CURS NR. 5
EDCO, AIA

3. ECUAŢII DIFERENŢIALE DE ORDINUL n LINIARE
3.1. Ecuaţii diferenţiale de ordinul n liniare având coeficienţi variabili

În primul curs s-a observat că modelarea matematică a fenomenelor din tehnică, fizică, biologie, chimie, ecologie, demografie poate conduce la ecuaţii diferenţiale nu numai de ordinul 1, ci şi de ordin superior. De exemplu, o situaţie este a ecuaţiei

$x''(t) + \omega^2 x(t) = 0, \forall t \in \mathbb{R},$

care modelează *oscilaţiile unui resort* ($\omega^2 = \frac{k}{m}$), *oscilaţiile mici ale unui pendul matematic* ($\omega^2 = \frac{g}{l}$), *oscilaţiile armonice ale unui circuit electric* ($\omega^2 = \frac{1}{LC}$). Este o ecuaţie diferenţială ce va fi identificată ca fiind de ordinul 2, liniară, omogenă, având coeficienţi constanţi. Ecuaţia *vibraţiilor forţate cu amortizare vâscoasă*

$x''(t) + 2\nu\omega x'(t) + \omega^2 x(t) = \dfrac{F(t)}{m}, \forall t \in \mathbb{R},$

va fi identificată ca fiind una neomogenă (a se vedea Bibliografie [Păltineanu]).

Forma generală a unei ecuaţii diferenţiale liniare neomogene/omogene de ordinul n cu coeficienţi variabili:

$$\boxed{x^{(n)}(t) + a_1(t)\,x^{(n-1)}(t) + ... + a_{n-1}(t)\,x'(t) + a_n(t)\,x(t) = f(t), t \in \mathbb{I}} \quad (1)$$

$$\boxed{\frac{d^n x}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}} + ... + a_{n-1}\frac{dx}{dt} + a_n x = f, t \in \mathbb{I}} \quad (1')$$

unde $\mathbb{I} \subseteq \mathbb{R}$ este un interval nevid deschis, $a_i : \mathbb{I} \to \mathbb{R}$, $i \in \{1, ..., n\}$, sunt funcţii continue numite *coeficienţi (variabili)*, iar $f : \mathbb{I} \to \mathbb{R}$ este funcţie continuă, numită *termen liber*. Dacă f este neidentic nulă, atunci (1) se numeşte ecuaţie *neomogenă*; dacă f este identic nulă, atunci (1) se numeşte ecuaţie *omogenă*. O funcţie $x : \mathbb{I} \to \mathbb{R}$ de clasă $\mathcal{C}^n$ ce verifică (1) se numeşte *soluţie* pentru ecuaţie.

Problema Cauchy asociată unei ecuaţii diferenţiale de ordinul n liniare neomogene/omogene, având coeficienţi variabili, cu datele $\mathcal{D} = (\mathbb{I}, f, t_0, \mathbf{x}_0)$ constă în determinarea unei funcţii $x : \mathbb{I} \to \mathbb{R}$ de clasă $\mathcal{C}^n$, unde $\mathbb{I} \subseteq \mathbb{R}$ este un interval nevid deschis, $t_0 \in \mathbb{I}, x_{0,i} \in \mathbb{R}$, $i = \overline{0, n-1}$ pentru care

$$\mathcal{PC}(\mathcal{D}) : \begin{cases} (1) \;\; x^{(n)}(t) + a_1(t)\,x^{(n-1)}(t) + ... + a_{n-1}(t)\,x'(t) + a_n(t)\,x(t) = f(t), t \in \mathbb{I} \\ (CI) \;\; x(t_0) = x_{0,0}, x'(t_0) = x_{0,1}, ..., x^{(n-1)}(t_0) = x_{0,n-1}. \end{cases}$$

Funcţia x se numeşte *soluţie a problemei Cauchy* $\mathcal{PC}(\mathcal{D})$.

Observaţia 3.1.1. a) (*rezolvarea numerică a problemei Cauchy*)

○Forma normală a ecuaţiei (1) este

$x^{(n)}(t) = f(t) - a_n(t)\,x(t) - a_{n-1}(t)\,x'(t) - ... - a_1(t)\,x^{(n-1)}(t), t \in \mathbb{I}.$

Notând

$g : \mathbb{I} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, g(t, \mathbf{u}) = g(t, u_1, ..., u_n) = f(t) - a_n(t)\,u_1(t) - a_{n-1}(t)\,u_2(t) - ... - a_1(t)\,u_n(t),$

ecuaţia (1) se poate rescrie

$x^{(n)} = g\left(t, x, x', ..., x^{(n-1)}\right), t \in \mathbb{I}.$

Fixând $t \in \mathbb{I}$, se arată că, pentru orice $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$,

$|g(t, \mathbf{u}) - g(t, \mathbf{v})| = |a_n(t) \cdot (u_1 - v_1) + a_{n-1}(t) \cdot (u_2 - v_2) + \cdots + a_1(t) \cdot (u_n - v_n)| \leq$

$\leq |a_n(t)| \cdot |u_1 - v_1| + |a_{n-1}(t)| \cdot |u_2 - v_2| + ... + |a_1(t)| \cdot |u_n - v_n|.$
Funcţiile a_i fiind continue pe $\mathbb{I}$, sunt mărginite pe orice interval de forma $[a-\delta, a+\delta] \subseteq \mathbb{I}$, adică $\exists M_i > 0$ a.î.

$|a_i(t)| \leq M_i, \forall t \in [a-\delta, a+\delta].$

Fie $M = \max\{M_i; i = 1, ..., n\}$. Atunci,

$|g(t, \mathbf{u}) - g(t, \mathbf{v})| \leq M \cdot (|u_1 - v_1| + |u_2 - v_2| + \cdots + |u_n - v_n|).$

Deoarece pentru orice numere pozitive $\alpha_1, ..., \alpha_n \geq 0$, $\sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \cdots + \alpha_n^2} \geq \alpha_i, \forall i$, se obţine

$|g(t, \mathbf{u}) - g(t, \mathbf{v})| \leq M \cdot n \cdot \sqrt{(u_1 - v_1)^2 + (u_2 - v_2)^2 + \cdots + (u_n - v_n)^2} = L \cdot \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|,$

unde $L = M \cdot n$. Deci funcţia g are proprietatea Lipschitz în raport cu variabila $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$.

Rezultă, conform teoremei Picard, că ecuaţia diferenţială de ordinul n liniară admite soluţie unică (pentru orice funcţii continue $f, a_1, ..., a_n$), dată de *metoda aproximaţiilor succesive*. Se poate arăta că **intervalul $\mathbb{J}$ pe care este definită soluţia coincide cu** $\mathbb{I}$ (a se vedea Bibliografie, [Vrabie])

b) (*rezolvarea exactă a problemei Cauchy*) Pentru ecuaţiile diferenţiale liniare de ordin n, mai ales pentru unele cazuri particulare (coeficienţii a_i constanţi sau de formă monoame, termenul liber f de formă cvasipolinoame sau chiar oarecare) se vor pune în evidenţă ulterior *metode exacte specifice* de determinare a soluţiei.

Observaţia 3.1.2. a) Se observă că, dacă x_p este o soluţie particulară a ecuaţiei diferenţiale liniare neomogene (1) atunci, pentru orice soluţie x_o a ecuaţiei omogene ataşate,

$$\boxed{x^{(n)}(t) + a_1(t)\, x^{(n-1)}(t) + ... + a_{n-1}(t)\, x'(t) + a_n(t)\, x(t) = 0, t \in \mathbb{I}} \tag{2}$$

funcţia $x_o + x_p$ este o soluţie a ecuaţiei neomogene (1).

Într-adevăr, în ipoteze de regularitate asupra x_p şi x_o,

$$\begin{aligned}
&(x_o(t) + x_p(t))^{(n)} + a_1(t)(x_o(t) + x_p(t))^{(n-1)} + ... + a_{n-1}(t)(x_o(t) + x_p(t))' + a_n(t)(x_o(t) + x_p(t)) = \\
&= \left(x_o^{(n)}(t) + a_1(t)\, x_o^{(n-1)}(t) + ... + a_{n-1}(t)\, x_o'(t) + a_n(t)\, x_0(t)\right) + \\
&+ \left(x_p^{(n)}(t) + a_1(t)\, x_p^{(n-1)}(t) + ... + a_{n-1}(t)\, x_p'(t) + a_n(t)\, x_p(t)\right) = 0 + f(t) = f(t), \forall t \in \mathbb{I}.
\end{aligned}$$

Reciproc este adevărat: orice soluţie a ecuaţiei neomogene poate fi scrisă ca suma dintre o soluţie particulară a ecuaţiei neomogene şi o soluţie a ecuaţiei omogene.

b) Se propune să se găsească metode de determinare a soluţiei generale a ecuaţiei omogene (2) şi a unei soluţii particulare a ecuaţiei neomogene (1).

Notaţia 3.1.1. Fie

$$\mathcal{L} : \mathcal{C}^n(\mathbb{I}, \mathbb{R}) \to \mathcal{C}(\mathbb{I}, \mathbb{R}),\ \mathcal{L}(x) = x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}x' + a_n x, \forall x \in \mathcal{C}^n(\mathbb{I}, \mathbb{R}), \tag{3}$$

unde $a_i \in \mathcal{C}^n(\mathbb{I}, \mathbb{R}), i = \overline{1, n}$.

Ecuaţia liniară de ordin n omogenă (2) se poate scrie sub forma

$$\mathcal{L}(x) = 0 \tag{4}$$

Propoziţia 3.1.1. În ipotezele din Notaţia 3.1.1., funcţia $\mathcal{L}$ este o aplicaţie liniară între spaţiile liniare $(\mathcal{C}^n(\mathbb{I}, \mathbb{R}), +, \cdot, \mathbb{R})$ şi $(\mathcal{C}(\mathbb{I}, \mathbb{R}), +, \cdot, \mathbb{R})$.

○ *Demonstraţie.* Deoarece funcţia de derivare este o aplicaţie liniară, rezultă că

$\forall (\alpha, x_1, x_2) \in \mathbb{R} \times (\mathcal{C}^n(\mathbb{I}, \mathbb{R}))^2$:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(\alpha x_1 + x_2) &= (\alpha x_1 + x_2)^{(n)} + a_1(\alpha x_1 + x_2)^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(\alpha x_1 + x_2)' + a_n(\alpha x_1 + x_2) = \\
&= (\alpha x_1)^{(n)} + a_1(\alpha x_1)^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(\alpha x_1)' + a_n(\alpha x_1) + x_2^{(n)} + a_1 x_2^{(n-1)} + \cdots \\
&+ a_{n-1}x_2' + a_n x_2 =
\end{aligned}$$

$$= \alpha\left(x_1{}^{(n)} + a_1 x_1{}^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}x_1' + a_n x_1\right) + x_2^{(n)} + a_1 x_2^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}x_2' + a_n x_2 =$$
$$= \alpha\mathcal{L}(x_1) + \mathcal{L}(x_2),$$

adică liniaritatea pentru $\mathcal{L}$.

Propoziţia 3.1.2. În ipotezele din Notaţia 3.1.1., mulţimea soluţiilor ecuaţiei (4), adică $\mathbb{V} = \{x \in \mathcal{C}^n(\mathbb{I}, \mathbb{R}); \mathcal{L}(x) = 0\}$ este un subspaţiu liniar al spaţiului $(\mathcal{C}^n(\mathbb{I}, \mathbb{R}), +, \cdot, \mathbb{R})$.

○*Demonstraţie.* Deoarece $\mathcal{L}$ este o aplicaţie liniară, iar mulţimea soluţiilor ecuaţiei (4) este $\mathbb{V} = \ker(\mathcal{L})$, rezultă că $\mathbb{V}$ este un subspaţiu liniar al lui $(\mathcal{C}^n(\mathbb{I}, \mathbb{R}), +, \cdot, \mathbb{R})$, deci $(\mathbb{V}, +, \cdot, \mathbb{R})$ este un spaţiu liniar.

Propoziţia 3.1.3. În ipotezele din Notaţia 3.1.1., $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{V} = n$.

○*Demonstraţie.* Se demonstrează că există un izomorfism între spaţiile liniare $(\mathbb{V}, +, \cdot, \mathbb{R})$ şi $(\mathbb{R}^n, +, \cdot, \mathbb{R})$.
Se defineşte

$$T : \mathbb{V} \to \mathbb{R}^n, T(x) = \left(x(t_0), x'(t_0), \ldots, x^{(n-1)}(t_0)\right), \forall x \in \mathbb{V},$$

unde t_0 este un punct arbitrar, fixat în $\mathbb{I}$.
Se demonstrează că T este o funcţie liniară.

$\forall(\alpha, x_1, x_2) \in \mathbb{R}\times(\mathbb{V})^2$:

$$T(\alpha x_1 + x_2) = \Big((\alpha x_1 + x_2)(t_0), (\alpha x_1 + x_2)'(t_0), ..., (\alpha x_1 + x_2)^{(n-1)}(t_0)\Big) =$$
$$= \alpha\Big(x_1(t_0), x_1'(t_0), ..., x_1^{(n-1)}(t_0)\Big) + \Big(x_2(t_0), x_2'(t_0), ..., x_2^{(n-1)}(t_0)\Big) =$$
$$= \alpha T(x_1) + T(x_2).$$

Se demonstrează că funcţia liniară T este injectivă.

Din $T(x) = \theta_{\mathbb{R}^n}$ rezultă că funcţia $x(t) = 0, \forall t \in \mathbb{I}$, verifică ecuaţia diferenţială (4) sau (2) şi cum, conform teoremei de existenţă şi unicitate a problemei Cauchy

$$(\mathcal{PC})(\mathcal{D}) : \begin{cases} (2) \;\; x^{(n)}(t) + a_1(t)x^{(n-1)}(t) + ... + a_{n-1}(t)x'(t) + a_n(t)x(t) = 0, t \in \mathbb{I} \\ (CI) \;\; x(t_0) = x_{0,0}, x'(t_0) = x_{0,1}, ..., x^{(n-1)}(t_0) = x_{0,n-1}. \end{cases}$$

această soluţie este unică, rezultă $\ker(T) = \{\theta_{\mathbb{V}}\}$, deci T este injectivă.
Se demonstrează că funcţia liniară T este surjectivă.

Fie $t_0 \in \mathbb{V}$ fixat. Conform Teoremei de existenţă şi unicitate a problemei Cauchy anterioare, problema admite soluţie x definită pe $\mathbb{I}$ şi $\left(x(t_0), x'(t_0), \ldots, x^{(n-1)}(t_0)\right) \in \mathbb{R}^n$. Atunci T este surjectivă.
Atunci T definit anterior este un izomorfism de spaţii liniare. Rezultă că $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{V} = \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^n = n$ şi deci $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{V} = n$.

Teorema 3.1.1. Mulţimea soluţiilor unei ecuaţii diferenţiale de ordinul n liniare, omogene este un spaţiu vectorial de dimensiune n.
Demonstraţie. Rezultă din Propoziţiile $3.1.1, 3.1.2, 3.1.3$.

Observaţia 3.1.3. **a)** Conform Teoremei 3.1.1, este suficient să se determine o bază $B = (x_1, x_2, ..., x_n)$ în $\mathbb{V}$, adică exact n soluţii particulare liniar independente pentru (2), şi atunci soluţia generală pentru ecuaţia diferenţială de ordinul n liniară omogenă are soluţia generală

$$\boxed{x_o(t; c_1, ..., c_n) = c_1 x_1(t) + ... + c_n x_n(t), \forall t \in \mathbb{I} \text{ şi } c_1, ..., c_n \in \mathbb{R}.} \tag{5}$$

Elementele bazei B se numesc *soluţii fundamentale* ale ecuaţiei omogene, iar B *sistem fundamental de soluţii.*
Mai mult, conform Observaţiei 3.1.2, dacă se cunoaşte x_p o soluţie particulară pentru ecuaţia diferenţială de ordinul n liniară neomogenă, atunci soluţia generală pentru ecuaţia diferenţială de

ordinul n liniară neomogenă este

$$\boxed{x(t;c_1,...,c_n) = x_o(t;c_1,...,c_n) + x_p(t), \forall t \in \mathbb{I} \text{ şi } c_1,...,c_n \in \mathbb{R}.} \tag{6}$$

b) Se reaminteşte că funcţiile $x_1,...,x_n$ din $\mathbb{V}$ sunt *funcţii liniar dependente* dacă există $\lambda_1,...,\lambda_n$ în $\mathbb{R}$, scalari nu toţi nuli, astfel încât

$$\lambda_1 x_1 + ... + \lambda_n x_n = \theta_{\mathbb{V}},$$

iar în caz contrar *funcţii liniar independente*. Studiul dependenţei pentru funcţii-soluţii ale ecuaţiei omogene se face folosind noţiunea de wronskian, propusă ulterior.

c) Există metode de determinare pentru B atunci când ecuaţiile (1) şi (2) coeficienţi constanţi $a_i \in \mathbb{R}, i = \overline{1,n}$.

d) Există metode de determinare pentru o soluţie particulară a ecuaţiei neomogene, x_p, atunci când se cunoaşte un sistem fundamental de soluţii pentru ecuaţia omogenă. Una dintre ele este metoda variaţiei constantelor.

Definiţia 3.1.1. Fie $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathcal{C}^{n-1}(\mathbb{I}, \mathbb{R})$. Se numeşte *wronskianul funcţiilor* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ determinantul

$$\boxed{W(t;x_1,x_2,\ldots,x_n) = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & ... & x_n \\ x_1' & x_2' & ... & x_n' \\ ... & ... & ... & ... \\ x_1^{(n-1)} & x_2^{(n-1)} & ... & x_n^{(n-1)} \end{vmatrix}(t), \forall t \in \mathbb{I}.} \tag{7}$$

Teorema 3.1.2. Funcţiile $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{V}$ sunt liniar independente dacă şi numai dacă

$$W(t;x_1,x_2,\ldots,x_n) \neq 0, \forall t \in \mathbb{I}.$$

○*Demonstraţie.* Fie $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{V}$. Se presupune că există $\lambda_1,...,\lambda_n$ în $\mathbb{R}$, scalari nu toţi nuli, astfel încât

$$\lambda_1 x_1 + ... + \lambda_n x_n = \theta_{\mathbb{V}} \Leftrightarrow$$
$$\lambda_1 x_1(t) + ... + \lambda_n x_n(t) = 0, \forall t \in \mathbb{I}.$$

Se derivează de $n-1$ ori relaţia anterioară şi se obţine:

$$\begin{cases} \lambda_1 x_1(t) + ... + \lambda_n x_n(t) = 0 \\ \lambda_1 x_1'(t) + ... + \lambda_n x_n'(t) = 0 \\ ... \\ \lambda_1 x_1^{(n-1)}(t) + ... + \lambda_n x_n^{(n-1)}(t) = 0 \end{cases}, \forall t \in \mathbb{I}.$$

Sistemul în necunoscutele $(\lambda_1,...,\lambda_n)$ are soluţii diferite de soluţia $(0,...,0)$ dacă şi numai dacă determinantul său, care este wronskianul, este nul.

Teorema 3.1.3. (**Liouville**) Fie $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{V}$. Atunci

$$\boxed{W(t;x_1,x_2,\ldots,x_n) = W(t_0;x_1,x_2,\ldots,x_n) \cdot e^{-\int_{t_0}^{t} a_1(s)ds}, \forall t \in \mathbb{I},} \tag{8}$$

unde $t_0 \in \mathbb{I}$ este un punct arbitrar fixat.

○*Demonstraţie.* Se ştie că derivata unui determinant de ordin n ale cărui elemente sunt funcţii reale de variabilă reală este o sumă de n determinanţi obţinuţi din determinantul iniţial derivând în fiecare dintre ei succesiv elementele fiecărei linii (sau coloane).

Se derivează succesiv liniile în $W(t;x_1,x_2,\ldots,x_n)$ raport cu variabila independentă t şi se obţine

$$W'(t;x_1,x_2,\dots,x_n)=\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & ... & x_n\\ x_1' & x_2' & ... & x_n'\\ ... & ... & ... & ...\\ x_1^{(n-1)} & x_2^{(n-1)} & ... & x_n^{(n-1)}\end{vmatrix}'(t)=$$

$$=\begin{vmatrix} x_1' & x_2' & ... & x_n'\\ x_1' & x_2' & ... & x_n'\\ ... & ... & ... & ...\\ x_1^{(n-1)} & x_2^{(n-1)} & ... & x_n^{(n-1)}\end{vmatrix}(t)+\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & ... & x_n\\ x_1'' & x_2'' & ... & x_n''\\ ... & ... & ... & ...\\ x_1^{(n-1)} & x_2^{(n-1)} & ... & x_n^{(n-1)}\end{vmatrix}(t)+...+$$

$$+\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & ... & x_n\\ x_1' & x_2' & ... & x_n'\\ ... & ... & ... & ...\\ x_1^{(n)} & x_2^{(n)} & ... & x_n^{(n)}\end{vmatrix}(t),\forall t\in\mathbb{I}.$$

Se observă că primii $n-1$ determinanţi din suma $W'(t;x_1,x_2,\dots,x_n)$ au câte două linii egale, deci sunt nuli, şi rezultă

$$W'(t;x_1,x_2,\dots,x_n)=\begin{vmatrix} x_1 & \cdots & x_n\\ x_1' & \cdots & x_n'\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ x_1^{(n-2)} & \cdots & x_n^{(n-2)}\\ x_1^{(n)} & \cdots & x_n^{(n)}\end{vmatrix}(t),\forall t\in\mathbb{I}.$$

Deoarece $x_1,x_2,\dots,x_n\in\mathbb{V}$, adică sunt soluţii ale ecuaţiei omogene, atunci elementele ultimei linii din determinantul anterior pot fi înlocuite cu

$x_i^{(n)}=-a_1x_i^{(n-1)}-\cdots-a_{n-1}x_i'-a_nx_i, i=\overline{1,n}.$

Se descompune $W'(t;x_1,x_2,\dots,x_n)$ din nou ca o sumă de n determinanţi, dintre care $n-1$ au câte două linii proporţionale, deci sunt egali cu zero. Se obţine

$W'(t;x_1,x_2,\dots,x_n)=-a_1(t)\,W(t;x_1,x_2,\dots,x_n),\forall t\in\mathbb{I}.$

Este o ecuaţie cu variabile separabile, cu soluţia

$W(t;x_1,x_2,\dots,x_n)=c\cdot e^{-\int_{t_0}^{t}a_1(s)ds},$

unde t_0 este un punct arbitrar fixat din $\mathbb{I}$. Pentru $t=t_0$ se obţine $c=W(t_0;x_1,x_2,\dots,x_n)$, de unde concluzia.

Propoziţia 3.1.4. Fie $\forall x_1,x_2,\dots,x_n\in\mathbb{V}$. Atunci wronskianul lor sau este identic nul pe $\mathbb{I}$ sau este diferit de zero în orice punct din $\mathbb{I}$.

○*Demonstraţie.* Fie $x_1,x_2,\dots,x_n\in\mathbb{V}$. Dacă există un punct $t_0\in\mathbb{I}$ pentru care $W(t_0;x_1,x_2,\dots,x_n)=0$ atunci, conform Teoremei Liouville, rezultă că

$W(t;x_1,x_2,\dots,x_n)=0,\forall t\in\mathbb{I}.$

Exemplul 3.1.1. Se determină soluţia generală a ecuaţiei

$(*_{EO})\,t^2x''-5tx'+8x=0, t\in\mathbb{I}$ interval a.î. $0\notin\mathbb{I}$,

ştiind că admite soluţiile particulare

$x_1(t)=t^2, x_2(t)=t^4, t\in\mathbb{I}.$

Rezolvare. Se observă că

$(*_{EO})\;x''(t)+\frac{-5t}{t^2}x'(t)+\frac{8}{t^2}x(t)=0, t\in\mathbb{I}$ interval a.î. $0\notin\mathbb{I}$,

este ecuaţie diferenţială de ordinul 2, liniară, având coeficienţii variabili

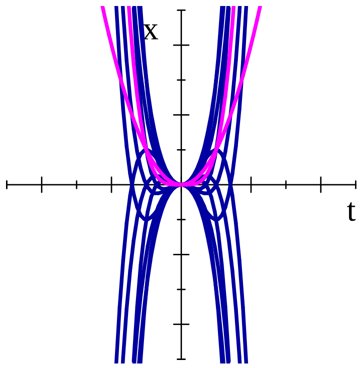
$a_1(t) = \frac{-5t}{t^2}, a_2(t) = \frac{8}{t^2}, t \in \mathbb{I},$
omogenă.

Se observă că $x_1, x_2 \in \mathcal{C}^2(\mathbb{I}, \mathbb{R})$ şi, prin calcul direct, că verifică $(*_{EO})$, adică sunt soluţii particulare ale $(*_{EO})$.

Mai mult, sunt funcţii liniar independente, deoarece
$W(t; x_1, x_2) = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ x_1' & x_2' \end{vmatrix}(t) = \begin{vmatrix} t^2 & t^4 \\ 2t & 4t^3 \end{vmatrix} = 2t^5 \neq 0, \forall t \in \mathbb{I}.$

Atunci (x_1, x_2) este un sistem fundamental de soluţii pentru $(*_{EO})$ şi deci soluţia generală a ecuaţiei $(*_{EO})$ este
$x_o(t; c_1, c_2) = c_1 \cdot t^2 + c_2 t^4, \forall t \in \mathbb{I}$ şi $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Reprezentând grafic pe $\mathbb{I} =]0, \infty[$, apoi pe $\mathbb{I} =]0, \infty[$ pentru $(c_1, c_2) = (1, 0)$ şi $(c_1, c_2) = (0, 1)$ cu magenta (soluţiile particulare din sistemul fundamental) şi pentru
$(c_1, c_2) = (1, 1), (c_1, c_2) = (1, -1), (c_1, c_2) = (-1, 1), (c_1, c_2) = (-1, -1),$
$(c_1, c_2) = (1, 2), (c_1, c_2) = (2, 1), (c_1, c_2) = (-1, 2), (c_1, c_2) = (-2, 1)$
$(c_1, c_2) = (1, -2), (c_1, c_2) = (2, -1), (c_1, c_2) = (-1, -2), (c_1, c_2) = (-2, -1)$
cu albastru, se obţine



Teorema 3.1.4. (metoda variaţiei constantelor) Dacă
$x_o(t; c_1, ..., c_n) = c_1 x_1(t) + ... + c_n x_n(t), \forall t \in \mathbb{I}$ şi $c_1, ..., c_n \in \mathbb{R}$
este soluţia generală pe $\mathbb{I}$ a ecuaţiei diferenţiale de ordin n liniare şi omogene (2), cu $(x_1, ..., x_n)$ un sistem fundamental de soluţii, atunci o soluţie particulară $x_p(t)$ pe $\mathbb{I}$ a ecuaţiei diferenţiale de ordin n liniare şi neomogene (1) este de forma

$$\boxed{x_p(t) = u_1(t)\, x_1(t) + ... + u_n(t)\, x_n(t), \forall t \in \mathbb{I}.} \tag{9}$$

unde $u_i' : \mathbb{I} \to \mathbb{R}$, $i \in \{1, ..., n\}$, sunt funcţii-soluţii ale sistemului

$$\begin{cases} u_1'(t)\, x_1(t) + ... + u_n'(t)\, x_n(t) = 0 \\ u_1'(t)\, x_1'(t) + ... + u_n'(t)\, x_n'(t) = 0 \\ ... \\ u_1'(t)\, x_1^{(n-1)}(t) + ... + u_n'(t)\, x_n^{(n-1)}(t) = f(t), \end{cases} \tag{10}$$

iar $u_i : \mathbb{I} \to \mathbb{R}$, $i \in \{1, ..., n\}$ se obţin prin integrare.

○*Demonstraţie.* Se caută o soluţie particulară x_p a ecuaţiei neomogene (1), de forma (9), cu funcţiile $u_i, i = \overline{1, n}$ necunoscute.

Se determină aceste funcţii impunând ca x_p să verifice ecuaţia neomogenă (1). Se derivează şi se folosesc ecuaţiile (1) şi (2), obţinându-se sistemul funcţional algebric liniar neomogen (10) cu necunoscutele $u_i', i = \overline{1, n}$, al carui determinant este chiar $W(t; x_1, x_2, \ldots, x_n) \neq 0, \forall t \in \mathbb{I}$. Folosind o regulă de tip Cramer, se determină $u_i', i = \overline{1, n}$, se integrează rezultatele şi se obţin $u_i, i = \overline{1, n}$.

Exemplul 3.1.2. Se determină soluţia generală a ecuaţiei

$(*_{EN})\; t^2x'' - 5tx' + 8x = t, t \in \mathbb{I}$ interval a.î. $0 \notin \mathbb{I}$,

ştiind că ecuaţia omogenă ataşată admite soluţiile particulare

$x_1(t) = t^2, x_2(t) = t^4, t \in \mathbb{I}$.

Rezolvare. Se observă că

$(*_{EN})\; (*_{EO})\; x''(t) + \dfrac{-5t}{t^2}x'(t) + \dfrac{8}{t^2}x(t) = \dfrac{t}{t^2}, t \in \mathbb{I}$ interval a.î. $0 \notin \mathbb{I}$,

este ecuaţie diferenţială de ordinul 2, liniară, având coeficienţii variabili

$a_1(t) = \dfrac{5t}{t^2}, a_2(t) = \dfrac{8}{t^2}, t \in \mathbb{I}$,

neomogenă, cu termenul liber

$f(t) = \dfrac{t}{t^2}, t \in \mathbb{I}$.

<u>etapa 1.</u> Se determină soluţia generală a $(*_{EO})$ ataşate ecuaţiei (găsită la Exemplul 3.1.1.),

$x_o(t; c_1, c_2) = c_1 \cdot t^2 + c_2t^4, \forall t \in \mathbb{I}$ şi $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

<u>Etapa 2 :</u> Se determină o soluţie particulară $x_p(t) =?$ a ecuaţiei neomogene $(*_{EN})$, cu metoda variaţiei constantelor.

Deoarece (x_1, x_2) este un sistem fundamental de soluţii pentru $(*_{EO})$ se caută x_p de forma

$x_p(t) = u_1(t) \cdot \underbrace{t^2}_{x_1(t)} + u_2(t) \cdot \underbrace{t^4}_{x_2(t)}, \forall t \in \mathbb{I}$,

unde $u_i' : \mathbb{I} \to \mathbb{R}$, $i \in \{1, 2\}$, sunt soluţii ale sistemului

$$\begin{cases} u_1'(t)\, t^2 + u_2'(t)\, t^4 = 0 \\ u_1'(t)\,(2t) + u_2'(t)\left(4t^3\right) = \dfrac{1}{t} \end{cases}$$

Se calculează

$$\Delta(t) = W(t; x_1, x_2) = \begin{vmatrix} t^2 & t^4 \\ 2t & 4t^3 \end{vmatrix} = 2t^5 \neq 0, \forall t \in \mathbb{I}.$$

$$\Delta_1(t) = \begin{vmatrix} 0 & t^4 \\ \dfrac{1}{t} & 4t^3 \end{vmatrix} = -t^3, \forall t \in \mathbb{I}.$$

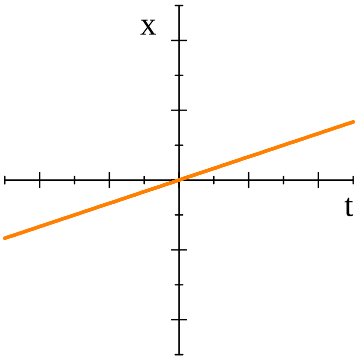
$$\Delta_2(t) = \begin{vmatrix} t^2 & 0 \\ 2t & \dfrac{1}{t} \end{vmatrix} = t, \forall t \in \mathbb{I}.$$

Atunci

$$\left\{\begin{array}{l} u_1'(t) = \frac{\Delta_1(t)}{\Delta(t)} = \frac{1}{2}\dfrac{-t^3}{t^5}, \\ u_2'(t) = \frac{\Delta_2(t)}{\Delta(t)} = \frac{1}{2}\dfrac{-t}{t^5}. \end{array}\right. \Bigg| \int (\cdot)\, dt \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} u_1(t) = \frac{1}{2}\frac{1}{t} + k_1, \\ u_2(t) = \frac{1}{6}\dfrac{-1}{t^3} + k_2. \end{array}\right.$$

Deoarece se caută o soluţie particulară x_p se face convenţia să se aleagă $k_1 = 0$, $k_2 = 0$. S-a obţinut

$x_p(t) = \frac{1}{2}\frac{1}{t} \cdot t^2 + \frac{1}{6}\dfrac{-1}{t^3} \cdot t^4 = \frac{1}{3}t, \forall t \in \mathbb{I}$.



Etapa 3 : Soluţia generală a ecuaţiei neomogene $(*_{EN})$ este dată de

$x(t; c_1, c_2) = x_o(t; c_1, c_2) + x_p(t), \forall t \in \mathbb{I}$ şi $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, adică

$x(t; c_1, c_2) = c_1 \cdot t^2 + c_2 t^4 + \frac{1}{3}t, \forall t \in \mathbb{I}$ şi $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Reprezentând grafic pe $\mathbb{I} =]0, \infty[$, apoi pe $\mathbb{I} =]0, \infty[$, pentru $(c_1, c_2) = (1, 0)$ şi $(c_1, c_2) = (0, 1)$ cu magenta (soluţiile particulare ale EN corespunzătoare celor din sistemul fundamental), pentru $(c_1, c_2) = (0, 0)$ cu portocaliu (soluţia particulară determinată cu metoda variaţiei constantelor) şi pentru

$(c_1, c_2) = (1, 1), (c_1, c_2) = (1, -1), (c_1, c_2) = (-1, 1), (c_1, c_2) = (-1, -1),$

$(c_1, c_2) = (1, 2), (c_1, c_2) = (2, 1), (c_1, c_2) = (-1, 2), (c_1, c_2) = (-2, 1)$

$(c_1, c_2) = (1, -2), (c_1, c_2) = (2, -1), (c_1, c_2) = (-1, -2), (c_1, c_2) = (-2, -1)$

cu albastru, se obţine