. Conform paşilor din rezolvare, se derivează formal şi se obţine
$$x''(t) \cdot \left(t + \frac{kx'(t)}{\sqrt{1 + (x'(t))^2}} \right) = 0,$$
de unde rezultă
•soluţia generală $x(t) = ct + k\sqrt{1 + c^2}$, $c \in \mathbb{R}$;
•soluţia singulară Clairaut sub formă parametrică
$$\begin{cases} t = -\dfrac{kp}{\sqrt{1 + p^2}} \\ x = -\dfrac{kp^2}{\sqrt{1 + p^2}} + k\sqrt{1 + p^2} = \dfrac{k}{\sqrt{1 + p^2}}, p \in \mathbb{R}. \end{cases}$$
Rezultă $x^2 + t^2 = k^2$, adică graficul lui x este un arc din cercul cu centrul în origine şi rază k.



Soluţii ne-netede se pot obţine intercalând arce de cerc cu porţiuni de tangentă în capetele arcelor.

○1.6.2. Ecuaţii diferenţiale Lagrange

Forma generală a unei ecuaţii diferenţiale Lagrange:
$$\boxed{x(t) = t \cdot \varphi(x'(t)) + \psi(x'(t))} \text{ sau} \tag{14}$$
$$\boxed{x = t \cdot \varphi\left(\frac{dx}{dt}\right) + \psi\left(\frac{dx}{dt}\right),} \tag{14'}$$
unde $\varphi, \psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sunt funcţii de clasă $\mathcal{C}^1$, cu $\varphi(z) = z, \forall z \in \mathbb{R}$.
Rezolvare. Pentru $t \in \mathbb{I}_x \subseteq \mathbb{I}$, variabilă independentă din domeniul de definiţie a soluţiei, se caută $x = x(t)$ funcţie necunoscută de clasă $\mathcal{C}^1$, soluţie pentru ecuaţiile (14) sau $(14')$, chiar de clasă C^2 (sau $t = t(x)$, sau o relaţie algebrică între t şi x, sau x şi t legate parametric). Se derivează ecuaţia Lagrange (14) şi se obţine, formal
$$x'(t) = \varphi(x'(t)) + t \cdot \varphi'(x'(t)) \cdot x''(t) + \psi'(x'(t)) \cdot x''(t) \Rightarrow$$
$$(x'(t) - \varphi(x'(t))) = \big(t \cdot \varphi'(x'(t)) + \psi'(x'(t))\big) \cdot x''(t).$$

Utilizând metoda parametrilor, se notează $x'(t) = p \Rightarrow$
$(p - \varphi(p)) = \left(t \cdot \varphi'(p) + \psi'(p)\right) \cdot p'$.
Formal,

$$p' = \frac{p - \varphi(p)}{t\varphi'(p) + \psi'(p)}.$$

În ipoteza că p este inversabilă (dacă, de exemplu, x'' are semn constant) se poate inversa şi se obţine t în funcţie de p, cu derivata

$$t' = \frac{\varphi'(p)}{p - \varphi(p)} t + \frac{\psi'(p)}{p - \varphi(p)} = a(p) \cdot t + b(p).$$

Ultima ecuaţie diferenţială este una liniară, care se poate rezolva. Notând cu $t(p) = \theta(p)$ soluţia generală a acestei ecuaţii, se obţine

$$\begin{cases} t = \theta(p) \\ x = \theta(p) \cdot \varphi(p) + \psi(p), p \in \mathbb{R} \end{cases}$$

adică soluţia generală a ecuaţiei Lagrange, sub formă parametrică.