CURS NR. 6
EDCO, AIA

3.2. Ecuaţii diferenţiale liniare de ordinul n cu coeficienţi constanţi

Forma generală a unei ecuaţii diferenţiale liniare neomogene/omogene de ordinul n cu coeficienţi constanţi:

$$\boxed{x^{(n)}(t)+a_1x^{(n-1)}(t)+...+a_{n-1}x'(t)+a_nx(t)=f(t),t\in\mathbb{I}} \quad (1)$$

$$\boxed{\frac{d^nx}{dt^n}+a_1\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}+...+a_{n-1}\frac{dx}{dt}+a_nx=f,t\in\mathbb{I}} \quad (1')$$

unde $\mathbb{I}\subseteq\mathbb{R}$ este un interval nevid deschis, $a_i\in\mathbb{R}$, $i\in\{1,...,n\}$, sunt numere numite *coeficienţi (constanţi)*, iar $f:\mathbb{I}\to\mathbb{R}$ este funcţie continuă, numită *termen liber*. Dacă f este neidentic nulă atunci (1) se numeşte ecuaţie *neomogenă (EN)*; dacă f este identic nulă, atunci (1) se numeşte ecuaţie *omogenă (EO)*. O funcţie $x:\mathbb{I}\to\mathbb{R}$ de clasă $\mathcal{C}^n$ ce verifică (1) se numeşte *soluţie* pentru ecuaţie.

Problema Cauchy asociată unei ecuaţii diferenţiale liniare neomogene/omogene de ordinul n cu coeficienţi constanţi cu datele $\mathcal{D}=(\mathbb{I},f,t_0,\mathbf{x}_0)$ constă în determinarea unei funcţii $x:\mathbb{I}\to\mathbb{R}$ de clasă $\mathcal{C}^n$, unde $\mathbb{I}\subseteq\mathbb{R}$ este un interval nevid deschis, $t_0\in\mathbb{I},x_{0,i}\in\mathbb{R}$, $i=\overline{0,n-1}$ pentru care

$$\mathcal{PC}(\mathcal{D}):\begin{cases}(1)\ \ x^{(n)}(t)+a_1x^{(n-1)}(t)+...+a_{n-1}x'(t)+a_nx(t)=f(t),t\in\mathbb{I}\\(CI)\ \ x(t_0)=x_{0,0},x'(t_0)=x_{0,1},...,x^{(n-1)}(t_0)=x_{0,n-1}.\end{cases}$$

Funcţia x se numeşte *soluţie a problemei Cauchy* $\mathcal{PC}(\mathcal{D})$.

Observaţia 3.2.1. Notaţiile, definiţiile şi rezultatele din Secţiunea 3.1, enunţate pentru ecuaţii diferenţiale liniare de ordinul n având coeficienţi variabili se păstrează şi pentru ecuaţii diferenţiale liniare de ordinul n având coeficienţi constanţi.

REZOLVAREA EO

Euristica 3.2.1. a) Se propune determinarea soluţiei generale pe $\mathbb{I}$, chiar pe $\mathbb{R}$, a ecuaţiei omogene EO ataşate ecuaţiei neomogene EN (1), anume

$$\boxed{x^{(n)}(t)+a_1x^{(n-1)}(t)+...+a_{n-1}x'(t)+a_nx(t)=0,t\in\mathbb{I}} \quad (2)$$

Există o justificare ce implică seria Taylor ataşată unei soluţii pentru EO (2), diagonalizare / jordanizare de matrice, definiţia funcţiei exponenţiale în complex

$$e^{zt}=e^{xt}(\cos(yt)+i\sin(yt)),\forall z=x+iy\in\mathbb{C},t\in\mathbb{R},$$

pe baza căreia orice soluţie pentru EO (2) se poate căuta sub forma

$$x(t)=e^{\lambda t},t\in\mathbb{I},\lambda\in\mathbb{C}.$$

O demonstraţie este prezentată în Euristica 3.2.1.b) de la finalul cursului.

Din secţiunea anterioară, fie

$\mathcal{L}:\mathcal{C}^n(\mathbb{I},\mathbb{R})\to\mathcal{C}(\mathbb{I},\mathbb{R})$, $\mathcal{L}(x)=x^{(n)}+a_1x^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}x'+a_nx,\forall x\in\mathcal{C}^n(\mathbb{I},\mathbb{R})$,

unde, în această secţiune, $a_i\in\mathbb{R},i=\overline{1,n}$.

Atunci (2) $\Leftrightarrow\mathcal{L}(x)=0$.

Căutând $x(t) = e^{\lambda t}$ soluţie particulară pentru (2), se obţine
$\mathcal{L}\left(e^{\lambda t}\right) = 0, \forall t \in \mathbb{I} \Leftrightarrow \left(\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + ... + a_{n-1}\lambda + a_n\right) \cdot e^{\lambda t} = 0, \forall t \in \mathbb{I}.$
Se numeşte *polinom caracteristic al EO* (2) polinomul având coeficienţi reali
$P(\lambda) = (-1)^n \left(\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_n\right).$
Se numeşte *ecuaţia caracteristică ataşată EO* (2) ecuaţia polinomială algebrică de ordin n (notată EC)

$$\boxed{\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + ... + a_{n-1}\lambda + a_n = 0.} \tag{3}$$

Propoziţia 3.2.1. Funcţia $x(t) = e^{\lambda t}, t \in \mathbb{I}$ este soluţie a ecuaţiei diferenţiale EO (2) dacă şi numai dacă numărul (real sau complex) λ este soluţie a ecuaţiei algebrice caracteristice EC (3).
Demonstraţie. Rezultă din Euristică a) şi b).

Propoziţia 3.2.2. Dacă ecuaţia caracteristică a EO (2) are toate cele n rădăcini caracteristice reale distincte, $(\lambda_1, ..., \lambda_n)$, atunci sistemul de funcţii $B = (x_1, ..., x_n)$ definite prin
$x_i(t) = e^{\lambda_i t}, t \in \mathbb{I}$
este un sistem fundamental de soluţii ale EO.
Demonstraţie. Într-adevăr,
$\operatorname{card}(B) = \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{V} = n$ şi

$$W(t; x_1, x_2, \ldots, x_n) = \begin{vmatrix} e^{\lambda_1 t} & e^{\lambda_2 t} & ... & e^{\lambda_n t} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 t} & \lambda_2 e^{\lambda_2 t} & ... & \lambda_n e^{\lambda_n t} \\ ... & ... & ... & ... \\ \lambda_1^{n-1} e^{\lambda_1 t} & \lambda_2^{n-1} e^{\lambda_2 t} & ... & \lambda_n^{n-1} e^{\lambda_n t} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \cdots & \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix} e^{(\lambda_1 + \cdots + \lambda_n)t} \neq 0, \forall t \in \mathbb{I}.$$

Observaţia 3.2.2. a) Dacă ecuaţia caracteristică are <u>n rădăcini reale distincte</u> $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ (deci fiecare este de multiplicitate algebrică 1), atunci fiecărei rădăcini îi corespunde o soluţie particulară a ecuaţiei diferenţiale EO (2),
$x_1(t) = e^{\lambda_1 t}, x_2(t) = e^{\lambda_2 t}, \ldots, x_n(t) = e^{\lambda_n t}, t \in \mathbb{I},$
iar soluţia generală a ecuaţiei diferenţiale EO (2) este
$x_o(t; c_1, \ldots, c_n) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} + \ldots c_n e^{\lambda_n t}, \forall t \in \mathbb{I}$ şi $c_1, ..., c_n \in \mathbb{R}$.
b) Dacă ecuaţia caracteristică are <u>o rădăcină complexă simplă</u>
$\lambda_1 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, $\lambda_1 = \alpha_1 + i\beta_1$ cu $m(\lambda_1) = 1$
atunci admite şi rădăcina complexă conjugată
$\lambda_2 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, $\lambda_2 = \alpha_1 - i\beta_1$ cu $m(\lambda_2) = 1$.
Soluţii pentru EO (2) ce corespund ar fi
$x_{1,2}(t) = e^{(\alpha_1 \pm i\beta_1)t} \overset{\text{Euler}}{=} e^{\alpha_1 t}\left(\cos(\beta_1 t) \pm i \sin(\beta_1 t)\right).$
Se poate observa că, dacă $x(t) = u(t) + iv(t)$ este o soluţie a ecuaţiei omogene $\mathcal{L}(x) = 0$, atunci
$\mathcal{L}(u + iv) = 0 \Leftrightarrow \mathcal{L}(u) + i\mathcal{L}(v) = 0 \Leftrightarrow \mathcal{L}(u) = 0, \mathcal{L}(v) = 0.$
Atunci, pentru rădăcinile complexe conjugate simple ale ecuaţiei caracteristice, grupate,
$\lambda_{1,2} \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, $\lambda_{1,2} = \alpha_1 \pm i\beta_1$ cu $m(\lambda_{1,2}) = 1$
se poate demonstra că se ataşează corespunzător

$\{\ x_1(t) = e^{\alpha_1 t}\cos(\beta_1 t);\quad x_2(t) = e^{\alpha_1 t}\sin(\beta_1 t).$

c) Dacă ecuaţia caracteristică are o rădăcină reală sau complexă multiplă , atunci descoperirea soluţiilor EO şi demonstraţia utilizează tehnici de analiză matematică reală şi complexă (prezentate în Euristică 3.2.1,b) din finalul cursului)), iar enunţul este prezentat în algoritmul de rezolvare următor.

Algoritmul de rezolvare 3.2.1 pentru o ecuaţie diferenţială liniară omogenă EO:

$$\boxed{x^{(n)}(t) + a_1 x^{(n-1)}(t) + ... + a_{n-1}x'(t) + a_n x(t) = 0} \tag{2}$$

Pasul 1 : Se ataşează ecuaţiei diferenţiale EO (2) ecuaţia ei caracteristică EC:

$$\boxed{\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + ... + a_{n-1}\lambda + a_n = 0.} \tag{3}$$

Este o ecuaţie algebrică polinomială de grad n având coeficienţii reali $a_i \in \mathbb{R}$, $i \in \{1,...,n\}$, în necunoscuta λ, care admite exact n rădăcini complexe. Se determină, precizând şi multiplicitatea lor.

Pasul 2 : Pentru fiecare rădăcină a EC se găsesc corespunzător soluţii particulare liniar independente ale EO, după algoritmul:

•Cazul 1 : $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ cu $m(\lambda_1) = 1 \rightsquigarrow x_1(t) = e^{\lambda_1 t}$.

•Cazul 2 : $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ cu $m(\lambda_1) = m \rightsquigarrow \begin{cases} x_1(t) = e^{\lambda_1 t}, \\ x_2(t) = te^{\lambda_1 t}, \\ ... \\ x_m(t) = t^{m-1}e^{\lambda_1 t}. \end{cases}$

•Cazul 3 : $\lambda_{1,2} \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$, $\lambda_{1,2} = \alpha_1 \pm i\beta_1$ cu $m(\lambda_{1,2}) = 1 \rightsquigarrow$

$\{\ x_1(t) = e^{\alpha_1 t}\cos(\beta_1 t);\quad x_2(t) = e^{\alpha_1 t}\sin(\beta_1 t).$

•Cazul 4 : $\lambda_{1,2} \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$, $\lambda_{1,2} = \alpha_1 \pm i\beta_1$ cu $m(\lambda_{1,2}) = m \rightsquigarrow$

$$\begin{cases} x_1(t) = e^{\alpha_1 t}\cos(\beta_1 t), & x_2(t) = e^{\alpha_1 t}\sin(\beta_1 t), \\ x_3(t) = te^{\alpha_1 t}\cos(\beta_1 t), & x_4(t) = te^{\alpha_1 t}\sin(\beta_1 t), \\ ... & ... \\ x_{2m-1}(t) = t^{m-1}e^{\alpha_1 t}\cos(\beta_1 t), & x_{2m}(t) = t^{m-1}e^{\alpha_1 t}\sin(\beta_1 t). \end{cases}$$

Din algoritm se găseşte $B = (x_1,...,x_n)$, adică exact n soluţii particulare ale EO, liniar independente. Sistemul de funcţii $(x_1,...,x_n)$ se numeşte *sistem fundamental de soluţii* pentru ecuaţia omogenă EO (bază).

Pasul 3 : Soluţia generală a EO este o combinaţie liniară de cele exact n soluţii particulare liniar independente determinate la Pasul 2

$$\boxed{x_o(t; c_1,...,c_n) = c_1x_1(t) + ... + c_nx_n(t), \forall t \in \mathbb{R} \text{ şi } c_1,...,c_n \in \mathbb{R}.} \tag{4}$$

Exemplul 3.2.1. Să se determine soluţia generală a următoarei ecuaţii diferenţiale liniare omogene cu coeficienţi constanţi

$x''' + 3x'' - x' - 3x = 0, t \in \mathbb{R},$

apoi să se determine soluţia problemei Cauchy

$$\begin{cases} x''' + 3x'' - x' - 3x = 0, \\ CI: x(0) = 0, x'(0) = 1, x''(0) = -1; \end{cases}$$

Rezolvare: Fie $(*_{EO})$ $x''' + 3x'' - x' - 3x = 0, t \in \mathbb{R}$.

Ecuaţia $(*_{EO})$ este o ecuaţie diferenţială de ordin 3, liniară, cu coeficienţii constanţi $a_1 = 3$, $a_2 = -1$, $a_3 = -3$, omogenă. Pentru $t \in \mathbb{R}$, variabilă independentă din domeniul de definiţie a soluţiei, se caută $x_o(t; c_1, c_2, c_3)$, soluţia generală pentru ecuaţia $(*_{EO})$.

Pasul 1 : Se ataşează ecuaţiei diferenţiale $(*_{EO})$ ecuaţia ei caracteristică

$(*_{EC})$ $\lambda^3 + 3\lambda^2 - \lambda^1 - 3\lambda^0 = 0 \Leftrightarrow (\lambda+3)(\lambda-1)(\lambda+1) = 0 \Rightarrow$

$$\begin{cases} \lambda_1 = -3 \text{ cu } m(\lambda_1) = 1, \\ \lambda_2 = 1 \text{ cu } m(\lambda_2) = 1, \\ \lambda_3 = -1 \text{ cu } m(\lambda_3) = 1. \end{cases}$$

<u>Pasul 2 :</u> Pentru fiecare rădăcină a ecuaţiei caracteristice se găsesc corespunzător soluţii particulare liniar independente ale ecuaţiei omogene $(*_{EO})$, după algoritmul dat

•$\lambda_1 = -3$ cu $m(\lambda_1) = 1 \rightsquigarrow x_1(t) = e^{-3t}$.

•$\lambda_2 = 1$ cu $m(\lambda_2) = 1 \rightsquigarrow x_2(t) = e^{1t}$.

•$\lambda_2 = -1$ cu $m(\lambda_3) = 1 \rightsquigarrow x_3(t) = e^{-t}$.

<u>Pasul 3 :</u> Conform algoritmului de la Pasul 2, $(x_1, ..., x_3)$ este un sistem fundamental de soluţii pentru $(*_{EO})$ (sunt exact 3 soluţii particulare pentru $(*_{EO})$ şi funcţii liniar independente). Atunci soluţia generală a ecuaţiei $(*_{EO})$ este

$x_o(t; c_1, c_2, c_3) = c_1 \cdot e^{-3t} + c_2 e^{1t} + c_3 e^{-t}, \forall t \in \mathbb{R}$ şi $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$.

<u>Pasul 4 :</u> Pentru a determina soluţia problemei Cauchy $((*_{EO}), CI)$ se impun asupra soluţiei găsite x_o condiţiile iniţiale

$$\begin{cases} x(t) = c_1 \cdot e^{-3t} + c_2 e^{1t} + c_3 e^{-t} \\ x'(t) = c_1 \cdot e^{-3t}(-3) + c_2 e^{1t} + c_3 e^{-t}(-1) \\ x''(t) = c_1 \cdot e^{-3t}(-3)^2 + c_2 e^{1t} + c_3 e^{-t}(-1)^2 \end{cases} \overset{CI:}{\Rightarrow} \begin{cases} x(0) = 0 \\ x'(0) = 1 \\ x''(0) = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 = c_1 \cdot e^{-0} + c_2 e^{0} + c_3 e^{-0} \\ 1 = c_1 \cdot e^{-0}(-3) + c_2 e^{0} + c_3 e^{-0}(-1) \\ -1 = c_1 \cdot e^{-0}(-3)^2 + c_2 e^{0} + c_3 e^{-0}(-1)^2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} c_1 + c_2 + c_3 = 0 \\ -3c_1 + c_2 - c_3 = 1 \\ (-3)^2 c_1 + c_2 + c_3 = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = \frac{-1}{8} \\ c_2 = \frac{3}{8} \\ c_3 = \frac{-1}{4} \end{cases}$$

Atunci

$x(t) = \frac{-1}{8} e^{-3t} + \frac{3}{8} e^{t} + \frac{-1}{4} e^{-t}, \forall t \in \mathbb{R}$,

este unica soluţie a ecuaţiei $(*_{EO})$ ce verifică CI date.

Reprezentând grafic pe $\mathbb{I} = \mathbb{R}$ pentru

$(c_1, c_2, c_3) = (1, 0, 0)$, $(c_1, c_2, c_3) = (0, 1, 0)$, $(c_1, c_2, c_3) = (0, 0, 1)$

cu magenta (soluţiile particulare din sistemul fundamental) şi pentru

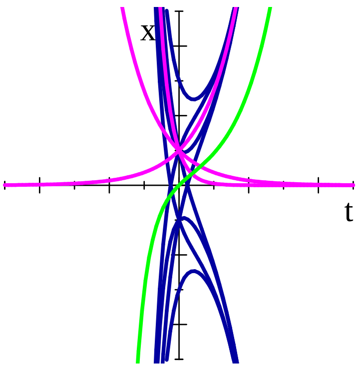
$(c_1, c_2, c_3) = (1, 1, 1), (c_1, c_2, c_3) = (-1, 1, 1), (c_1, c_2, c_3) = (1, -1, 1), (c_1, c_2, c_3) = (1, 1, -1),$

$(c_1, c_2, c_3) = (-1, -1, 1), (c_1, c_2, c_3) = (1, -1, -1), (c_1, c_2, c_3) = (-1, 1, -1), (c_1, c_2, c_3) = (-1, -1, -1),$

cu albastru, şi pentru

$(c_1, c_2, c_3) = \left(\frac{-1}{8}, \frac{3}{8}, \frac{-1}{4}\right)$

cu verde (soluţia problemei Cauchy), se obţine



Comentariu. De menţionat că, dacă EC ataşată unei EO are rădăcini *reale distincte*, fiecare de *multiplicitate algebrică* 1, iar problema Cauchy ataşată EO are CI în t_0, atunci sistemul liniar algebric neomogen în necunoscutele $c_1,..,c_n$ obţinut este un *sistem Cramer*, ce are ca *determinant*

$$\Delta = W(t_0; x_1, x_2, \dots, x_n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \cdots & \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix} e^{(\lambda_1+\cdots+\lambda_n)t_0} \neq 0, \forall t \in \mathbb{I}.$$

Mai mult, pentru $t_0 = 0$, se obţine un determinant Vandermonde.

La exerciţiul anterior,

$$\Delta = W(0; x_1, x_2, x_3) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \lambda_3^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ (-3) & 1 & (-1) \\ (-3)^2 & 1^2 & (-1)^2 \end{vmatrix} \overset{Vandermonde}{=} -16 \neq 0, \forall t \in \mathbb{I}.$$

Exemplul 3.2.2. Să se determine soluţiile generale ale următoarelor ecuaţii diferenţiale liniare omogene cu coeficienţi constanţi:

a) $x^{(5)} - x^{(4)} - x' + x = 0, t \in \mathbb{R}$;

b) $x^{(4)} + 2x'' + x = 0, t \in \mathbb{R}$.

Rezolvare : a) Fie $(*_{EO})$ $x^{(5)} - x^{(4)} - x' + x = 0, t \in \mathbb{R}$.

Ecuaţia $(*_{EO})$ este o ecuaţie diferenţială de ordin 5, liniară, cu coeficienţii constanţi $a_1 = -1$, $a_2 = 0$, $a_3 = 0$, $a_4 = -1$, $a_5 = 1$, omogenă. Pentru $t \in \mathbb{R}$, variabilă independentă din domeniul de definiţie a soluţiei, se caută $x_o(t; c_1, ..., c_5)$, soluţia generală pentru ecuaţia $(*_{EO})$.

<u>Pasul 1 :</u> Se ataşează ecuaţiei diferenţiale $(*_{EO})$ ecuaţia ei caracteristică

$$(*_{EC})\ \lambda^5 - \lambda^4 - \lambda + 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda^4(\lambda - 1) - (\lambda - 1) = 0 \Leftrightarrow \left(\lambda^4 - 1\right)(\lambda - 1) = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (\lambda - 1)^2 (\lambda + 1)\left(\lambda^2 + 1\right) = 0 \Rightarrow$$
$$\begin{cases} \lambda_1 = 1 \text{ cu } m(\lambda_1) = 2, \\ \lambda_2 = -1 \text{ cu } m(\lambda_2) = 1, \\ \lambda_{3,4} = \pm i \text{ cu } m(\lambda_{3,4}) = 1. \end{cases}$$

<u>Pasul 2 :</u> Pentru fiecare rădăcină a ecuaţiei caracteristice se găsesc corespunzător soluţii particulare liniar independente ale ecuaţiei omogene $(*_{EO})$, după algoritmul dat

$$\bullet \lambda_1 = 1 \text{ cu } m(\lambda_1) = 2 \rightsquigarrow \begin{cases} x_1(t) = e^{1t}, \\ x_2(t) = te^{1t}. \end{cases}$$
$$\bullet \lambda_2 = -1 \text{ cu } m(\lambda_2) = 1 \rightsquigarrow x_3(t) = e^{-1t}.$$
$$\bullet \lambda_{3,4} = 0 \pm i \cdot 1 \text{ cu } m(\lambda_{3,4}) = 1 \rightsquigarrow \begin{cases} x_4(t) = e^{0t}\cos 1t, \\ x_5(t) = e^{0t}\sin 1t. \end{cases}$$

<u>Pasul 3 :</u> Conform algoritmului de la Pasul 2, $(x_1, ..., x_5)$ este un sistem fundamental de soluţii pentru $(*_{EO})$ (sunt exact 5 soluţii particulare pentru $(*_{EO})$ şi funcţii liniar independente). Atunci soluţia generală a ecuaţiei $(*_{EO})$ este

$$x_o(t; c_1, ..., c_5) = c_1 e^t + c_2 te^t + c_3 e^{-t} + c_4 \cos t + c_5 \sin t, \forall t \in \mathbb{R} \text{ şi } c_1, ..., c_5 \in \mathbb{R}.$$

b) Fie $(*_{EO})$ $x^{(4)} + 2x'' + x = 0, \forall t \in \mathbb{R}$.

Ecuaţia $(*_{EO})$ este o ecuaţie diferenţială de ordin 4, liniară, cu coeficienţii constanţi $a_1 = 0$, $a_2 = 2$, $a_3 = 0$, $a_4 = 1$, omogenă. Pentru $t \in \mathbb{R}$, variabilă independentă din domeniul de definiţie a soluţiei, se caută $x_o(t; c_1, ..., c_4)$, soluţia generală pentru ecuaţia $(*_{EO})$.

<u>Pasul 1 :</u> Se ataşează ecuaţiei diferenţiale $(*_{EO})$ ecuaţia ei caracteristică

$$(*_{EC})\ \lambda^4 + 2\lambda^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow \left(\lambda^2 + 1\right)^2 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm i \text{ cu } m(\lambda_{1,2}) = 2.$$

<u>Pasul 2 :</u> Pentru fiecare rădăcină a ecuaţiei caracteristice se găsesc corespunzător soluţii particulare

liniar independente ale ecuaţiei omogene $(*_{EO})$, după algoritmul dat

$\bullet\lambda_{1,2} = 0 \pm 1i$ cu $m(\lambda_{1,2}) = 2 \rightsquigarrow \begin{cases} x_1(t) = e^{0t}\cos 1t, & x_2(t) = e^{0t}\sin 1t, \\ x_3(t) = te^{0t}\cos 1t, & x_4(t) = te^{0t}\sin 1t. \end{cases}$

Pasul 3 : Conform algoritmului de la Pasul 2, $(x_1, ..., x_4)$ este un sistem fundamental de soluţii pentru $(*_{EO})$ (sunt exact 4 soluţii particulare pentru $(*_{EO})$ şi funcţii liniar independente). Atunci soluţia generală a ecuaţiei $(*_{EO})$ este

$x_o(t; c_1, ..., c_4) = c_1\cos t + c_2\sin t + c_3 t\cos t + c_4 t\sin t, \forall t \in \mathbb{R}$ şi $c_1, ..., c_4 \in \mathbb{R}$.

Reprezentând grafic pe $\mathbb{I} = \mathbb{R}$ pentru

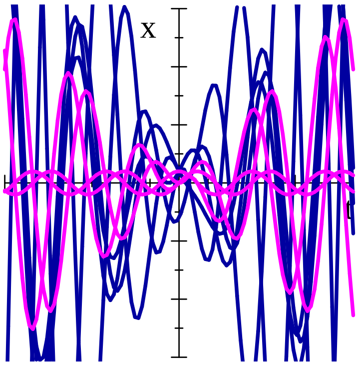
$(c_1, c_2, c_3, c_4) = (1, 0, 0, 0)$, $(c_1, c_2, c_3, c_4) = (0, 1, 0, 0)$, $(c_1, c_2, c_3, c_4) = (0, 0, 1, 0)$, $(c_1, c_2, c_3, c_4) = (0, 0, 0, 1)$

cu magenta (soluţiile particulare din sistemul fundamental) şi pentru

$(c_1, c_2, c_3, c_4) = (1, 1, 1, 1)$, $(c_1, c_2, c_3, c_4) = (-3, 1, 1, 1)$, $(c_1, c_2, c_3, c_4) = (1, -3, 1, 1)$,

$(c_1, c_2, c_3, c_4) = (1, 1, -3, 1)$, $(c_1, c_2, c_3, c_4) = (1, 1, 1, -3)$

cu albastru, se obţine



REZOLVAREA EN

Euristică 3.2.2. Se propune determinarea soluţiei generale pe $\mathbb{I}$ a ecuaţiei neomogene (1). Teorema 3.2.1. ulterioară asigură soluţia generală a EN când se cunoaşte soluţia generală a EO (oferită de Algoritmul 3.2.1) şi o soluţie particulară a EN (oferită ulterior de Teorema 3.2.2, în cazul general, când se cunoaşte un sistem fundamental de soluţii ale EO, sau de Teoremele 3.2.3 şi 3.2.4, în cazul particular, când se cunoaşte un sistem fundamental de soluţii ale EO, ecuaţia EN are coeficienţi constanţi şi termenul liber un cvasipolinom sau o combinaţie liniară de cvasipolinoame).

Teorema 3.2.1. Dacă $x_o(t; c_1, ..., c_n)$ este soluţia generală a EO (2) ataşate şi $x_p(t)$ este o soluţie particulară a EN (1), atunci

$$\boxed{x(t; c_1, ..., c_n) = x_o(t; c_1, ..., c_n) + x_p(t), \forall t \in \mathbb{I} \text{ şi } c_1, ..., c_n \in \mathbb{R}.} \tag{12}$$

este soluţia generală EN(1).

Demonstraţie. Rezultă din liniaritatea operatorului $\mathcal{L}$, analog cu cea din Secţiunea 3.1, Observaţia 3.1.1.a).

Teorema 3.2.2. Dacă

$x_o(t; c_1, ..., c_n) = c_1 x_1(t) + ... + c_n x_n(t), \forall t \in \mathbb{I}$ şi $c_1, ..., c_n \in \mathbb{R}$

este soluţia generală pe $\mathbb{I}$ a ecuaţiei diferenţiale de ordin n liniare şi omogene (2), cu $(x_1, ..., x_n)$ un sistem fundamental de soluţii, atunci o soluţie particulară $x_p(t)$ pe $\mathbb{I}$ a ecuaţiei diferenţiale de ordin n liniare şi neomogene (1) este de forma

$$\boxed{x_p(t) = u_1(t)\,x_1(t) + ... + u_n(t)\,x_n(t)\,, \forall t \in \mathbb{I}.} \tag{5}$$

unde $u_i' : \mathbb{I} \to \mathbb{R}$, $i \in \{1, ..., n\}$, sunt funcţii-soluţii ale sistemului

$$\begin{cases} u_1'(t)\,x_1(t) + ... + u_n'(t)\,x_n(t) = 0 \\ u_1'(t)\,x_1'(t) + ... + u_n'(t)\,x_n'(t) = 0 \\ ... \\ u_1'(t)\,x_1^{(n-1)}(t) + ... + u_n'(t)\,x_n^{(n-1)}(t) = f(t)\,. \end{cases} \tag{6}$$

Demonstraţie. Analog cu cea din Secţiunea 3.1.

Exemplul 3.2.3. a) Să se determine soluţia generală a următoarei ecuaţii diferenţiale liniare neomogene cu coeficienţi constanţi

$$x'' + x = \frac{1}{\cos t}, t \in \mathbb{I},$$

apoi să se determine soluţia problemei Cauchy

$$\begin{cases} x'' + x = \dfrac{1}{\cos t}, \\ CI : x(0) = 1, x'(0) = -1. \end{cases}$$

Rezolvare : Fie $(*_{EN})$ $x'' + x = \dfrac{1}{\cos t}, t \in \mathbb{I}$.

Ecuaţia $(*_{EN})$ este o ecuaţie diferenţială de ordin 2, liniară, cu coeficienţii constanţi $a_1 = 0$, $a_2 = 1$, neomogenă cu termenul liber

$$f : \mathbb{I} \to \mathbb{R},\ f(t) = \frac{1}{\cos t}.$$

$\mathbb{I}$ este un interval ce nu conţine t a.î. $\cos t = 0$. Pentru $t \in \mathbb{I}$, variabilă independentă din domeniul de definiţie a soluţiei, se caută $x(t; c_1, c_2)$, soluţia generală pentru ecuaţia $(*_{EN})$.

Etapa 1 : Se determină soluţia generală a ecuaţiei omogene ataşate ecuaţiei $(*_{EN})$, adică a ecuaţiei

$(*_{EO})$ $x'' + x = 0, t \in \mathbb{R}$.

(este ecuaţie ce ar putea modela un oscilator armonic cu $\omega = 1$)

Pasul 1 : Se ataşează ecuaţiei diferenţiale $(*_{EO})$ ecuaţia ei caracteristică

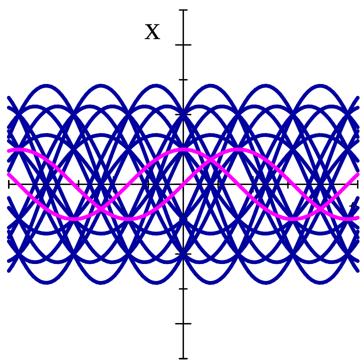
$(*_{EC})$ $\lambda^2 + 1 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = 0 \pm i$ cu $m(\lambda_{1,2}) = 1$

Pasul 2 : Pentru fiecare rădăcină a ecuaţiei caracteristice se găsesc corespunzător soluţii particulare liniar independente ale ecuaţiei omogene $(*_{EO})$, după algoritmul dat

$$\bullet \lambda_{1,2} = 0 \pm i \text{ cu } m(\lambda_{1,2}) = 1 \rightsquigarrow \begin{cases} x_1(t) = e^{0t}\cos t, \\ x_2(t) = e^{0t}\sin t. \end{cases}$$

Pasul 3 : Conform algoritmului de la Pasul 2, (x_1, x_2) este un sistem fundamental de soluţii pentru $(*_{EO})$ (sunt soluţii particulare pentru $(*_{EO})$ şi funcţii liniar independente). Atunci soluţia generală a ecuaţiei $(*_{EO})$ este

$$x_o(t; c_1, c_2) = c_1 \cos t + c_2 \sin t, \forall t \in \mathbb{R} \text{ şi } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$



Etapa 2 : Se determină o soluţie particulară a ecuaţiei neomogene $(*_{EN})$.
Metoda coeficienţilor nedeterminaţi : Chiar dacă $(*_{EN})$ are coeficienţi constanţi , se observă că termenul ei liber nu este un cvasipolinom ca ulterior şi nici combinaţie liniară de cvasipolinoame. În consecinţă, nu se poate aplica metoda coeficienţilor nedeterminaţi.
Metoda variaţiei constantelor : Deoarece (x_1, x_2) este un sistem fundamental de soluţii pentru $(*_{EO})$, se caută x_p de forma

$$x_p(t) = u_1(t)\underbrace{\cos t}_{x_1(t)} + u_2(t)\underbrace{\sin t}_{x_2(t)}, \forall t \in \mathbb{I},$$

unde $u_i' : \mathbb{I} \to \mathbb{R}$, $i \in \{1, 2\}$, sunt soluţii ale sistemului

$$\begin{cases} u_1'(t)\cos t + u_2'(t)\sin t = 0 \\ u_1'(t)(-\sin t) + u_2'(t)(\cos t) = \dfrac{1}{\cos t} \end{cases}$$

Se calculează

$$\Delta(t) = W(t; x_1, x_2) = \begin{vmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{vmatrix} = 1 \neq 0, \forall t \in \mathbb{I}.$$

$$\Delta_1(t) = \begin{vmatrix} 0 & \sin t \\ \dfrac{1}{\cos t} & \cos t \end{vmatrix} = \frac{-\sin t}{\cos t}, \forall t \in \mathbb{I}.$$

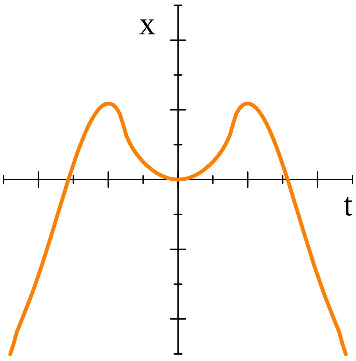
$$\Delta_2(t) = \begin{vmatrix} \cos t & 0 \\ -\sin 2t & \dfrac{1}{\cos t} \end{vmatrix} = 1, \forall t \in \mathbb{I}.$$

Atunci

$$\begin{cases} u_1'(t) = \frac{\Delta_1(t)}{\Delta(t)} = \dfrac{-\sin t}{\cos t}, \\ u_2'(t) = \frac{\Delta_2(t)}{\Delta(t)} = 1. \end{cases} \Bigg| \int(\cdot)\,dt \Rightarrow \begin{cases} u_1(t) = \ln|\cos t| + k_1, \\ u_2(t) = t + k_2. \end{cases}$$

Deoarece se caută o soluţie particulară x_p, se alege $k_1 = 0$, $k_2 = 0$. S-a obţinut

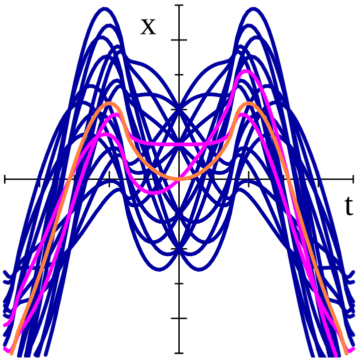
$$x_p(t) = (\ln|\cos t|)(\cos t) + t(\sin t), \forall t \in \mathbb{I}.$$



Etapa 3 : Soluţia generală a ecuaţiei neomogene $(*_{EN})$ este dată de

$x(t; c_1, c_2) = x_o(t; c_1, c_2) + x_p(t), \forall t \in \mathbb{I}$ şi $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, adică

$x(t; c_1, c_2) = c_1 \cos t + c_2 \sin t + (\ln|\cos t|)(\cos t) + t(\sin t), \forall t \in \mathbb{I}$ şi $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.



Etapa 4 : Pentru a determina soluţia problemei Cauchy $((*_{EN}), CI)$, se impun asupra soluţiei găsite x condiţiile iniţiale. Deoarece CI sunt date în $t_0 = 0$ şi deoarece, într-o vecinătate mică a lui 0, $\cos t > 0 \Rightarrow$

$$\begin{cases} x(t) = c_1 \cos t + c_2 \sin t + (\ln \cos t)(\cos t) + t(\sin t) \\ x'(t) = c_1(-\sin t) + c_2 \cos t + \dfrac{1}{\cos t}(-\sin t)(\cos t) + (\ln \cos t)(-\sin t) + 1(\sin t) + t \cos t \end{cases}$$

$$\overset{CI:}{\Rightarrow}$$

$$\begin{cases} x(0) = 1 \\ x'(0) = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1 = c_1 \cdot \cos 0 + c_2 \sin 0 + (\ln \cos 0)(\cos 0) + 0(\sin 0) \\ -1 = c_1(-\sin 0) + c_2 \cos 0 + (-\sin 0) + (\ln \cos 0)(-\sin 0) + 1(\sin 0) + 0 \cos 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} c_1 = 1 \\ c_2 = -1 \end{cases}$$

Atunci

$x(t) = \cos t - \sin t + (\ln \cos t)(\cos t) + t(\sin t), \forall t \in \mathbb{R}$,

este unica soluţie a ecuaţiei $(*_{EN})$ ce verifică CI date.

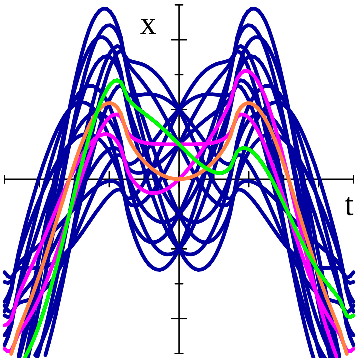
Reprezentând grafic pe $\mathbb{I} = \mathbb{R}$ pentru

$(c_1, c_2) = (1, 0), (c_1, c_2) = (0, 1)$,

cu magenta (soluţiile particulare a EN corespunzătoare celor din sistemul fundamental), şi pentru

$(c_1, c_2) = (1, 1), (c_1, c_2) = (1, 2), (c_1, c_2) = (2, 1), (c_1, c_2) = (2, 2)$,

$(c_1, c_2) = (-1, 1)\,, (c_1, c_2) = (-1, 2)\,, (c_1, c_2) = (-2, 1)\,, (c_1, c_2) = (-2, 2)\,,$
$(c_1, c_2) = (-1, -1)\,, (c_1, c_2) = (-1, -2)\,, (c_1, c_2) = (-2, -1)\,, (c_1, c_2) = (-2, -2)\,,$
$(c_1, c_2) = (1, -1)\,, (c_1, c_2) = (1, -2)\,, (c_1, c_2) = (2, -1)\,, (c_1, c_2) = (2, -2)\,,$
cu albastru, şi pentru
$(c_1, c_2) = (0, 0)\,,$
cu portocaliu (soluţia particulară a EN prin metoda variaţiei constantelor),şi pentru
$(c_1, c_2) = (1, -1)\,,$
cu verde (soluţia problemei Cauchy), se obţine:



○**b)** Să se determine soluţia generală a următoarei ecuaţii diferenţiale liniare neomogene cu coeficienţi constanţi
$x^{(4)} - 4x''' + 10x'' - 12x' + 5x = e^t, t \in \mathbb{R},$
apoi să se determine soluţia problemei Cauchy
$$\begin{cases} x^{(4)} - 4x''' + 10x'' - 12x' + 5x = e^t, t \in \mathbb{R} \\ CI : x(0) = 1, x'(0) = -1, x''(0) = 2, x'''(0) = 0 \end{cases}$$
Rezolvare : Fie $(*_{EN})$ $x^{(4)} - 4x''' + 10x'' - 12x' + 5x = e^t, t \in \mathbb{R}.$
Ecuaţia $(*_{EN})$ este o ecuaţie diferenţială de ordin 4, liniară, cu coeficienţii constanţi $a_1 = -4$, $a_2 = 10$, $a_3 = -12$, $a_4 = 5$, neomogenă cu termenul liber $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(t) = e^t$. Pentru $t \in \mathbb{R}$, variabilă independentă din domeniul de definiţie a soluţiei, se caută $x(t; c_1, ..., c_4)$, soluţia generală pentru ecuaţia $(*_{EN})$.
Etapa 1 : Se determină soluţia generală a ecuaţiei omogene ataşate ecuaţiei $(*_{EN})$, adică a ecuaţiei
$(*_{EO})$ $x^{(4)} - 4x''' + 10x'' - 12x' + 5x = 0, t \in \mathbb{R}.$
Pasul 1 : Se ataşează ecuaţiei diferenţiale $(*_{EO})$ ecuaţia ei caracteristică
$$(*_{EC})\ \lambda^4 - 4\lambda^3 + 10\lambda^2 - 12\lambda + 5 = 0 \Leftrightarrow (\lambda - 1)\left(\lambda^3 - 3\lambda^2 + 7\lambda - 5\right) = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (\lambda - 1)^2\left(\lambda^2 - 2\lambda + 5\right) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 1 \text{ cu } m(\lambda_1) = 2, \\ \lambda_{2,3} = 1 \pm 2i \text{ cu } m(\lambda_{2,3}) = 1. \end{cases}$$
Pasul 2 : Pentru fiecare rădăcină a ecuaţiei caracteristice se găsesc corespunzător soluţii particulare liniar independente ale ecuaţiei omogene $(*_{EO})$, după algoritmul dat
$$\bullet\lambda_1 = 1 \text{ cu } m(\lambda_1) = 2 \leadsto \begin{cases} x_1(t) = e^{1t}, \\ x_2(t) = te^{1t}. \end{cases}$$
$$\bullet\lambda_{2,3} = 1 \pm 2i \text{ cu } m(\lambda_{2,3}) = 1 \leadsto \begin{cases} x_3(t) = e^{1t}\cos(2t)\,, \\ x_4(t) = e^{1t}\sin(2t)\,. \end{cases}$$
Pasul 3 : Conform algoritmului de la Pasul 2, $(x_1, ..., x_4)$ este un sistem fundamental de soluţii pentru $(*_{EO})$ (sunt exact 4 soluţii particulare pentru $(*_{EO})$ şi funcţii liniar independente). Atunci soluţia generală a ecuaţiei $(*_{EO})$ este

$x_o(t;c_1,...,c_4) = c_1e^t + c_2te^t + c_3e^t\cos(2t) + c_4e^t\sin(2t), \forall t \in \mathbb{R}$ şi $c_1,...,c_4 \in \mathbb{R}$.

Etapa 2 : Se determină o soluţie particulară a ecuaţiei neomogene $(*_{EN})$.

Metoda variaţiei constantelor (mult calcul, apar determinanţi, derivate, integrale; nu se justifică folosirea)**:** Deoarece $(x_1,...,x_4)$ este un sistem fundamental de soluţii pentru $(*_{EO})$ se caută x_p de forma

$$x_p(t) = u_1(t)\underbrace{e^t}_{x_1(t)} + u_2(t)\underbrace{te^t}_{x_2(t)} + u_3(t)\underbrace{e^t\cos(2t)}_{x_3(t)} + u_4(t)\underbrace{e^t\sin(2t)}_{x_4(t)}, \forall t \in \mathbb{R},$$

unde $u_i' : \mathbb{I} \to \mathbb{R}$, $i \in \{1,2,3,4\}$, sunt soluţii ale sistemului

$$\begin{cases} u_1'(t)\cdot e^t + u_2'(t)\cdot te^t + u_3'(t)\cdot\left(e^t\cos 2t\right) + u_4'(t)\cdot\left(e^t\sin 2t\right) = 0 \\ u_1'(t)\cdot e^t + u_2'(t)\cdot(t+1)e^t + u_3'(t)\cdot\left(e^t(\cos 2t - 2\sin 2t)\right) + u_4'(t)\cdot\left(e^t(\sin 2t + 2\cos 2t)\right) = 0 \\ u_1'(t)\cdot e^t + u_2'(t)\cdot(t+2)e^t + u_3'(t)\cdot\left(e^t(-3\cos 2t - 4\sin 2t)\right) + u_4'(t)\cdot\left(e^t(-3\sin 2t + 4\cos 2t)\right) = 0 \\ u_1'(t)\cdot e^t + u_2'(t)\cdot(t+3)e^t + u_3'(t)\cdot\left(e^t(-11\cos 2t + 2\sin 2t)\right) + u_4'(t)\cdot\left(e^t(-11\sin 2t - 2\cos 2t)\right) = e^t \end{cases}$$

Se calculează:

$$\Delta(t) = W(t;x_1,...,x_4) = \begin{vmatrix} e^t & te^t & e^t\cos 2t & e^t\sin 2t \\ e^t & (t+1)e^t & e^t(\cos 2t - 2\sin 2t) & e^t(\sin 2t + 2\cos 2t) \\ e^t & (t+2)e^t & e^t(-3\cos 2t - 4\sin 2t) & e^t(-3\sin 2t + 4\cos 2t) \\ e^t & (t+3)e^t & e^t(-11\cos 2t + 2\sin 2t) & e^t(-11\sin 2t - 2\cos 2t) \end{vmatrix} =$$

$32e^{4t} \neq 0, \forall t \in \mathbb{R}$.

$$\Delta_1(t) = \begin{vmatrix} 0 & te^t & e^t\cos 2t & e^t\sin 2t \\ 0 & (t+1)e^t & e^t(\cos 2t - 2\sin 2t) & e^t(\sin 2t + 2\cos 2t) \\ 0 & (t+2)e^t & e^t(-3\cos 2t - 4\sin 2t) & e^t(-3\sin 2t + 4\cos 2t) \\ e^t & (t+3)e^t & e^t(-11\cos 2t + 2\sin 2t) & e^t(-11\sin 2t - 2\cos 2t) \end{vmatrix} = -8te^{4t}, \forall t \in \mathbb{R}.$$

$$\Delta_2(t) = \begin{vmatrix} e^t & 0 & e^t\cos 2t & e^t\sin 2t \\ e^t & 0 & e^t(\cos 2t - 2\sin 2t) & e^t(\sin 2t + 2\cos 2t) \\ e^t & 0 & e^t(-3\cos 2t - 4\sin 2t) & e^t(-3\sin 2t + 4\cos 2t) \\ e^t & e^t & e^t(-11\cos 2t + 2\sin 2t) & e^t(-11\sin 2t - 2\cos 2t) \end{vmatrix} = 8e^{4t}, \forall t \in \mathbb{R}.$$

$$\Delta_3(t) = \begin{vmatrix} e^t & te^t & 0 & e^t\sin 2t \\ e^t & (t+1)e^t & 0 & e^t(\sin 2t + 2\cos 2t) \\ e^t & (t+2)e^t & 0 & e^t(-3\sin 2t + 4\cos 2t) \\ e^t & (t+3)e^t & e^t & e^t(-11\sin 2t - 2\cos 2t) \end{vmatrix} = 4e^{4t}\sin 2t, \forall t \in \mathbb{R}.$$

$$\Delta_4(t) = \begin{vmatrix} e^t & te^t & e^t\cos 2t & 0 \\ e^t & (t+1)e^t & e^t(\cos 2t - 2\sin 2t) & 0 \\ e^t & (t+2)e^t & e^t(-3\cos 2t - 4\sin 2t) & 0 \\ e^t & (t+3)e^t & e^t(-11\cos 2t + 2\sin 2t) & e^t \end{vmatrix} = -4e^{4t}\cos 2t, \forall t \in \mathbb{R}.$$

De menţionat că determinanţii anteriori, funcţionali, de ordin 4, pot fi calculaţi folosind programe diverse pe calculator, Scientific WorkPlace de exemplu.

Atunci

$$\begin{cases} u_1'(t) = \frac{\Delta_1(t)}{\Delta(t)} = \frac{-8te^{4t}}{32e^{4t}} = -\frac{1}{4}t \\ u_2'(t) = \frac{\Delta_2(t)}{\Delta(t)} = \frac{8e^{4t}}{32e^{4t}} = \frac{1}{4} \\ u_3'(t) = \frac{\Delta_3(t)}{\Delta(t)} = \frac{4e^{4t}\sin 2t}{32e^{4t}} = \frac{1}{8}\sin 2t \\ u_4'(t) = \frac{\Delta_4(t)}{\Delta(t)} = \frac{-4e^{4t}\cos 2t}{32e^{4t}} = -\frac{1}{8}\cos 2t \end{cases} \Bigg| \int(\cdot)\,dt \Rightarrow \begin{cases} u_1(t) = -\frac{1}{8}t^2 + k_1 \\ u_2(t) = \frac{1}{4}t + k_2 \\ u_3(t) = -\frac{1}{16}\cos 2t + k_3 \\ u_4(t) = -\frac{1}{16}\sin 2t + k_4 \end{cases}$$

Deoarece se caută o soluţie particulară x_p, se alege $k_1 = 0$, $k_2 = 0$, $k_3 = 0$, $k_4 = 0$. S-a obţinut

$$x_p(t) = \left(-\frac{1}{8}t^2\right)e^t + \left(\frac{1}{4}t\right)te^t + \left(-\frac{1}{16}\cos 2t\right)e^t\cos 2t + \left(-\frac{1}{16}\sin 2t\right)e^t\sin 2t \Rightarrow$$

$$x_p(t) = \frac{1}{8}t^2e^t - \frac{1}{16}e^t, \forall t \in \mathbb{R}$$

Metoda coeficienţilor nedeterminaţi : Se va arăta în continuare că, deoarece $(*_{EN})$ are coeficienţi constanţi şi termenul liber un cvasipolinom, atunci se poate căuta x_p de o anumită formă.

Într-adevăr,

$$f(t) = e^t = e^{1t}\left(\underbrace{1}_{P(t)}\cos(0t) + \underbrace{1}_{Q(t)}\sin(0t)\right), \forall t \in \mathbb{R},$$

adică f este de forma (7) de mai jos, cu $\alpha = 1$, $\beta = 0$, $P(t) = 1$, $Q(t) = 1$. Cum $\lambda = 1 + 0i$ este rădacină caracteristică de multiplicitate $m(\lambda) = 2 = s \Rightarrow$ se caută o soluţie particulară pentru $(*_{EN})$ de forma

$x_p(t) = t^2 e^{1t}(A(t)\cos(0t) + B(t)\sin(0t)) = t^2 e^{1t} A(t), \forall t \in \mathbb{R}$,

unde A şi B sunt polinoame de grad cel mai mare dintre gradele lui P şi Q, adică 0. Se determină polinomul constant $A(t) = \mu_0$ impunând ca x_p să fie soluţie particulară a $(*_{EN})$.

Metoda se va aborda după parcursul teoretic.

Era posibil să se obţină soluţii particulare diferite prin cele două metode.

Etapa 3 : Soluţia generală a ecuaţiei neomogene $(*_{EN})$ este dată de

$x(t; c_1, ..., c_4) = x_o(t; c_1, ..., c_4) + x_p(t), \forall t \in \mathbb{R}$ şi $c_1, ..., c_4 \in \mathbb{R}$.

Se înlocuieşte $x_o(t; c_1, ..., c_4)$ de la Etapa 1 şi una din $x_p(t)$ de la Etapa 2.

Etapa 4 : Pentru a determina soluţia problemei Cauchy $((*_{EN}), CI)$, se impun asupra soluţiei găsite x condiţiile iniţiale în $t_0 = 0$, se determină $c_1, ..., c_4 \in \mathbb{R}$, se înlocuiesc.

$$\begin{cases} x^{(4)} - 4x''' + 10x'' - 12x' + 5x = e^t, t \in \mathbb{R} \\ CI : x(0) = 1, x'(0) = -1, x''(0) = 2, x'''(0) = 0 \end{cases}$$

Lema 3.2.1. Fie EN (1) cu f polinom de forma

$$\boxed{f(t) = P(t), \forall t \in \mathbb{R}.} \qquad (7_1)$$

Dacă $\lambda = 0$ este rădăcină a EC, cu multiplicitatea $m(\lambda) = s$ ($s = 0$ dacă $\lambda = 0$ nu este rădăcină a EC), atunci EN admite o soluţie particulară de forma

$$\boxed{x_p(t) = t^s A(t), \forall t \in \mathbb{R}.} \qquad (8_1)$$

A este un polinom cu gradul egal cu al polinomului P, iar coeficienţii lui se determină impunând ca x_p să verifice EN.

Demonstraţie. Se bazează pe rezolvare de sistem de ecuaţii algebrice liniare, neomogen.

Exemplul 3.2.4. Să se determine soluţiile generale ale următoarelor ecuaţii diferenţiale liniare neomogene cu coeficienţi constanţi:

a) $x'' - x = t^2, t \in \mathbb{R}$.

b) $x^{(4)} - 4x'' = 8t^2, t \in \mathbb{R}$.

Rezolvare : a) Fie $(*_{EN})$ $x'' - x = t^2, t \in \mathbb{R}$.

Ecuaţia $(*_{EN})$ este o ecuaţie diferenţială de ordin 2, liniară, cu coeficienţii constanţi $a_1 = 0$, $a_2 = -1$, neomogenă cu termenul liber $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(t) = t^2$. Pentru $t \in \mathbb{R}$, variabilă independentă din domeniul de definiţie a soluţiei, se caută $x(t; c_1, c_2)$, soluţia generală pentru ecuaţia $(*_{EN})$.

Etapa1 : Se determină soluţia generală a ecuaţiei omogene ataşate ecuaţiei $(*_{EN})$, adică a ecuaţiei

$(*_{EO})$ $x'' - x = 0, t \in \mathbb{R}$.

Pasul 1 : Se ataşează ecuaţiei diferenţiale $(*_{EO})$ ecuaţia ei caracteristică

$$(*_{EC})\, \lambda^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow (\lambda - 1)^1 (\lambda + 1)^1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 1 \text{ cu } m(\lambda_1) = 1, \\ \lambda_2 = -1 \text{ cu } m(\lambda_2) = 1, \end{cases}$$

Pasul 2 : Pentru fiecare rădăcină a ecuaţiei caracteristice se găsesc corespunzător soluţii particulare liniar independente ale ecuaţiei omogene $(*_{EO})$, după algoritmul dat

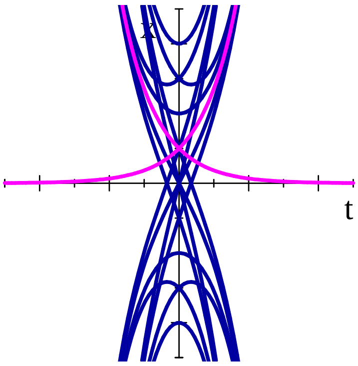
$\bullet \lambda_1 = 1$ cu $m(\lambda_1) = 1 \rightsquigarrow \{x_1(t) = e^{1t}$.

$\bullet \lambda_2 = -1$ cu $m(\lambda_2) = 1 \rightsquigarrow \{x_2(t) = e^{-1t}$.

Pasul 3 : Conform algoritmului de la Pasul 2, (x_1, x_2) este un sistem fundamental de soluţii pentru

$(*_{EO})$ (sunt exact 2 soluţii particulare pentru $(*_{EO})$ şi funcţii liniar independente). Atunci soluţia generală a ecuaţiei $(*_{EO})$ este

$x_o(t; c_1, c_2) = c_1 e^t + c_2 e^{-t}, \forall t \in \mathbb{R}$ şi $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.



Etapa 2 : Se determină o soluţie particulară a ecuaţiei neomogene $(*_{EN})$.

Metoda variaţiei constantelor (mult calcul, apar determinanţi, derivate, integrale; nu se justifică folosirea)**:** Deoarece (x_1, x_2) este un sistem fundamental de soluţii pentru $(*_{EO})$ se caută x_p de forma

$x_p(t) = u_1(t) \underbrace{e^t}_{x_1(t)} + u_2(t) \underbrace{e^{-t}}_{x_2(t)}, \forall t \in \mathbb{R}$,

unde $u_i' : \mathbb{I} \to \mathbb{R}$, $i \in \{1, 2\}$, sunt soluţii ale sistemului

$$\begin{cases} u_1'(t) \cdot e^t + u_2'(t) \cdot e^{-t} = 0 \\ u_1'(t) \cdot e^t + u_2'(t) \cdot \left(-e^{-t}\right) = t^2 \end{cases}$$

Se calculează:

$$\Delta(t) = W(t; x_1, x_2) = \begin{vmatrix} e^t & e^{-t} \\ e^t & -e^{-t} \end{vmatrix} = -2 \neq 0, \forall t \in \mathbb{R}.$$

$$\Delta_1(t) = \begin{vmatrix} 0 & e^{-t} \\ t^2 & -e^{-t} \end{vmatrix} = -t^2 e^{-t}, \forall t \in \mathbb{R}.$$

$$\Delta_2(t) = \begin{vmatrix} e^t & 0 \\ e^t & t^2 \end{vmatrix} = t^2 e^t, \forall t \in \mathbb{R}.$$

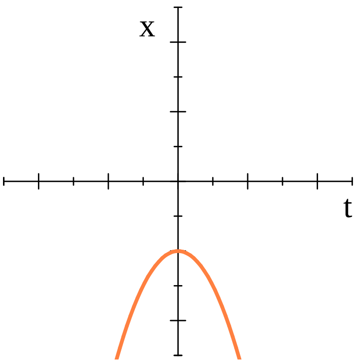
Atunci

$$\left\{ \begin{array}{l} u_1'(t) = \frac{\Delta_1(t)}{\Delta(t)} = \frac{-t^2 e^{-t}}{-2} \\ u_2'(t) = \frac{\Delta_2(t)}{\Delta(t)} = \frac{t^2 e^t}{-2} \end{array} \right| \int (\cdot)\, dt \Rightarrow \begin{cases} u_1(t) = -\frac{1}{2} e^{-t} \left(t^2 + 2t + 2\right) + k_1 \\ u_2(t) = -\frac{1}{2} e^t \left(t^2 - 2t + 2\right) + k_2 \end{cases}$$

Deoarece se caută o soluţie particulară x_p, se alege $k_1 = 0$, $k_2 = 0$. S-a obţinut

$x_p(t) = \left(-\frac{1}{2} e^{-t} \left(t^2 + 2t + 2\right)\right) \cdot e^t + \left(-\frac{1}{2} e^t \left(t^2 - 2t + 2\right)\right) \cdot e^{-t} = -t^2 - 2 \Rightarrow$

$x_p(t) = -t^2 - 2, \forall t \in \mathbb{R}$



Metoda coeficienţilor nedeterminaţi : Deoarece $(*_{EN})$ are coeficienţi constanţi şi termenul liber un polinom, atunci se poate căuta x_p cu Lema 3.2.1. Într-adevăr,

$f(t) = t^2 = P(t), \forall t \in \mathbb{R},$

adică f este de forma (7_1). Cum $\lambda = 0$ nu este rădacină caracteristică$\Rightarrow$ se caută o soluţie particulară pentru $(*_{EN})$ de forma

$x_p(t) = A(t), \forall t \in \mathbb{R},$

unde A este polinom de gradul lui P, adică 2. Se determină coeficienţii $\mu_i, i \in \{0,1,2\}$ ai polinomului $A(t) = \mu_0 + \mu_1 t + \mu_2 t^2$ impunând ca x_p să fie soluţie particulară a $(*_{EN})$.

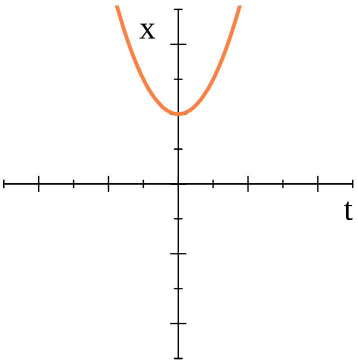
$$\begin{array}{l|l}
(-1) \qquad \cdot & x_p(t) = \mu_0 + \mu_1 t + \mu_2 t^2 \\
0 \qquad \cdot & x_p'(t) = \mu_1 + 2\mu_2 t \\
1 \qquad \cdot & x_p''(t) = 2\mu_2 \\
\hline
+ \text{ în } (*_{EN}) & t^2 = (-\mu_0 + 0\mu_1 + 2\mu_2) + (-\mu_1 + 0 \cdot 2\mu_2)\, t + (-\mu_2)\, t^2, \forall t \in \mathbb{R}.
\end{array}$$

Identificăm coeficienţii puterilor lui $t \Rightarrow$

$$\begin{array}{l} t^0 : \\ t^1 : \\ t^2 : \end{array} \left\{ \begin{array}{ll} 0 = & -\mu_0 + 0\mu_1 + 2\mu_2 \\ 0 = & -\mu_1 + 0 \cdot 2\mu_2 \\ 1 = & -\mu_2 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \mu_0 = 2 \\ \mu_1 = 0 \\ \mu_2 = 1 \end{array} \right.$$

S-a obţinut

$x_p(t) = 2 + t^2, \forall t \in \mathbb{R}.$



Era posibil să se obţină soluţii particulare diferite prin cele două metode.

Etapa 3 : Soluţia generală a ecuaţiei neomogene $(*_{EN})$ este dată de

$x(t; c_1, c_2) = x_o(t; c_1, c_2) + x_p(t), \forall t \in \mathbb{R}$ şi $c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$

Se înlocuieşte $x_o(t; c_1, c_2)$ de la Etapa 1 şi una din $x_p(t)$ de la Etapa 2.

Reprezentând grafic pe $\mathbb{I} = \mathbb{R}$ pentru

$(c_1, c_2) = (1, 0), (c_1, c_2) = (0, 1),$

cu magenta (soluţiile particulare din sistemul fundamental), şi pentru

$(c_1, c_2) = (1, 1), (c_1, c_2) = (1, 2), (c_1, c_2) = (2, 1), (c_1, c_2) = (2, 2),$

$(c_1, c_2) = (-1, 1), (c_1, c_2) = (-1, 2), (c_1, c_2) = (-2, 1), (c_1, c_2) = (-2, 2),$

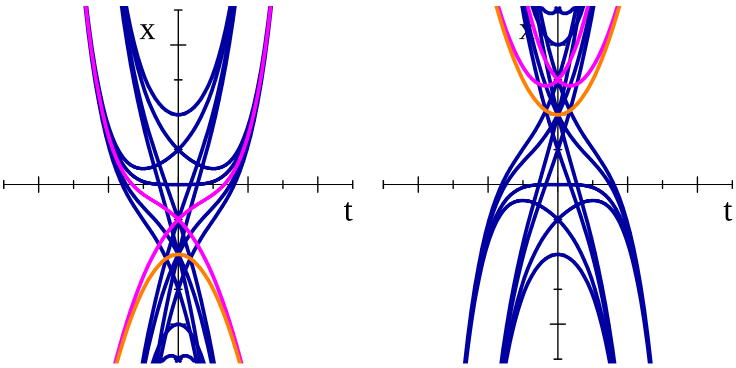
$(c_1, c_2) = (-1, -1), (c_1, c_2) = (-1, -2), (c_1, c_2) = (-2, -1), (c_1, c_2) = (-2, -2),$

$(c_1, c_2) = (1, -1), (c_1, c_2) = (1, -2), (c_1, c_2) = (2, -1), (c_1, c_2) = (2, -2),$

cu albastru, şi pentru

$(c_1, c_2) = (0, 0),$

cu portocaliu (soluţia particulară a EN prin metoda variaţiei constantelor), apoi analog pentru $(\widetilde{c}_1, \widetilde{c}_2)$ (cu soluţia particulară a EN prin metoda coeficienţilor nedeterminaţi) se obţine:



b) Fie $(*_{EN})$ $x^{(4)} - 4x'' = 8t^2, t \in \mathbb{R}$.
Ecuaţia $(*_{EN})$ este o ecuaţie diferenţială de ordin 4, liniară, cu coeficienţii constanţi $a_1 = 0$, $a_2 = -4$, $a_3 = 0$, $a_4 = 0$, neomogenă cu termenul liber $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(t) = 8t^2$. Pentru $t \in \mathbb{R}$, variabilă independentă din domeniul de definiţie a soluţiei, se caută $x(t; c_1, ..., c_4)$, soluţia generală pentru ecuaţia $(*_{EN})$.
Etapa1 : Se determină soluţia generală a ecuaţiei omogene ataşate ecuaţiei $(*_{EN})$, adică a ecuaţiei
$(*_{EO})$ $x^{(4)} - 4x'' = 0, t \in \mathbb{R}$.
Pasul 1 : Se ataşează ecuaţiei diferenţiale $(*_{EO})$ ecuaţia ei caracteristică

$$(*_{EC})\, \lambda^4 - 4\lambda^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 (\lambda - 2)(\lambda + 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0 \text{ cu } m(\lambda_1) = 2, \\ \lambda_2 = 2 \text{ cu } m(\lambda_2) = 1, \\ \lambda_3 = -2 \text{ cu } m(\lambda_3) = 1. \end{cases}$$

Pasul 2 : Pentru fiecare rădăcină a ecuaţiei caracteristice se găsesc corespunzător soluţii particulare liniar independente ale ecuaţiei omogene $(*_{EO})$, după algoritmul dat

$\bullet \lambda_1 = 0$ cu $m(\lambda_1) = 2 \rightsquigarrow \begin{cases} x_1(t) = e^{0t}, \\ x_2(t) = te^{0t}. \end{cases}$

$\bullet \lambda_2 = 2$ cu $m(\lambda_2) = 1 \rightsquigarrow \{x_3(t) = e^{2t}$.

$\bullet \lambda_3 = -2$ cu $m(\lambda_3) = 1 \rightsquigarrow \{x_4(t) = e^{-2t}$.

Pasul 3 : Conform algoritmului de la Pasul 2, $(x_1, ..., x_4)$ este un sistem fundamental de soluţii pentru $(*_{EO})$ (sunt exact 4 soluţii particulare pentru $(*_{EO})$ şi funcţii liniar independente). Atunci soluţia generală a ecuaţiei $(*_{EO})$ este

$$x_o(t; c_1, ..., c_4) = c_1 1 + c_2 t + c_3 e^{2t} + c_4 e^{-2t}, \forall t \in \mathbb{R} \text{ şi } c_1, ..., c_4 \in \mathbb{R}.$$

Etapa 2 : Se determină o soluţie particulară a ecuaţiei neomogene $(*_{EN})$.
Metoda variaţiei constantelor (mult calcul, apar determinanţi, derivate, integrale; nu se justifică folosirea)**:** Deoarece $(x_1, ..., x_4)$ este un sistem fundamental de soluţii pentru $(*_{EO})$, se caută x_p de forma

$$x_p(t) = u_1(t) \underbrace{1}_{x_1(t)} + u_2(t) \underbrace{t}_{x_2(t)} + u_3(t) \underbrace{e^{2t}}_{x_3(t)} + u_4(t) \underbrace{e^{-2t}}_{x_4(t)}, \forall t \in \mathbb{R},$$

unde $u_i' : \mathbb{I} \to \mathbb{R}$, $i \in \{1, 2, 3, 4\}$, sunt soluţii ale sistemului

$$\begin{cases} u_1'(t) \cdot 1 + u_2'(t) \cdot t + u_3'(t) \cdot e^{2t} + u_4'(t) \cdot e^{-2t} = 0 \\ u_1'(t) \cdot 0 + u_2'(t) \cdot 1 + u_3'(t) \cdot e^{2t} \cdot 2 + u_4'(t) \cdot e^{-2t} \cdot (-2) = 0 \\ u_1'(t) \cdot 0 + u_2'(t) \cdot 0 + u_3'(t) \cdot e^{2t} \cdot 2^2 + u_4'(t) \cdot e^{-2t} \cdot (-2)^2 = 0 \\ u_1'(t) \cdot 0 + u_2'(t) \cdot 0 + u_3'(t) \cdot e^{2t} \cdot 2^3 + u_4'(t) \cdot e^{-2t} \cdot (-2)^3 = 8t^2 \end{cases}$$

Se calculează:

$$\Delta(t) = W(t; x_1, ..., x_4) = \begin{vmatrix} 1 & t & e^{2t} & e^{-2t} \\ 0 & 1 & e^{2t}\cdot 2 & e^{-2t}\cdot(-2) \\ 0 & 0 & e^{2t}\cdot 2^2 & e^{-2t}\cdot(-2)^2 \\ 0 & 0 & e^{2t}\cdot 2^3 & e^{-2t}\cdot(-2)^3 \end{vmatrix} = -64 \neq 0, \forall t \in \mathbb{R}.$$

$$\Delta_1(t) = \begin{vmatrix} 0 & t & e^{2t} & e^{-2t} \\ 0 & 1 & e^{2t}\cdot 2 & e^{-2t}\cdot(-2) \\ 0 & 0 & e^{2t}\cdot 2^2 & e^{-2t}\cdot(-2)^2 \\ 8t^2 & 0 & e^{2t}\cdot 2^3 & e^{-2t}\cdot(-2)^3 \end{vmatrix} = -128t^3, \forall t \in \mathbb{R}.$$

$$\Delta_2(t) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & e^{2t} & e^{-2t} \\ 0 & 0 & e^{2t}\cdot 2 & e^{-2t}\cdot(-2) \\ 0 & 0 & e^{2t}\cdot 2^2 & e^{-2t}\cdot(-2)^2 \\ 0 & 8t^2 & e^{2t}\cdot 2^3 & e^{-2t}\cdot(-2)^3 \end{vmatrix} = 128t^2, \forall t \in \mathbb{R}.$$

$$\Delta_3(t) = \begin{vmatrix} 1 & t & 0 & e^{-2t} \\ 0 & 1 & 0 & e^{-2t}\cdot(-2) \\ 0 & 0 & 0 & e^{-2t}\cdot(-2)^2 \\ 0 & 0 & 8t^2 & e^{-2t}\cdot(-2)^3 \end{vmatrix} = -32t^2e^{-2t}, \forall t \in \mathbb{R}.$$

$$\Delta_4(t) = \begin{vmatrix} 1 & t & e^{2t} & 0 \\ 0 & 1 & e^{2t}\cdot 2 & 0 \\ 0 & 0 & e^{2t}\cdot 2^2 & 0 \\ 0 & 0 & e^{2t}\cdot 2^3 & 8t^2 \end{vmatrix} = 32t^2e^{2t}, \forall t \in \mathbb{R}.$$

Atunci

$$\left\{\begin{array}{l} u_1'(t) = \frac{\Delta_1(t)}{\Delta(t)} = \frac{-128t^3}{-64} = 2t^3 \\ u_2'(t) = \frac{\Delta_2(t)}{\Delta(t)} = \frac{128t^2}{-64} = -2t^2 \\ u_3'(t) = \frac{\Delta_3(t)}{\Delta(t)} = \frac{-32t^2e^{-2t}}{-64} = \frac{1}{2}t^2e^{-2t} \\ u_4'(t) = \frac{\Delta_4(t)}{\Delta(t)} = \frac{32t^2e^{2t}}{-64} = -\frac{1}{2}t^2e^{2t} \end{array}\right| \int(\cdot)\,dt \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} u_1(t) = \frac{1}{2}t^4 + k_1 \\ u_2(t) = -\frac{2}{3}t^3 + k_2 \\ u_3(t) = -\frac{1}{8}e^{-2t}\left(2t^2 + 2t + 1\right) + k_3 \\ u_4(t) = -\frac{1}{8}e^{2t}\left(2t^2 - 2t + 1\right) + k_4 \end{array}\right.$$

Deoarece se caută o soluţie particulară x_p se alege $k_1 = 0$, $k_2 = 0$, $k_3 = 0$, $k_4 = 0$. S-a obţinut

$$x_p(t) = \left(\tfrac{1}{2}t^4\right)\cdot 1 + \left(-\tfrac{2}{3}t^3\right)\cdot t + \left(-\tfrac{1}{8}e^{-2t}\left(2t^2+2t+1\right)\right)\cdot e^{2t} + \left(-\tfrac{1}{8}e^{2t}\left(2t^2-2t+1\right)\right)\cdot e^{-2t} \Rightarrow$$

$$x_p(t) = -\tfrac{1}{6}t^4 - \tfrac{1}{2}t^2 - \tfrac{1}{4}, \forall t \in \mathbb{R}$$

Metoda coeficienţilor nedeterminaţi : Deoarece $(*_{EN})$ are coeficienţi constanţi şi termenul liber un polinom, atunci se poate căuta x_p cu Lema 3.2.1. Într-adevăr,

$$f(t) = 8t^2 = P(t), \forall t \in \mathbb{R},$$

adică f este de forma (7_1). Cum $\lambda = 0$ este rădacină caracteristică de multiplicitate $m(\lambda) = 2 = s \Rightarrow$ se caută o soluţie particulară pentru $(*_{EN})$, de forma

$$x_p(t) = t^2 A(t), \forall t \in \mathbb{R},$$

unde A este polinom de gradul lui P, adică 2. Se determină coeficienţii $\mu_i, i \in \{0,1,2\}$ ai polinomului $A(t) = \mu_0 + \mu_1 t + \mu_2 t^2$ impunănd ca x_p să fie soluţie particulară a $(*_{EN})$.

$$\begin{array}{ll|l} 0 & \cdot & x_p(t) = \mu_0 t^2 + \mu_1 t^3 + \mu_2 t^4 \\ 0 & \cdot & x_p'(t) = 2\mu_0 t + 3\mu_1 t^2 + 4\mu_2 t^3 \\ (-4) & \cdot & x_p''(t) = 2\mu_0 + 6\mu_1 t + 12\mu_2 t^2 \\ 0 & \cdot & x_p'''(t) = 6\mu_1 + 24\mu_2 t \\ 1 & \cdot & x_p^{(4)}(t) = 24\mu_2 \\ \hline + \text{ în } (*_{EN}) & & 8t^2 = (-8\mu_0 + 24\mu_2) + (-24\mu_1)\,t + (-48\mu_2)\,t^2, \forall t \in \mathbb{R}. \end{array}$$

Identificăm coeficienţii puterilor lui $t \Rightarrow$

$$\begin{array}{l} t^0: \\ t^1: \\ t^2: \end{array}\left\{\begin{array}{llll} 0= & -8\mu_0 & & +24\mu_2 \\ 0= & & -24\mu_1 & \\ 8= & & & -48\mu_2 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \mu_0=\frac{-1}{2} \\ \mu_1=0 \\ \mu_2=\frac{-1}{6} \end{array}\right.$$

S-a obţinut

$x_p(t)=t^2\left(\frac{-1}{2}+0t+\frac{-1}{6}t^2\right), \forall t\in\mathbb{R}$.

Era posibil să se obţină soluţii particulare diferite prin cele două metode.

Etapa 3 : Soluţia generală a ecuaţiei neomogene $(*_{EN})$ este dată de

$x(t;c_1,...,c_4)=x_o(t;c_1,...,c_4)+x_p(t), \forall t\in\mathbb{R}$ şi $c_1,...,c_4\in\mathbb{R}$.

Se înlocuieşte $x_o(t;c_1,...,c_4)$ de la Etapa 1 şi una din $x_p(t)$ de la Etapa 2.

Lema 3.2.2. Fie EN (1) cu f cvasipolinom de forma

$$\boxed{f(t)=e^{\alpha t}P(t), \forall t\in\mathbb{R},} \tag{7_2}$$

unde $\alpha\in\mathbb{R}$, iar P este un polinom. Dacă $\lambda=\alpha$ este rădăcină a EC, cu multiplicitatea $m(\lambda)=s$ ($s=0$ dacă $\lambda=\alpha$ nu este rădăcină a EC), atunci EN admite o soluţie particulară de forma

$$\boxed{x_p(t)=t^s e^{\alpha t}A(t), \forall t\in\mathbb{R}.} \tag{8_3}$$

A este un polinom cu gradul egal cu al polinomului P, iar coeficienţii lui se determină impunând ca x_p să verifice EN.

Demonstraţie. Se bazează pe rezolvare de sistem de ecuaţii algebrice liniare, neomogen, obţinut folosind regula de derivare Leibniz de derivare a produsului dintre polinom şi exponenţială.

Exemplul 3.2.5. Să se determine soluţiile generale ale următoarelor ecuaţii diferenţiale liniare neomogene cu coeficienţi constanţi:

a) $x''-3x'+2x=8t^2e^{3t}, t\in\mathbb{R}$.

b) $x''-6x'+9x=t^2e^{3t}, t\in\mathbb{R}$.

Rezolvare : a) Fie $(*_{EN})$ $x''-3x'+2x=8t^2e^{3t}, t\in\mathbb{R}$.

Ecuaţia $(*_{EN})$ este o ecuaţie diferenţială de ordin 2, liniară, cu coeficienţii constanţi $a_1=-3$, $a_2=2$, neomogenă cu termenul liber $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(t)=8t^2e^{3t}$. Pentru $t\in\mathbb{R}$, variabilă independentă din domeniul de definiţie a soluţiei, se caută $x(t;c_1,c_2)$, soluţia generală pentru ecuaţia $(*_{EN})$.

Etapa1 : Se determină soluţia generală a ecuaţiei omogene ataşate ecuaţiei $(*_{EN})$, adică a ecuaţiei

$(*_{EO})$ $x''-3x'+2x=0, t\in\mathbb{R}$.

Pasul 1 : Se ataşează ecuaţiei diferenţiale $(*_{EO})$ ecuaţia ei caracteristică

$$(*_{EC})\ \lambda^2-3\lambda+2=0 \Leftrightarrow (\lambda-1)^1(\lambda-2)^1=0 \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \lambda_1=1 \text{ cu } m(\lambda_1)=1, \\ \lambda_2=2 \text{ cu } m(\lambda_2)=1, \end{array}\right.$$

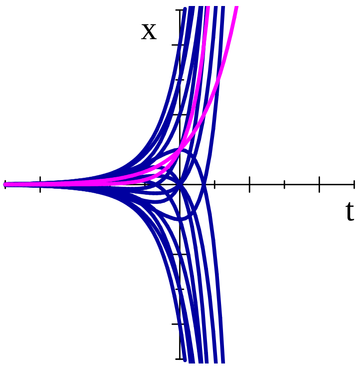
Pasul 2 : Pentru fiecare rădăcină a ecuaţiei caracteristice se găsesc corespunzător soluţii particulare liniar independente ale ecuaţiei omogene $(*_{EO})$, după algoritmul dat

$\bullet\lambda_1=1$ cu $m(\lambda_1)=1 \rightsquigarrow \{x_1(t)=e^{1t}$.

$\bullet\lambda_2=2$ cu $m(\lambda_2)=1 \rightsquigarrow \{x_2(t)=e^{2t}$.

Pasul 3 : Conform algoritmului de la Pasul 2, (x_1,x_2) este un sistem fundamental de soluţii pentru $(*_{EO})$ (sunt exact 2 soluţii particulare pentru $(*_{EO})$ şi funcţii liniar independente). Atunci soluţia generală a ecuaţiei $(*_{EO})$ este

$x_o(t;c_1,c_2)=c_1e^t+c_2e^{2t}, \forall t\in\mathbb{R}$ şi $c_1,c_2\in\mathbb{R}$.



Etapa 2 : Se determină o soluţie particulară a ecuaţiei neomogene $(*_{EN})$.
Metoda variaţiei constantelor (mult calcul, apar determinanţi, derivate, integrale; nu se justifică folosirea).
Metoda coeficienţilor nedeterminaţi : Deoarece $(*_{EN})$ are coeficienţi constanţi şi termenul liber un cvasipolinom, atunci se poate căuta x_p cu Lema 3.2.2. Într-adevăr,

$f(t) = \overline{8t^2 e^{3t} = e^{3t}}P(t), \forall t \in \mathbb{R},$

adică f este de forma (7_2). Cum $\lambda = 3$ nu este rădacină caracteristică$\Rightarrow$ se caută o soluţie particulară pentru $(*_{EN})$ de forma

$x_p(t) = e^{3t}A(t), \forall t \in \mathbb{R},$

unde A este polinom de gradul lui P, adică 2. Se determină coeficienţii $\mu_i, i \in \{0,1,2\}$ ai polinomului $A(t) = \mu_0 + \mu_1 t + \mu_2 t^2$ impunând ca x_p să fie soluţie particulară a $(*_{EN})$.

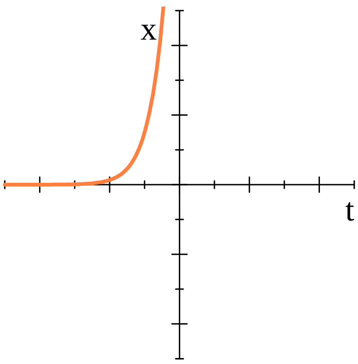
$$\begin{array}{l|l}
2 \qquad \cdot & x_p(t) = e^{3t}\left(\mu_0 + \mu_1 t + \mu_2 t^2\right) \\
-3 \qquad \cdot & x_p'(t) = e^{3t} \cdot 3\left(\mu_0 + \mu_1 t + \mu_2 t^2\right) + e^{3t} \cdot (\mu_1 + 2\mu_2 t) \\
1 \qquad \cdot & x_p''(t) = e^{3t} \cdot 3^2\left(\mu_0 + \mu_1 t + \mu_2 t^2\right) + 2e^{3t} \cdot 3(\mu_1 + 2\mu_2 t) + e^{3t} \cdot (2\mu_2) \\
\hline
+ \text{ în } (*_{EN}) & 8t^2 e^{3t} = \left((2\mu_0 + 11\mu_1 + 4\mu_2) + (2\mu_1 + 18\mu_2)t + (2\mu_2)t^2\right)e^{3t}, \forall t \in \mathbb{R}.
\end{array}$$

Se simplifică prin e^{3t}, identificăm coeficienţii puterilor lui $t \Rightarrow$

$$\begin{array}{l} t^0: \\ t^1: \\ t^2: \end{array} \left\{ \begin{array}{l} 0 = 2\mu_0 + 3\mu_1 + 2\mu_2 \\ 0 = \qquad 2\mu_1 + 6\mu_2 \\ 8 = \qquad\qquad 2\mu_2 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \mu_0 = 14 \\ \mu_1 = -12 \\ \mu_2 = 4 \end{array} \right.$$

S-a obţinut

$x_p(t) = e^{3t}\left(14 - 12t + 4t^2\right), \forall t \in \mathbb{R}.$



Etapa 3 : Soluţia generală a ecuaţiei neomogene $(*_{EN})$ este dată de

$x(t; c_1, c_2) = x_o(t; c_1, c_2) + x_p(t), \forall t \in \mathbb{R}$ şi $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Se înlocuieşte $x_o(t; c_1, c_2)$ de la Etapa 1 şi una din $x_p(t)$ de la Etapa 2.

Reprezentând grafic pe $\mathbb{I} = \mathbb{R}$ pentru

$(c_1, c_2) = (1, 0), (c_1, c_2) = (0, 1)$,

cu magenta (soluţiile particulare din sistemul fundamental), şi pentru

$(c_1, c_2) = (1, 1), (c_1, c_2) = (1, 2), (c_1, c_2) = (2, 1), (c_1, c_2) = (2, 2)$,

$(c_1, c_2) = (-1, 1), (c_1, c_2) = (-1, 2), (c_1, c_2) = (-2, 1), (c_1, c_2) = (-2, 2)$,

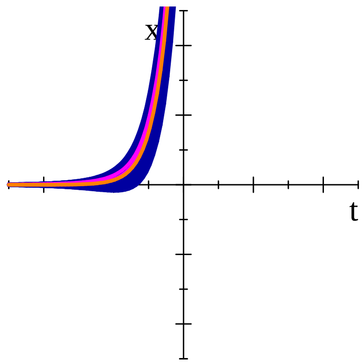
$(c_1, c_2) = (-1, -1), (c_1, c_2) = (-1, -2), (c_1, c_2) = (-2, -1), (c_1, c_2) = (-2, -2)$,

$(c_1, c_2) = (1, -1), (c_1, c_2) = (1, -2), (c_1, c_2) = (2, -1), (c_1, c_2) = (2, -2)$,

cu albastru, şi pentru

$(c_1, c_2) = (0, 0)$,

cu portocaliu (soluţia particulară a EN prin metoda coeficienţilor nedeterminaţi), se obţine:



b) Fie $(*_{EN})$ $x'' - 6x' + 9x = t^2 e^{3t}, t \in \mathbb{R}$.

Ecuaţia $(*_{EN})$ este o ecuaţie diferenţială de ordin 2, liniară, cu coeficienţii constanţi $a_1 = -6$, $a_2 = 9$, neomogenă cu termenul liber $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(t) = t^2 e^{3t}$. Pentru $t \in \mathbb{R}$, variabilă independentă din domeniul de definiţie a soluţiei, se caută $x(t; c_1, c_2)$, soluţia generală pentru ecuaţia $(*_{EN})$.

Etapa1 : Se determină soluţia generală a ecuaţiei omogene ataşate ecuaţiei $(*_{EN})$, adică a ecuaţiei

$(*_{EO})$ $x'' - 6x' + 9x = 0, t \in \mathbb{R}$.

Pasul 1 : Se ataşează ecuaţiei diferenţiale $(*_{EO})$ ecuaţia ei caracteristică

$(*_{EC})\, \lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0 \Leftrightarrow (\lambda - 3)^2 = 0 \Rightarrow \{\lambda_1 = 3$ cu $m(\lambda_1) = 2$.

Pasul 2 : Pentru fiecare rădăcină a ecuaţiei caracteristice se găsesc corespunzător soluţii particulare liniar independente ale ecuaţiei omogene $(*_{EO})$, după algoritmul dat

$\bullet \lambda_1 = 3$ cu $m(\lambda_1) = 2 \rightsquigarrow \begin{cases} x_1(t) = e^{3t}, \\ x_2(t) = te^{3t}. \end{cases}$

Pasul 3 : Conform algoritmului de la Pasul 2, (x_1, x_2) este un sistem fundamental de soluţii pentru $(*_{EO})$ (sunt exact 2 soluţii particulare pentru $(*_{EO})$ şi funcţii liniar independente). Atunci soluţia generală a ecuaţiei $(*_{EO})$ este

$x_o(t; c_1, c_2) = c_1 e^{3t} + c_2 te^{3t}, \forall t \in \mathbb{R}$ şi $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Etapa 2 : Se determină o soluţie particulară a ecuaţiei neomogene $(*_{EN})$.

Metoda variaţiei constantelor (mult calcul, apar determinanţi, derivate, integrale; nu se justifică folosirea).

Metoda coeficienţilor nedeterminaţi : Deoarece $(*_{EN})$ are coeficienţi constanţi şi termenul liber un cvasipolinom, atunci se poate căuta x_p cu Lema 3.2.2. Într-adevăr,

$f(t) = t^2 e^{3t} = e^{3t} P(t), \forall t \in \mathbb{R}$,

adică f este de forma (7_2). Cum $\lambda = 3$ este rădacină caracteristică de multiplicitate $s = 2 \Rightarrow$ se caută o soluţie particulară pentru $(*_{EN})$ de forma

$x_p(t) = t^2 e^{3t} A(t), \forall t \in \mathbb{R},$

unde A este polinom de gradul lui P, adică 2. Se determină coeficienţii $\mu_i, i \in \{0,1,2\}$ ai polinomului $A(t) = \mu_0 + \mu_1 t + \mu_2 t^2$ impunând ca x_p să fie soluţie particulară a $(*_{EN})$.

$$\begin{array}{l|l} 9 & \cdot \, x_p(t) = e^{3t}\left(\mu_0 t^2 + \mu_1 t^3 + \mu_2 t^4\right) \\ -6 & \cdot \, x_p'(t) = e^{3t} \cdot 3\left(\mu_0 t^2 + \mu_1 t^3 + \mu_2 t^4\right) + e^{3t} \cdot \left(2\mu_0 t + 3\mu_1 t^2 + 4\mu_2 t^3\right) \\ 1 & \cdot \, x_p''(t) = e^{3t} \cdot 3^2\left(\mu_0 t^2 + \mu_1 t^3 + \mu_2 t^4\right) + 2e^{3t} \cdot 3\left(2\mu_0 t + 3\mu_1 t^2 + 4\mu_2 t^3\right) + e^{3t} \cdot \left(2\mu_0 + 6\mu_1 t +\right. \\ \hline + \text{ în } (*_{EN}) & t^2 e^{3t} = \left(2\mu_0 + 6\mu_1 t + 12\mu_2 t^2\right) e^{3t}, \forall t \in \mathbb{R}. \end{array}$$

Se simplifică prin e^{3t}, identificăm coeficienţii puterilor lui $t \Rightarrow$

$$\begin{array}{l} t^0 : \\ t^1 : \\ t^2 : \end{array} \left\{ \begin{array}{llll} 0 = & 2\mu_0 & & \\ 0 = & & 6\mu_1 & \\ 1 = & & & 12\mu_2 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \mu_0 = 0 \\ \mu_1 = 0 \\ \mu_2 = \frac{1}{12} \end{array} \right.$$

S-a obţinut

$x_p(t) = e^{3t}\left(\frac{1}{12}t^4\right), \forall t \in \mathbb{R}.$

Etapa 3 : Soluţia generală a ecuaţiei neomogene $(*_{EN})$ este dată de

$x(t; c_1, c_2) = x_o(t; c_1, c_2) + x_p(t), \forall t \in \mathbb{R}$ şi $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Se înlocuieşte $x_o(t; c_1, c_2)$ de la Etapa 1 şi una din $x_p(t)$ de la Etapa 2.

Teorema 3.2.3. Fie EN (1) cu f un cvasipolinom, adică

$$\boxed{f(t) = e^{\alpha t}\left(P(t)\cos(\beta t) + Q(t)\sin(\beta t)\right), \forall t \in \mathbb{R},} \tag{7}$$

unde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, iar P, Q sunt polinoame.

Dacă $\lambda = \alpha + \beta i$ este rădăcină a EC, cu multiplicitatea $m(\lambda) = s$ ($s = 0$ dacă $\lambda = \alpha + \beta i$ nu este rădăcină a EC), atunci EN admite o soluţie particulară de forma

$$\boxed{x_p(t) = t^s e^{\alpha t}\left(A(t)\cos(\beta t) + B(t)\sin(\beta t)\right), \forall t \in \mathbb{R}.} \tag{8}$$

A şi B sunt polinoame de grad cel mai mare dintre gradele lui P şi Q iar coeficienţii lor se determină impunând ca x_p să verifice EN.

Demonstraţie. Se bazează pe rezolvare de sistem de ecuaţii algebrice liniare, neomogen, obţinut folosind regulile de derivare şi definiţia funcţiei exponenţiale în $\mathbb{C}$.

Cazul $s = 0$ se mai întâlneşte cu denumirea "fără rezonanţă", iar cazul $s > 0$ cu denumirea "cu rezonanţă".

Exemplul 3.2.6. Să se determine soluţiile generale ale următoarelor ecuaţii diferenţiale liniare neomogene cu coeficienţi constanţi:

a) $x'' - 6x' + 9x = 10\sin t, t \in \mathbb{R}$.

b) $x'' + x = 10\sin t, t \in \mathbb{R}$.

Rezolvare : a) Fie $(*_{EN})$ $x'' - 6x' + 9x = 10\sin t, t \in \mathbb{R}$.

Ecuaţia $(*_{EN})$ este o ecuaţie diferenţială de ordin 2, liniară, cu coeficienţii constanţi $a_1 = -6$, $a_2 = 9$, neomogenă cu termenul liber $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(t) = 10\sin t$. Pentru $t \in \mathbb{R}$, variabilă independentă din domeniul de definiţie a soluţiei, se caută $x(t; c_1, c_2)$, soluţia generală pentru ecuaţia $(*_{EN})$.

Etapa1 : Se determină soluţia generală a ecuaţiei omogene ataşate ecuaţiei $(*_{EN})$, adică a ecuaţiei

$(*_{EO})$ $x'' - 6x' + 9x = 0, t \in \mathbb{R}$.

Pasul 1 : Se ataşează ecuaţiei diferenţiale $(*_{EO})$ ecuaţia ei caracteristică

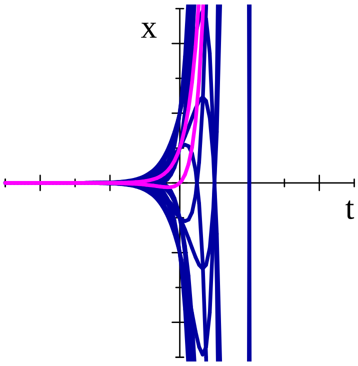
$(*_{EC})$ $\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0 \Leftrightarrow (\lambda - 3)^2 = 0 \Rightarrow \{\lambda_1 = 3$ cu $m(\lambda_1) = 2$.

Pasul 2 : Pentru fiecare rădăcină a ecuaţiei caracteristice se găsesc corespunzător soluţii particulare liniar independente ale ecuaţiei omogene $(*_{EO})$, după algoritmul dat

$\bullet\lambda_1 = 3$ cu $m(\lambda_1) = 2 \rightsquigarrow \begin{cases} x_1(t) = e^{3t}, \\ x_2(t) = te^{3t}. \end{cases}$

Pasul 3 : Conform algoritmului de la Pasul 2, (x_1, x_2) este un sistem fundamental de soluţii pentru $(*_{EO})$ (sunt exact 2 soluţii particulare pentru $(*_{EO})$ şi funcţii liniar independente). Atunci soluţia generală a ecuaţiei $(*_{EO})$ este

$x_o(t; c_1, c_2) = c_1 e^{3t} + c_2 te^{3t}, \forall t \in \mathbb{R}$ şi $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.



Etapa 2 : Se determină o soluţie particulară a ecuaţiei neomogene $(*_{EN})$.

Metoda variaţiei constantelor (mult calcul, apar determinanţi, derivate, integrale; nu se justifică folosirea)**.**

Metoda coeficienţilor nedeterminaţi : Deoarece $(*_{EN})$ are coeficienţi constanţi şi termenul liber un cvasipolinom, atunci se poate căuta x_p cu Teorema 3.2.3. Într-adevăr,

$$f(t) = 10\sin t = e^{0t}\left(\underbrace{0}_{P(t)}\cos(1t) + \underbrace{10}_{Q(t)}\sin(1t)\right), \forall t \in \mathbb{R},$$

adică f este de forma (7), cu $\alpha = 0$, $\beta = 1$, $P(t) = 0$, $Q(t) = 10$. Cum $\lambda = 0 + 1i$ nu este rădacină caracteristică$\Rightarrow$ se caută o soluţie particulară pentru $(*_{EN})$ de forma

$x_p(t) = e^{0t}(A(t)\cos(1t) + B(t)\sin(1t)), \forall t \in \mathbb{R},$

unde A şi B sunt polinoame de grad cel mai mare dintre gradele lui P şi Q, adică 0. Se determină polinoamele constante $A_2(t) = \mu_0$ şi $B_2(t) = \nu_0$ impunănd ca x_{p_2} să fie soluţie particulară a $(*_{EN2})$.

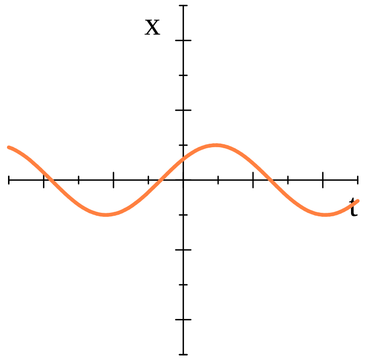
$$\begin{array}{l|l} 9 \quad \cdot & x_p(t) = \mu_0\cos t + \nu_0\sin t \\ -6 \quad \cdot & x_p'(t) = -\mu_0\sin t + \nu_0\cos t \\ 1 \quad \cdot & x_p''(t) = -\mu_0\cos t - \nu_0\sin t \\ \hline + \text{ în } (*_{EN}) & 10\sin t = (8\mu_0 - 6\nu_0)\cos t + (6\mu_0 + 8\nu_0)\sin t, \forall t \in \mathbb{R} \end{array}$$

Cum $(\cos t, \sin t), \forall t \in \mathbb{R}$ sunt funcţii liniar independente pe $\mathbb{R}$ (au $W = 1$) $\Rightarrow$ identificăm coeficienţii lor$\Rightarrow$

$$\begin{array}{l} \cos t: \\ \sin t: \end{array} \begin{cases} 0 = 8\mu_0 - 6\nu_0 \\ 10 = 6\mu_0 + 8\nu_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mu_0 = \frac{3}{5} \\ \nu_0 = \frac{4}{5} \end{cases}$$

S-a obţinut

$x_p(t) = \frac{3}{5}\cos t + \frac{4}{5}\sin t, \forall t \in \mathbb{R}.$



Etapa 3 : Soluţia generală a ecuaţiei neomogene ($*_{EN}$) este dată de

$x(t;c_1,c_2) = x_o(t;c_1,c_2) + x_p(t), \forall t \in \mathbb{R}$ şi $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Se înlocuieşte $x_o(t;c_1,c_2)$ de la Etapa 1 şi una din $x_p(t)$ de la Etapa 2.

Reprezentând grafic pe $\mathbb{I} = \mathbb{R}$ pentru

$(c_1,c_2) = (1,0), (c_1,c_2) = (0,1),$

cu magenta (soluţiile particulare ale EN corespunzătoare celor din sistemul fundamental), şi pentru

$(c_1,c_2) = (1,1), (c_1,c_2) = (1,2), (c_1,c_2) = (2,1), (c_1,c_2) = (2,2),$

$(c_1,c_2) = (-1,1), (c_1,c_2) = (-1,2), (c_1,c_2) = (-2,1), (c_1,c_2) = (-2,2),$

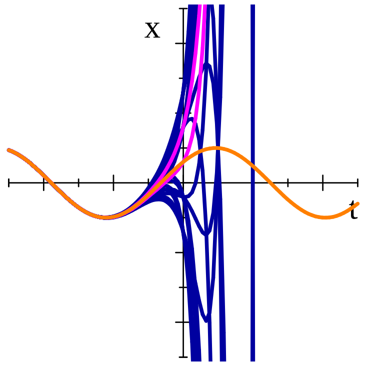
$(c_1,c_2) = (-1,-1), (c_1,c_2) = (-1,-2), (c_1,c_2) = (-2,-1), (c_1,c_2) = (-2,-2),$

$(c_1,c_2) = (1,-1), (c_1,c_2) = (1,-2), (c_1,c_2) = (2,-1), (c_1,c_2) = (2,-2),$

cu albastru, şi pentru

$(c_1,c_2) = (0,0),$

cu portocaliu (soluţia particulară a EN prin metoda coeficienţilor), se obţine:



b) Fie ($*_{EN}$) $x'' + x = 10\sin t, t \in \mathbb{R}$.

Ecuaţia ($*_{EN}$) este o ecuaţie diferenţială de ordin 2, liniară, cu coeficienţii constanţi $a_1 = 0$, $a_2 = 1$, neomogenă cu termenul liber $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(t) = 10\sin t$. Pentru $t \in \mathbb{R}$, variabilă independentă din domeniul de definiţie a soluţiei, se caută $x(t;c_1,c_2)$, soluţia generală pentru ecuaţia ($*_{EN}$).

Etapa 1 : Se determină soluţia generală a ecuaţiei omogene ataşate ecuaţiei ($*_{EN}$), adică a ecuaţiei

($*_{EO}$) $x'' + x = 0, t \in \mathbb{R}$.

Pasul 1 : Se ataşează ecuaţiei diferenţiale ($*_{EO}$) ecuaţia ei caracteristică

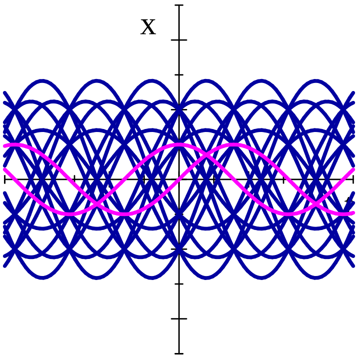
($*_{EC}$) $\lambda^2 + 1 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = 0 \pm i$ cu $m(\lambda_{1,2}) = 1$

Pasul 2 : Pentru fiecare rădăcină a ecuaţiei caracteristice se găsesc corespunzător soluţii particulare liniar independente ale ecuaţiei omogene ($*_{EO}$), după algoritmul dat

$\bullet\lambda_{1,2} = 0 \pm i$ cu $m(\lambda_{1,2}) = 1 \rightsquigarrow \begin{cases} x_2(t) = e^{0t}\cos t, \\ x_3(t) = e^{0t}\sin t. \end{cases}$

Pasul 3 : Conform algoritmului de la Pasul 2, (x_1, x_2) este un sistem fundamental de soluţii pentru $(*_{EO})$ (sunt soluţii particulare pentru $(*_{EO})$ şi funcţii liniar independente). Atunci soluţia generală a ecuaţiei $(*_{EO})$ este

$x_o(t; c_1, c_2) = c_1 \cos t + c_2 \sin t, \forall t \in \mathbb{R}$ şi $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.



Etapa 2 : Se determină o soluţie particulară a ecuaţiei neomogene $(*_{EN})$.
Metoda variaţiei constantelor (mult calcul, apar determinanţi, derivate, integrale; nu se justifică folosirea).
Metoda coeficienţilor nedeterminaţi : Deoarece $(*_{EN})$ are coeficienţi constanţi şi termenul liber un cvasipolinom, atunci se poate căuta x_p cu Teorema 3.2.3. Într-adevăr,

$$f(t) = 10\sin t = e^{0t}\left(\underbrace{0}_{P(t)}\cos(1t) + \underbrace{10}_{Q(t)}\sin(1t)\right), \forall t \in \mathbb{R},$$

adică f este de forma (7), cu $\alpha = 0$, $\beta = 1$, $P(t) = 0$, $Q(t) = 10$. Cum $\lambda = 0 + 1i$ este rădacină caracteristică de multiplicitate $m(\lambda) = 1 = s \Rightarrow$ se caută o soluţie particulară pentru $(*_{EN})$ de forma

$x_p(t) = te^{0t}(A(t)\cos(1t) + B(t)\sin(1t)), \forall t \in \mathbb{R}$,

unde A şi B sunt polinoame de grad cel mai mare dintre gradele lui P şi Q, adică 0. Se determină polinoamele constante $A(t) = \mu_0$ şi $B(t) = \nu_0$ impunând ca x_p să fie soluţie particulară a $(*_{EN})$.

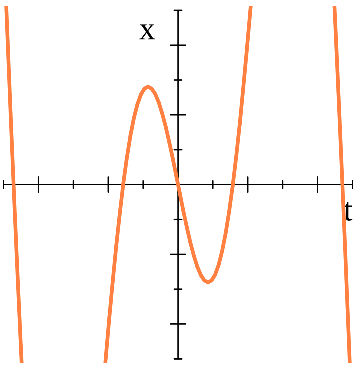
$$\begin{array}{ll|l} 1 & \cdot & x_p(t) = t(\mu_0\cos t + \nu_0 \sin t) \\ 0 & \cdot & x_p'(t) = 1(\mu_0 \cos t + \nu_0 \sin t) + t(-\mu_0 \sin t + \nu_0 \cos t) \\ 1 & \cdot & x_p''(t) = 2(-\mu_0 \sin t + \nu_0 \cos t) + t(-\mu_0 \cos t - \nu_0 \sin t) \\ \hline + \text{ în } (*_{EN}) & \multicolumn{2}{|l}{10\sin t = (2\nu_0)\cos t + (-2\mu_0)\sin t, \forall t \in \mathbb{R}} \end{array}$$

Cum $(\cos t, \sin t), \forall t \in \mathbb{R}$ sunt funcţii liniar independente pe $\mathbb{R}$ (au $W = 1$) $\Rightarrow$ identificăm coeficienţii lor$\Rightarrow$

$$\begin{array}{l} \cos t : \\ \sin t : \end{array} \begin{cases} 0 = 2\nu_0 \\ 10 = -2\mu_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mu_0 = -5 \\ \nu_0 = 0 \end{cases}$$

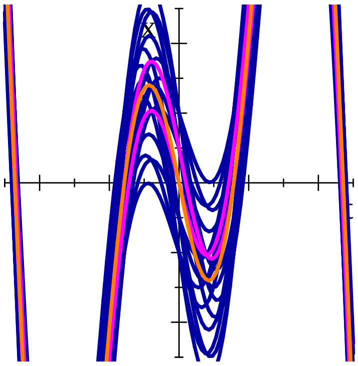
S-a obţinut

$x_p(t) = -5t\cos t, \forall t \in \mathbb{R}$.



Etapa 3 : Soluţia generală a ecuaţiei neomogene $(*_{EN})$ este dată de
$x(t; c_1, c_2) = x_o(t; c_1, c_2) + x_p(t), \forall t \in \mathbb{R}$ şi $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.
Se înlocuieşte $x_o(t; c_1, c_2)$ de la Etapa 1 şi una din $x_p(t)$ de la Etapa 2.

Reprezentând grafic pe $\mathbb{I} = \mathbb{R}$ pentru
$(c_1, c_2) = (1, 0), (c_1, c_2) = (0, 1),$
cu magenta (soluţiile particulare ale EN corespunzătoare celor din sistemul fundamental), şi pentru
$(c_1, c_2) = (1, 1), (c_1, c_2) = (1, 2), (c_1, c_2) = (2, 1), (c_1, c_2) = (2, 2),$
$(c_1, c_2) = (-1, 1), (c_1, c_2) = (-1, 2), (c_1, c_2) = (-2, 1), (c_1, c_2) = (-2, 2),$
$(c_1, c_2) = (-1, -1), (c_1, c_2) = (-1, -2), (c_1, c_2) = (-2, -1), (c_1, c_2) = (-2, -2),$
$(c_1, c_2) = (1, -1), (c_1, c_2) = (1, -2), (c_1, c_2) = (2, -1), (c_1, c_2) = (2, -2),$
cu albastru, şi pentru
$(c_1, c_2) = (0, 0),$
cu portocaliu (soluţia particulară a EN cu metoda coeficienţilor nedeterminaţi), se obţine:



Teorema 3.2.4. Fie EN (1), cu f o combinaţie liniară de funcţii continue (pot fi cvasipolinome în particular), adică

$$\boxed{f(t) = \overline{c}_1 f_1(t) + ... + \overline{c}_r f_r(t), \forall t \in \mathbb{I} \text{ şi } \overline{c}_1, ..., \overline{c}_r \in \mathbb{R}.} \tag{9}$$

unde $f_i \in C(\mathbb{I}; \mathbb{R})$ (în particular f_i pot fi de forma (7)). Dacă, pentru $\forall i \in \{1, ..., r\}$, x_{p_i} sunt soluţii particulare pentru (EN$_i$)

$$\boxed{x^{(n)}(t) + a_1 x^{(n-1)}(t) + ... + a_{n-1} x'(t) + a_n x(t) = f_i(t), \forall t \in \mathbb{I}} \tag{10}$$

atunci

$$\boxed{x_p(t) = \overline{c}_1 x_{p_1}(t) + ... + \overline{c}_r x_{p_r}(t), \forall t \in \mathbb{I} \text{ şi } \overline{c}_1, ..., \overline{c}_r \in \mathbb{R}.} \tag{11}$$

este soluţie particulară pentru EN.

Demonstraţie. Se bazează pe liniaritatea operatorului $\mathcal{L}$.

Exemplul 3.2.7. Să se determine soluţia generală a următoarei ecuaţii diferenţiale liniare neomogene cu coeficienţi constanţi:
$x'' - 9x = e^{3t}\cos t - 12te^{-3t} + t^2, t \in \mathbb{R}$.
Rezolvare: Fie $(*_{EN})$ $x'' - 9x = e^{3t}\cos t - 12te^{-3t} + t^2, t \in \mathbb{R}$.
Ecuaţia $(*_{EN})$ este o ecuaţie diferenţială de ordin 2, liniară, cu coeficienţii constanţi $a_1 = 0$, $a_2 = -9$, neomogenă cu termenul liber $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(t) = e^{3t}\cos t - 12te^{-3t} + t^2$. Pentru $t \in \mathbb{R}$, variabilă independentă din domeniul de definiţie a soluţiei, se caută $x(t; c_1, c_2)$, soluţia generală pentru ecuaţia $(*_{EN})$.
Etapa1 : Se determină soluţia generală a ecuaţiei omogene ataşate ecuaţiei $(*_{EN})$, adică a ecuaţiei $(*_{EO})$ $x'' - 9x = 0, t \in \mathbb{R}$.
Pasul 1 : Se ataşează ecuaţiei diferenţiale $(*_{EO})$ ecuaţia ei caracteristică
$$(*_{EC})\,\lambda^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow (\lambda-3)^1(\lambda+3)^1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 3 \text{ cu } m(\lambda_1) = 1, \\ \lambda_2 = -3 \text{ cu } m(\lambda_2) = 1, \end{cases}$$
Pasul 2 : Pentru fiecare rădăcină a ecuaţiei caracteristice se găsesc corespunzător soluţii particulare liniar independente ale ecuaţiei omogene $(*_{EO})$, după algoritmul dat
$\bullet \lambda_1 = 3$ cu $m(\lambda_1) = 1 \rightsquigarrow \{x_1(t) = e^{3t}$.
$\bullet \lambda_2 = -3$ cu $m(\lambda_2) = 1 \rightsquigarrow \{x_2(t) = e^{-3t}$.
Pasul 3 : Conform algoritmului de la Pasul 2, (x_1, x_2) este un sistem fundamental de soluţii pentru $(*_{EO})$ (sunt exact 2 soluţii particulare pentru $(*_{EO})$ şi funcţii liniar independente). Atunci soluţia generală a ecuaţiei $(*_{EO})$ este
$x_o(t; c_1, c_2) = c_1 e^{3t} + c_2 e^{-3t}, \forall t \in \mathbb{R}$ şi $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Etapa 2 : Se determină o soluţie particulară a ecuaţiei neomogene $(*_{EN})$.
Metoda variaţiei constantelor (mult calcul, apar determinanţi, derivate, integrale; nu se justifică folosirea).
Metoda coeficienţilor nedeterminaţi : Deoarece $(*_{EN})$ are coeficienţi constanţi şi termenul liber nu cvasipolinom, ci combinaţie liniară de cvasipolinoame, se caută x_p cu Teorema 3.2.3 şi Teorema 3.2.4. Într-adevăr,
$$f(t) = \underbrace{1}_{\bar{c}_1} \cdot \underbrace{e^{3t}\cos t}_{f_1(t)} + \underbrace{1}_{\bar{c}_2} \cdot \underbrace{\left(-12te^{-3t}\right)}_{f_2(t)} + \underbrace{1}_{\bar{c}_3} \cdot \underbrace{t^2}_{f_3(t)}$$
Pentru fiecare $i \in \{1, 2, 3\}$ se determină soluţii particulare x_{p_i} corespunzătoare pentru
$(*_{ENi})$ $x'' - 9x = f_i(t), t \in \mathbb{R} \overset{\text{Teorema 2}}{\Rightarrow}$
$x_p(t) = 1 \cdot x_{p_1}(t) + 1 \cdot x_{p_2}(t) + 1 \cdot x_{p_3}(t), \forall t \in \mathbb{R}$ este soluţie particulară pentru $(*_{ENi})$.
Etapa 2.1 : Fie $(*_{EN1})$ $x'' - 9x = e^{3t}\cos t, t \in \mathbb{R}$,
Se observă că
$$f_1(t) = e^{3t}\cos t = e^{3t}\left(\underbrace{1}_{P_1(t)}\cos(1t) + \underbrace{1}_{Q_1(t)}\sin(1t)\right), \forall t \in \mathbb{R},$$
adică f_1 este de forma (7), cu $\alpha = 3$, $\beta = 1$, $P_1(t) = 1$, $Q_1(t) = 1$. Cum $\lambda = 3 + 1i$ nu este rădacină caracteristică$\Rightarrow$ se caută o soluţie particulară pentru $(*_{EN1})$ de forma
$x_{p_1}(t) = e^{3t}(A_1(t)\cos(1t) + B_1(t)\sin(1t)), \forall t \in \mathbb{R}$,
unde A_1 şi B_1 sunt polinoame de grad cel mai mare dintre gradele lui P_1 şi Q_1, adică 0. Se determină polinoamele constante $A_1(t) = \mu_0$ şi $B_1(t) = \nu_0$ impunând ca x_{p_1} să fie soluţie particulară a $(*_{EN1})$.

$$\begin{array}{ll} -9 & \cdot\left|x_{p_1}(t)\right. = e^{3t}\left(\mu_0 \cos t + \nu_0 \sin t\right) \\ 0 & \cdot\left|x'_{p_1}(t)\right. = e^{3t} \cdot 3\left(\mu_0 \cos t + \nu_0 \sin t\right) + e^{3t}\left(-\mu_0 \sin t + \nu_0 \cos t\right) \\ 1 & \cdot\left|x''_{p_1}(t)\right. = e^{3t} \cdot 3^2\left(\mu_0 \cos t + \nu_0 \sin t\right) + 2e^{3t} \cdot 3\left(-\mu_0 \sin t + \nu_0 \cos t\right) + e^{3t}\left(-\mu_0 \cos t - \nu_0 \sin\right. \\ \hline + \text{ în } (*_{EN1}) & e^{3t} \cos t = e^{3t}\left(\left(-\mu_0 + 6\nu_0\right) \cos t + \left(-6\mu_0 - \nu_0\right) \sin t\right), \forall t \in \mathbb{R} \end{array}$$

Se simplifică prin e^{3t}. Cum $(\cos t, \sin t), \forall t \in \mathbb{R}$ sunt funcţii liniar independente pe $\mathbb{R}$ (au $W = 1$) $\Rightarrow$ identificăm coeficienţii lor$\Rightarrow$

$$\begin{array}{l} \cos t: \\ \sin t: \end{array} \left\{ \begin{array}{l} 1 = -\mu_0 + 6\nu_0 \\ 0 = -6\mu_0 - \nu_0 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \mu_0 = \frac{-1}{37} \\ \nu_0 = \frac{6}{37} \end{array} \right.$$

S-a obţinut

$x_{p_1}(t) = e^{3t}\left(\frac{-1}{37} \cos t + \frac{6}{37} \sin t\right), \forall t \in \mathbb{R}$.

Etapa 2.2 : Fie $(*_{EN2})$ $x'' - 9x = -12te^{-3t}, t \in \mathbb{R}$,

Se observă că

$$f_2(t) = -12te^{-3t} = e^{-3t}\left(\underbrace{(-12t)}_{P_2(t)} \cos(0t) + \underbrace{(1)}_{Q_2(t)} \sin(0t)\right), \forall t \in \mathbb{R},$$

adică f_2 este de forma (7), cu $\alpha = -3$, $\beta = 0$, $P_2(t) = -12t$, $Q_2(t) = 1$. Cum $\lambda = -3 + 0i$ este rădacină caracteristică de multiplicitate $m(\lambda) = 1 = s \Rightarrow$ se caută o soluţie particulară pentru $(*_{EN2})$ de forma

$x_{p_2}(t) = t^1 e^{-3t}\left(A_2(t) \cos(0t) + B_2(t) \sin(0t)\right) = t^1 e^{-3t} A_2(t), \forall t \in \mathbb{R}$,

unde A_2 şi B_2 sunt polinoame de grad cel mai mare dintre gradele lui P_2 şi Q_2, adică 1. Se determină coeficienţii $\mu_i, i \in \{0, 1\}$ ai polinomului $A_2(t) = \mu_0 + \mu_1 t$ impunând ca x_{p_2} să fie soluţie particulară a $(*_{EN2})$.

$$\begin{array}{ll} -9 & \cdot\left|x_{p_2}(t)\right. = e^{-3t}\left(\mu_0 t + \mu_1 t^2\right) \\ 0 & \cdot\left|x'_{p_2}(t)\right. = e^{-3t} \cdot (-3)\left(\mu_0 t + \mu_1 t^2\right) + e^{-3t}\left(\mu_0 + 2\mu_1 t\right) \\ 1 & \cdot\left|x''_{p_2}(t)\right. = e^{-3t} \cdot (-3)^2\left(\mu_0 t + \mu_1 t^2\right) + 2e^{-3t} \cdot (-3)\left(\mu_0 + 2\mu_1 t\right) + e^{-3t}\left(2\mu_1\right) \\ \hline + \text{ în } (*_{EN2}) & -12te^{-3t} = e^{3t}\left(\left(-6\mu_0 + 2\mu_1\right) + \left(-12\mu_1\right)\right), \forall t \in \mathbb{R} \end{array}$$

Se simplifică prin e^{3t}. Identificăm coeficienţii puterilor lui $t \Rightarrow$

$$\begin{array}{l} t^0: \\ t^1: \end{array} \left\{ \begin{array}{l} 0 = -6\mu_0 + 2\mu_1 \\ -12 = \quad -12\mu_1 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \mu_0 = \frac{1}{3} \\ \mu_1 = 1 \end{array} \right.$$

S-a obţinut

$x_{p_2}(t) = te^{-3t}\left(\frac{1}{3} + t\right), \forall t \in \mathbb{R}$.

Etapa 2.3 : Fie $(*_{EN3})$ $x'' - 9x = t^2, t \in \mathbb{R}$,

Se observă că $f_3(t) = t^2 = e^{0t}\left(\underbrace{t^2}_{P_3(t)} \cos(0t) + \underbrace{1}_{Q_3(t)} \sin(0t)\right), \forall t \in \mathbb{R}$,

adică f_3 este de forma (7), cu $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $P_3(t) = t^2$, $Q_3(t) = 1$. Cum $\lambda = 0 + 0i$ nu este rădacină caracteristică $\Rightarrow$ se caută o soluţie particulară pentru $(*_{EN3})$ de forma

$x_{p_3}(t) = e^{0t}\left[A_3(t) \cos(0t) + B_3(t) \sin(0t)\right] = A_3(t), \forall t \in \mathbb{R}$,

unde A_3 şi B_3 sunt polinoame de grad cel mai mare dintre gradele lui P_3 şi Q_3, adică 2. Se determină coeficienţii $\mu_i, i \in \{0, 1, 2\}$ ai polinomului $A_3(t) = \mu_0 + \mu_1 t + \mu_2 t^2$ impunând ca x_{p_3} să fie soluţie particulară a $(*_{EN3})$.

$$\begin{array}{ll} -9 & \cdot\left|x_{p_3}(t)\right. = \mu_0 + \mu_1 t + \mu_2 t^2 \\ 0 & \cdot\left|x'_{p_3}(t)\right. = \mu_1 + 2\mu_2 t \\ 1 & \cdot\left|x''_{p_3}(t)\right. = 2\mu_2 \\ \hline + \text{ în } (*_{EN3}) & t^2 = \left(-9\mu_0 + 2\mu_2\right) + \left(-9\mu_1\right) t + \left(-9\mu_2\right) t^2, \forall t \in \mathbb{R} \end{array}$$

Identificăm coeficienţii puterilor lui $t \Rightarrow$

$$\begin{array}{r} t^0: \\ t^1: \\ t^2: \end{array}\left\{\begin{array}{lll} 0 = -9\mu_0 + & & 2\mu_2 \\ 0 = & -9\mu_1 & \\ 1 = & & -9\mu_2 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \mu_0 = \frac{-2}{81} \\ \mu_1 = 0 \\ \mu_2 = \frac{-1}{9} \end{array}\right.$$

S-a obţinutS-a obţinut

$x_{p_3}(t) = \frac{-2}{81} + 0t + \frac{-1}{9}t^2, \forall t \in \mathbb{R}.$

Atunci o soluţie particulară pentru $(*_{EN})$ este

$x_p(t) = 1e^{3t}\left(\frac{-1}{37}\cos t + \frac{6}{37}\sin t\right) + 1te^{-3t}\left(\frac{1}{3} + t\right) + 1\left(\frac{-2}{81} + \frac{-1}{9}t^2\right), \forall t \in \mathbb{R}.$

Etapa 3 : Soluţia generală a ecuaţiei neomogene $(*_{EN})$ este dată de

$x(t; c_1, c_2) = x_o(t; c_1, c_2) + x_p(t), \forall t \in \mathbb{R}$ şi $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Se înlocuieşte $x_o(t; c_1, c_2)$ de la Etapa 1 şi $x_p(t)$ de la Etapa 2.

○**Euristică 3.2.1. b)** Se descrie/ demonstrează în continuare rezolvarea ecuaţiei liniare cu coeficienţi constanţi omogenă EO (2)

$$\boxed{x^{(n)}(t) + a_1 x^{(n-1)}(t) + ... + a_{n-1}x'(t) + a_n x(t) = 0} \quad (2)$$

Forma normală a ecuaţiei (2) este

$x^{(n)}(t) = -a_1 x^{(n-1)}(t) - ... - a_{n-1}x'(t) - a_n x(t), t \in \mathbb{I}.$

Se observă că *orice soluţie a EO (2) este de o infinitate de ori derivabilă şi că orice derivată de ordin strict mai mare decât n poate fi scrisă cu ajutorul derivatelor de ordin inferior lui n*, deoarece

$$x^{(n+p)}(t) = -a_1 x^{(n-1+p)}(t) - ... - a_{n-1}x^{(1+p)}(t) - -a_n x^{(p)}(t), t \in \mathbb{I}, p \in \mathbb{N}. \quad (12)$$

Fără a restrânge generalitatea, se presupune că $\underline{0 \in \mathbb{I}}$.

Deoarece orice soluţie x a ecuaţiei este derivabilă de orice ordin în 0, se scrie formula Taylor pentru x în jurul lui 0, cu restul Lagrange:

$$x(t) = x(0) + \frac{x'(0)}{1!}t + \frac{x''(0)}{2!}t^2 + \cdots + \frac{x^{(p-1)}(0)}{(p-1)!}t^{p-1} + \frac{x^{(p)}(\xi_{t,0})}{p!}t^p, \quad (13)$$

unde ξ este un număr situat între 0 şi $t, t \in \mathbb{I}$. Formula are loc chiar pentru orice $t \in \mathbb{I}$ şi $p \in \mathbb{N}^*$. S-ar putea scrie chiar seria Taylor pentru x (ordinul de derivare este $p = \infty$), dacă $\frac{x^{(p)}(\xi_{t,0})}{p!}t^p \to 0$ pentru $p \to \infty$, uniform în raport cu t. Se va demonstra aceasta ulterior. Astfel, se va cunoaşte soluţia ecuaţiei EO (2) dacă se vor cunoaşte valorile derivatelor functiei x în origine, de orice ordin, $x^{(p)}(0), p \in \mathbb{N}$.

Deoarece

$x^{(n+p)}(0) = -a_1 x^{(n-1+p)}(0) - ... - a_{n-1}x^{(1+p)}(0) - a_n x^{(p)}(0), p \in \mathbb{N}$

este o recurenţă liniară de ordinul n, care poate fi rezolvată, atunci se poate determina $x^{(p)}(0), \forall p \in \mathbb{N}$. Se va prezenta o tehnică de determinare, iar în probleme se vor aplica doar concluziile.

Se notează $\boxed{x^{(p)}(0) = x_p, p \in \mathbb{N}}$ şi relaţia de recurenţă devine

$$x_{n+p} = -a_1 x_{n+p-1} - ... - a_{n-1}x_{p+1} - a_n x_p, p \in \mathbb{N}. \quad (14)$$

Se adaugă acestei ecuaţii $n-1$ ecuaţii imediate, pentru a transforma ecuaţia într-un sistem de ecuaţii (echivalent)

$$\left\{\begin{array}{llll} x_{n+p} = -a_1 x_{n+p-1} - & \cdots & & -a_{n-1}x_{p+1} - a_n x_p \\ x_{n+p-1} = & x_{n+p-1} & & \\ x_{n+p-2} = & & x_{n+p-2} & \\ \vdots & & & \\ x_{p+1} = & & & x_{p+1} \end{array}\right. . \quad (15)$$

Se notează cu

$$\mathbf{y}_{p+1} = \begin{pmatrix} x_{n+p} \\ x_{n+p-1} \\ x_{n+p-2} \\ ... \\ x_{p+1} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}_n, \forall p \in \mathbb{N},\ A = \begin{pmatrix} -a_1 & -a_2 & ... & -a_{n-1} & -a_n \\ 1 & 0 & ... & 0 & 0 \\ 0 & 1 & ... & 0 & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \quad (16)$$

şi se obţine sistemul matriceal

$$\mathbf{y}_{p+1} = A \cdot \mathbf{y}_p, \forall p \in \mathbb{N}.$$

De remarcat că

$$\mathbf{y}_0 = \begin{pmatrix} x_{n-1} \\ x_{n-2} \\ x_{n-3} \\ ... \\ x_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^{(n-1)}(0) \\ x^{(n-2)}(0) \\ x^{(n-3)}(0) \\ ... \\ x(0) \end{pmatrix} \quad (17)$$

şi, pentru orice $p \in \mathbb{N}$,

$$\mathbf{y}_p = A \cdot \mathbf{y}_{p-1} = A^2 \cdot \mathbf{y}_{p-2} = \cdots = A^p \cdot \mathbf{y}_0.$$

Rămâne să se calculeze $A^p, p \in \mathbb{N}$. Se vor studia mai multe cazuri, dar în toate se va face referire la forma canonică a operatorului liniar

$$T : \mathbb{R}_n \to \mathbb{R}_n, T(\mathbf{u}) = A \cdot \mathbf{u}, \quad (18)$$

adică a operatorului liniar pe $\mathbb{R}_n \simeq \mathbb{R}^n$, a cărui matrice în raport cu baza canonică este matricea A. Când se va face referire la A se va face referire la T şi reciproc (de exemplu, în loc de T este diagonalizabil, A este diagonalizabilă şi invers). Polinomul caracteristic al matricei A este

$$\det(A - \lambda I_n) = \begin{vmatrix} -a_1 - \lambda & -a_2 & ... & -a_{n-1} & -a_n \\ 1 & -\lambda & ... & 0 & 0 \\ 0 & 1 & ... & 0 & 0 \\ ... & ... & ... & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & ... & 1 & -\lambda \end{vmatrix}.$$

Dezvoltând determinantul după prima coloană, se obţine

$$\det(A - \lambda I_n) = (-a_1 - \lambda) \cdot \begin{vmatrix} -\lambda & ... & 0 & 0 \\ 1 & ... & 0 & 0 \\ ... & ... & -\lambda & 0 \\ 0 & ... & 1 & -\lambda \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -a_2 & -a_3 & ... & -a_{n-1} & -a_n \\ 1 & -\lambda & ... & 0 & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & ... & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = ... =$$

$$= (-a_1 - \lambda) \cdot (-\lambda)^{n-1} - (-a_2) \cdot (-\lambda)^{n-2} + (-a_3) \cdot (-\lambda)^{n-3} + \cdots +$$
$$+ (-1)^{n-2}(-a_{n-1}) \cdot (-\lambda)^1 + (-1)^{n-1}(-a_n) =$$
$$= (-1)^n \cdot \left(\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n\right).$$

Este chiar polinomul caracteristic definit în Euristica 3.2.1.a), obţinut înlocuind în ecuaţia diferenţială derivata de ordin k cu $\lambda^k, k = \overline{0,n}$, apoi înmulţind cu $(-1)^n$.

•<u>Cazul *I* :</u> Toate valorile proprii $\lambda_i, i = \overline{1,n}$ au multiplicitatea 1, adică $\lambda_i \neq \lambda_j \forall i \neq j$.

Atunci A este diagonalizabilă, adică există o matrice inversabilă $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (modală, formată din coloane vectori proprii asociaţi valorilor proprii în baza canonică) astfel încât

$$P^{-1} \cdot A \cdot P = D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & ... & 0 \\ ... & ... & ... \\ 0 & ... & \lambda_n \end{pmatrix} \Leftrightarrow A = P \cdot D \cdot P^{-1}$$

Atunci

$$A^p = P \cdot D^p \cdot P^{-1} = P \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1^p & ... & 0 \\ ... & ... & ... \\ 0 & ... & \lambda_n^p \end{pmatrix} \cdot P^{-1}$$

În plus, pentru orice matrice inversabilă P, elementele matricei PD^pP^{-1} sunt combinaţii liniare ale numerelor $\lambda_1^p, ..., \lambda_n^p$, datorită regulii de înmulţire a matricelor. Atunci, notând cu $a_{ij}^{(p)}$ elementele matricei A^p, se obţine

$$a_{ij}^{(p)} = c_{ij}^{(1)}\lambda_1^p + c_{ij}^{(2)}\lambda_2^p + \cdots + c_{ij}^{(n)}\lambda_n^p . \forall i, j = \overline{1, n}$$

şi, ţinând cont că $\mathbf{y}_p = A^p \cdot \mathbf{y}_0$, rezultă că

$$\mathbf{y}_p = \begin{pmatrix} ... & ... & ... \\ ... & c_{ij}^{(1)}\lambda_1^p + c_{ij}^{(2)}\lambda_2^p + \cdots + c_{ij}^{(n)}\lambda_n^p & ... \\ ... & ... & ... \end{pmatrix} \cdot \mathbf{y}_0 \Leftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} x_{n+p-1} \\ x_{n+p-2} \\ x_{n+p-3} \\ ... \\ x_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ... & ... & ... \\ ... & c_{ij}^{(1)}\lambda_1^p + c_{ij}^{(2)}\lambda_2^p + \cdots + c_{ij}^{(n)}\lambda_n^p & ... \\ ... & ... & ... \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x^{(n-1)}(0) \\ x^{(n-2)}(0) \\ x^{(n-3)}(0) \\ ... \\ x(0) \end{pmatrix}$$

Se deduce că, pentru orice $p \geq n$, termenul x_p este, de asemenea, o combinaţie liniară a numerelor $\lambda_1^p, \lambda_2^p, ...\lambda_n^p$:

$$x^{(p)}(0) = x_p = c_1\lambda_1^p + c_2\lambda_2^p + ... + c_n\lambda_n^p.$$

De remarcat este că numerele $c_1, ..., c_n$ sunt aceleaşi, pentru orice p. Mai mult, aceleaşi constante pot fi folosite şi pentru scrierea numerelor $x_0, x_1, ...x_{p-1}$.

Pentru că

$$\frac{c_i\lambda_i^p}{p!}t^p = c_1\frac{(\lambda_i t)^p}{p!} \to 0 \text{ pentru } p \to \infty, \forall i = \overline{1, n}, \forall t \in \mathbb{R},$$

rezultă că soluţia ecuaţiei diferenţiale omogene EO (2) poate fi scrisă cu ajutorul seriei Taylor chiar pe $\mathbb{R}$:

$$x(t) = x(0) + \frac{x'(0)}{1!}t + \frac{x''(0)}{2!}t^2 + \cdots + \frac{x^{(p-1)}(0)}{(p-1)!}t^{p-1} + \frac{x^{(p)}(0)}{p!}t^p + ... = \sum_{p=0}^{\infty}\frac{x^{(p)}(0)}{p!}t^p, t \in \mathbb{R}$$

(18)

Înlocuind $x^{(p)}(0) = c_1\lambda_1^p + c_2\lambda_2^p + ... + c_n\lambda_n^p$ se obţine

$$x(t) = \sum_{p=0}^{\infty}\frac{c_1\lambda_1^p + c_2\lambda_2^p + ... + c_n\lambda_n^p}{p!}t^p = c_1\sum_{p=0}^{\infty}\frac{\lambda_1^p}{p!}t^p + c_2\sum_{p=0}^{\infty}\frac{\lambda_2^p}{p!}t^p + \ldots c_n\sum_{p=0}^{\infty}\frac{\lambda_n^p}{p!}t^p, t \in \mathbb{R}.$$

Dar, de la cursul de analiză, se ştie că

$$e^t = \sum_{p=0}^{\infty}\frac{t^p}{p!}, t \in \mathbb{R}$$

şi atunci rezultă că

$$x(t) = c_1e^{\lambda_1 t} + c_2e^{\lambda_2 t} + ... + c_ne^{\lambda_n t}, t \in \mathbb{R}.$$

În concluzie, dacă ecuaţia EC

$$\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + ... + a_{n-1}\lambda + a_n = 0$$

are rădăcini reale distincte $\lambda_1, ..., \lambda_n$ (deci toate de multiplicitate 1), atunci ecuaţia diferenţială liniară omogenă de ordinul n EO (2)

$$x^{(n)}(t) + a_1x^{(n-1)}(t) + ... + a_{n-1}x'(t) + a_nx(t) = 0$$

are soluţia de forma

$$x(t) = c_1e^{\lambda_1 t} + c_2e^{\lambda_2 t} + ... + c_ne^{\lambda_n t}, t \in \mathbb{R}.$$

Rămâne să se arate că funcţiile $x_i(t) = e^{\lambda_i t}, t \in \mathbb{R}, i = \overline{1, n}$, sunt liniar independente şi atunci, formând un sistem fundamental de soluţii, va rezulta că funcţiile de forma $c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} + ... + c_n e^{\lambda_n t}$ sunt TOATE soluţiile ecuaţiei. Pentru a arăta liniara independenţă, se calculează wronskianul în 0

$$W(0; x_1, ...x_2) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & ... & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & ... & \lambda_n \\ ... & ... & ... & ... \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & ... & \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix} \overset{\text{Vandermonde}}{=} \prod_{1 \le i < j \le n} (\lambda_j - \lambda_i) \neq 0,$$

deoarece $\lambda_i \neq \lambda_j \ \forall i \neq j$. Atunci, funcţiile $(x_1, ...x_n)$ formează un sistem fundamental de soluţii.

Exemplu. Fie $(*_{EO})$ $x^{(4)} - 5x'' + 6 = 0, \forall t \in \mathbb{R}$.
Atunci
$(*_{EC})$ $\lambda^4 - 5\lambda^2 + 6 = 0 \Leftrightarrow \left(\lambda^2 - 2\right)\left(\lambda^2 - 3\right) = 0 \Rightarrow$

$$\begin{cases} \lambda_1 = \sqrt{2} \text{ cu } m(\lambda_1) = 1, \\ \lambda_2 = -\sqrt{2} \text{ cu } m(\lambda_2) = 1, \\ \lambda_3 = \sqrt{3} \text{ cu } m(\lambda_3) = 1, \\ \lambda_4 = -\sqrt{3} \text{ cu } m(\lambda_4) = 1. \end{cases}$$

Pentru fiecare rădăcină a ecuaţiei caracteristice se găsesc corespunzător soluţii particulare liniar independente ale ecuaţiei omogene $(*_{EO})$, după algoritmul dat

- $\lambda_1 = \sqrt{2}$ cu $m(\lambda_1) = 1 \rightsquigarrow x_1(t) = e^{\sqrt{2}t}$,
- $\lambda_2 = -\sqrt{2}$ cu $m(\lambda_2) = 1 \rightsquigarrow x_2(t) = e^{-\sqrt{2}t}$,
- $\lambda_3 = \sqrt{3}$ cu $m(\lambda_3) = 1 \rightsquigarrow x_3(t) = e^{\sqrt{3}t}$,
- $\lambda_4 = -\sqrt{3}$ cu $m(\lambda_4) = 1 \rightsquigarrow x_4(t) = e^{-\sqrt{3}t}$.

$(x_1, ..., x_4)$ este un sistem fundamental de soluţii pentru $(*_{EO})$ (sunt exact 4 soluţii particulare pentru $(*_{EO})$ şi funcţii liniar independente). Atunci soluţia generală a ecuaţiei $(*_{EO})$ este

$x_o(t; c_1, ..., c_4) = c_1 \cdot e^{\sqrt{2}t} + c_2 e^{-\sqrt{2}t} + c_3 e^{\sqrt{3}t} + c_4 e^{-\sqrt{3}t}, \forall t \in \mathbb{R}$ şi $c_1, ..., c_4 \in \mathbb{R}$.

•<u>Cazul al II-lea :</u> Polinomul caracteristic admite numai rădăcini reale, dar printre acestea se află şi rădăcini cu multiplicitate cel puţin egală cu 2. Pentru simplitate, să consideră mai întâi că polinomul caracteristic are o singură rădăcină, notată cu λ, de multiplicitate algebrică n. Se observă că, ăn rezolvarea sistemului

$(A - \lambda I_n) \cdot \mathbf{u} = \mathbf{u} \Leftrightarrow$

$$\begin{pmatrix} -a_1 - \lambda & -a_2 & ... & -a_{n-1} & -a_n \\ 1 & -\lambda & ... & 0 & 0 \\ 0 & 1 & ... & 0 & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 1 & -\lambda \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ \\ \vdots \\ \\ u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 \\ \\ \vdots \\ \\ u_n \end{pmatrix}$$

apare un minor de ordin $n - 1$ nenul pentru matricea sistemului

$$\begin{vmatrix} 1 & -\lambda & ... & 0 \\ 0 & 1 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$$

Rezultă că sistemul are $n - 1$ necunoscute principale şi o singură necunoscută secundară, deci spaţiul soluţiilor acestui sistem, adică spaţiul de vectori proprii corespunzători valorii proprii λ, are dimensiunea egală cu 1. Rezultă că matricea A nu este diagonalizabilă (multiplicitatea algebrică este $n \geq 2$ iar cea geometrică este mereu egală cu 1), deci forma canonică este nu este forma diagonală, ci forma canonică Jordan, care va fi alcătuită aici dintr-o singură celulă Jordan de dimensiune n. Atunci există o matrice inversabilă $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, astfel încât

$$P^{-1}\cdot A\cdot P = J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & ... & 0 & 0\\ 0 & \lambda & 1 & ... & 0 & 0\\ 0 & 0 & \lambda & ... & 0 & 0\\ ... & ... & ... & ... & ... & ...\\ 0 & 0 & 0 & ... & \lambda & 1\\ 0 & 0 & 0 & ... & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

(deasupra diagonalei principale apare 1).

Mai mult,

$$P^{-1}\cdot A\cdot P = \lambda\cdot I_n + N, \text{ unde } N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & ... & 0 & 0\\ 0 & 0 & ... & 0 & 0\\ ... & ... & ... & ... & ...\\ 0 & 0 & ... & 0 & 1\\ 0 & 0 & ... & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

verifică $N\cdot I_n = I_n\cdot N$ şi este nilpotentă de ordin n. Atunci, folosind binomul lui Newton,

$P^{-1}\cdot A^p\cdot P = (\lambda I_n + N)^p = C_p^0\lambda^p I_n + C_p^1\lambda^{p-1}N + C_p^2\lambda^{p-2}N^2 + ... + C_p^p N^p$, cu

$$N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0\\ & & & \ddots & & \\ & & & & & 1\\ & & & & 0 & 0\\ 0 & & 0 & & 0 & 0 \end{pmatrix}, N^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0\\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & & 1\\ & & & & & & 0\\ & & & & & 0 & 0\\ 0 & & & 0 & & 0 & 0 \end{pmatrix}, ..., N^{n-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1\\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0\\ & & \ddots & & \\ & & & 0 & 0\\ 0 & & & 0 & 0 \end{pmatrix}, N^n =$$

$\mathcal{O}_n$

se obţine că din suma anterioară rămân doar primii n termeni:

$$P^{-1}\cdot A^p\cdot P = C_p^0\lambda^p I_n + C_p^1\lambda^{p-1}N + C_p^2\lambda^{p-2}N^2 + ... + C_p^{n-1}\lambda^{p-n+1}N^{n-1} = \begin{pmatrix} \lambda^p & C_p^1\lambda^{p-1} & C_p^2\lambda^{p-2} & \dots & C_p^{p-n\dots}\\ 0 & \lambda^p & C_p^1\lambda^{p-1} & \dots & \\ 0 & 0 & \lambda^p & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \lambda\dots\\ 0 & 0 & & & \end{pmatrix}$$

Înmulţind la stânga cu P şi la dreapta cu P^{-1} se obţine A^p, despre ale cărei elemente putem spune, ca şi în **Cazul I**, că sunt combinaţii liniare ale numerelor $\lambda^p, C_p^1\lambda^{p-1}, C_p^2\lambda^{p-2}..., C_p^{n-1}\lambda^{p-n+1}$ iar coeficienţii nu depind de p :

$a_{ij}^{(p)} = c_{ij}^{(1)}\lambda^p + c_{ij}^{(2)}C_p^1\lambda^{p-1} + c_{ij}^{(3)}C_p^2\lambda^{p-2}... + c_{ij}^{(n)}C_p^{n-1}\lambda^{p-n+1}$

După unele regrupări de termeni şi renotări ale coeficienţilor, rezultă că

$$\begin{aligned} x_0 &= c_1\cdot C_0^0\\ x_1 &= c_1C_1^0\lambda + c_2C_1^1\\ x_2 &= c_1C_2^0\lambda^2 + c_2C_2^1\lambda + c_3C_2^2\\ &\vdots\\ x_{n-1} &= c_1C_{n-1}^0\lambda^{n-1} + c_2C_{n-1}^1\lambda^{n-2} + \dots c_{n-1}C_{n-1}^{n-2}\lambda^1 + c_nC_{n-1}^{n-1}\\ x_p &= c_1\cdot C_p^0\lambda^p + c_2\cdot C_p^1\lambda^{p-1} + c_2\cdot C_p^2\lambda^{p-2} + ... + c_n\cdot C_p^{n-1}\lambda^{p-n+1}, \quad \forall p\geq 0, \end{aligned}$$

şi deci soluţia x poate fi scrisă cu ajutorul seriei Taylor (restul tinde, din nou, la 0) în jurul originii şi

$$\begin{aligned} x(t) &= \sum_{p=0}^{\infty} \frac{x_p}{p!} t^p = \\ x(t) &= c_1 \sum_{p=0}^{\infty} \frac{C_p^0 \lambda^p}{p!} t^p + c_2 \sum_{p=1}^{\infty} \frac{C_p^1 \lambda^{p-1}}{p!} t^p + c_2 \sum_{p=2}^{\infty} \frac{C_p^2 \lambda^{p-2}}{p!} t^p + \ldots c_n \sum_{p=n-1}^{\infty} \frac{C_p^{n-1} \lambda^{p-n+1}}{p!} t^p. \end{aligned}$$

Prima sumă este $e^{\lambda t}$. Apoi, se obţine pentru termenul general

$$\begin{aligned} \sum_{p=k}^{\infty} \frac{C_p^k \lambda^{p-k}}{p!} t^p &= \sum_{p=0}^{\infty} \frac{C_{p+k}^k \lambda^p}{(p+k)!} t^{p+k} = \frac{t^k}{k!} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(p+k)(p+k-1)...(p+1)\lambda^p}{(p+k)!} t^p \\ &= \frac{t^k}{k!} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^p}{p!} = \frac{1}{k!} t^k e^{\lambda t}, \quad \forall k = 1, .., n-1. \end{aligned}$$

Astfel, având în vedere că şi $\frac{1}{k!}$ este tot o constantă, soluţia generală a ecuaţiei liniare omogene de gradul n este, în condiţiile acestui caz (λ-rădăcină de multiplicitate n), o combinaţie liniară a funcţiilor

$$e^{\lambda t}, te^{\lambda t}, t^2 e^{\lambda t}, \ldots, t^{n-1} e^{\lambda t},$$

despre care se poate arăta că sunt şi liniar independente, deci formează un sistem fundamental de soluţii. Altfel spus, orice soluţie a ecuaţiei are forma

$$\begin{aligned} x(t) &= c_1 e^{\lambda t} + c_2 t e^{\lambda t} + ... + c_n t^{n-1} e^{\lambda t}, \alpha_i \in \mathbb{R}, \forall i = 1, .., n. \\ x(t) &= f(t) e^{\lambda t}, t \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

unde f este un polinom de grad $n-1$ cu coeficienţi reali.

Observaţie. O altă cale de a rezolva situaţia anterioară este următoarea. Deoarece λ este singura rădăcină, rezultă că polinomul caracteristic este $(X-\lambda)^n$, deci ecuaţia diferenţială are forma

$$x^{(n)} - C_n^1 x^{(n-1)} + C_n^2 x^{(n-2)} + ... + (-1)^n C_n^n x = 0.$$

Înmulţind această ecuaţie cu $e^{-\lambda t}$, şi observând că

$$x^{(n)} e^{-\lambda t} - C_n^1 x^{(n-1)} e^{-\lambda t} + C_n^2 x^{(n-2)} e^{-\lambda t} + ... + (-1)^n C_n^n x e^{-\lambda t} = \left(x e^{-\lambda t} \right)^{(n)},$$

adică derivata de ordinul n a produsului dintre $e^{-\lambda t}$ şi x rezultă noua ecuaţie diferenţială

$$\left(x e^{-\lambda t} \right)^{(n)} = 0,$$

astfel încât $xe^{-\lambda t}$ nu poate fi decât un polinom de grad $n-1$. Notând acest polinom cu f obţinem, din nou

$$x e^{-\lambda t} = f \Leftrightarrow x = f \cdot e^{\lambda t} = \alpha_1 e^{\lambda t} + \alpha_2 t e^{\lambda t} + ... + \alpha_n t^{n-1} e^{\lambda t}.$$

Exemplu. Fie $(*_{EO})$ $x''' + 6x'' + 12x' + 8x = 0, \forall t \in \mathbb{R}$.
Atunci

$(*_{EC})$ $\lambda^3+6\lambda^2+12\lambda+8=0 \Leftrightarrow (\lambda+2)^3=0 \Rightarrow$
$\left\{ \lambda_1=-2 \text{ cu } m(\lambda_1)=3 \right.$

Pentru fiecare rădăcină a ecuaţiei caracteristice se găsesc corespunzător soluţii particulare liniar independente ale ecuaţiei omogene $(*_{EO})$, după algoritmul dat

$$\bullet\lambda_1=-2 \text{ cu } m(\lambda_1)=3 \rightsquigarrow \begin{cases} x_1(t)=e^{-2t}, \\ x_2(t)=te^{-2t}, \\ x_3(t)=t^2e^{-2t} \end{cases}$$

$(x_1,...,x_3)$ este un sistem fundamental de soluţii pentru $(*_{EO})$ (sunt exact 3 soluţii particulare pentru $(*_{EO})$ şi funcţii liniar independente). Atunci soluţia generală a ecuaţiei $(*_{EO})$ este

$x_o(t;c_1,...,c_3)=c_1\cdot e^{-2t}+c_2te^{-2t}+c_3t^3e^{-2t}, \forall t\in\mathbb{R}$ şi $c_1,...,c_3\in\mathbb{R}$.

•<u>Cazul al III-lea :</u> Ecuaţia caracteristică are toate rădăcinile reale dar nu sunt nici distincte, nici toate egale. Se presupune că rădăcinile ecuaţiei caracteristice (valorile proprii ale lui A) sunt $\lambda_1,...,\lambda_k$ cu multiplicităţile $n_1,...,n_k$ şi cu $n_1+...+n_k=n$. Atunci, ca anterior, orice valoare proprie are dimensiunea spaţiului de vectori proprii egală cu 1, deci matricea A nu este diagonalizabilă iar în forma canonică, pentru fiecare valoare proprie λ_i apare o singură celulă Jordan, de dimensiune n_i. Printr-un raţionament similar, având în vedere că pentru a ridica matricea A la o anumită putere p este acelaşi lucru cu a ridica celulele Jordan corespunzătoare la puterea p, vom obţine ca soluţie pentru ecuaţia diferenţială o combinaţie liniară a următoarelor funcţii:

$$\begin{cases} \text{pentru } \lambda_1 \text{ de multiplicitate } n_1: & e^{\lambda_1 t}, te^{\lambda_1 t}, t^2e^{\lambda_1 t}, ..., t^{n_1-1}e^{\lambda_1 t} \\ \text{pentru } \lambda_2 \text{ de multiplicitate } n_2: & e^{\lambda_2 t}, te^{\lambda_2 t}, t^2e^{\lambda_2 t}, ..., t^{n_2-1}e^{\lambda_2 t} \\ \vdots & \\ \text{pentru } \lambda_k \text{ de multiplicitate } n_k: & e^{\lambda_k t}, te^{\lambda_k t}, t^2e^{\lambda_k t}, ..., t^{n_k-1}e^{\lambda_k t} \end{cases}$$

adică

$x(t)=f_1(t)e^{\lambda_1 t}+f_2(t)e^{\lambda_2 t}+\cdots+f_k(t)e^{\lambda_k t}$,

unde f_i este un polinom de grad $n_i-1,\ i=1,..,k$.

Observaţie Această situaţie se suprapune şi peste **cazul I**, când toate rădăcinile sunt reale, distincte($n_i=1, \forall i$ şi $k=n$) şi peste **cazul al lI-lea**, când avem o singură rădăcină de multiplicitate n ($k=1$, $n_1=n$).

Exemplu. Fie $(*_{EO})$ $x^{(5)}-x^{(4)}-8x'''+8x''+16x'-16x=0, \forall t\in\mathbb{R}$.
Atunci

$(*_{EC})$ $\lambda^5-\lambda^4-8\lambda^3+8\lambda^2+16\lambda-16=0 \Leftrightarrow \lambda^4(\lambda-1)-8\lambda^2(\lambda-1)+16(\lambda-1)=0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (\lambda-1)(\lambda^2-4)^2=0 \Leftrightarrow (\lambda-1)(\lambda-2)^2(\lambda+2)^2=0 \Rightarrow$

$$\begin{cases} \lambda_1=1 \text{ cu } m(\lambda_1)=1 \\ \lambda_2=2 \text{ cu } m(\lambda_2)=2 \\ \lambda_3=-2 \text{ cu } m(\lambda_3)=2 \end{cases}$$

Pentru fiecare rădăcină a ecuaţiei caracteristice se găsesc corespunzător soluţii particulare liniar independente ale ecuaţiei omogene $(*_{EO})$, după algoritmul dat

$$\bullet\lambda_1=1 \text{ cu } m(\lambda_1)=1 \rightsquigarrow \left\{ x_1(t)=e^{1t}, \right.$$

$$\bullet\lambda_2=2 \text{ cu } m(\lambda_1)=2 \rightsquigarrow \begin{cases} x_2(t)=e^{2t}, \\ x_3(t)=te^{2t}, \end{cases}$$

$$\bullet\lambda_3=-2 \text{ cu } m(\lambda_3)=2 \rightsquigarrow \begin{cases} x_4(t)=e^{-2t}, \\ x_5(t)=te^{-2t}, \end{cases}$$

$(x_1,...,x_5)$ este un sistem fundamental de soluţii pentru $(*_{EO})$ (sunt exact 5 soluţii particulare pentru $(*_{EO})$ şi funcţii liniar independente). Atunci soluţia generală a ecuaţiei $(*_{EO})$ este

$x_o(t; c_1, ..., c_5) = c_1 \cdot e^t + c_2 e^{2t} + c_3 t e^{2t} + c_4 e^{-2t} + c_5 t e^{-2t}, \forall t \in \mathbb{R}$ şi $c_1, ..., c_5 \in \mathbb{R}$.

•Cazul al IV-lea : Fiind un polinom de grad n cu coeficienţi reali, se presupune în acest caz că admite $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ rădăcină complexă de multiplicitate k. Atunci, polinomul având coeficienţi reali, admite ca rădăcină şi conjugatul conjugatul $\bar{z}$, cu aceeaşi multiplicitate, k. În acest caz, matricea A nu mai este diagonalizabilă peste $\mathbb{R}$, nu admite nici formă canonică Jordan peste $\mathbb{R}$. Studiul se face peste $\mathbb{C}$, unde forma Jordan există întotdeauna. Făcând calcule similare, pentru rădăcinile caracteristice reale se va obţine mai sus, iar pentru cele complexe se presupune să se regăsească:

$$\text{pentru } z \text{ de multiplicitate } k: \quad \left\{ \begin{array}{l} e^{zt}, te^{zt}, t^2 e^{zt}, ..., t^{k-1} e^{zt} \\ e^{\bar{z}t}, te^{\bar{z}t}, t^2 e^{\bar{z}t}, ..., t^{k-1} e^{\bar{z}t} \end{array} \right. .$$

Cu detalii de la cursul de Matematici Speciale, anul II, se defineşte

$e^z = e^x (\cos y + i \sin y), \forall z = x + iy \in \mathbb{C} \Rightarrow$

$e^{zt} = e^{xt} (\cos yt + i \sin yt), \forall z = x + iy \in \mathbb{C}, t \in \mathbb{R}$

Atunci, deoarece EO (2) este cu coeficienţi reali, se obţine ca soluţie o combinaţie liniară în care, pentru rădăcinile caracteristice complexe $\lambda = \alpha + i\beta$, de multiplicitate $k \in \mathbb{N}^*$ apar corespunzător soluţii particulare ale EO de forma

$$\begin{array}{l} e^{\alpha t} \cos \beta t, \ t e^{\alpha t} \cos \beta t, \ t^2 e^{\alpha t} \cos \beta t, ..., \ t^{k-1} e^{\alpha t} \cos \beta t \text{ şi} \\ e^{\alpha t} \sin \beta t, \ t e^{\alpha t} \sin \beta t, \ t^2 e^{\alpha t} \sin \beta t, ..., \ t^{k-1} e^{\alpha t} \sin \beta t \end{array}$$

sau, echivalent,

$$e^{\alpha t} \cos \beta t \cdot f, \ e^{\alpha t} \sin \beta t \cdot g, \qquad f, g \text{ polinoame de grad } k - 1.$$

•Cazul general : În cazul în care EC are şi rădăcini reale şi complexe şi de orice multiplicităţi, se fac combinaţii liniare de soluţii particulare găsite ca anterior.

Exemplu. Fie $(*_{EO})$ $x'' + x = 0, \forall t \in \mathbb{R}$.
Atunci

$(*_{EC})$ $\lambda^2 + 1 = 0 \Rightarrow \{ \ \lambda_{1,2} = 0 \pm 1i$ cu $m(\lambda_{1,2}) = 1$.

Pentru fiecare rădăcină a ecuaţiei caracteristice se găsesc corespunzător soluţii particulare liniar independente ale ecuaţiei omogene $(*_{EO})$, după algoritmul dat

•$\lambda_{1,2} = 0 \pm 1i$ cu $m(\lambda_{1,2}) = 1. \rightsquigarrow \left\{ \begin{array}{l} x_1(t) = e^{0t} \cos(1t), \\ x_3(t) = e^{0t} \sin(1t). \end{array} \right.$

(x_1, x_2) este un sistem fundamental de soluţii pentru $(*_{EO})$ (sunt exact 2 soluţii particulare pentru $(*_{EO})$ şi funcţii liniar independente). Atunci soluţia generală a ecuaţiei $(*_{EO})$ este

$x_o(t; c_1, c_2) = c_1 \cdot \cos t + c_2 \sin t, \forall t \in \mathbb{R}$ şi $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.