

CURS NR. 4
EDCO, AIA

2. PROBLEME CAUCHY PENTRU ECUAȚII DIFERENȚIALE DE ORDINUL 1

Introducere. În acest capitol se va studia *problema Cauchy* sau *problema având condiție inițială/ date inițiale pentru o ecuație diferențială de ordinul întâi*, constând în determinarea unei soluții $x = x(t)$ a unei ecuații diferențiale, care pentru o valoare dată t_0 ia o valoare precizată x_0 .

În general, noțiunile și teoremele asociate acestei probleme, centrale în teoria ecuațiilor diferențiale, se pot referi la:

-Problema Cauchy pentru o ecuație diferențială dată și conceptele de bază legate de aceasta: soluție, soluție la stânga/ la dreapta, soluție locală/ globală, soluție continuabilă, soluție saturată/ nesaturată, etc;

-O condiție suficientă de existență locală pentru o problemă Cauchy, dată de continuitatea funcției f ;

-Condiții în care orice două soluții ale aceleiași probleme Cauchy coincid pe partea comună a domeniilor lor de definiție;

-Existența soluțiilor saturate și a celor globale;

-Dependența continuă a soluțiilor de date;

-Diferențiabilitatea soluțiilor în raport cu datele.

Teoria se poate studia similar pentru ecuații diferențiale de ordinul n , pentru sisteme de ecuații diferențiale. A se vedea suport bibliografic.

Aici, după definirea conceptului de soluție, este prezentată noțiunea de funcție Lipschitz și, pe baza noțiunii, se enunță și demonstrează câteva rezultate de existență și unicitate ale soluției pentru problema Cauchy asociată unei ecuații diferențiale de ordinul 1. La final va fi enunțat și un rezultat legat de sistemele de ecuații diferențiale liniare.

Definiția 2.1. Fie $\mathbb{I} \subseteq \mathbb{R}$ un interval nevid și deschis din $\mathbb{R}$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ o mulțime nevidă și deschisă, $f : \mathbb{I} \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ o funcție, $t_0 \in \mathbb{I}$ și $\underline{x}_0 \in \Omega$. Problema Cauchy sau problema cu condiție inițială pentru un sistem de ecuații diferențiale de ordinul întâi cu datele $\mathcal{D} = (\mathbb{I}, \Omega, f, t_0, \underline{x}_0)$ constă în determinarea unei funcții $\underline{x} : \mathbb{J} \rightarrow \Omega$ de clasă $\mathcal{C}^1$, unde $\mathbb{J} \subseteq \mathbb{I}$ este un interval cu interior nevid cu $t_0 \in \mathbb{J}$ pentru care

$$\mathcal{PC}(\mathcal{D}) : \begin{cases} \underline{x}'(t) = f(t, \underline{x}(t)), t \in \mathbb{J}, \\ \underline{x}(t_0) = \underline{x}_0. \end{cases}$$

Funcția $\underline{x}$ se numește *soluție a problemei Cauchy* $\mathcal{PC}(\mathcal{D})$.

Pentru $n = 1$, $\mathcal{PC}(\mathcal{D})$ este atașată unei ecuații diferențiale ordinare, de ordinul întâi, iar notația $\underline{x}$ (corespunzătoare unei n -uple sau unui vector coloană cu n -linii) devine x .

Pentru alte noțiuni enumerate în Introducere, a se vedea Bibliografie [Vrabie].

Exemplul 2.1. Unele probleme Cauchy se rezolvă exact, dacă sistemul / ecuația diferențială de ordinul întâi corespunzătoare permite o rezolvare exactă. De exemplu,

$$\mathcal{PC}(\mathcal{D}) : \begin{cases} x'(t) = -x^2(t) \\ x(0) = -1. \end{cases}$$

Se observă că datele problemei sunt:

• $\mathbb{I} = \mathbb{R}$, $\Omega = \mathbb{R}$,

• $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(t, x) = -x^2$,

- $t_0 = 0$ și $x_0 = -1$.

etapa 1 : Se determină toate soluțiile ecuației

$$(*) \quad x'(t) = -x^2(t), t \in \mathbb{I}.$$

Pentru $t \in \mathbb{I}_x \subseteq \mathbb{I}$, variabilă independentă din domeniul de definiție al soluției, se caută $x = x(t)$ funcție necunoscută, soluție pentru ecuația (*).

- Se observă că

$$x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x(t) = 0$$

este soluție singulară pentru ecuația (*).

- Se caută și alte soluții decât cea singulară.

mod detaliat. Folosind Convențiile, se obține

$$\begin{aligned} (*) &\Rightarrow \frac{x'(t)}{-x^2(t)} = 1, \forall t \in \mathbb{I}_x \text{ a.î. } x(t) \neq 0 \left| \int (\cdot) dt \Rightarrow \right. \\ &\int \frac{x'(t)}{-x^2(t)} dt = \int 1 dt, \forall t \in \mathbb{I}_x \text{ a.î. } x(t) \neq 0 \Rightarrow \\ (**) &\frac{1}{x(t)} = t + c, \forall t \in \mathbb{I}_x \text{ a.î. } x(t) \neq 0 \text{ și } c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Ultima relație reprezintă soluția generală a ecuației (*), sub formă implicită.

mod prescurtat. Folosind Convențiile, se obține

$$\begin{aligned} (*) &\Rightarrow \frac{dx}{-x^2} = 1 dt, \forall t \in \mathbb{I}_x \text{ a.î. } x(t) \neq 0 \left| \int_{EVS} \Rightarrow \right. \\ &\int \frac{dx}{-x^2} = \int \frac{1}{t} dt, \forall t \in \mathbb{I}_x \text{ a.î. } x(t) \neq 0 \Rightarrow \\ (**) &\frac{1}{x} = t + c, \forall t \in \mathbb{I}_x \text{ a.î. } x(t) \neq 0 \text{ și } c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Ultima relație reprezintă soluția generală a ecuației (*) sub formă implicită.

Soluția generală a ecuației (*) este dată, sub formă explicită, pentru fiecare $c \in \mathbb{R}$, de

$$x : \mathbb{I}_x \rightarrow \mathbb{R}, x(t) = \frac{1}{t+c}, \forall t \in \mathbb{I}_x,$$

unde domeniul de definiție a soluției, $\mathbb{I}_x$, depinde de constanta c . Pentru fiecare $c \in \mathbb{R}$,

$$\mathbb{I}_x \subseteq \{t \in \mathbb{R}; t+c \neq 0\}.$$

De menționat că (*) are, pe lângă soluția generală (**) și soluția singulară precizată.

etapa 2 : Se determină acea soluție particulară a ecuației (*) (dacă există, dacă e unică) dintre **toate soluțiile**, ce verifică $CI : x(0) = 1$.

Se observă că soluția singulară nu verifică $CI : x(0) = 1$.

Se înlocuiește CI în (**) și se obține $\frac{1}{-1} = 0 + c \Rightarrow c = -1$.

Se înlocuiește această constantă în (**) și se obține

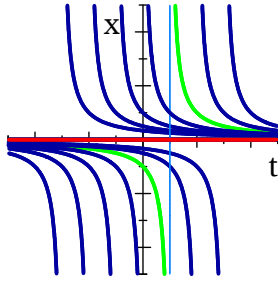
$$(**) \quad \frac{1}{x} = t - 1, \forall t \in \mathbb{I}_x \text{ a.î. } 0 \in \mathbb{I}_x \text{ și } x(t) \neq 0.$$

Ultima relație reprezintă soluția particulară a ecuației (*) ce verifică CI , sub formă implicită.

Soluția (PC) este dată, sub formă explicită, de

$$x : \mathbb{I}_x \rightarrow \mathbb{R}, x(t) = \frac{1}{t-1}, \forall t \in \mathbb{I}_x \text{ interval a.î. } t \neq 1 \text{ și } t=0 \in \mathbb{I}_x.$$

Grafic, sunt reprezentate soluția singulară (cu roșu) a ecuației (*), soluția generală a ecuației (*) prin particularizări aleatoare de constantă de indexare $c = -3, c = -2, c = -1, c = 0, c = 1, c = 2, c = 3$ (cu albastru) și soluția particulară a ecuației (*) ce verifică (CI) (cu verde, $c = -1$ pentru care se ia $\mathbb{I}_x$ cu $t = 0 \in \mathbb{I}_x$). De menționat că acea curbă integrală verde trece prin $(t_0, x_0) = (0, -1)$.



Comentariu. Se observă că

$$x :]-\infty, 1[\rightarrow \mathbb{R}, x(t) = \frac{1}{t-1}$$

este soluție a $\mathcal{PC}(\mathcal{D})$. În ipoteza cunoașterii conceptelor din Bibliografie [Vrabie], este o soluție saturată la dreapta, dar nu este globală la dreapta. Mai mult, este o soluție globală la stânga a $\mathcal{PC}(\mathcal{D})$. În plus, $x|_{]-\infty, \frac{1}{2}[}$ este continuabilă la dreapta, dar nu la stânga, iar $x|_{]-1, 1[}$ este continuabilă la stânga, dar nu la dreapta.

Din aceste exemple se deduce, chiar și în cazul în care f depinde de t , indiferent de cât de regulată este f în raport cu $\mathbf{x}$ din Ω , $\mathcal{PC}(\mathcal{D})$ poate să nu aibă soluții globale.

Observația 2.1. a) Există probleme Cauchy care nu au soluții sau care au soluție unică sau care au mai multe soluții. Dacă există, soluția, unică sau nu, poate fi locală sau globală, saturată sau nesaturată. Dintre problemele și conceptele menționate, se va studia existența și/ sau unicitatea problemei Cauchy.

b) Spre deosebire de ecuația din Exemplul 2.1., majoritatea ecuațiilor diferențiale nu pot fi rezolvate exact. Din acest motiv s-au căutat condiții suficiente cât mai generale asupra datelor unei probleme cu valori inițiale pentru ca aceasta să admită cel puțin o soluție. Primul care a stabilit un rezultat în acest sens a fost Augustin Cauchy (1789 – 1857) care, în 1820, a utilizat *metoda liniilor poligonale* pentru a demonstra *existența locală* (nu și *unicitatea*) pentru problema cu valori inițiale al cărui membru drept este o funcție de clasă $\mathcal{C}^1$. Metoda, îmbunătățită de Rudolf Otto Sigismund Lipschitz (1832 – 1903), a fost impusă în cadru mai general de către Giuseppe Peano (1858 – 1932) în 1890.

Un pas important în ceea ce privește *problema aproximării soluțiilor unei ecuații diferențiale* a fost făcut în 1890 de către Emile Picard (1856 – 1941), când a introdus **metoda aproximațiilor succesive**, devenită curând foarte cunoscută.

În general, principala preocupare a matematicienilor secolelor *XVII – XVIII*, referitoare la ecuațiile diferențiale, a fost de a pune în evidență unele metode, fie de **determinare explicită** a soluțiilor, fie de **aproximare** a lor. S-a constatat însă că aceste obiective sunt rareori realizabile. În conferința susținută în cadrul Congresului Internațional al Matematicienilor din 1908, Henri Poincaré a afirmat: "*În trecut o ecuație era considerată rezolvată numai dacă se exprima soluția cu ajutorul unui număr finit de funcții cunoscute; dar aceasta este greu de realizat într-un caz dintr-o sută. Ceea ce putem face întotdeauna, sau mai degrabă ceea ce putem întotdeauna încerca să facem, este de a rezolva problema calitativă, adică să încercăm să găsim forma curbei ce reprezintă funcția necunoscută.*"

Definiția 2.2. O funcție $F : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ are proprietatea Lipschitz pe Ω sau că este *lipschitziană* pe Ω (global) dacă există $L > 0$ astfel încât

$$\|F(\mathbf{x}) - F(\mathbf{y})\|_{\mathbb{R}^m} \leq L \cdot \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_{\mathbb{R}^n}, \text{ pentru orice } (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \Omega^2$$

(distanța dintre oricare două valori ale funcției nu poate crește oricât în raport cu distanța dintre

argumente). A se vedea animația din https://en.wikipedia.org/wiki/Lipschitz_continuity.

Propoziția 2.1. Dacă $F : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ are proprietatea Lipschitz pe Ω atunci F este continuă pe Ω .

Demonstrație. Fie $F : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ o funcție având proprietatea Lipschitz pe Ω .

Fie $\underline{x} \in \Omega$ și un șir $(\underline{x}^k)_k \subset \Omega$ de elemente din Ω astfel încât $\underline{x}^k \rightarrow \underline{x}$. Atunci, pentru orice $k \in \mathbb{N}$, din proprietatea Lipschitz,

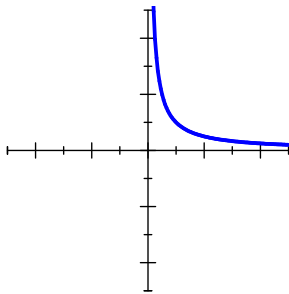
$$\|F(\underline{x}^k) - F(\underline{x})\|_{\mathbb{R}^m} \leq L \|\underline{x}^k - \underline{x}\|_{\mathbb{R}^n}.$$

Cum $\underline{x}^k \rightarrow \underline{x}$, atunci $\|\underline{x}^k - \underline{x}\|_{\mathbb{R}^n} \rightarrow 0$ și deci $\|F(\underline{x}^k) - F(\underline{x})\|_{\mathbb{R}^m} \rightarrow 0$, adică $F(\underline{x}^k) \rightarrow F(\underline{x})$.

Conform caracterizării continuității cu șiruri, se obține că F este continuă în orice punct $\underline{x} \in \Omega$, deci pe Ω .

Observația 2.2. Reciproca Propoziției 2.1. este falsă. Există funcții continue pe Ω care nu au proprietatea Lipschitz pe Ω .

De exemplu, fie $F :]0, \infty[\subset \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^1$, $F(x) = \frac{1}{x}$.



Funcția F este continuă, chiar derivabilă pe $\Omega =]0, \infty[\subset \mathbb{R}^1$. Dar F nu are proprietatea Lipschitz pe $\Omega =]0, \infty[$. Într-adevăr, se presupune prin reducere la absurd că ar exista $L > 0$ a.î.

$$|F(x) - F(y)| \leq L|x - y|, \forall x, y \in]0, \infty[.$$

De menționat că normele pe $\mathbb{R}^1$ coincid și coincid cu norma modul. Atunci

$$\left| \frac{1}{x} - \frac{1}{y} \right| \leq L|x - y| \Leftrightarrow Lxy \geq 1, \forall x, y \in]0, \infty[,$$

ceea ce este fals (se poate alege $x = \frac{1}{L}, y = \frac{1}{2}$).

Deci presupunerea făcută este falsă, adică F nu are proprietatea Lipschitz pe $\Omega =]0, \infty[$.

Propoziția 2.2. Dacă $F : \Omega = \mathbb{I} \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ este funcție derivabilă pe un interval, cu derivata mărginită pe acel interval, atunci F are proprietatea Lipschitz pe intervalul respectiv.

Demonstrație. Fie $F : \Omega = \mathbb{I} \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție derivabilă pentru care există $M > 0$ astfel încât

$$|F'(x)| \leq M, \forall x \in \mathbb{I}.$$

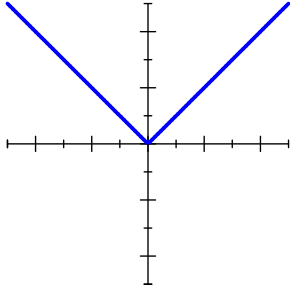
Pentru $(x, y) \in \mathbb{I}^2$ arbitrari se aplică teorema lui Lagrange pe intervalul $[x, y]$ sau $[y, x]$. Atunci există $z_{x,y} \in \mathbb{I}$ a.î.

$$F(x) - F(y) = F'(z_{x,y}) \cdot (x - y) \Rightarrow |F(x) - F(y)| = |F'(z_{x,y})| \cdot |x - y| \leq M|x - y|.$$

Cum x și y sunt arbitrari, rezultă că F are proprietatea Lipschitz pe $\mathbb{I}$.

Observația 2.2. a) Reciproca este falsă. Există funcții care au proprietatea Lipschitz pe un interval și care nu sunt derivabile pe acel interval.

De exemplu, fie $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $F(x) = |x|$.



Funcția modul (normă) este cu proprietatea Lipschitz pe $\mathbb{I} = \mathbb{R}$, deoarece

$$|F(x) - F(y)| = ||x| - |y|| \leq 1 \cdot |x - y|, \text{ pentru orice } x, y \in \Omega = \mathbb{I}.$$

Dar nu este derivabilă pe $\mathbb{I} = \mathbb{R}$, deoarece nu este derivabilă în 0.

- b) Dacă o funcție $F : \Omega = \mathbb{I} \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ are proprietatea Lipschitz pe un interval $\mathbb{I}$ și este derivabilă pe $\mathbb{I}$, atunci derivata sa este mărginită, constanta de mărginire fiind constanta Lipschitz L .
- c) Pentru funcții vectoriale, $F : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, Propoziția 2.2. se păstrează, completând ca domeniul Ω să fie convex, iar "derivata funcției F " se înlocuiește cu "derivatele parțiale ale funcțiilor componente ale lui F ".

Se va studia cazul ecuațiilor diferențiale ordinare, de ordinul întâi, celelalte rezultate obținându-se similar.

Teorema 2.1. (teorema de existență și unicitate, Picard) Fie $\mathbb{I}, \Omega \subseteq \mathbb{R}$ două intervale nevide și deschise din $\mathbb{R}$, $f : \mathbb{I} \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție, $t_0 \in \mathbb{I}$ și $x_0 \in \Omega$. Fie problema Cauchy cu datele $\mathcal{D} = (\mathbb{I}, \Omega, f, t_0, x_0)$,

$$\mathcal{PC}(\mathcal{D}) : \begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)), t \in \mathbb{I}, \\ x(t_0) = x_0. \end{cases}$$

Dacă:

- (i) f este continuă pe $\mathbb{I} \times \Omega$;
 - (ii) există $L > 0$ a.î., pentru orice $t \in \mathbb{I}$, fixat,
- $$|f(t, u) - f(t, v)| \leq L \cdot |u - v|, \forall (u, v) \in \Omega^2,$$

adică are proprietatea Lipschitz globală în raport cu a doua variabilă, x ,

atunci problema Cauchy $\mathcal{PC}(\mathcal{D})$ are soluție unică, $x : \mathbb{J} \subset \mathbb{I} \rightarrow \Omega$, dată de *metoda aproximațiilor succesive*, adică soluția x a problemei este limita șirului $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ definit de:

$$\begin{cases} x_0(t) = x_0, \forall t \in \mathbb{J} \\ x_{n+1}(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x_n(s)) ds, \forall t \in \mathbb{J}, \forall n \in \mathbb{N}. \end{cases} \quad (1)$$

○ *Demonstrație.*

Existența soluției

• pasul 1. În ipoteza că există o soluție a $\mathcal{PC}(\mathcal{D})$, $x : \mathbb{J} \subset \mathbb{I} \rightarrow \Omega$, pe un interval $\mathbb{J}$ precizat ulterior, atunci x este de clasă $\mathcal{C}^1$ și verifică

$$\begin{cases} (2) x'(t) = f(t, x(t)), t \in \mathbb{J}, \\ (CI) x(t_0) = x_0. \end{cases}$$

Deoarece x' și f sunt funcții continue, integrând relația (2) de la t_0 la $t \in \mathbb{J}$, se obține

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds, t \in \mathbb{J}. \quad (3)$$

Reciproc, dacă $x : \mathbb{J} \subset \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{R}$ este o funcție care verifică ecuația integrală (3), atunci, deoarece f este continuă, conform teoremei fundamentale a calculului integral,

- x este soluție a ecuației diferențiale: este de clasă de clasă $\mathcal{C}^1$ pe $\mathbb{J}$ și

$$x'(t) = \frac{d}{dt} \left(x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds \right) = f(t, x(t)), t \in \mathbb{J};$$

- x verifică $(CI) : x(t_0) = x_0$.

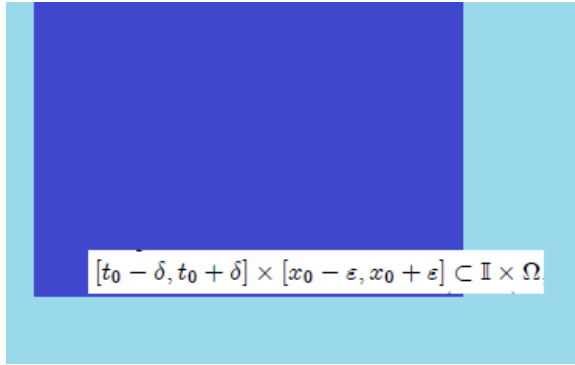
Se obține că x este o soluție a problemei Cauchy $\mathcal{PC}(\mathcal{D})$.

Deci x este soluție a $\mathcal{PC}(\mathcal{D})$ dacă și numai dacă x verifică ecuația integrală (3).

- pasul 2. Toate funcțiile șirului de funcții $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ definit de (1) **verifică condiția inițială** $(CI) x_n(t_0) = x_0, \forall n \in \mathbb{N}$.
- pasul 3. Toate funcțiile șirului de funcții $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ definit de (1) **sunt funcții continue pe un interval** $\mathbb{J} \subset \mathbb{I}$ precizat ulterior, deoarece f este continuă și toate intergralele care intervin generează funcții continue.
- pasul 4. Deoarece $\mathbb{I} \times \Omega$ este un interval bidimensional nevid deschis, cu $t_0 \in \mathbb{I}$ și $x_0 \in \Omega$, se poate alege $\delta > 0$ și $\varepsilon > 0$ astfel încât

$$\mathbb{D} = [t_0 - \delta, t_0 + \delta] \times [x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon] \subset \mathbb{I} \times \Omega,$$

$\mathbb{D}$ un dreptunghi cu interior centrat în (t_0, x_0) .



Deoarece f este continuă pe $\mathbb{I} \times \Omega$ atunci, conform teoremei lui Weierstrass, f este funcție mărginită (și își atinge marginile) pe orice mulțime mărginită și închisă din $\mathbb{I} \times \Omega$, deci și pe $\mathbb{D}$ compact. Deci există $M > 0$ astfel încât

$$|f(t, u)| \leq M, \forall (t, u) \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta] \times [x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon].$$

Chiar $M = \sup_{(t,u) \in \mathbb{D}} |f(t, u)|$.

$$\text{Fie } h = \min \left\{ \delta, \frac{\varepsilon}{M} \right\}.$$

Se arată că: $\forall t \in [t_0 - h, t_0 + h] \Rightarrow x_n(t) \in [x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon], \forall n \in \mathbb{N}$.

Demonstrația se face prin inducție matematică. Într-adevăr:

$P(0) : x_0(t) \in [x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]$ din construcție.

$P(1) : \forall t \in [t_0 - h, t_0 + h] \Rightarrow x_1(t) \in [x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]$ - adevărat, deoarece:

$$\begin{aligned} \forall t \in [t_0 - h, t_0 + h] &\Rightarrow \\ \Rightarrow |x_1(t) - x_0| &\stackrel{(1)}{=} \left| \int_{t_0}^t f(s, x_0) ds \right| \leq M |t - t_0| \leq Mh \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

$P(k) \Rightarrow P(k+1), \forall k \in \mathbb{N}$ - adevărat, deoarece:

Se presupune $P(k)$ propoziție adevărată, $\forall k \in \mathbb{N}$, adică

$$\forall t \in [t_0 - h, t_0 + h] \Rightarrow x_k(t) \in [x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon], \forall k \in \mathbb{N}.$$

Atunci $\forall t \in [t_0 - h, t_0 + h] \Rightarrow$

$$\Rightarrow |x_{k+1}(t) - x_0| \stackrel{(1)}{=} \left| \int_{t_0}^t f(s, x_k(s)) ds \right| \stackrel{\text{ip. inductivă}}{\leq} M |t - t_0| \leq Mh \leq \varepsilon.$$

- pasul 5. Se arată că **șirul** $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ definit de (1) **converge uniform pe intervalul** $\mathbb{J} = [t_0 - h, t_0 + h]$.

Se poate scrie

$$x_n(t) = (x_n(t) - x_{n-1}(t)) + (x_{n-1}(t) - x_{n-2}(t)) + \cdots + (x_1(t) - x_0(t)) + x_0, t \in \mathbb{J}.$$

Atunci, convergența uniformă a șirului de funcții $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ este echivalentă cu convergența uniformă a seriei de funcții

$$\sum_{n=1}^{\infty} (x_n(t) - x_{n-1}(t)), t \in \mathbb{J}, \quad (4)$$

pentru care $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ este chiar șirul sumelor parțiale.

Pentru a arăta că seria (4) converge uniform pe intervalul considerat este suficient să se arate că termenul său general este majorat în modul de termenul general al unei serii numerice, cu termeni pozitivi, convergentă, apoi utilizându-se criteriul lui Weierstrass de convergență uniformă.

Prin inducție matematică, se arată că:

$$\forall t \in [t_0 - h, t_0 + h] \Rightarrow |x_n(t) - x_{n-1}(t)| \leq ML^{n-1} \frac{|t - t_0|^n}{n!}, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Într-adevăr:

$P(1)$: adevărat, deoarece:

$$\forall t \in [t_0 - h, t_0 + h] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |x_1(t) - x_0(t)| \stackrel{(1)}{=} \left| \int_{t_0}^t f(s, x_0) ds \right| \leq M |t - t_0|.$$

$P(k) \Rightarrow P(k+1)$, $\forall k \in \mathbb{N}^*$ - adevărat, deoarece:

Se presupune $P(k)$ propoziție adevărată, $\forall k \in \mathbb{N}$, adică

$$\forall t \in [t_0 - h, t_0 + h] \Rightarrow |x_k(t) - x_{k-1}(t)| \leq ML^{k-1} \frac{|t - t_0|^k}{k!}, \forall k \in \mathbb{N}^*.$$

Atunci $\forall t \in [t_0 - h, t_0 + h] \Rightarrow$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow |x_{k+1}(t) - x_k(t)| \stackrel{(1)}{=} \left| \int_{t_0}^t f(s, x_k(s)) ds - \int_{t_0}^t f(s, x_{k-1}(s)) ds \right| = \\ &= \left| \int_{t_0}^t (f(s, x_k(s)) - f(s, x_{k-1}(s))) ds \right| \leq \int_{t_0}^t |f(s, x_k(s)) - f(s, x_{k-1}(s))| ds \stackrel{\text{cond. Lipschitz}}{\leq} \\ &\leq L \int_{t_0}^t |x_k(s) - x_{k-1}(s)| ds \stackrel{\text{ip. inductivă}}{\leq} L \int_{t_0}^t ML^{k-1} \cdot \frac{|s - t_0|^k}{k!} ds \leq \\ &\leq L \cdot ML^{k-1} \cdot \frac{|t - t_0|^{k+1}}{(k+1)!}. \end{aligned}$$

Deci

$$\forall t \in [t_0 - h, t_0 + h] \Rightarrow |x_n(t) - x_{n-1}(t)| \leq ML^{n-1} \frac{|t - t_0|^n}{n!} \leq ML^{n-1} \frac{h^n}{n!}, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Seria numerică $\sum_{n=1}^{\infty} ML^{n-1} \frac{h^n}{n!}$ este convergentă sau din criteriul raportului, deoarece:

$$-a_n = \frac{M}{L} \cdot \frac{(Lh)^n}{n!} \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}^*,$$

$$-\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{M}{L} \cdot \frac{(Lh)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{L}{M} \cdot \frac{n!}{(Lh)^n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{Lh}{(n+1)} = 0 < 1,$$

Sau deoarece $\frac{M}{L} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(Lh)^n}{n!}$ are aceeași natură cu $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(Lh)^n}{n!} = e^{Lh}$, convergentă.

Atunci, conform criteriului lui Weierstrass, seria de funcții (4) este uniform convergentă pe intervalul $\mathbb{J}$ și deci șirul de funcții $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ definit de (1) converge uniform pe intervalul $\mathbb{J}$

- pasul 6. Șirul de funcții $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ definit de (1) converge uniform pe intervalul $\mathbb{J}$ la o funcție

$$x : \mathbb{J} \subset \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{R}.$$

Mai mult, deoarece funcțiile care intervin în (1) sunt continue, din convergența uniformă se obține că x **este funcție continuă** și că

$$t \in [t_0 - h, t_0 + h] \Rightarrow x(t) \in [x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon] \subset \Omega,$$

adică $x : \mathbb{J} \subset \mathbb{I} \rightarrow \Omega$.

- pasul 7. Se demonstrează că funcția $x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ găsită la pasul 6 este soluția căutată a $\mathcal{PC}(\mathcal{D})$.

Într-adevăr, trecând la limită în relația de recurență din (1), se obține că

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds, t \in \mathbb{J},$$

adică x verifică (3) și, conform pasului 1, este soluție a problemei Cauchy $\mathcal{PC}(\mathcal{D})$.

Unicitatea soluției Se obține din unicitatea limitei șirului de funcții pe $\mathbb{J}$.

Se presupune că problema $\mathcal{PC}(\mathcal{D})$ ar mai admite o soluție $y : \mathbb{J} \subset \mathbb{I} \rightarrow \Omega$. Atunci, din pasul 1, se obține că

$$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(s, y(s)) ds, t \in \mathbb{J}.$$

În plus, $\forall t \in [t_0 - h, t_0 + h] = \mathbb{J} \Rightarrow$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow |x_n(t) - y(t)| \stackrel{(1)}{=} \left| \int_{t_0}^t f(s, x_{n-1}(s)) ds - \int_{t_0}^t f(s, y(s)) ds \right| = \\ &= \left| \int_{t_0}^t (f(s, x_{n-1}(s)) - f(s, y(s))) ds \right| \leq \int_{t_0}^t |f(s, x_{n-1}(s)) - f(s, y(s))| ds \stackrel{\text{cond. Lipschitz}}{\leq} \\ &\leq L \int_{t_0}^t |x_{n-1}(s) - y(s)| ds \stackrel{\text{inducție}}{\leq} ML^{n-1} \frac{|t - t_0|^n}{n!} \leq \frac{M}{L} \cdot \frac{(Lh)^n}{n!}, \forall n \in \mathbb{N}^*. \end{aligned}$$

Deoarece $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{M}{L} \cdot \frac{(Lh)^n}{n!} = 0$, uniform în raport cu t , ca șir de numere, din inegalitate se deduce că

$$y(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n(t) = x(t), \text{ uniform în raport cu } t.$$

Observația 2.3. a) Teorema precedentă are caracter local, deoarece asigură existența soluției pe un interval $[t_0 - h, t_0 + h] = \mathbb{J}$ de lungime mică, simetric, cu centrul în t_0 .

b) În unele variante ale teoremei, intervalul bidimensional deschis nevid $\mathbb{I} \times \Omega$ (care permite studiul continuabilității și ale altor atribute pentru soluție) este înlocuit cu intervalul bidimensional închis, compact, centrat în (t_0, x_0)

$$\mathbb{D} = [t_0 - a, t_0 + a] \times [x_0 - b, x_0 + b] = \{(t, x) \in \mathbb{R}^2 \mid |t - t_0| \leq a, |x - x_0| \leq b\},$$

iar condiția Lipschitz globală pentru f în raport cu variabila x cu o condiție Lipschitz locală în raport cu variabila x , adică $\forall (t_0, x_0) \in \mathbb{D}$, există o vecinătate $V \in \mathcal{V}((t_0, x_0))$ (chiar există o vecinătate compactă V_K) și există $L > 0$ (depinzând de V , de (t_0, x_0)) a.î.

$$|f(t, u) - f(t, v)| \leq L \cdot |u - v|, \forall (t, u), (t, v) \in V.$$

Exemplul 2.2. Unele probleme Cauchy nu se pot rezolva exact, dacă sistemul / ecuația diferențială de ordinul întâi corespunzătoare nu permit o rezolvare exactă. De exemplu,

$$\mathcal{PC}(\mathcal{D}) : \begin{cases} x'(t) = 2t + 3x^5(t) \\ x(0) = 0. \end{cases}$$

Se observă că datele problemei sunt:

- $\mathbb{I} = \mathbb{R}, \Omega = \mathbb{R}$,
- $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(t, x) = 2t + 3x^5$,
- $t_0 = 0$ și $x_0 = 0$.

etapa 1. Se verifică ipotezele teoremei Picard în sensul Observației 2.3., b):

(i) f este continuă pe $\mathbb{I} \times \Omega$;

(ii) pentru $(t_0, x_0) = (0, 0)$, există o vecinătate $V \in \mathcal{V}((t_0, x_0))$ (chiar există o vecinătate compactă V_K) și există $L > 0$ (depinzând de V , de (t_0, x_0)) a.î.

$$|f(t, u) - f(t, v)| \leq L \cdot |u - v|, \forall (t, u), (t, v) \in V.$$

Într-adevăr, $\exists \mathbb{D} = [0 - \delta, 0 + \delta] \times [0 - \varepsilon, 0 + \varepsilon] = [-\delta, \delta] \times [-\varepsilon, \varepsilon] = V_K \in \mathcal{V}((0, 0))$ și există $L = 3\varepsilon^4 > 0$ a.î.

$$\begin{aligned} |f(t, u) - f(t, v)| &= |(2t + 3u^5) - (2t + 3v^5)| = |u - v| \cdot 3|u^4 + u^3v + u^2v^2 + uv^3 + v^4| \leq \\ &\leq |u - v| \cdot 3(|u^4| + |u^3v| + |u^2v^2| + |uv^3| + |v^4|) \leq 3\varepsilon^4 \cdot |u - v|, \forall (t, u), (t, v) \in V_K, \end{aligned}$$

adică are proprietatea Lipschitz locală în raport cu a doua variabilă, x .

etapa 2. Se aplică Teorema. Problema Cauchy $\mathcal{PC}(\mathcal{D})$ are soluție unică, $x : \mathbb{J} \subset \mathbb{I} \rightarrow \Omega$, dată de metoda aproximațiilor succesive, adică soluția x a problemei este limita șirului $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ definit de:

$$\begin{cases} x_0(t) = x_0, \forall t \in \mathbb{J} \\ x_{n+1}(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x_n(s)) ds, \forall t \in \mathbb{J}, \forall n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

unde $\mathbb{J} = [0 - h, 0 + h]$, cu $h = \min\left(\delta, \frac{\varepsilon}{M}\right)$.

Deoarece

$$|f(t, u)| = |2t + 3u^5| \leq 2|t| + 3|u|^5 \leq 2\delta + 3\varepsilon^5, (t, u) \in V_K \Rightarrow M = 2\delta + 3\varepsilon^5 > 0.$$

etapa 2. Se scriu primele trei iterații Picard.

$$x_0(t) = 0, \forall t \in [-h, h]; (\text{albastru})$$

$$x_1(t) = 0 + \int_0^t f(s, x_0(s)) ds = 0 + \int_0^t (2s + 3 \cdot 0^5) ds = t^2, \forall t \in [-h, h]; (\text{magenta})$$

$$x_2(t) = 0 + \int_0^t f(s, x_1(s)) ds = 0 + \int_0^t (2s + 3 \cdot (s^2)^5) ds = t^2 + 3 \cdot \frac{t^{11}}{11}, \forall t \in [-h, h]; (\text{verde})$$

Folosind calculatorul, se poate calcula și

$$x_3(t) = 0 + \int_0^t f(s, x_2(s)) ds = 0 + \int_0^t \left(2s + 3 \cdot \left(s^2 + 3 \cdot \frac{s^{11}}{11} \right)^5 \right) ds =$$

$= \frac{729}{9018856}t^{56} + \frac{1215}{688127}t^{47} + \frac{405}{25289}t^{38} + \frac{270}{3509}t^{29} + \frac{9}{44}t^{20} + \frac{3}{11}t^{11} + t^2, \forall t \in [-h, h];$ (reprezentarea acestei iterații are multe oscilații în jurul originii, cauzate de puterile mari, și se justifică doar într-o regiune cu h mic din plan, nu pe $[-h, h] = [-5, 5]$ cum sunt reprezentările anterioare)

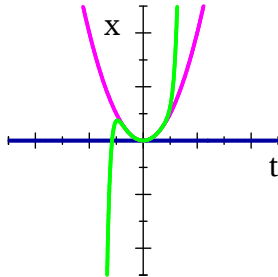
...

Mai mult, se observă că soluția problemei Cauchy (există și este unică) se aproximează pe intervalul $[-h, h]$ cu funcții polinomiale (ca la serii Taylor).

În plus, eroarea de aproximare a x este oferită de inegalitatea

$$|x_n(t) - x(t)| \leq \frac{M}{L} \cdot \frac{(Lh)^n}{n!}, \forall n \in \mathbb{N}^*, \forall t \in [-h, h],$$

algoritmul de aproximare fiind stopat.



Observația 2.4. Dacă se renunță la condiția Lipschitz, presupunând numai că f este continuă pe un

interval bidimensional (compact), există Teorema lui Peano care asigură că prin orice punct (t_0, x_0) din intervalul bidimensional trece reprezentarea unui grafic al unei soluții. Se poate demonstra numai existența locală a $\mathcal{PC}(\mathcal{D})$, nu și unicitatea ei. Nu se poate demonstra că șirul aproximațiilor succesive din Teorema Picard converge uniform.

De exemplu (Peano), fie $\mathcal{PC}(\mathcal{D}) : \begin{cases} x'(t) = x^{\frac{2}{3}}(t) \\ x(t_0) = 0. \end{cases}$

Se observă că datele problemei sunt:

- $\mathbb{I} = \mathbb{R}, \Omega = \mathbb{R},$
- $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(t, x) = 3x^{\frac{2}{3}},$
- t_0 arbitrar și $x_0 = 0.$

etapa 1 : Se determină soluția generală a ecuației

$$(*) x'(t) = x^{\frac{2}{3}}(t), t \in \mathbb{I}.$$

Pentru $t \in \mathbb{I}_x \subseteq \mathbb{I}$, variabilă independentă din domeniul de definiție al soluției, se caută $x = x(t)$ funcție necunoscută, soluție pentru ecuația (*).

- Se observă că

$$x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x(t) = 0$$

este soluție singulară pentru ecuația (*).

- Se caută și alte soluții decât cea singulară. Folosind Convențiile, se obține

$$(*) \Rightarrow \frac{x'(t)}{x^{\frac{2}{3}}(t)} = 1, \forall t \in \mathbb{I}_x \text{ a.î. } x(t) \neq 0 \left| \int (\cdot) dt \Rightarrow \right.$$

$$\int x^{-\frac{2}{3}}(t) \cdot x'(t) dt = \int 1 dt, \forall t \in \mathbb{I}_x \text{ a.î. } x(t) \neq 0 \Rightarrow$$

$$(**) 3x^{\frac{1}{3}}(t) = t + c, \forall t \in \mathbb{I}_x \text{ a.î. } x(t) \neq 0 \text{ și } c \in \mathbb{R}.$$

Ultima relație reprezintă soluția generală a ecuației (*) sub formă implicită.

Soluția generală a ecuației (*) este dată, sub formă explicită, pentru fiecare $c \in \mathbb{R}$, de

$$x : \mathbb{I}_x \rightarrow \mathbb{R}, x(t) = \frac{1}{3^3}(t + c)^3, \forall t \in \mathbb{I}_x,$$

unde domeniul de definiție a soluției, $\mathbb{I}_x$, depinde de constanta c . Pentru fiecare $c \in \mathbb{R}$,

$$\mathbb{I}_x \subseteq \{t \in \mathbb{R}; t + c \neq 0\}.$$

De fapt, chiar dacă în $t = -c$ nu sunt verificate condițiile de lucru, de integrare, de explicitare, se poate verifica că

$$x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x(t) = \frac{1}{3^3}(t + c)^3, c \in \mathbb{R}$$

sunt soluții pentru (*) ce alcătuiesc soluția generală.

De menționat că (*) are, pe lângă soluția generală (**) și soluția singulară precizată.

etapa 2 : Se determină acea soluție particulară a ecuației (*) (dacă există, dacă e unică) dintre **toate soluțiile**, ce verifică $CI : x(t_0) = 0$.

Se observă că soluția singulară verifică $CI : x(t_0) = 0$.

Se înlocuiește CI și în (**) și se obține $0 = \frac{1}{3}(t_0 + c)^3 \Rightarrow c = -t_0$.

Se înlocuiește această constantă în (**) și se obține

$$3x^{\frac{1}{3}}(t) = t - t_0, \forall t \in \mathbb{R}.$$

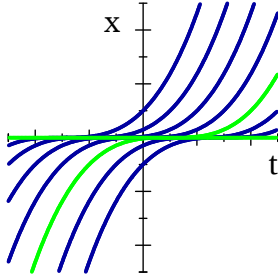
Ultima relație reprezintă soluția particulară a ecuației (*) ce verifică CI , sub formă implicită.

Soluția $\mathcal{PC}(\mathcal{D})$ este dată, sub formă explicită, de

$$x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x(t) = \frac{1}{3^3}(t - t_0)^3, \forall t \in \mathbb{R}.$$

Grafic, sunt reprezentate soluția singulară (cu roșu și apoi verde) a ecuației (*), soluția generală

a ecuației (*) prin particularizări aleatoare de constantă de indexare $c = -3, c = -2, c = -1, c = 0, c = 1, c = 2, c = 3$ (cu albastru) și soluția particulară a ecuației (*) ce verifică (CI) (cu verde, $c = -t_0 = -1$). De menționat că două curbe integrale verzi trec prin $(t_0, x_0) = (1, 0)$, după ce fixez $t_0 = 1$.



Deci soluția $\mathcal{PC}(\mathcal{D})$ nu mai este unică. Acest lucru este posibil, deoarece nu se verifică ipotezele teoremei Picard.

$f(t, u) = u^{\frac{2}{3}}$ este continuă dar nu are proprietatea Lipschitz în raport cu variabila u în nicio vecinătate a punctului $(t_0, 0)$. Într-adevăr,

$$|f(t, u) - f(t, v)| = \left| \sqrt[3]{u^2} - \sqrt[3]{v^2} \right| = \left| \frac{u^2 - v^2}{\sqrt[3]{u^4} + \sqrt[3]{u^2v^2} + \sqrt[3]{v^4}} \right| = \frac{|u + v|}{\sqrt[3]{u^4} + \sqrt[3]{u^2v^2} + \sqrt[3]{v^4}} \cdot |u - v|$$

iar fracția $g(u, v) = \frac{|u + v|}{\sqrt[3]{u^4} + \sqrt[3]{u^2v^2} + \sqrt[3]{v^4}}$ nu este mărginită pentru u și v apropiate de 0. De exemplu,

$$u_n = v_n = \frac{1}{n^3} \rightarrow 0 \text{ pentru } n \rightarrow \infty \Rightarrow g\left(\frac{1}{n^3}, \frac{1}{n^3}\right) = \frac{\frac{2}{n^3}}{\frac{3}{n^4}} = \frac{2}{3}n \rightarrow \infty \text{ pentru } n \rightarrow \infty.$$

Observația 2.5. (generalizări ale Teoremei Picard)

a) Fie $\mathbb{I} \subseteq \mathbb{R}$ un interval nevid și deschis din $\mathbb{R}$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ o mulțime nevidă și deschisă, $f : \mathbb{I} \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ o funcție, $t_0 \in \mathbb{I}$ și $\mathbf{x}_0 \in \Omega$. *Problema Cauchy pentru un sistem de n ecuații diferențiale de ordinul întâi* cu datele $\mathcal{D} = (\mathbb{I}, \Omega, f, t_0, \mathbf{x}_0)$ (cu același f) constă în determinarea unei funcții $\mathbf{x} : \mathbb{J} \rightarrow \Omega$ de clasă $\mathcal{C}^1$, unde $\mathbb{J} \subseteq \mathbb{I}$ este un interval cu interior nevid cu $t_0 \in \mathbb{J}$ pentru care

$$\mathcal{PC}(\mathcal{D}) : \begin{cases} \mathbf{x}'(t) = f(t, \mathbf{x}(t)), t \in \mathbb{J}, \\ \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0. \end{cases}$$

Se demonstrează analog rezultatul de existență și unicitate Picard, în aceleași ipoteze, pe componente)

b) Fie $\mathbb{I} \subseteq \mathbb{R}$ un interval nevid și deschis din $\mathbb{R}$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ o mulțime nevidă și deschisă, $F : \mathbb{I} \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$, $f = (f_1, \dots, f_n)$ o funcție, $t_0 \in \mathbb{I}$ și $\mathbf{x}_0 = (x_{0,1}, \dots, x_{0,n}) \in \Omega$. *Problema Cauchy pentru un sistem de n ecuații diferențiale de ordinul întâi* (în formă normală) cu datele $\mathcal{D} = (\mathbb{I}, \Omega, F, t_0, \mathbf{x}_0)$ (cu f_i posibil diferite pe componente) constă în determinarea unei funcții $\mathbf{x} : \mathbb{J} \rightarrow \Omega$, $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ (n -uplă de funcții pentru care $(t, x_1(t), \dots, x_n(t)) \in \mathbb{J} \times \Omega$ pentru orice $t \in \mathbb{J} \subseteq \mathbb{I}$) de clasă $\mathcal{C}^1$, unde $\mathbb{J} \subseteq \mathbb{I}$ este un interval cu interior nevid cu $t_0 \in \mathbb{J}$ pentru care

$$\mathcal{PC}(\mathcal{D}) : \begin{cases} (SnED1) \begin{cases} x'_1(t) = f_1(t, x_1(t), \dots, x_n(t)) \\ x'_n(t) = f_n(t, x_1(t), \dots, x_n(t)) \\ \vdots \\ x'_n(t) = f_n(t, x_1(t), \dots, x_n(t)) \end{cases} \\ (CI) \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \quad (x_i(t_0) = x_{0,i}, \forall i = \overline{1, n}) \end{cases}, t \in \mathbb{J},$$

Se demonstrează analog rezultatul de existență și unicitate Picard, în aceleași ipoteze asupra $f_i, i = \overline{1, n}$, pe componente).

Mai mult, dacă se consideră funcțiile cu valori vectoriale

$$\begin{cases} \underline{\mathbf{x}} : \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{R}^n, \underline{\mathbf{x}}(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t)), \\ F : \mathbb{I} \times \Omega \subset \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n, F(t, \mathbf{u}) = (f_1(t, u_1, \dots, u_n), \dots, f_n(t, u_1, \dots, u_n)), \end{cases}$$

atunci problema Cauchy poate fi rescrisă în forma vectorială

$$\begin{cases} (\underline{\mathbf{x}})'(t) = (F)'(t, \mathbf{u}) \\ \underline{\mathbf{x}}(t_0) = \underline{\mathbf{x}}_0. \end{cases}$$

Pentru ultima formă se poate rescrie teorema de existență și unicitate, în ipoteza că F este continuă pe $\mathbb{I} \times \Omega$ și local lipschitziană pe Ω în raport cu variabila vectorială $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n)$.

c) Fie $\mathbb{I} \subseteq \mathbb{R}$ un interval nevid și deschis din $\mathbb{R}$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ o mulțime nevidă și deschisă, $f : \mathbb{I} \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție, $t_0 \in \mathbb{I}$ și $\underline{\mathbf{x}}_0 = (x_{0,1}, \dots, x_{0,n}) \in \Omega$. Problema Cauchy pentru o ecuație diferențială de ordin n (în formă normală), cu datele $\mathcal{D} = (\mathbb{I}, \Omega, f, t_0, \underline{\mathbf{x}}_0)$ constă în determinarea unei funcții $\underline{\mathbf{x}} : \mathbb{J} \rightarrow \Omega$ de clasă $\mathcal{C}^n$, unde $\mathbb{J} \subseteq \mathbb{I}$ este un interval cu interior nevid cu $t_0 \in \mathbb{J}$ și cu $(x(t), x'(t), \dots, x^{(n-1)}(t)) \in \Omega, \forall t \in \mathbb{J}$, pentru care

$$\mathcal{PC}(\mathcal{D}) : \begin{cases} (EDn) \ x^{(n)}(t) = f(t, x(t), x'(t), \dots, x^{(n-1)}(t)), t \in \mathbb{J}, \\ (CI) \ x(t_0) = x_{0,1}, x'(t_0) = x_{0,2}, \dots, x^{(n-1)}(t_0) = x_{0,n}. \end{cases}$$

Se demonstrează analog rezultatul de existență și unicitate Picard, în aceleași ipoteze asupra f .

Într-adevăr, se notează:

$$\begin{cases} x \stackrel{not}{=} x_1 \\ x' \stackrel{not}{=} x_2 \\ \vdots \\ x^{(n-1)} \stackrel{not}{=} x_n \\ F(t, x_1, \dots, x_n) = (x_2, \dots, x_n, f(t, x_1, \dots, x_n)). \end{cases}$$

și problema Cauchy pentru o ecuație diferențială de ordin n se reformulează ca problemă Cauchy pentru un sistem de n ecuații diferențiale de ordinul 1, despre care se știe că admite o soluție și că aceasta este unică,

$$\begin{cases} (SnED1) \begin{cases} x'_1 = x_2 \\ x'_2 = x_3 \\ \vdots \\ x'_{n-1} = x_n \\ x'_n = f(t, x_1, \dots, x_n) \end{cases}, t \in \mathbb{J}, \\ (CI) \ x_1(t_0) = x_{0,1}, \dots, x_n(t_0) = x_{0,n} \end{cases}$$

În concluzie, pentru o ecuație diferențială de ordin n sau pentru un sistem de n ecuații diferențiale de ordinul 1 pentru care sunt date și n condiții inițiale (în același punct t_0), în anumite condiții de lipschitzianitate, problema Cauchy asociată are soluție unică, care este dată de metoda aproximațiilor succesive (Picard).