CURS NR. 7
EDCO, AIA

4. SISTEME DE n ECUAŢII DIFERENŢIALE LINIARE DE ORDINUL 1 CU n NECUNOSCUTE

4.1. Sisteme de ecuaţii diferenţiale liniare având coeficienţi variabili

În primul curs s-a observat că modelarea matematică a fenomenelor din diverse domenii poate conduce şi la sisteme de ecuaţii diferenţiale. De exemplu, modelul pradă-prădător (Lotka - Volterra) ce descrie dinamica sistemelor biologice în care doar două specii interacţionează, prădătorul şi prada (peşti pradă-peşti prădător, iepuri-vulpi). Fie $x(t)$ numărul de indivizi din populaţia pradă la momentul t şi $y(t)$ numărul prădătorilor. S-a obţinut sistemul:

$$\begin{cases} x'(t) = ax(t) - px(t)\,y(t) \\ y'(t) = -by(t) + qx(t)\,y(t). \end{cases}$$

cu $a, b, p, q > 0$, care va fi identificat cu unul de două ecuaţii diferenţiale de ordinul 1, cu două necunoscute, **neliniar**, deoarece apare xy (a se vedea Bibliografie [Vrabie]; a se vedea şi Divergence and curl: The language of Maxwell's equations, fluid flow, and more, minutele 7-9, de pe 3Blue1Brown
https://www.youtube.com/watch?v=rB83DpBJQsE).

Forma generală a unui sistem de n ecuaţii diferenţiale de ordinul 1, liniare, <u>neomogen/omogen</u>, având coeficienţi <u>variabili</u>, sub <u>formă normală</u>:

$$\boxed{\begin{cases} x_1'(t) = a_{11}(t)\,x_1(t) + a_{12}(t)\,x_2(t) + ... + a_{1n}(t)\,x_n(t) + b_1(t) \\ x_2'(t) = a_{21}(t)\,x_1(t) + a_{22}(t)\,x_2(t) + ... + a_{2n}(t)\,x_n(t) + b_2(t) \\ \vdots \\ x_n'(t) = a_{n1}(t)\,x_1(t) + a_{n2}(t)\,x_2(t) + ... + a_{nn}(t)\,x_n(t) + b_n(t) \end{cases} , t \in \mathbb{I}} \tag{1}$$

unde $\mathbb{I} \subseteq \mathbb{R}$ este un interval nevid deschis, $a_{ij} : \mathbb{I} \to \mathbb{R}$, $i, j \in \{1, ..., n\}$, sunt funcţii continue numite *coeficienţi (variabili; constanţi* dacă funcţiile sunt constante*)*, iar $b_i : \mathbb{I} \to \mathbb{R}, i \in \{1, ..., n\}$, sunt funcţii continue numite *termeni liberi.* Dacă $b_i : \mathbb{I} \to \mathbb{R}$ sunt funcţii identic nule $\forall i \in \{1, ..., n\}$, atunci (1) se numeşte sistem *omogen*; dacă $\exists i \in \{1, ..., n\}$ a.î. $b_i : \mathbb{I} \to \mathbb{R}$ este funcţie neidentic nulă, atunci (1) se numeşte sistem *neomogen.* Funcţiile $x_j : \mathbb{I} \to \mathbb{R}, j \in \{1, ..., n\}$ sunt funcţiile *necunoscute* ale sistemului. O funcţie $\underline{\mathbf{x}} : \mathbb{I} \to \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^n$, $\underline{\mathbf{x}}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ ... \\ x_n(t) \end{pmatrix} \simeq (x_1(t), ..., x_n(t))$ de clasă $\mathcal{C}^1$ ce verifică (1) se numeşte *soluţie* pentru sistem.

Introducând notaţiile $\underline{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{b}} : \mathbb{I} \to \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^n$ şi $A : \mathbb{I} \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$,

$$\underline{\mathbf{x}}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ ... \\ x_n(t) \end{pmatrix}, \underline{\mathbf{b}}(t) = \begin{pmatrix} b_1(t) \\ b_2(t) \\ ... \\ b_n(t) \end{pmatrix} \text{ şi } A(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & ... & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & ... & a_{2n}(t) \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & ... & a_{nn}(t) \end{pmatrix},$$

sistemul devine ecuaţia diferenţială de ordinul 1 liniară, vectorială

$$\underline{\mathbf{x}}'(t) = A(t) \cdot \underline{\mathbf{x}}(t) + \underline{\mathbf{b}}(t), t \in \mathbb{I}. \tag{1'}$$

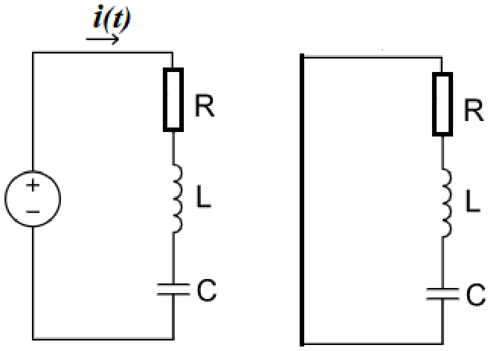
Problema Cauchy asociată unui sistem de ecuaţii diferenţiale de ordinul 1 liniare <u>neomogen/omogen</u>, cu coeficienţi <u>variabili</u>, sub <u>formă normală</u> cu datele $\mathcal{D} = (\mathbb{I}, \underline{\mathbf{b}}, t_0, \underline{\mathbf{x}}_0)$,

unde $\underline{\mathbf{x}}_0 = \begin{pmatrix} x_{1,0} \\ x_{2,0} \\ \dots \\ x_{n,0} \end{pmatrix}$, constă în determinarea unei funcţii $\underline{\mathbf{x}} : \mathbb{I} \to \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^n$ de clasă $\mathcal{C}^1$, unde $\mathbb{I} \subseteq \mathbb{R}$ este un interval nevid deschis, $t_0 \in \mathbb{I}, x_{i,0} \in \mathbb{R}$, $i = \overline{1,n}$ pentru care

$$\mathcal{PC}(\mathcal{D}) : \begin{cases} (1') \ \ \underline{\mathbf{x}}'(t) = A(t) \cdot \underline{\mathbf{x}}(t) + \underline{\mathbf{b}}(t), t \in \mathbb{I} \Leftrightarrow (1) \dots \\ (CI) \ \ \underline{\mathbf{x}}(t_0) = \underline{\mathbf{x}}_0 \Leftrightarrow x_1(t_0) = x_{1,0}, x_2(t_0) = x_{2,0}, \dots, x_n(t_0) = x_{n,0}. \end{cases}$$

Funcţia $\underline{\mathbf{x}}$ se numeşte *soluţie a problemei Cauchy* $\mathcal{PC}(\mathcal{D})$.
De menţionat că soluţia, dacă există, este unică şi este definită pe tot $\mathbb{I}$, este *saturată.*

Exemplul 4.1.1. a) Fie circuitul format dintr-un rezistor caracterizat prin rezistenţa R, o bobină ideală caracterizată prin inductanţa/ inductivitatea proprie L şi un condensator caracterizat prin capacitatea electrică C, toate constante în timp, ca în figură:



<u>Modelare.</u> Se va studia comportamentul circuitului în regim liber (regim propriu) atunci când condensatorul a fost încărcat anterior sub tensiunea generatorului şi când se descarcă în bobină şi rezistor din momentul $t \geq 0$.
Se reaminteşte că, notând cu i_R, i_L, i_C intensitatea curentului pe porţiunile de circuit care conţin rezistorul R, bobina L, respectiv condensatorul C, şi cu u_R, u_L, u_C, tensiunile corespunzătoare rezultă, din Legile lui Kirchoff, Ohm, Faraday, următoarele relaţii:

Legea I-a lui Kirchoff: $i_R = i_L = i_C$

Legea lui Ohm: $u_R = R \cdot i_R$

Legea a II-a a lui Kirchoff: $e_a = u_R + u_C$,

unde e_a este tensiunea electromotoare autoindusă.

Legile lui Faraday: $\begin{cases} -L\dfrac{di_L}{dt} = e_a \\ C\dfrac{du_C}{dt} = i_C \end{cases}$

Atunci, q fiind sarcina la bornele condensatorului,

$\begin{cases} i_R = i_L = i_C \\ u_R = R \cdot i_R \\ e_a = u_R + u_C \end{cases}$ şi $\begin{cases} u_C = \frac{1}{C} \cdot q \Leftrightarrow u'_C = \frac{1}{C} \cdot i_C \\ e_a = -L \cdot i'_L \end{cases}$

Atunci, notând $u_C = x$ şi $i_L = y$, se verifică sistemul de ecuaţii

$$\begin{cases} C \cdot x'(t) = & y(t) \\ -L \cdot y'(t) = R \cdot y(t) + x(t) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\boxed{(SO) \begin{cases} x'(t) = & \dfrac{1}{C} \cdot y(t) \\ y'(t) = \dfrac{-1}{L} \cdot x(t) + \dfrac{-R}{L} \cdot y(t) \end{cases},}$$

care este un sistem de $n = 2$ ecuaţii diferenţiale de ordin 1, liniare, cu $n = 2$ funcţii necunoscute, cu coeficienţi constanţi, omogen, care modelează curentul în circuit la momentul t.

Rezolvare cu <u>metoda eliminării.</u> Din prima ecuaţie a SO$\Rightarrow$

$$\begin{cases} (\circ)\ y(t) = Cx'(t), \forall t | \frac{d}{dt}(t) \\ y'(t) = Cx''(t), \forall t \end{cases}$$

Se înlocuiesc y şi y' în a doua ecuaţie a (SO) (se elimină y, y' din a doua ecuaţie a SO) $\Rightarrow$

$$Cx''(t) = \frac{-1}{L} \cdot x(t) + \frac{-R}{L} \cdot Cx'(t), \forall t \Rightarrow$$

$$x''(t) = \frac{-1}{LC} \cdot x(t) + \frac{-R}{L} \cdot x'(t), \forall t \Leftrightarrow$$

$$\boxed{(*_{EO})\ x''(t) + \frac{R}{L}x'(t) + \frac{1}{LC}x(t) = 0, \forall t,}$$

care este o ecuaţie diferenţială liniară de ordinul al 2-lea, liniară, cu coeficienţi constanţi, omogenă, verificată de tensiunea la bornele condensatorului u_C. Uneori derivata în raport cu t se notează cu $\cdot$ şi ecuaţia apare sub forma:

$$\boxed{(*_{EO})\ \ddot{u}_C + \frac{R}{L}\dot{u}_C + \frac{1}{LC}u_C = 0,}$$

descriind variaţia tensiunii de la bornele condensatorului pe parcursul descărcării acestuia. A se vedea Bibliografie [Ciobanu, Apreutesei].

Pentru t, variabilă independentă din domeniul de definiţie a soluţiei, se determină $x_o(t; c_1, c_2)$, soluţia generală pentru ecuaţia $(*_{EO})$.

Se ataşează ecuaţiei diferenţiale $(*_{EO})$ ecuaţia ei caracteristică:

$$(*_{EC})\ \lambda^2 + \frac{R}{L} \cdot \lambda + \frac{1}{LC} \cdot 1 = 0, \text{ cu } \Delta = \left(\frac{R}{L}\right)^2 - 4\frac{1}{LC} = \frac{R^2 - 4\dfrac{L}{C}}{L^2}$$

<u>cazul 1.</u> Dacă $\Delta > 0 \Leftrightarrow R^2 - 4\dfrac{L}{C} > 0$, ecuaţia caracteristică admite două soluţii reale distincte, $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$. Atunci

$$\begin{cases} \lambda_1 = \dfrac{-\dfrac{R}{L} + \sqrt{\Delta}}{2} \in \mathbb{R} \text{ cu } m(\lambda_1) = 1, \\ \lambda_2 = \dfrac{-\dfrac{R}{L} - \sqrt{\Delta}}{2} \in \mathbb{R} \text{ cu } m(\lambda_2) = 1. \end{cases}$$

$$x_o(t; c_1, c_2) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}, \forall t \text{ şi } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Înlocuind x, x' în $(\circ)\ y(t) = Cx'(t), \forall t \Rightarrow$

$$y_o(t; c_1, c_2) = C\left(c_1 e^{\lambda_1 t} \cdot \lambda_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} \cdot \lambda_2\right) =$$
$$= c_1 (C\lambda_1) \cdot e^{\lambda_1 t} + c_2 (C\lambda_2) \cdot e^{\lambda_2 t}.$$

Soluţia generală a (SO) este:

$$\begin{pmatrix} x_o(t; c_1, c_2) \\ y_o(t; c_1, c_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} \\ c_1 (C\lambda_1) \cdot e^{\lambda_1 t} + c_2 (C\lambda_2) \cdot e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix} =$$

$$= c_1 \cdot \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} \\ (C\lambda_1) \cdot e^{\lambda_1 t} \end{pmatrix} + c_2 \cdot \begin{pmatrix} e^{\lambda_2 t} \\ (C\lambda_2) \cdot e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix} =$$

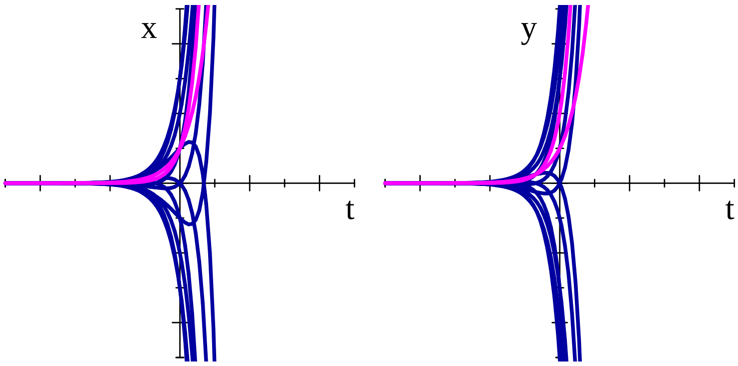
$$= c_1 \cdot e^{\lambda_1 t} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ C\lambda_1 \end{pmatrix}}_{\substack{\text{vect. pr. al } A \\ \text{coresp. lui } \lambda_1}} + c_2 \cdot e^{\lambda_2 t} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ C\lambda_2 \end{pmatrix}}_{\substack{\text{vect. pr. al } A \\ \text{coresp. lui } \lambda_2}} .$$

A se vedea grafice de soluţii în Seminar 7, precum pentru $(c_1, c_2) = (1, 0)$ şi $(c_1, c_2) = (0, 1)$ cu magenta (corespunzătoare soluţiilor particulare din sistemul fundamental) şi pentru

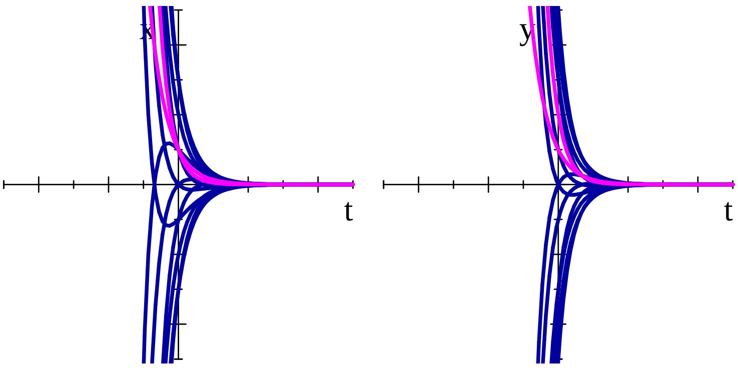
$(c_1, c_2) = (1, 1), (c_1, c_2) = (1, -1), (c_1, c_2) = (-1, 1), (c_1, c_2) = (-1, -1),$
$(c_1, c_2) = (1, 2), (c_1, c_2) = (2, 1), (c_1, c_2) = (-1, 2), (c_1, c_2) = (-2, 1)$
$(c_1, c_2) = (1, -2), (c_1, c_2) = (2, -1), (c_1, c_2) = (-1, -2), (c_1, c_2) = (-2, -1)$

cu albastru, corespunzând:

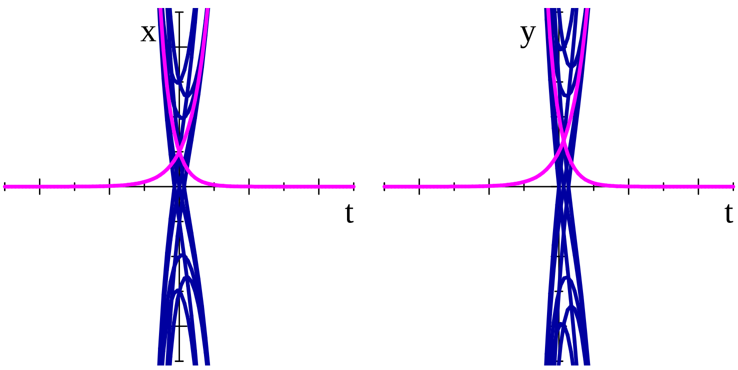
- $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$:



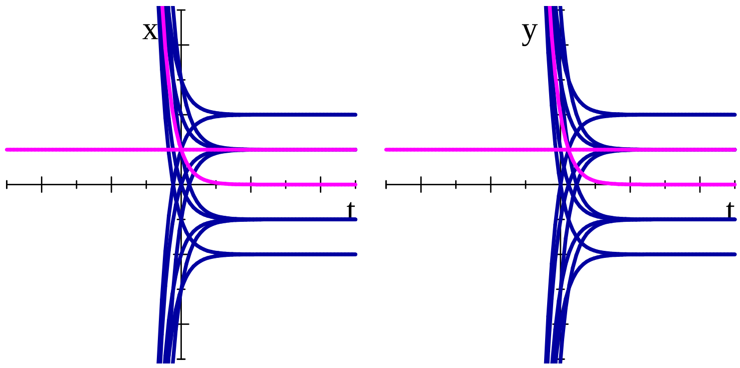
- $\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0$:



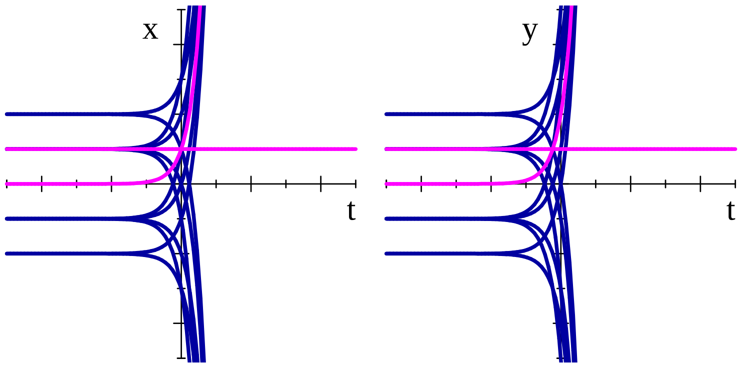
- $\lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0$:



- $\lambda_1 = 0, \lambda_2 < 0$:



$\bullet \lambda_1 = 0, \lambda_2 > 0:$



<u>cazul 2.</u> Dacă $\Delta = 0 \Leftrightarrow R^2 - 4\dfrac{L}{C} = 0$, ecuaţia caracteristică admite două soluţii reale coincidente, $\lambda_1 = \lambda_2 \in \mathbb{R}$. Atunci

$$\left\{ \lambda_1 = -\frac{R}{2L} \in \mathbb{R} \text{ cu } m(\lambda_1) = 2 \right.$$

$x_o(t; c_1, c_2) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 t e^{\lambda_1 t}, \forall t$ şi $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Înlocuind x, x' în $(\circ)\, y(t) = Cx'(t), \forall t \Rightarrow$

$$y_o(t; c_1, c_2) = C\left(c_1 e^{\lambda_1 t} \cdot \lambda_1 + c_2\left(e^{\lambda_1 t} + t e^{\lambda_1 t} \cdot \lambda_1\right)\right) =$$
$$= c_1 (C\lambda_1) \cdot e^{\lambda_1 t} + c_2 (C(1 + \lambda_1 t)) \cdot e^{\lambda_1 t}.$$

Soluţia generală a SO este:

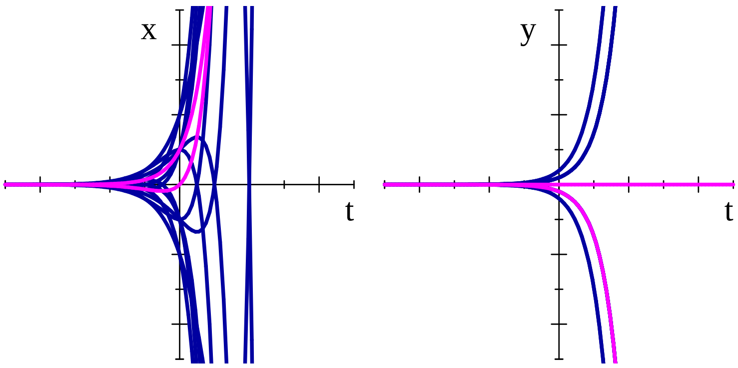
$$\begin{pmatrix} x_o(t; c_1, c_2) \\ y_o(t; c_1, c_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 t e^{\lambda_1 t} \\ c_1 (C\lambda_1) \cdot e^{\lambda_1 t} + c_2 (C(1+\lambda_1 t)) \cdot e^{\lambda_1 t} \end{pmatrix} =$$
$$= c_1 \cdot \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} \\ (C\lambda_1) \cdot e^{\lambda_1 t} \end{pmatrix} + c_2 \cdot \begin{pmatrix} t e^{\lambda_1 t} \\ C(1+\lambda_1 t) \cdot e^{\lambda_1 t} \end{pmatrix} =$$
$$= c_1 \cdot e^{\lambda_1 t} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ C\lambda_1 \end{pmatrix} + c_2 \cdot e^{\lambda_1 t} \cdot \begin{pmatrix} t \\ C(1+\lambda_1 t) \end{pmatrix}.$$

A se vedea grafice de soluţii în Seminar 7, precum pentru $(c_1, c_2) = (1, 0)$ şi $(c_1, c_2) = (0, 1)$ cu magenta (corespunzătoare soluţiilor particulare din sistemul fundamental) şi pentru

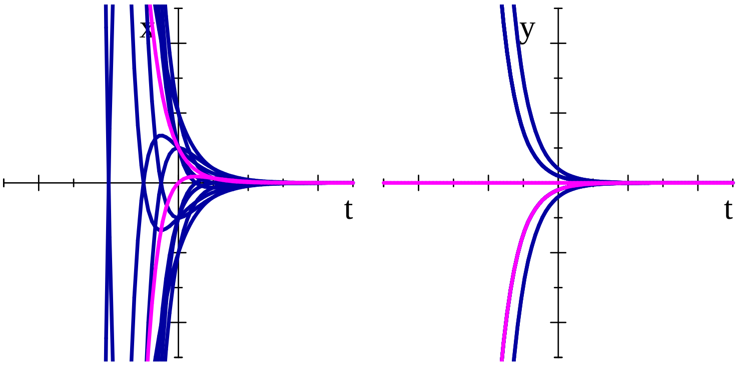
$(c_1, c_2) = (1, 1), (c_1, c_2) = (1, -1), (c_1, c_2) = (-1, 1), (c_1, c_2) = (-1, -1),$
$(c_1, c_2) = (1, 2), (c_1, c_2) = (2, 1), (c_1, c_2) = (-1, 2), (c_1, c_2) = (-2, 1)$
$(c_1, c_2) = (1, -2), (c_1, c_2) = (2, -1), (c_1, c_2) = (-1, -2), (c_1, c_2) = (-2, -1)$

cu albastru, corespunzând:

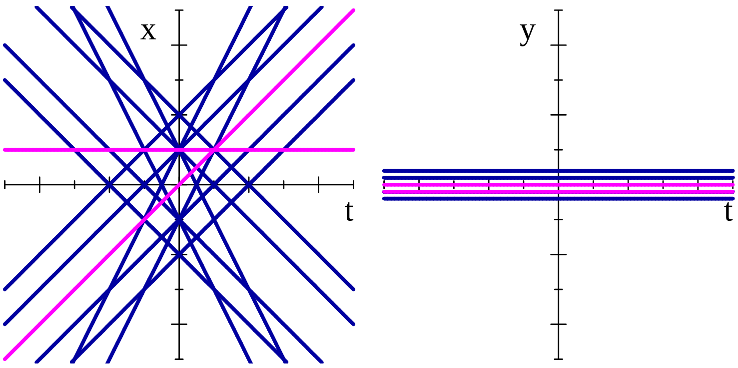
$\bullet \lambda_1 > 0:$



$\bullet \lambda_1 < 0$:



$\bullet \lambda_1 = 0$:



<u>cazul 3.</u> Dacă $\Delta < 0 \Leftrightarrow R^2 - 4\dfrac{L}{C} < 0$, ecuaţia caracteristică admite două soluţii complexe conjugate. Atunci

$$\begin{cases} \lambda_{1,2} = \dfrac{-\dfrac{R}{L} \pm i\sqrt{-\Delta}}{2} \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R} \text{ cu } m\left(\lambda_{1,2}\right) = 1. \end{cases}$$

$x_o\left(t; c_1, c_2\right) = c_1 e^{\alpha t} \cos \beta t + c_2 e^{\alpha t} \sin \beta t, \forall t > 0$ şi $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$,

unde $\alpha = -\frac{R}{2L}, \beta = \dfrac{\sqrt{-\Delta}}{2} = \dfrac{\sqrt{-R^2 + 4\dfrac{L}{C}}}{2L}$.

Înlocuind x, x' în $(\circ)\, y(t) = Cx'(t), \forall t \Rightarrow$

$$y_o\left(t; c_1, c_2\right) = \\ = C\left(c_1\left(\alpha e^{\alpha t} \cos \beta t - \beta e^{\alpha t} \sin \beta t\right) + c_2\left(\alpha e^{\alpha t} \sin \beta t + \beta e^{\alpha t} \cos \beta t\right)\right).$$

Soluţia generală a (SO) este:

$$\begin{pmatrix} x_o(t;c_1,c_2) \\ y_o(t;c_1,c_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 e^{\alpha t}\cos\beta t + c_2 e^{\alpha t}\sin\beta t \\ C\left(c_1\left(\alpha e^{\alpha t}\cos\beta t - \beta e^{\alpha t}\sin\beta t\right) + c_2\left(\alpha e^{\alpha t}\sin\beta t + \beta e^{\alpha t}\cos\beta t\right)\right) \end{pmatrix} =$$

$$= c_1 \cdot \begin{pmatrix} e^{\alpha t}\cos\beta t \\ e^{\alpha t} C\left(\alpha e^{\alpha t}\cos\beta t - \beta e^{\alpha t}\sin\beta t\right) \end{pmatrix} + c_2 \cdot \begin{pmatrix} e^{\alpha t}\sin\beta t \\ e^{\alpha t} C\left(\alpha e^{\alpha t}\sin\beta t + \beta e^{\alpha t}\cos\beta t\right) \end{pmatrix} =$$

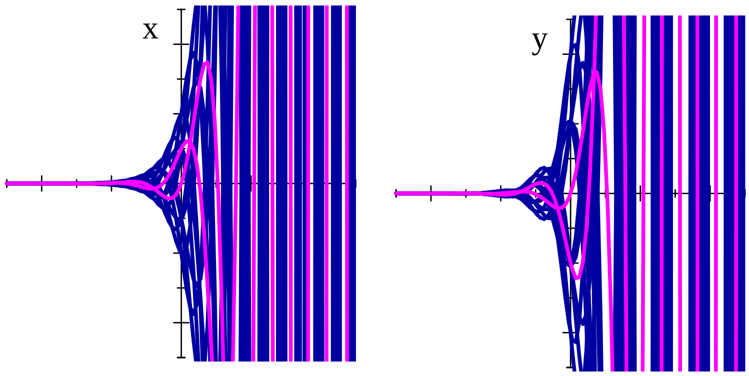
$$= c_1 \cdot e^{\alpha t}\begin{pmatrix} \cos\beta t \\ C\left(\alpha e^{\alpha t}\cos\beta t - \beta e^{\alpha t}\sin\beta t\right) \end{pmatrix} + c_2 \cdot e^{\alpha t}\begin{pmatrix} \sin\beta t \\ C\left(\alpha e^{\alpha t}\sin\beta t + \beta e^{\alpha t}\cos\beta t\right) \end{pmatrix}.$$

A se vedea grafice de soluţii în Seminar 7,precum pentru $(c_1,c_2) = (1,0)$ şi $(c_1,c_2) = (0,1)$ cu magenta (corespunzătoare soluţiilor particulare din sistemul fundamental) şi pentru

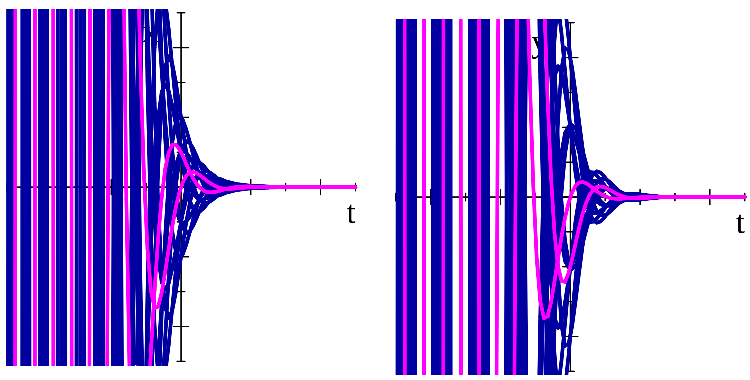
$(c_1,c_2) = (1,1)\,, (c_1,c_2) = (1,-1)\,, (c_1,c_2) = (-1,1)\,, (c_1,c_2) = (-1,-1)\,,$
$(c_1,c_2) = (1,2)\,, (c_1,c_2) = (2,1)\,, (c_1,c_2) = (-1,2)\,, (c_1,c_2) = (-2,1)$
$(c_1,c_2) = (1,-2)\,, (c_1,c_2) = (2,-1)\,, (c_1,c_2) = (-1,-2)\,, (c_1,c_2) = (-2,-1)$

cu albastru, corespunzând:

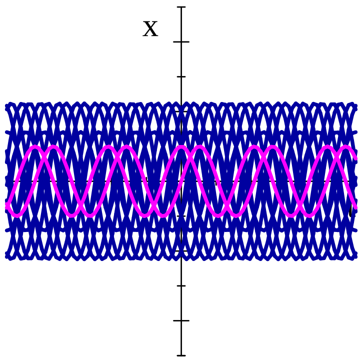
•$\alpha > 0:$

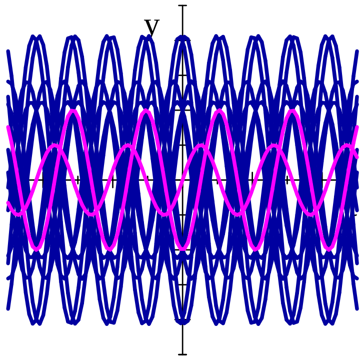


•$\alpha < 0:$



•$\alpha = 0:$





Comentariu. •Se observă că, în fiecare caz în parte, soluţia sistemului omogen de două ecuaţii diferenţiale liniare de ordinul 1 provine dintr-un sistem fundamental de soluţii pentru o ecuaţie diferenţială de ordinul 2 omogenă.

•Forma graficelor pentru x_o, y_o este asemanătoare, datorită formulei finale în care apar combinaţii liniare de funcţii de acelaşi tip (sau $e^{\lambda_1 t}$ şi $e^{\lambda_2 t}$, sau $e^{\lambda_1 t}$ şi $te^{\lambda_1 t}$, sau $e^{\alpha t}\cos\beta t$ şi $e^{\alpha t}\sin\beta t$). Mai mult, forma asemănătoare provine şi datorită legăturii lor în SO.

•În cazul 3, pentru $\alpha = 0$, soluţia $x = u_c$ este o *oscilaţie armonică*, adică este o "mişcare" (de sarcină) descrisă de un parametru de stare de forma "legii sinusului":

$x(t) = A\sin(\omega t + \varphi)$, unde A, ω, φ sunt constante reale date.

Se poate presupune că $\omega > 0$, deoarece

$\sin(\omega t + \varphi) = -\sin(-\omega t - \varphi)$.

Numărul $A = \max\limits_{t\in\mathbb{R}} |f(t)|$ se numeşte *amplitudinea oscilaţiei*, iar numărul $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$ se numeşte *perioada oscilaţiei* (în s). Numărul $\omega = \frac{2\pi}{T}$ se numeşte *frecvenţa ciclică, pulsaţia oscilaţiei* (în rad/s), iar numărul φ *frecvenţa iniţială a oscilaţiei* (în rad).

Amplitudinile oscilaţiilor armonice au importanţa dată de faptul că energia oscilaţiei depinde de pătratul amplitudinii, iar fazele pentru a observa defazajul dintre diferite oscilaţii. A se vedea Cursul 1 şi Anexa 2 de la AM.

*__REZOLVAREA SISTEMULUI DIFERENŢIAL OMOGEN__ SO

Conform exemplului 4.1.1, se poate pune în evidenţă Metoda Eliminării de rezolvare a SO prin reducerea la rezolvarea unei ecuaţii diferenţiale de ordin n liniare şi omogene. Pentru cazul $n \geq 3$, eliminarea a $n-1$ funcţii şi obţinerea unei ecuaţii diferenţiale de ordinul n în funcţia rămasă poate întâmpina dificultăţi (a se vedea Exerciţiul 2 din Seminarul 7). Se va pune în evidenţă şi o altă metodă, legată de valorile proprii (şi vectorii proprii) pentru matricea A, în cazul în care SO are coeficienţi constanţi.

Fie sistemul diferenţial omogen ataşat sistemului neomogen (1),

$$\boxed{\left\{\begin{array}{l} x_1'(t) = a_{11}(t)x_1(t) + a_{12}(t)x_2(t) + ... + a_{1n}(t)x_n(t) \\ x_2'(t) = a_{21}(t)x_1(t) + a_{22}(t)x_2(t) + ... + a_{2n}(t)x_n(t) \\ \vdots \\ x_n'(t) = a_{n1}(t)x_1(t) + a_{n2}(t)x_2(t) + ... + a_{nn}(t)x_n(t) \end{array}\right. , t \in \mathbb{I}} \tag{2}$$

scris vectorial sub forma

$$\underline{\mathbf{x}}'(t) = A(t)\cdot\underline{\mathbf{x}}(t), t \in \mathbb{I}. \tag{2'}$$

Teorema 4.1.1. Spaţiul soluţiilor unui sistem diferenţial omogen (2) este un spaţiu vectorial de dimensiune n peste $\mathbb{R}$.

$\bigcirc$ *Demonstraţie.* Se notează cu $\mathbb{V}$ mulţimea soluţiilor sistemului (2) definite pe $\mathbb{I} = \mathbb{R}$,

$$\boxed{\mathbb{V} = \left\{ \underline{\mathbf{x}} \in \mathcal{C}^1 \left(\mathbb{I}; \mathbb{R}^n \right) \mid \underline{\mathbf{x}}' \left(t \right) = A \left(t \right) \cdot \underline{\mathbf{x}} \left(t \right) \right\}.}$$

Se demonstrează că această submulţime a lui $\mathcal{C}^1 \left(\mathbb{I}; \mathbb{R}^n \right)$ este un subspaţiu liniar, izomorf cu $\mathbb{R}^n$. Într-adevăr:

Fie $\forall \left(\alpha, \beta, \underline{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{y}} \right) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{V}^2$. Atunci:

$$\left(\alpha \underline{\mathbf{x}} + \beta \underline{\mathbf{y}} \right)' \left(t \right) = \alpha \underline{\mathbf{x}}' \left(t \right) + \beta \underline{\mathbf{y}}' \left(t \right) = \alpha A \left(t \right) \cdot \underline{\mathbf{x}} \left(t \right) + \beta A \left(t \right) \cdot \underline{\mathbf{y}} \left(t \right) =$$
$$= A \left(t \right) \cdot \left(\alpha \underline{\mathbf{x}} + \beta \underline{\mathbf{y}} \right) \left(t \right), \forall t \in \mathbb{I} \Rightarrow \alpha \underline{\mathbf{x}} + \beta \underline{\mathbf{y}} \in \mathbb{V}.$$

Se construieşte un izomorfism între $\mathbb{V}$ şi $\mathbb{R}^n$. Procedeul este analog cu cel folosit în cazul ecuaţiilor diferenţiale liniare de ordin n cu coeficienţi variabili. Se fixează $t_0 \in \mathbb{I}$ şi se defineşte

$$T : \mathbb{V} \to \mathbb{R}^n,\ T \left(\underline{\mathbf{x}} \right) = \underline{\mathbf{x}} \left(t_0 \right) = \begin{pmatrix} x_1 \left(t_0 \right) \\ x_2 \left(t_0 \right) \\ ... \\ x_n \left(t_0 \right) \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{x}}_0.$$

T este o aplicaţie liniară, ca în demonstraţia Propoziţiei 3.1.3. Din Teorema de existenţă şi unicitate Cauchy, rezultă că T este o funcţie injectivă (din unicitate) şi surjectivă (din existenţă), deci T este un izomorfism de spaţii liniare.

Atunci $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{V} = n$.

Observaţia 4.1.1. a) Conform Teoremei 4.1.1, este suficient să se determine o bază $B = \left(\underline{\mathbf{x}}_1, \underline{\mathbf{x}}_2, \ldots, \underline{\mathbf{x}}_n \right)$ în $\mathbb{V}$, adică exact n soluţii particulare liniar independente pentru SO (2), şi atunci soluţia generală pentru sistemul diferenţial liniar omogen are soluţia generală

$$\boxed{\underline{\mathbf{x}}_o \left(t; c_1, ..., c_n \right) = c_1 \underline{\mathbf{x}}_1 \left(t \right) + ... + c_n \underline{\mathbf{x}}_n \left(t \right), \forall t \in \mathbb{I} \text{ şi } c_1, ..., c_n \in \mathbb{R},}$$

unde

$$\underline{\mathbf{x}}_i \left(t \right) = \begin{pmatrix} x_{1,i} \left(t \right) \\ x_{2,i} \left(t \right) \\ ... \\ x_{n,i} \left(t \right) \end{pmatrix} \stackrel{not.}{=} \varphi_i \left(t \right), \forall i \in \left\{ 1, ..., n \right\}.$$

Elementele bazei B se numesc *soluţii fundamentale* ale sistemului diferenţial omogen, B *sistem fundamental de soluţii*, iar matricea

$$\boxed{\mathcal{X} : \mathbb{I} \to \mathcal{M}_n \left(\mathbb{R} \right), \mathcal{X} \left(t; \underline{\mathbf{x}}_1, \underline{\mathbf{x}}_2, \ldots, \underline{\mathbf{x}}_n \right) = \begin{pmatrix} x_{1,1} \left(t \right) & x_{1,2} \left(t \right) & ... & x_{1,n} \left(t \right) \\ x_{2,1} \left(t \right) & x_{2,2} \left(t \right) & ... & x_{2,n} \left(t \right) \\ ... & ... & ... & ... \\ x_{n,1} \left(t \right) & x_{n,2} \left(t \right) & ... & x_{n,n} \left(t \right) \end{pmatrix}}$$

se numeşte *o matrice fundamentală* asociată sistemului diferenţial omogen.

b) Dacă $S = \left(\underline{\mathbf{x}}_1, \underline{\mathbf{x}}_2, \ldots, \underline{\mathbf{x}}_n \right)$ este un sistem de n soluţii pentru sistemul diferenţial omogen (nu neapărat liniar independente), matricea

$$\boxed{\mathcal{W} : \mathbb{I} \to \mathcal{M}_n \left(\mathbb{R} \right), \mathcal{W} \left(t; \underline{\mathbf{x}}_1, \underline{\mathbf{x}}_2, \ldots, \underline{\mathbf{x}}_n \right) = \begin{pmatrix} x_{1,1} \left(t \right) & x_{1,2} \left(t \right) & ... & x_{1,n} \left(t \right) \\ x_{2,1} \left(t \right) & x_{2,2} \left(t \right) & ... & x_{2,n} \left(t \right) \\ ... & ... & ... & ... \\ x_{n,1} \left(t \right) & x_{n,2} \left(t \right) & ... & x_{n,n} \left(t \right) \end{pmatrix}}$$

se numeşte *matrice Wronski a soluţiilor* $\left(\underline{\mathbf{x}}_1, \underline{\mathbf{x}}_2, \ldots, \underline{\mathbf{x}}_n \right)$, iar

$$\boxed{W \left(t; \underline{\mathbf{x}}_1, \underline{\mathbf{x}}_2, \ldots, \underline{\mathbf{x}}_n \right) = \det \mathcal{W} \left(t; \underline{\mathbf{x}}_1, \underline{\mathbf{x}}_2, \ldots, \underline{\mathbf{x}}_n \right) = \begin{vmatrix} x_{1,1} \left(t \right) & x_{1,2} \left(t \right) & ... & x_{1,n} \left(t \right) \\ x_{2,1} \left(t \right) & x_{2,2} \left(t \right) & ... & x_{2,n} \left(t \right) \\ ... & ... & ... & ... \\ x_{n,1} \left(t \right) & x_{n,2} \left(t \right) & ... & x_{n,n} \left(t \right) \end{vmatrix}}$$

wronskianul soluţiilor $(\underline{\mathbf{x}}_1, \underline{\mathbf{x}}_2, \ldots, \underline{\mathbf{x}}_n)$.
c) Există o infinitate de matrice fundamentale, deoarece un spaţiu vectorial admite o infinitate de baze.
d) Se observă că pentru orice matrice Wronski asociată unui sistem de soluţii $(\underline{\mathbf{x}}_1, \underline{\mathbf{x}}_2, \ldots, \underline{\mathbf{x}}_n)$ are loc ecuaţia diferenţială matriceală

$$\boxed{\mathcal{W}'(t) = A(t) \cdot \mathcal{W}(t), t \in \mathbb{I}.}.$$

În plus, dacă $\mathcal{W} = \mathcal{X}$ este matrice fundamentală, atunci orice soluţie a sistemului poate fi scrisă sub forma

$$\boxed{\underline{\mathbf{x}}(t) = \mathcal{X}(t) \cdot \underline{\mathbf{c}}, \underline{\mathbf{c}} \in M_{n\times 1}(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^n.}$$

Întradevăr,

$$\mathcal{X}(t) \cdot \underline{\mathbf{c}} = \begin{pmatrix} x_{1,1}(t) & x_{1,2}(t) & ... & x_{1,n}(t) \\ x_{2,1}(t) & x_{2,2}(t) & ... & x_{2,n}(t) \\ ... & ... & ... & ... \\ x_{n,1}(t) & x_{n,2}(t) & ... & x_{n,n}(t) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ ... \\ c_n \end{pmatrix} = c_1\underline{\mathbf{x}}_1(t) + c_2\underline{\mathbf{x}}_2(t) + \ldots + c_n\underline{\mathbf{x}}_n(t).$$

Teorema 4.1.2. Funcţiile $\underline{\mathbf{x}}_1, \underline{\mathbf{x}}_2, \ldots, \underline{\mathbf{x}}_n \in \mathbb{V}$ sunt liniar independente dacă şi numai dacă
$W(t; \underline{\mathbf{x}}_1, \underline{\mathbf{x}}_2, \ldots, \underline{\mathbf{x}}_n) \neq 0, \forall t \in \mathbb{I}$.

○*Demonstraţie.* Fie $\underline{\mathbf{x}}_1, \underline{\mathbf{x}}_2, \ldots, \underline{\mathbf{x}}_n \in \mathbb{V}$. Se presupune că $\lambda_1, ..., \lambda_n$ în $\mathbb{R}$ sunt scalari nu toţi nuli, astfel încât

$$\lambda_1\underline{\mathbf{x}}_1 + ... + \lambda_n\underline{\mathbf{x}}_n = \theta_{\mathbb{V}} \Leftrightarrow \lambda_1\underline{\mathbf{x}}_1(t) + ... + \lambda_n\underline{\mathbf{x}}_n(t) = 0, \forall t \in \mathbb{I} \Leftrightarrow$$

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} x_{1,1}(t) \\ x_{2,1}(t) \\ ... \\ x_{n,1}(t) \end{pmatrix} + ... + \lambda_n \begin{pmatrix} x_{1,n}(t) \\ x_{2,n}(t) \\ ... \\ x_{n,n}(t) \end{pmatrix} = 0, \forall t \in \mathbb{I} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \lambda_1 x_{1,1}(t) + ... + \lambda_n x_{1,n}(t) = 0 \\ \lambda_1 x_{2,1}(t) + ... + \lambda_n x_{2,n}(t) = 0 \\ ... \\ \lambda_1 x_{n,1}(t) + ... + \lambda_n x_{n,n}(t) = 0 \end{cases}, \forall t \in \mathbb{I}.$$

Sistemul în necunoscutele $\lambda_1, ..., \lambda_n$ are soluţii diferite de soluţia $(0, ..., 0)$ dacă şi numai dacă determinantul său, care este wronskianul, este nul.

Teorema 4.1.3. (**Liouville**) Fie $\underline{\mathbf{x}}_1, \underline{\mathbf{x}}_2, \ldots, \underline{\mathbf{x}}_n \in \mathbb{V}$. Atunci

$$\boxed{W(t; \underline{\mathbf{x}}_1, \underline{\mathbf{x}}_2, \ldots, \underline{\mathbf{x}}_n) = W(t_0; \underline{\mathbf{x}}_1, \underline{\mathbf{x}}_2, \ldots, \underline{\mathbf{x}}_n) \cdot e^{-\int_{t_0}^{t} TrA(s)ds}, \forall t \in \mathbb{I},} \tag{8}$$

unde $t_0 \in \mathbb{I}$ este un punct arbitrar fixat şi

$$Tr(A(t)) = \sum_{j=1}^{n} a_{jj}(t),, \forall t \in \mathbb{I}.$$

○*Demonstraţie.* Se ştie că derivata unui determinant de ordin n ale cărui elemente sunt funcţii reale de variabilă reală este o sumă de n determinanţi obţinuţi din determinantul iniţial derivând în fiecare dintre ei succesiv elementele fiecărei linii (sau coloane).

Se derivează succesiv liniile în $W(t; \underline{\mathbf{x}}_1, \underline{\mathbf{x}}_2, \ldots, \underline{\mathbf{x}}_n)$ raport cu variabila t şi se obţine

$$W'(t; \underline{\mathbf{x}}_1, \underline{\mathbf{x}}_2, \ldots, \underline{\mathbf{x}}_n) = \begin{vmatrix} x_{1,1}(t) & x_{1,2}(t) & ... & x_{1,n}(t) \\ x_{2,1}(t) & x_{2,2}(t) & ... & x_{2,n}(t) \\ ... & ... & ... & ... \\ x_{n,1}(t) & x_{n,2}(t) & ... & x_{n,n}(t) \end{vmatrix}' =$$

$$= \begin{vmatrix} x'_{1,1}(t) & x'_{1,2}(t) & ... & x'_{1,n}(t) \\ x_{2,1}(t) & x_{2,2}(t) & ... & x_{2,n}(t) \\ ... & ... & ... & ... \\ x_{n,1}(t) & x_{n,2}(t) & ... & x_{n,n}(t) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_{1,1}(t) & x_{1,2}(t) & ... & x_{1,n}(t) \\ x'_{2,1}(t) & x'_{2,2}(t) & ... & x'_{2,n}(t) \\ ... & ... & ... & ... \\ x_{n,1}(t) & x_{n,2}(t) & ... & x_{n,n}(t) \end{vmatrix} + ... +$$
$$+ \begin{vmatrix} x_{1,1}(t) & x_{1,2}(t) & ... & x_{1,n}(t) \\ x_{2,1}(t) & x_{2,2}(t) & ... & x_{2,n}(t) \\ ... & ... & ... & ... \\ x'_{n,1}(t) & x'_{n,2}(t) & ... & x'_{n,n}(t) \end{vmatrix}, \forall t \in \mathbb{I}.$$

Se observă că în linia cu derivate a determinanţilor corespunzători se pot înlocui, folosind că $\underline{\mathbf{x}}_1, \underline{\mathbf{x}}_2, \ldots, \underline{\mathbf{x}}_n$ sunt soluţii, derivatele cu sumele corespunzătoare$\Rightarrow$

$$W'(t; \underline{\mathbf{x}}_1, \underline{\mathbf{x}}_2, \ldots, \underline{\mathbf{x}}_n) = \sum_{k=1}^{n} \begin{vmatrix} x_{1,1}(t) & x_{1,2}(t) & ... & x_{1,n}(t) \\ ... & ... & ... & ... \\ \sum_{j=1}^{n} a_{kj}(t)\, x_{j,1}(t) & \sum_{j=1}^{n} a_{kj}(t)\, x_{j,2}(t) & ... & \sum_{j=1}^{n} a_{kj}(t)\, x_{j,n}(t) \\ ... & ... & ... & ... \\ x_{n,1}(t) & x_{n,2}(t) & ... & x_{n,n}(t) \end{vmatrix} =$$
$$= \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{kj}(t) \begin{vmatrix} x_{1,1}(t) & x_{1,2}(t) & ... & x_{1,n}(t) \\ ... & ... & ... & ... \\ x_{j,1}(t) & x_{j,2}(t) & ... & x_{j,n}(t) \\ ... & ... & ... & ... \\ x_{n,1}(t) & x_{n,2}(t) & ... & x_{n,n}(t) \end{vmatrix} = \sum_{j=1}^{n} a_{jj}(t) \begin{vmatrix} x_{1,1}(t) & x_{1,2}(t) & ... & x_{1,n}(t) \\ ... & ... & ... & ... \\ x_{j,1}(t) & x_{j,2}(t) & ... & x_{j,n}(t) \\ ... & ... & ... & ... \\ x_{n,1}(t) & x_{n,2}(t) & ... & x_{n,n}(t) \end{vmatrix},$$
$\forall t \in \mathbb{I}$.

Deci se verifică ecuaţia diferenţială

$W'(t; \underline{\mathbf{x}}_1, \underline{\mathbf{x}}_2, \ldots, \underline{\mathbf{x}}_n) = Tr\,(A(t)) \cdot W(t; \underline{\mathbf{x}}_1, \underline{\mathbf{x}}_2, \ldots, \underline{\mathbf{x}}_n), \forall t \in \mathbb{I}$.

Este o ecuaţie diferenţială de ordinul 1 liniară şi omogenă, de unde, prin integrare, rezultă concluzia.

Teorema 4.1.4. Fie $\forall \underline{\mathbf{x}}_1, \underline{\mathbf{x}}_2, \ldots, \underline{\mathbf{x}}_n \in \mathbb{V}$. Atunci wronskianul lor sau este identic nul pe $\mathbb{I}$ sau este diferit de zero în orice punct din $\mathbb{I}$.

○*Demonstraţie.* Fie $\underline{\mathbf{x}}_1, \underline{\mathbf{x}}_2, \ldots, \underline{\mathbf{x}}_n \in \mathbb{V}$. Dacă există un punct $t_0 \in \mathbb{I}$ pentru care $W(t_0; \underline{\mathbf{x}}_1, \underline{\mathbf{x}}_2, \ldots, \underline{\mathbf{x}}_n) = 0$ atunci, conform Teoremei Liouville, rezultă că

$W(t; \underline{\mathbf{x}}_1, \underline{\mathbf{x}}_2, \ldots, \underline{\mathbf{x}}_n) = 0, \forall t \in \mathbb{I}$.

Exemplul 4.1.1. b) Pentru circuitul de la a) şi sistemul diferenţial omogen ataşat

$$(SO) \begin{cases} x'(t) = \qquad\qquad \dfrac{1}{C} \cdot y(t) \\ y'(t) = \dfrac{-1}{L} \cdot x(t) + \dfrac{-R}{L} \cdot y(t) \end{cases},$$

se observă că este un sistem de $n = 2$ ecuaţii diferenţiale de ordinul 1, liniare, având coeficienţi constanţi, daţi de

$$A(t) = A = \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{1}{C} \\ \dfrac{-1}{L} & \dfrac{-R}{L} \end{pmatrix}, \text{ cu } \operatorname{Tr} A(t) = \operatorname{Tr} A = \frac{-R}{L}, \forall t, \text{ omogen, cu } \underline{\mathbf{b}}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Are $n = 2$ necunoscute $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} =?$

<u>cazul 1.</u> Dacă $R^2 - 4\dfrac{L}{C} > 0$, atunci

$$\begin{pmatrix} x_o(t;c_1,c_2) \\ y_o(t;c_1,c_2) \end{pmatrix} = c_1 \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} \\ (C\lambda_1)\cdot e^{\lambda_1 t} \end{pmatrix}}_{\underline{\mathbf{x}}_1} + c_2 \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} e^{\lambda_2 t} \\ (C\lambda_2)\cdot e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix}}_{\underline{\mathbf{x}}_2}.$$

Deoarece $\underline{\mathbf{x}}_1 = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} \\ (C\lambda_1)\cdot e^{\lambda_1 t} \end{pmatrix}, \underline{\mathbf{x}}_2 = \begin{pmatrix} e^{\lambda_2 t} \\ (C\lambda_2)\cdot e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix}$ sunt soluţii ale SO şi

$W(t;\underline{\mathbf{x}}_1,\underline{\mathbf{x}}_2) = \begin{vmatrix} e^{\lambda_1 t} & e^{\lambda_2 t} \\ (C\lambda_1)\cdot e^{\lambda_1 t} & (C\lambda_2)\cdot e^{\lambda_2 t} \end{vmatrix} = C(\lambda_2-\lambda_1)\, e^{t(\lambda_1+\lambda_2)} \neq 0, \forall t \Rightarrow$

$B = (\underline{\mathbf{x}}_1, \underline{\mathbf{x}}_2)$ este sistem fundamental de soluţii pentru SO.

<u>cazul 2.</u> Dacă $R^2 - 4\dfrac{L}{C} = 0$, atunci

$$\begin{pmatrix} x_o(t;c_1,c_2) \\ y_o(t;c_1,c_2) \end{pmatrix} = c_1 \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} \\ (C\lambda_1)\cdot e^{\lambda_1 t} \end{pmatrix}}_{\underline{\mathbf{x}}_1} + c_2 \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} te^{\lambda_1 t} \\ C(1+\lambda_1 t)\cdot e^{\lambda_1 t} \end{pmatrix}}_{\underline{\mathbf{x}}_2}.$$

Deoarece $\underline{\mathbf{x}}_1 = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} \\ (C\lambda_1)\cdot e^{\lambda_1 t} \end{pmatrix}, \underline{\mathbf{x}}_2 = \begin{pmatrix} te^{\lambda_1 t} \\ C(1+\lambda_1 t)\cdot e^{\lambda_1 t} \end{pmatrix}$ sunt soluţii ale SO şi

$W(t;\underline{\mathbf{x}}_1,\underline{\mathbf{x}}_2) = \begin{vmatrix} e^{\lambda_1 t} & te^{\lambda_1 t} \\ (C\lambda_1)\cdot e^{\lambda_1 t} & C(1+\lambda_1 t)\cdot e^{\lambda_1 t} \end{vmatrix} = Ce^{2(t\lambda_1)} \neq 0, \forall t \Rightarrow$

$B = (\underline{\mathbf{x}}_1, \underline{\mathbf{x}}_2)$ este sistem fundamental de soluţii pentru SO.

<u>cazul 3.</u> Dacă $R^2 - 4\dfrac{L}{C} < 0$, atunci

$$\begin{pmatrix} x_o(t;c_1,c_2) \\ y_o(t;c_1,c_2) \end{pmatrix} = c_1 \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} e^{\alpha t}\cos\beta t \\ e^{\alpha t}C\left(\alpha e^{\alpha t}\cos\beta t - \beta e^{\alpha t}\sin\beta t\right) \end{pmatrix}}_{\underline{\mathbf{x}}_1} + c_2 \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} e^{\alpha t}\sin\beta t \\ e^{\alpha t}C\left(\alpha e^{\alpha t}\sin\beta t + \beta e^{\alpha t}\cos\beta t\right) \end{pmatrix}}_{\underline{\mathbf{x}}_2}.$$

Deoarece $\underline{\mathbf{x}}_1 = \begin{pmatrix} e^{\alpha t}\cos\beta t \\ e^{\alpha t}C\left(\alpha e^{\alpha t}\cos\beta t - \beta e^{\alpha t}\sin\beta t\right) \end{pmatrix}, \underline{\mathbf{x}}_2 = \begin{pmatrix} e^{\alpha t}\sin\beta t \\ e^{\alpha t}C\left(\alpha e^{\alpha t}\sin\beta t + \beta e^{\alpha t}\cos\beta t\right) \end{pmatrix}$
sunt soluţii ale SO şi

$W(t;\underline{\mathbf{x}}_1,\underline{\mathbf{x}}_2) = \begin{vmatrix} e^{\alpha t}\cos\beta t & e^{\alpha t}\sin\beta t \\ e^{\alpha t}C\left(\alpha e^{\alpha t}\cos\beta t - \beta e^{\alpha t}\sin\beta t\right) & e^{\alpha t}C\left(\alpha e^{\alpha t}\sin\beta t + \beta e^{\alpha t}\cos\beta t\right) \end{vmatrix} = C\beta e^{3(t\alpha)} \neq$
$\neq 0, \forall t \Rightarrow$

$B = (\underline{\mathbf{x}}_1, \underline{\mathbf{x}}_2)$ este sistem fundamental de soluţii pentru SO.

În toate cazurile, soluţia generală a SO este:

$\underline{\mathbf{x}}_o(t;\underline{\mathbf{c}}) = \mathcal{X}(t;\underline{\mathbf{x}}_1,\underline{\mathbf{x}}_2)\cdot\underline{\mathbf{c}} = c_1\underline{\mathbf{x}}_1(t) + c_2\underline{\mathbf{x}}_2(t), t\in\mathbb{R}, c_1,c_2\in\mathbb{R}.$

Ulterior se vor stabili alte modalităţi de determinare de soluţii $\underline{\mathbf{x}}_1, \underline{\mathbf{x}}_2$ particulare, liniar independente pentru SO cu $n=2$, având coeficienţi constanţi.

Convenţie. Peste tot în cele ce urmează, se va nota:

-pentru $n=2$, $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ cu $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ şi, pentru $n=3$, $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix}$ cu $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$.

Exemplul 4.1.2. Se determină soluţia generală a sistemului

$$\begin{cases} x' = \dfrac{4}{t}x - \dfrac{4}{t^2}y \\ y' = 2x - \dfrac{1}{t}y; \end{cases}$$

ştiind că admite soluţiile particulare

$\underline{\mathbf{x}}_1(t) = \varphi_1(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix}$ şi $\underline{\mathbf{x}}_2(t) = \varphi_2(t) = \begin{pmatrix} 2t^2 \\ t^3 \end{pmatrix}$

Rezolvare : Sistemul (SO) $\begin{cases} x'(t) = \frac{4}{t}x(t) - \frac{4}{t^2}y(t) \\ y'(t) = 2x(t) - \frac{1}{t}y(t) \end{cases}$, $t \in \mathbb{I}$-interval, $0 \notin \mathbb{I}$,

este un sistem de $n = 2$ ecuaţii diferenţiale de ordinul 1, liniare, având coeficienţi variabili, daţi de

$A(t) = \begin{pmatrix} \frac{4}{t} & -\frac{4}{t^2} \\ 2 & -\frac{1}{t} \end{pmatrix}$, omogen, cu $\underline{\mathbf{b}}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, cu $n = 2$ necunoscute $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ =?

•Se observă că $\underline{\mathbf{x}}_1, \underline{\mathbf{x}}_2 \in \mathcal{C}^1(\mathbb{I}, \mathbb{R}^2)$ şi, prin calcul direct, că sunt soluţii particulare ale SO.
Într-adevăr,

$\underline{\mathbf{x}}_1(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ y_1(t) \end{pmatrix}$ verifică $\begin{cases} 0 = \frac{4}{t} \cdot 1 - \frac{4}{t^2} \cdot t \\ 1 = 2 \cdot 1 - \frac{1}{t} \cdot t \end{cases}$, $t \in \mathbb{I}$.

$\underline{\mathbf{x}}_2(t) = \begin{pmatrix} 2t^2 \\ t^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}$ verifică $\begin{cases} 4t = \frac{4}{t} \cdot 2t^2 - \frac{4}{t^2} \cdot t^3 \\ 3t^2 = 2 \cdot 2t^2 - \frac{1}{t} \cdot t^3 \end{cases}$, $t \in \mathbb{I}$.

•Mai mult, sunt funcţii vectoriale liniar independente, deoarece

$W(t; \underline{\mathbf{x}}_1, \underline{\mathbf{x}}_2) = \begin{vmatrix} x_1(t) & x_2(t) \\ y_1(t) & y_2(t) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2t^2 \\ t & t^3 \end{vmatrix} = -t^3 \neq 0, \forall t \in \mathbb{I}$.

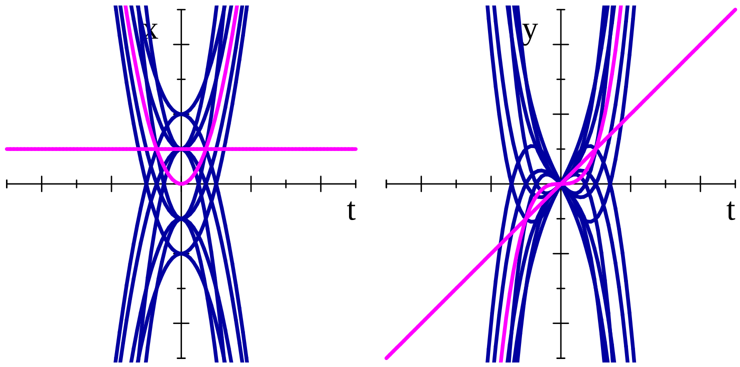
•Atunci $B = (\underline{\mathbf{x}}_1, \underline{\mathbf{x}}_2)$ este un sistem fundamental de soluţii pentru SO.
Soluţia generală a sistemului SO este

$\begin{pmatrix} x_o(t; c_1, c_2) \\ y_o(t; c_1, c_2) \end{pmatrix} = c_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 2t^2 \\ t^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \cdot 1 + c_2 \cdot 2t^2 \\ c_1 \cdot t + c_2 \cdot t^3 \end{pmatrix}, \forall t \in \mathbb{I}$ şi $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Reprezentând grafic pe x_o şi y_o pe $\mathbb{I} =]0, \infty[$, apoi pe $\mathbb{I} =]0, \infty[$ pentru $(c_1, c_2) = (1, 0)$ şi $(c_1, c_2) = (0, 1)$ cu magenta (corespunzătoare soluţiilor particulare din sistemul fundamental) şi pentru

$(c_1, c_2) = (1, 1), (c_1, c_2) = (1, -1), (c_1, c_2) = (-1, 1), (c_1, c_2) = (-1, -1)$,
$(c_1, c_2) = (1, 2), (c_1, c_2) = (2, 1), (c_1, c_2) = (-1, 2), (c_1, c_2) = (-2, 1)$
$(c_1, c_2) = (1, -2), (c_1, c_2) = (2, -1), (c_1, c_2) = (-1, -2), (c_1, c_2) = (-2, -1)$

cu albastru, se obţine



***REZOLVAREA SISTEMULUI DIFERENŢIAL NEOMOGEN** SN ŞI A **PROBLEMEI CAUCHY**

Fie sistemul neomogen de ecuaţii diferenţiale de ordinul 1, liniare, scris vectorial

$$\underline{\mathbf{x}}'(t) = A(t) \cdot \underline{\mathbf{x}}(t) + \underline{\mathbf{b}}(t), t \in \mathbb{I}, \qquad (1'),$$

unde $A : \mathbb{I} \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ şi $\underline{\mathbf{b}} : \mathbb{I} \to \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^n$ sunt funcţii continue. Fie sistemul omogen ataşat de ecuaţii diferenţiale de ordinul 1, liniare, scris vectorial

$$\underline{\mathbf{x}}'(t) = A(t) \cdot \underline{\mathbf{x}}(t), t \in \mathbb{I}. \qquad (2')$$

Teorema 4.1.4. Fie $\mathcal{X}$ o matrice fundamentală a sistemului diferenţial omogen (2) şi fie $\underline{\mathbf{x}}_p : \mathbb{I} \to \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^n$ o soluţie particulară a sistemului diferenţial neomogen (1). O funcţie $\underline{\mathbf{x}} : \mathbb{I} \to \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^n$ este soluţie a sistemului diferenţial neomogen (1) dacă şi numai dacă este de forma

$$\boxed{\underline{\mathbf{x}}(t) = \mathcal{X}(t) \cdot \underline{\mathbf{c}} + \underline{\mathbf{x}}_p(t), t \in \mathbb{I}, \underline{\mathbf{c}} \in \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^n.}$$

În particular, soluţia generală a sistemului diferenţial neomogen (1) este

$$\boxed{\underline{\mathbf{x}}(t; \underline{\mathbf{c}}) = \underline{\mathbf{x}}_o(t; \underline{\mathbf{c}}) + \underline{\mathbf{x}}_p(t), t \in \mathbb{I}, \underline{\mathbf{c}} \in \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^n.}$$

unde $\underline{\mathbf{x}}_o(t; \underline{\mathbf{c}})$ este soluţia generală a sistemului diferenţial omogen (2) şi $\underline{\mathbf{x}}_p(t)$ este o soluţie particulară a sistemului diferenţial neomogen (1).

○*Demonstraţie. Necesitatea.* Fie $\underline{\mathbf{x}} : \mathbb{I} \to \mathbb{R}^n$ o soluţie a sistemului diferenţial neomogen (1) Se defineşte

$$\underline{\mathbf{v}} : \mathbb{I} \to \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^n, \underline{\mathbf{v}}(t) = \underline{\mathbf{x}}(t) - \underline{\mathbf{x}}_p(t).$$

Atunci $\underline{\mathbf{v}}$ este de clasă $\mathcal{C}^1$ şi

$$\underline{\mathbf{v}}'(t) = \underline{\mathbf{x}}'(t) - \underline{\mathbf{x}}_p'(t) \overset{(1')}{=} (A(t) \cdot \underline{\mathbf{x}}(t) + \underline{\mathbf{b}}(t)) - \left(A(t) \cdot \underline{\mathbf{x}}_p(t) + \underline{\mathbf{b}}(t)\right) =$$
$$= A(t) \cdot \left(\underline{\mathbf{x}}(t) - \underline{\mathbf{x}}_p(t)\right) = A(t) \cdot \underline{\mathbf{v}}(t).$$

Deci $\underline{\mathbf{v}}$ este soluţie a sistemului diferenţial liniar omogen (2), şi deci este de forma

$$\underline{\mathbf{v}}(t) = \mathcal{X}(t) \cdot \underline{\mathbf{c}}, t \in \mathbb{I},$$

unde $\underline{\mathbf{c}} \in \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^n$, de unde concluzia.

Suficienţa. Fie funcţia $\underline{\mathbf{x}} : \mathbb{I} \to \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^n$ definită prin

$$\underline{\mathbf{x}}(t) = \mathcal{X}(t) \cdot \underline{\mathbf{c}} + \underline{\mathbf{x}}_p(t), t \in \mathbb{I},$$

unde $\underline{\mathbf{c}} \in \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^n$. Se ştie că $\mathcal{X}(t) \cdot \underline{\mathbf{c}}$ este soluţie a sistemului diferenţial liniar omogen, deci este de clasă $\mathcal{C}^1$ şi atunci $\underline{\mathbf{x}}$ este de clasă $\mathcal{C}^1$ şi

$$\underline{\mathbf{x}}'(t) = (\mathcal{X}(t) \cdot \underline{\mathbf{c}})' + \underline{\mathbf{x}}_p'(t) = A(t) \cdot (\mathcal{X}(t) \cdot \underline{\mathbf{c}}) + A(t) \cdot \underline{\mathbf{x}}_p(t) + \underline{\mathbf{b}}(t) =$$
$$= A(t) \cdot \left(\mathcal{X}(t) \cdot \underline{\mathbf{c}} + \underline{\mathbf{x}}_p(t)\right) + \underline{\mathbf{b}}(t) =$$
$$= A(t) \cdot \underline{\mathbf{x}}(t) + \underline{\mathbf{b}}(t), t \in \mathbb{I},$$

de unde concluzia.

În ipotezele anterioare, fie problema Cauchy

$$\mathcal{PC}(\mathcal{D}) : \begin{cases} (1') \ \underline{\mathbf{x}}'(t) = A(t) \cdot \underline{\mathbf{x}}(t) + \underline{\mathbf{b}}(t), t \in \mathbb{I} \\ (CI) \ \underline{\mathbf{x}}(t) = \underline{\mathbf{x}}_0. \end{cases}$$

Teorema 4.1.5. Fie $\mathcal{X}$ o matrice fundamentală a sistemului diferenţial omogen (2). Atunci soluţia problemei Cauchy anterioare este dată de formula variaţiei constantelor:

$$\boxed{\underline{\mathbf{x}}(t) = \mathcal{X}(t) \cdot \mathcal{X}^{-1}(t_0) \cdot \underline{\mathbf{x}}_0 + \mathcal{X}(t) \cdot \int_{t_0}^{t} \mathcal{X}^{-1}(s) \cdot \underline{\mathbf{b}}(s)\, ds, t \in \mathbb{I}.}$$

○*Demonstraţie.* Folosind observaţia că un sistem se poate reduce la o ecuaţie diferenţială de ordin

n şi metoda variaţiei constantelor dată de Teorema 3.1.4., se caută soluţia problemei Cauchy de forma $\underline{\mathbf{x}} : \mathbb{I} \to \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^n$,

$\underline{\mathbf{x}}(t) = \mathcal{X}(t) \cdot \underline{\mathbf{u}}(t)$, unde $\underline{\mathbf{u}} : \mathbb{I} \to \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^n$ este o funcţie vectorială ce va fi determinată astfel încât $\underline{\mathbf{x}}$ să verifice (1), adică

$(\mathcal{X}(t) \cdot \underline{\mathbf{u}}(t))' = A(t) \cdot (\mathcal{X}(t) \cdot \underline{\mathbf{u}}(t)) + \underline{\mathbf{b}}(t), t \in \mathbb{I} \Leftrightarrow$

$\mathcal{X}'(t) \cdot \underline{\mathbf{u}}(t) + \mathcal{X}(t) \cdot \underline{\mathbf{u}}'(t) = A(t) \cdot \mathcal{X}(t) \cdot \underline{\mathbf{u}}(t) + \underline{\mathbf{b}}(t), t \in \mathbb{I}$

Deoarece $\mathcal{X}(t)$ este matrice fundamentală, adică verifică sistemul diferenţial omogen (2), $\mathcal{X}'(t) = A(t) \cdot \mathcal{X}(t) \Rightarrow$

$A(t) \cdot \mathcal{X}(t) \cdot \underline{\mathbf{u}}(t) + \mathcal{X}(t) \cdot \underline{\mathbf{u}}'(t) = A(t) \cdot \mathcal{X}(t) \cdot \underline{\mathbf{u}}(t) + \underline{\mathbf{b}}(t), t \in \mathbb{I} \Leftrightarrow$

$\mathcal{X}(t) \cdot \underline{\mathbf{u}}'(t) = \underline{\mathbf{b}}(t), t \in \mathbb{I} \Leftrightarrow \underline{\mathbf{u}}'(t) = \mathcal{X}^{-1}(t) \cdot \underline{\mathbf{b}}(t), t \in \mathbb{I}.$

Integrând,

$\underline{\mathbf{u}}(t) = \underline{\mathbf{u}}(t_0) + \int_{t_0}^{t} \mathcal{X}^{-1}(s) \cdot \underline{\mathbf{b}}(s)\, ds, t \in \mathbb{I}.$

Înlocuind în relaţia ce defineşte $\underline{\mathbf{x}}$, se obţine

$\underline{\mathbf{x}}(t) = \mathcal{X}(t) \cdot \left(\underline{\mathbf{u}}(t_0) + \int_{t_0}^{t} \mathcal{X}^{-1}(s) \cdot \underline{\mathbf{b}}(s)\right) ds, t \in \mathbb{I}.$

Înlocuind $(CI) : \underline{\mathbf{x}}(t) = \underline{\mathbf{x}}_0 \Rightarrow$

$\underline{\mathbf{x}}(t) = \mathcal{X}(t) \cdot \mathcal{X}^{-1}(t_0) \cdot \underline{\mathbf{x}}_0 + \mathcal{X}(t) \cdot \int_{t_0}^{t} \mathcal{X}^{-1}(s) \cdot \underline{\mathbf{b}}(s)\, ds, t \in \mathbb{I}.$

Teorema 4.1.6. Fie

$$\mathcal{X}(t; \underline{\mathbf{x}}_1, \underline{\mathbf{x}}_2, \ldots, \underline{\mathbf{x}}_n) = \begin{pmatrix} x_{1,1}(t) & x_{1,2}(t) & \ldots & x_{1,n}(t) \\ x_{2,1}(t) & x_{2,2}(t) & \ldots & x_{2,n}(t) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_{n,1}(t) & x_{n,2}(t) & \ldots & x_{n,n}(t) \end{pmatrix}$$

o matrice fundamentală a sistemului diferenţial omogen (2), cu soluţia generală a SO

$\underline{\mathbf{x}}_o(t; \underline{\mathbf{c}}) = c_1 \underline{\mathbf{x}}_1(t) + \ldots + c_n \underline{\mathbf{x}}_n(t), \forall t \in \mathbb{I}$ şi $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$.

Atunci o soluţie particulară $\underline{\mathbf{x}}_p(t)$ pe $\mathbb{I}$ a sistemului diferenţial neomogen (1) este de forma

$$\boxed{\underline{\mathbf{x}}_p(t) = u_1(t)\, \underline{\mathbf{x}}_1(t) + \ldots + u_n(t)\, \underline{\mathbf{x}}_n(t), \forall t \in \mathbb{I}.}$$

unde $u_i' : \mathbb{I} \to \mathbb{R}$, $i \in \{1, \ldots, n\}$, sunt funcţii-soluţii ale sistemului

$$\begin{cases} u_1'(t)\, x_{1,1}(t) + \ldots + u_n'(t)\, x_{1,n}(t) = b_1(t) \\ u_1'(t)\, x_{2,1}(t) + \ldots + u_n'(t)\, x_{2,n}(t) = b_2(t) \\ \ldots \\ u_1'(t)\, x_{n,1}(t) + \ldots + u_n'(t)\, x_{n,n}(t) = b_n(t). \end{cases}$$

Demonstraţie. Analog cu cea a Teoremei 4.1.5. Pentru calcul, se integrează rezultatele, se înlocuiesc expresiile lui u_i, $i \in \{1, \ldots, n\}$, şi se obţine $\underline{\mathbf{x}}_p$.

Exemplul 4.1.3. Se determină soluţia problemei Cauchy

$$\begin{cases} (SN) \begin{cases} x' = \dfrac{4}{t}x - \dfrac{4}{t^2}y + 1 \\ y' = 2x - \dfrac{1}{t}y + 2; \end{cases} \\ CI : x(1) = 1, y(1) = 1 \end{cases}$$

ştiind că SO ataşat admite soluţiile particulare

$\underline{\mathbf{x}}_1(t) = \varphi_1(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix}$ şi $\underline{\mathbf{x}}_2(t) = \varphi_2(t) = \begin{pmatrix} 2t^2 \\ t^3 \end{pmatrix}$.

Rezolvare : Sistemul $(SN) \begin{cases} x'(t) = \dfrac{4}{t}x(t) - \dfrac{4}{t^2}y(t) + 1 \\ y'(t) = 2x(t) - \dfrac{1}{t}y(t) + 2 \end{cases}$ $, t \in \mathbb{I}$-interval$, 0 \notin \mathbb{I},$

este sistem de $n = 2$ ecuaţii diferenţiale de ordin 1, liniare, cu coeficienţii variabili, daţi de

$A(t) = \begin{pmatrix} \frac{4}{t} & -\frac{4}{t^2} \\ 2 & -\frac{1}{t} \end{pmatrix}$, omogen, cu $\underline{\mathbf{b}}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, cu $n = 2$ necunoscute $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ =?

<u>modul 1.</u> Conform Exemplului 4.1.2 $\Rightarrow$

$\mathcal{X}(t; \underline{\mathbf{x}}_1, \underline{\mathbf{x}}_2) = \begin{pmatrix} x_1(t) & x_2(t) \\ y_1(t) & y_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2t^2 \\ t & t^3 \end{pmatrix}$ este o matrice fundamentală.

Deoarece

$W(t; \underline{\mathbf{x}}_1, \underline{\mathbf{x}}_2) = \begin{vmatrix} x_1(t) & x_2(t) \\ y_1(t) & y_2(t) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2t^2 \\ t & t^3 \end{vmatrix} = -t^3 \neq 0, \forall t \in \mathbb{I} \Rightarrow$

$\mathcal{X}(t; \underline{\mathbf{x}}_1, \underline{\mathbf{x}}_2)$ este inversabilă şi $\mathcal{X}^{-1}(t; \underline{\mathbf{x}}_1, \underline{\mathbf{x}}_2) = \begin{pmatrix} -1 & \frac{2}{t} \\ \frac{1}{t^2} & -\frac{1}{t^3} \end{pmatrix}$.

Atunci

$\underline{\mathbf{x}}(t) = \mathcal{X}(t) \cdot \mathcal{X}^{-1}(t_0) \cdot \underline{\mathbf{x}}_0 + \mathcal{X}(t) \cdot \int_{t_0}^{t} \mathcal{X}^{-1}(s) \cdot \underline{\mathbf{b}}(s)\, ds, t \in \mathbb{I} \overset{t_0=1\in\mathbb{I}=]0,\infty[}{\Rightarrow}$

$\underline{\mathbf{x}}(t) = \begin{pmatrix} 1 & 2t^2 \\ t & t^3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & \frac{2}{1} \\ \frac{1}{1^2} & -\frac{1}{1^3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2t^2 \\ t & t^3 \end{pmatrix} \cdot \int_1^t \begin{pmatrix} -1 & \frac{2}{s} \\ \frac{1}{s^2} & -\frac{1}{s^3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} ds =$

$= \begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2t^2 \\ t & t^3 \end{pmatrix} \int_1^t \begin{pmatrix} \frac{4}{s} - 1 \\ \frac{1}{s^2} - \frac{2}{s^3} \end{pmatrix} ds = \begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2t^2 \\ t & t^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4\ln t - t + 1 \\ -\frac{1}{t} + \frac{1}{t^2} \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} 2 + 4\ln t - 3t + 2 \\ 2t + 4t\ln t - 2t^2 + t \end{pmatrix}$.

<u>modul 2.</u>

<u>etapa 1.</u> Se ataşează şi se rezolvă SO.

$$(SO) \begin{cases} x'(t) = \frac{4}{t} x(t) - \frac{4}{t^2} y(t) \\ y'(t) = 2x(t) - \frac{1}{t} y(t) \end{cases}, t \in \mathbb{I}.$$

Conform Exemplului 4.1.2 $\Rightarrow B = (\underline{\mathbf{x}}_1, \underline{\mathbf{x}}_2)$ este un sistem fundamental de soluţii pentru SO.

Soluţia generală a sistemului SO este

$\begin{pmatrix} x_o(t; c_1, c_2) \\ y_o(t; c_1, c_2) \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 2t^2 \\ t^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \cdot 1 + c_2 \cdot 2t^2 \\ c_1 \cdot t + c_2 \cdot t^3 \end{pmatrix}, \forall t \in \mathbb{I}$ şi $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

<u>etapa 2.</u> Se determină $\begin{pmatrix} x_p(t) \\ y_p(t) \end{pmatrix}$ =? o soluţie particulară a SN, cu metoda variaţiei constantelor.

Se caută

$\begin{pmatrix} x_p(t) \\ y_p(t) \end{pmatrix} = u_1(t) \begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix} + u_2(t) \begin{pmatrix} 2t^2 \\ t^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1(t) \cdot 1 + u_2(t) \cdot 2t^2 \\ u_1(t) \cdot t + u_2(t) \cdot t^3 \end{pmatrix}$,

unde $u_i' : \mathbb{I} \to \mathbb{R}$, $i \in \{1, 2\}$, sunt soluţii ale sistemului

$$\begin{cases} u_1'(t) \cdot 1 + u_2'(t) \cdot 2t^2 = 1 \\ u_1'(t) \cdot t + u_2'(t) \cdot t^3 = 2 \end{cases}, t \in \mathbb{I}.$$

Se calculează

$W(t; \underline{\mathbf{x}}_1, \underline{\mathbf{x}}_2) = \begin{vmatrix} 1 & 2t^2 \\ t & t^3 \end{vmatrix} = -t^3 \neq 0, \forall t \in \mathbb{I}$.

$\Delta_1(t) = \begin{vmatrix} 1 & 2t^2 \\ 2 & t^3 \end{vmatrix} = t^3 - 4t^2, \forall t \in \mathbb{I}$.

$\Delta_2(t) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ t & 2 \end{vmatrix} = 2 - t, \forall t \in \mathbb{I}$.

Atunci, alegând $\mathbb{I} =]0, \infty[$ a.î. $t_0 = 1 \in \mathbb{I} \Rightarrow$

$$\left\{\begin{array}{l} u_1'(t)=\frac{\Delta_1(t)}{\Delta(t)}=\dfrac{t^3-4t^2}{-t^3},\\ u_2'(t)=\frac{\Delta_2(t)}{\Delta(t)}=\dfrac{2-t}{-t^3}.\end{array}\right. \quad \Bigg| \int(\cdot)\,dt \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} u_1(t)=4\ln t-t+k_1,\\ u_2(t)=-\frac{1}{t}+\frac{1}{t^2}+k_2.\end{array}\right.$$

Deoarece se caută o soluţie particulară $\underline{\mathbf{x}}_p$, se alege $k_1=0$, $k_2=0$. S-a obţinut

$$\begin{pmatrix} x_p(t)\\ y_p(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} (4\ln t-t)\cdot 1+\left(-\frac{1}{t}+\frac{1}{t^2}\right)\cdot 2t^2\\ (4\ln t-t)\cdot t+\left(-\frac{1}{t}+\frac{1}{t^2}\right)\cdot t^3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4\ln t-3t+2\\ 4t\ln t-2t^2+t\end{pmatrix},\forall t\in\mathbb{I}.$$

<u>etapa 3.</u> Soluţia generală a SN este

$$\begin{pmatrix} x(t;c_1,c_2)\\ y(t;c_1,c_2)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x_o(t;c_1,c_2)\\ y_o(t;c_1,c_2)\end{pmatrix}+\begin{pmatrix} x_p(t)\\ y_p(t)\end{pmatrix},\forall t\in\mathbb{I}.$$

$$\begin{pmatrix} x(t;c_1,c_2)\\ y(t;c_1,c_2)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} c_1\cdot 1+c_2\cdot 2t^2\\ c_1\cdot t+c_2\cdot t^3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 4\ln t-3t+2\\ 4t\ln t-2t^2+t\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} c_1\cdot 1+c_2\cdot 2t^2+4\ln t-3t+2\\ c_1\cdot t+c_2\cdot t^3+4t\ln t-2t^2+t\end{pmatrix},\forall t\in\mathbb{I}.$$

<u>Etapa 4</u> : Pentru a determina soluţia problemei Cauchy $((SN),CI)$, se impun asupra soluţiei găsite $\underline{\mathbf{x}}$ condiţiile iniţiale. Deoarece CI sunt date în $t_0=1$, pe $\mathbb{I}$ ales la etapa 2 $\Rightarrow$

$$\left\{\begin{array}{l} x(t)=c_1\cdot 1+c_2\cdot 2t^2+4\ln t-3t+2\\ y(t)=c_1\cdot t+c_2\cdot t^3+4t\ln t-2t^2+t\end{array}\right. \overset{CI:}{\Rightarrow} \left\{\begin{array}{l} t=1\\ x(1)=1\\ y(1)=1\end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} 1=c_1\cdot 1+c_2\cdot 2+4\cdot 0-3+2\\ 1=c_1\cdot 1+c_2\cdot 1+4\cdot 0-2+1\end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} c_1+2c_2=2\\ c_1+c_2=2\end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} c_1=2\\ c_2=0\end{array}\right.$$

Atunci

$$\left\{\begin{array}{l} x(t)=2+4\ln t-3t+2\\ y(t)=2t+4t\ln t-2t^2+t\end{array}\right.$$

este unica soluţie a sistemului SN ce verifică CI date.

Reprezentând grafic pe x şi y pe $\mathbb{I}=]0,\infty[$, apoi pe $\mathbb{I}=]0,\infty[$ pentru $(c_1,c_2)=(1,0)$ şi $(c_1,c_2)=(0,1)$ cu magenta (corespunzătoare soluţiilor particulare din sistemul fundamental) şi pentru

$(c_1,c_2)=(1,1),(c_1,c_2)=(1,-1),(c_1,c_2)=(-1,1),(c_1,c_2)=(-1,-1),$
$(c_1,c_2)=(1,2),(c_1,c_2)=(2,1),(c_1,c_2)=(-1,2),(c_1,c_2)=(-2,1)$
$(c_1,c_2)=(1,-2),(c_1,c_2)=(2,-1),(c_1,c_2)=(-1,-2),(c_1,c_2)=(-2,-1)$

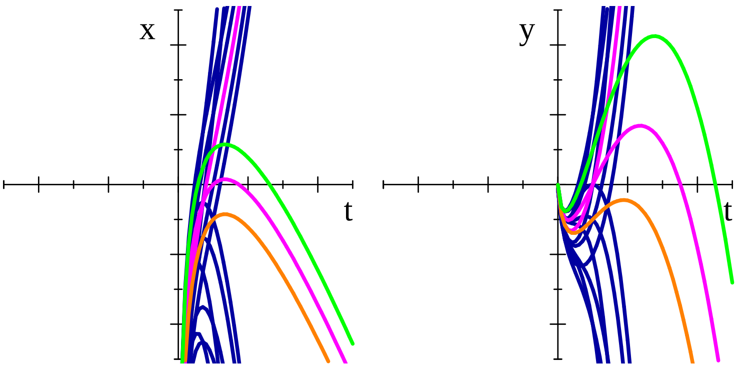
cu albastru, şi pentru

$(c_1,c_2)=(0,0),$

cu portocaliu (soluţia particulară a SN prin metoda variaţiei constantelor),şi pentru

$(c_1,c_2)=(2,0),$

cu verde (soluţia problemei Cauchy), se obţine:



Observaţia 4.1.3. a) Există metode de determinare pentru un sistem fundamental de soluţii ale sistemului omogen, adică a unei matrice fundamentale $\mathcal{X}(t)$, specifice sistemelor având coeficienţi constanţi.

b) Există şi alte metode de determinare pentru o soluţie particulară a sistemului neomogen, $\underline{\mathbf{x}}_p$, atunci când se cunoaşte un sistem fundamental de soluţii pentru sistemul omogen. Metoda coeficienţilor nedeterminaţi presupune ca sistemele să aibă coeficienţi constanţi.