CURS NR. 8
EDCO, AIA

4.2. Sisteme de n ecuaţii diferenţiale de ordinul 1, liniare, având coeficienţi constanţi

În cursul anterior s-a studiat deja circuitul RLC serie din perspectiva rezolvării un sistem de ecuaţii diferenţiale liniare cu coeficienţi constanţi, prin metoda eliminării, cu interpretări legate de un sistem fundamental de soluţii. În continuare se va pune în evidenţă o rezolvare directă, cu determinare directă de sistem fundamental de soluţii/ matrice fundamentală pentru un sistem de ecuaţii diferenţiale de ordinul 1, liniare, având coeficienţi constanţi, omogen, apoi a soluţiei generale pentru unul neomogen. Se vor folosi valorile proprii ataşate matricei sistemului.

Forma generală a unui sistem de n ecuaţii diferenţiale de ordinul 1, liniare, neomogen/omogen, având coeficienţi constanţi, sub formă normală:

$$\boxed{\begin{cases} x_1'(t) = a_{11}x_1(t) + a_{12}x_2(t) + ... + a_{1n}x_n(t) + b_1(t) \\ x_2'(t) = a_{21}x_1(t) + a_{22}x_2(t) + ... + a_{2n}x_n(t) + b_2(t) \\ \vdots \\ x_n'(t) = a_{n1}x_1(t) + a_{n2}x_2(t) + ... + a_{nn}x_n(t) + b_n(t) \end{cases}, t \in \mathbb{I}} \tag{1}$$

unde $\mathbb{I} \subseteq \mathbb{R}$ este un interval nevid deschis, $a_{ij} \in \mathbb{R}$, $i, j \in \{1, ..., n\}$, sunt numere reale numite *coeficienţi constanţi*, iar $b_i : \mathbb{I} \to \mathbb{R}, i \in \{1, ..., n\}$, sunt funcţii continue numite *termeni liberi.* Dacă $b_i : \mathbb{I} \to \mathbb{R}$ sunt funcţii identic nule $\forall i \in \{1, ..., n\}$, atunci (1) se numeşte sistem *omogen SO*; dacă $\exists i \in \{1, ..., n\}$ a.î. $b_i : \mathbb{I} \to \mathbb{R}$ este funcţie neidentic nulă, atunci (1) se numeşte sistem *neomogen SN*. Funcţiile $x_j : \mathbb{I} \to \mathbb{R}, j \in \{1, ..., n\}$ sunt funcţiile *necunoscute* ale sistemului. O funcţie $\underline{\mathbf{x}} : \mathbb{I} \to \mathcal{M}_{n\times1}(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^n$, $\underline{\mathbf{x}}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ ... \\ x_n(t) \end{pmatrix} \simeq (x_1(t), ..., x_n(t))$ de clasă $\mathcal{C}^1$ ce verifică (1) se numeşte *soluţie* pentru sistem.

Introducând notaţiile $\underline{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{b}} : \mathbb{I} \to \mathcal{M}_{n\times1}(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^n$,

$$\underline{\mathbf{x}}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ ... \\ x_n(t) \end{pmatrix}, \underline{\mathbf{b}}(t) = \begin{pmatrix} b_1(t) \\ b_2(t) \\ ... \\ b_n(t) \end{pmatrix} \text{ şi } A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{pmatrix},$$

sistemul devine ecuaţia diferenţială de ordinul 1 liniară, vectorială

$$\underline{\mathbf{x}}'(t) = A \cdot \underline{\mathbf{x}}(t) + \underline{\mathbf{b}}(t), t \in \mathbb{I}. \tag{1'}$$

Problema Cauchy asociată unui sistem de ecuaţii diferenţiale de ordinul 1 liniare neomogen/omogen, cu coeficienţi constanţii, sub formă normală cu datele $\mathcal{D} = (\mathbb{I}, \underline{\mathbf{b}}, t_0, \underline{\mathbf{x}}_0)$, unde $\underline{\mathbf{x}}_0 = \begin{pmatrix} x_{1,0} \\ x_{2,0} \\ ... \\ x_{n,0} \end{pmatrix}$, constă în determinarea unei funcţii $\underline{\mathbf{x}} : \mathbb{I} \to \mathcal{M}_{n\times1}(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^n$ de clasă $\mathcal{C}^1$, unde $\mathbb{I} \subseteq \mathbb{R}$ este un interval nevid deschis, $t_0 \in \mathbb{I}, x_{i,0} \in \mathbb{R}$, $i = \overline{1, n}$ pentru care

$$\mathcal{PC}(\mathcal{D}): \begin{cases} (1') \ \underline{\mathbf{x}}'(t) = A \cdot \underline{\mathbf{x}}(t) + \underline{\mathbf{b}}(t), t \in \mathbb{I} \Leftrightarrow (1) \ldots \\ (CI) \ \underline{\mathbf{x}}(t_0) = \underline{\mathbf{x}}_0 \Leftrightarrow x_1(t_0) = x_{1,0}, x_2(t_0) = x_{2,0}, \ldots, x_n(t_0) = x_{n,0}. \end{cases}$$

Funcţia $\underline{\mathbf{x}}$ se numeşte *soluţie a problemei Cauchy* $\mathcal{PC}(\mathcal{D})$.
De menţionat că soluţia, dacă există, este unică şi este definită pe tot $\mathbb{I}$, este *saturată.*

Exemplul 4.2.1. Studiul circuitului RLC din exemplul 4.1.1. a condus la sistemul de ecuaţii diferenţiale liniare având coeficienţi constanţi, omogen:

$$(SO) \begin{cases} x'(t) = \qquad\qquad \dfrac{1}{C} \cdot y(t) \\ y'(t) = \dfrac{-1}{L} \cdot x(t) + \dfrac{-R}{L} \cdot y(t) \end{cases},$$

unde $u_C = x$ este tensiunea la bornele condensatorului care se descarcă şi $i_L = y$ este intensitatea la bornele bobinei. Rezolvarea matematică a lui, fără interpretare fizică, s-a făcut prin metoda eliminării.

Observaţia 4.2.1. Notaţiile, definiţiile şi rezultatele din Secţiunea 4.1, enunţate pentru sisteme diferenţiale liniare având coeficienţi variabili se păstrează şi pentru sisteme diferenţiale liniare având coeficienţi constanţi.

*__REZOLVAREA SISTEMULUI DIFERENŢIAL OMOGEN__ SO

Euristica 4.2.1. a) Se propune determinarea soluţiei generale pe $\mathbb{I}$, chiar pe $\mathbb{R}$, a sistemului omogen SO ataşat sistemului neomogen SN (1), anume

$$\boxed{\begin{cases} x_1'(t) = a_{11}x_1(t) + a_{12}x_2(t) + \ldots + a_{1n}x_n(t) \\ x_2'(t) = a_{21}x_1(t) + a_{22}x_2(t) + \ldots + a_{2n}x_n(t) \\ \vdots \\ x_n'(t) = a_{n1}x_1(t) + a_{n2}x_2(t) + \ldots + a_{nn}x_n(t) \end{cases}, t \in \mathbb{I}, \text{ chiar } t \in \mathbb{R}} \tag{2}$$

cu forma vectorială

$$\underline{\mathbf{x}}'(t) = A \cdot \underline{\mathbf{x}}(t), t \in \mathbb{I}. \tag{2'}$$

Din Secţiunea 4.1. se ştie că, dacă se cunoaşte o matrice fundamentală a SO, $\mathcal{X}(t; \underline{\mathbf{x}}_1, \underline{\mathbf{x}}_2, \ldots, \underline{\mathbf{x}}_n)$, atunci sistemul SO are soluţia generală

$$\boxed{\underline{\mathbf{x}}_o(t; c_1, \ldots, c_n) = c_1\underline{\mathbf{x}}_1(t) + \ldots + c_n\underline{\mathbf{x}}_n(t), \forall t \in \mathbb{I} \text{ şi } c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R},}$$

•Fie sistemul SO, cu $n = 1$, adică o ecuaţie diferenţială liniară de ordinul 1, omogenă

$$x'(t) = a_{11}x(t),\ t \in \mathbb{R},$$

a cărei soluţie generală este

$$x_o(t; c) = ce^{ta} = x(0) \cdot e^{ta},\ t \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{R}\ (a_{11} = a).$$

Se ştie că

$$e^{ta} = 1 + \frac{1}{1!}(ta) + \frac{1}{2!}(ta)^2 + \ldots + \frac{1}{k!}(ta)^k + \ldots =$$
$$= 1 + \frac{t}{1!}a + \frac{t^2}{2!}a^2 + \ldots + \frac{t^k}{k!}a^k + \ldots, t \in \mathbb{R},$$

(seria de numere este uniform convergentă pentru t din orice mulţime compactă din $\mathbb{R}$).

•Fie sistemul SO, cu $n \geq 2$:

$$\underline{\mathbf{x}}'(t) = A \cdot \underline{\mathbf{x}}(t), t \in \mathbb{I}, \text{ chiar } t \in \mathbb{R},$$

pentru care se observă că *orice soluţie a SO* (2) *este de o infinitate de ori derivabilă,* deoarece

$$\underline{\mathbf{x}}''(t) = A \cdot \underline{\mathbf{x}}'(t) = A \cdot A \cdot \underline{\mathbf{x}}(t) = A^2 \cdot \underline{\mathbf{x}}(t), t \in \mathbb{R}.$$
$$\underline{\mathbf{x}}'''(t) = A \cdot \underline{\mathbf{x}}''(t) = A^3 \cdot \underline{\mathbf{x}}(t), t \in \mathbb{R}.$$

...

$\underline{\mathbf{x}}^{(k)}(t) = A \cdot \underline{\mathbf{x}}^{(k-1)}(t) = ... = A^k \cdot \underline{\mathbf{x}}(t), t \in \mathbb{R}, \forall k \in \mathbb{N}.$

Fără a restrânge generalitatea, se presupune că $\underline{0 \in \mathbb{I}}$.

•Există o justificare ce implică seria Taylor ataşată unei soluţii vectoriale $\underline{\mathbf{x}}$ pentru SO (2)

$$\underline{\mathbf{x}}(t) = \underline{\mathbf{x}}(0) + \frac{t}{1!}\underline{\mathbf{x}}'(0) + \frac{t^2}{2!}\underline{\mathbf{x}}''(0) + \cdots + \frac{t^{k-1}}{(k-1)!}\underline{\mathbf{x}}^{(k-1)}(0) + \frac{t^k}{k!}\underline{\mathbf{x}}^{(k)}(0) + ... =$$
$$= \underline{\mathbf{x}}(0) + \frac{t}{1!}A\underline{\mathbf{x}}(0) + \frac{t^2}{2!}A^2\underline{\mathbf{x}}(0) + \cdots + \frac{t^{k-1}}{(k-1)!}A^{k-1}\underline{\mathbf{x}}(0) + \frac{t^k}{k!}A^k\underline{\mathbf{x}}(0) + ... =$$
$$= \left(I_n + \frac{t}{1!}A + \frac{t^2}{2!}A^2 + \cdots + \frac{t^{k-1}}{(k-1)!}A^{k-1} + \frac{t^k}{k!}A^k + ...\right)\underline{\mathbf{x}}(0),$$

diagonalizare / jordanizare de matrice, definiţia funcţiei exponenţiale în complex

$$e^{zt} = e^{xt}(\cos yt + i \sin yt), \forall z = x + iy \in \mathbb{C}, t \in \mathbb{R},$$

definiţia funcţiei exponenţiale de matrice

$$e^{tA} = I_n + \frac{1}{1!}(tA) + \frac{1}{2!}(tA)^2 + ... + \frac{1}{k!}(tA)^k + ... =$$
$$= I_n + \frac{t}{1!}A + \frac{t^2}{2!}A^2 + ... + \frac{t^k}{k!}A^k + ..., t \in \mathbb{R}$$

(seria de matrice este uniform convergentă pentru t din mulţimi compacte din $\mathbb{R}$, în sensul normei

$$\|A\|_\infty = \sup_{\|\underline{\mathbf{x}}\|=1} \|A\underline{\mathbf{x}}\|),$$

pe baza căreia o matrice fundamentală pentru SO (2) se poate căuta sub forma

$$\boxed{\mathcal{X}(t) = e^{tA}, t \in \mathbb{R},}$$

adică soluţia generală a SO este

$$\underline{\mathbf{x}}(t; \underline{\mathbf{c}}) = e^{tA} \cdot \underline{\mathbf{c}} = e^{tA} \cdot \underline{\mathbf{x}}(0), t \in \mathbb{R}, \underline{\mathbf{c}} \in \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^n$$

O demonstraţie este prezentată în Bibliografie [Corduneanu, Pletea].

Definiţia 4.2.1. Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ o matrice pătratică de ordin n. Se numeşte *funcţie exponenţială de matrice* A seria

$$\boxed{e^A = I_n + \frac{1}{1!}A + \frac{1}{2!}A^2 + ... + \frac{1}{k!}A^k + ...,}$$

privită ca o serie de n^2 numere reale, atunci când este convergentă. (se poate demonstra că definiţia este consistentă, seria este C).

Propoziţia 4.2.1. Dacă $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ a.î. $AB = BA$, atunci $\boxed{e^{A+B} = e^A \cdot e^B.}$

○*Demonstraţie.* Fie

$$e^A = I_n + \frac{1}{1!}A + \frac{1}{2!}A^2 + ... + \frac{1}{k!}A^k + ...$$
$$e^B = I_n + \frac{1}{1!}B + \frac{1}{2!}B^2 + ... + \frac{1}{k!}B^k + ...$$

Folosind seria produs în sens Cauchy şi $AB = BA$, se obţine:

$$e^A \cdot e^B = \left(I_n + \frac{1}{1!}A + \frac{1}{2!}A^2 + ... + \frac{1}{k!}A^k + ...\right) \cdot \left(I_n + \frac{1}{1!}B + \frac{1}{2!}B^2 + ... + \frac{1}{k!}B^k + ...\right) =$$
$$= I_n + \frac{1}{1!}(A + B) + \frac{1}{2!}\left(A^2 + 2AB + B^2\right) + ... =$$
$$= I_n + \frac{1}{1!}(A + B) + \frac{1}{2!}(A + B)^2 + ... + \frac{1}{k!}(A + B)^k + ... = e^{A+B}.$$

Propoziţia 4.2.2. Dacă $\theta_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ este matricea nulă, atunci $\boxed{e^{\theta_n} = I_n.}$

○*Demonstraţie.*

$$e^{\theta_n} = I_n + \frac{1}{1!}\theta_n + \frac{1}{2!}\theta_n^2 + ... + \frac{1}{k!}\theta_n^k + ... = I_n + \theta_n = I_n.$$

Propoziţia 4.2.3. Dacă $I_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ este matricea unitate, atunci $\boxed{e^{I_n} = eI_n.}$

○*Demonstraţie.*

$$e^{I_n} = I_n + \frac{1}{1!}I_n + \frac{1}{2!}I_n^2 + ... + \frac{1}{k!}I_n^k + ... = \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + ... + \frac{1}{k!} + ...\right) I_n = eI_n.$$

Propoziţia 4.2.4. Dacă $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, atunci $\boxed{\left(e^A\right)^{-1} = e^{-A}.}$

○*Demonstraţie.* Deoarece $A \cdot (-A) = (-A) \cdot A$, atunci

$e^A \cdot e^{-A} = e^{A+(-A)} = e^{\theta_n} = I_n$ şi $e^{-A} \cdot e^A = e^{-A+A} = e^{\theta_n} = I_n$

Deci e^A este inversabilă şi $\left(e^A\right)^{-1} = e^{-A}$.

Algoritmul 4.2.1. de calcul pentru matricea e^A.

Cazul 1. Dacă A este matrice diagonală de ordin n

$$A = D_n = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & \lambda_2 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & \lambda_n \end{pmatrix}, \text{ atunci } D_n^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & 0 & ... & 0 \\ 0 & \lambda_2^k & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & \lambda_n^k \end{pmatrix} \text{ şi}$$

$$e^{D_n} = I_n + \frac{1}{1!}D_n + \frac{1}{2!}D_n^2 + ... + \frac{1}{k!}D_n^k + ... =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 + \frac{1}{1!}\lambda_1 + ... + \frac{1}{k!}\lambda_1^k + ... & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1 + \frac{1}{1!}\lambda_2 + ... + \frac{1}{k!}\lambda_2^k + ... & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 1 + \frac{1}{1!}\lambda_n + ... + \frac{1}{k!}\lambda_n^k + ... \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\boxed{e^{D_n} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & 0 & ... & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2} & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & e^{\lambda_n} \end{pmatrix}.}$$

De menţionat că dacă λ_1 apare pe diagonala matricei D_n de m_1 ori, adică apare o celulă diagonală de ordin m_1 cu λ_1 pe diagonală, atunci pe diagonala matricei e^{D_n} apare o celulă diagonală corespunzătoare de ordin m_1 cu e^{λ_1} pe diagonală.

○**Cazul 2.** Dacă A este celulă Jordan de ordin n

$$A = J_n = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & ... & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & ... & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & ... & 0 & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & ... & 0 & \lambda \end{pmatrix} = \lambda I_n + N_n,$$

unde $N_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & ... & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & ... & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 \end{pmatrix}, N_n^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & ... & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 \end{pmatrix}, ..., N_n^n = \theta_n,$

adică N_n este o matrice nilpotentă de ordin n, atunci

$$e^{J_n} = e^{\lambda I_n + N_n} = e^{\lambda I_n} \cdot e^{N_n} = e^{\lambda I_n} \cdot \left(I_n + \frac{1}{1!}N_n + \frac{1}{2!}N_n^2 + ... + \frac{1}{n!}N_n^n\right) \Rightarrow$$

$$\boxed{e^{J_n} = e^{\lambda}\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{1!} & \frac{1}{2!} & ... & 0 & \frac{1}{(n-1)!} \\ 0 & 1 & \frac{1}{1!} & ... & 0 & \frac{1}{(n-2)!} \\ 0 & 0 & 1 & ... & 0 & \frac{1}{(n-3)!} \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... & 1 & \frac{1}{1!} \\ 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 1 \end{pmatrix}}.$$

○**<u>Cazul 3.</u>** Dacă A este o matrice Jordan de ordin n, formată din s celule Jordan

$$A = J_n = \begin{pmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_s \end{pmatrix} \text{ atunci } \boxed{e^J = \begin{pmatrix} e^{J_1} & & & \\ & e^{J_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & e^{J_s} \end{pmatrix}}.$$

Propoziţia 4.2.5. Dacă $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sunt matrice asemenea, adică $\exists C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ inversabilă, cu

$B = C^{-1}AC$ ($\Leftrightarrow A = CBC^{-1}$), atunci $e^B = C^{-1}e^AC$ ($\Leftrightarrow e^A = Ce^BC^{-1}$)

○*Demonstraţie.* $B^2 = C^{-1}A^2C, ..., B^k = C^{-1}A^kC, ...$ şi, în ipoteze de convergenţă,

$$e^B = I_n + \frac{1}{1!}B + \frac{1}{2!}B^2 + ... + \frac{1}{k!}B^k + ... =$$
$$= I_n + \frac{1}{1!}\left(C^{-1}AC\right) + \frac{1}{2!}\left(C^{-1}A^2C\right) + ... + \frac{1}{k!}\left(C^{-1}A^kC\right) + ... =$$
$$= C^{-1}\left(I_n + \frac{1}{1!}A + \frac{1}{2!}A^2 + ... + \frac{1}{k!}A^k + ...\right)C = C^{-1}e^AC.$$

Propoziţia 4.2.6. **a)** Dacă $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ este matrice diagonalizabilă, adică $\exists P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ inversabilă, matrice modală (cu vectori proprii ai A pe coloane), cu

$D = P^{-1}AP$ ($\Leftrightarrow A = PDP^{-1}$), atunci $e^D = P^{-1}e^AP$ ($\Leftrightarrow \boxed{e^A = Pe^DP^{-1}}$).

○**b)** Dacă $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ este matrice cvasidiagonalizabilă (poate fi adusă la o formă Jordan), adică $\exists P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ inversabilă, matrice modală (cu vectori proprii ai A pe coloane), cu

$J = P^{-1}AP$ ($\Leftrightarrow A = PJP^{-1}$), atunci $e^J = P^{-1}e^AC$ ($\Leftrightarrow \boxed{e^A = Pe^JP^{-1}}$).

Demonstraţie. Din Propoziţia 4.2.5.

Observaţia 4.2.2. Se poate defini *funcţia exponenţială de matricea* tA, e^{tA} ca în Euristica 4.2.1., a), ca serie uniform convergentă pentru t din mulţimi compacte din $\mathbb{R}$:

$$\boxed{e^{tA} = I_n + \frac{t}{1!}A + \frac{t^2}{2!}A^2 + ... + \frac{t^k}{k!}A^k + ..., \ t \in \mathbb{R}}$$

A se vedea Bibliografie [Pletea]. Mai mult, calculul se face analog:

a) Dacă $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ este matrice diagonalizabilă, adică $\exists P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ inversabilă, matrice modală (cu vectori proprii ai A pe coloane), cu

$$A = PDP^{-1}, \text{ atunci } \boxed{e^{tA} = Pe^{tD}P^{-1}, \text{ unde } e^{tD_n} = \begin{pmatrix} e^{t\lambda_1} & 0 & ... & 0 \\ 0 & e^{t\lambda_2} & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & e^{t\lambda_n} \end{pmatrix}}$$

De menţionat că dacă λ_1 apare pe diagonala matricei D de m_1 ori, adică apare o celulă diagonală de ordin $m_1 = m(\lambda_1)$ cu λ_1 pe diagonală, atunci pe diagonala matricei e^{tD_n} apare o celulă diagonală

corespunzătoare de ordin m_1 cu $e^{t\lambda_1}$ pe diagonală.
○**b)** Dacă $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ este matrice cvasidiagonalizabilă (poate fi adusă la o formă Jordan), adică $\exists P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ inversabilă, matrice modală (cu vectori proprii ai A pe coloane), cu
$A = PJP^{-1}$, atunci

$$\boxed{e^{tA} = Pe^{tJ}P^{-1}, \text{ unde } e^{tJ_n} = e^{t\lambda}\begin{pmatrix} 1 & \frac{t}{1!} & \frac{t^2}{2!} & \dots & 0 & \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \\ 0 & 1 & \frac{t}{1!} & \dots & 0 & \frac{t^{n-2}}{(n-2)!} \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & \frac{t^{n-3}}{(n-3)!} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & \frac{t}{1!} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}, e^{tJ} = \begin{pmatrix} e^{tJ_1} & & & \\ & e^{tJ_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & e^{tJ_s} \end{pmatrix}.}$$

Propoziţia 4.2.7. Dacă $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, atunci seria

$$I_n + \frac{t}{1!}A + \frac{t^2}{2!}A^2 + \dots + \frac{t^k}{k!}A^k + \dots$$

este uniform convergentă pentru t din orice interval compact din $\mathbb{R}$. În plus, suma ei, notată e^{tA}, este funcţie matriceală derivabilă pe $\mathbb{R}$ şi are loc $\boxed{\frac{d}{dt}\left(e^{tA}\right) = A \cdot e^{tA} = e^{tA} \cdot A.}$

Demonstraţie. Se folosesc $\boxed{\frac{d}{dt}(I_n) = \theta_n; \frac{d}{dt}\left(\frac{t^k}{k!}A^k\right) = A \cdot \frac{t^{k-1}}{(k-1)!}A^{k-1}.}$
A se vedea Bibliografie [Pletea].

Teorema 4.2.1.Fie sistemul diferenţial omogen SO (2). Atunci matrice e^{tA} este o matrice fundamentală a sistemului şi soluţia generală este

$$\boxed{\underline{\mathbf{x}}_o(t; \underline{\mathbf{c}}) = e^{tA} \cdot \underline{\mathbf{c}}, \forall t \in \mathbb{I}, \underline{\mathbf{c}} \in \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^n.}$$

(o combinaţie liniară de coloanele matricei e^{tA}).

Exemplul 4.2.2. Să se rezolve

$$\begin{cases} x' = \quad\ \ y + z \\ y' = x \quad\ \ + z \\ z' = x + y; \end{cases}$$

Rezolvare: Sistemul $(SO)\begin{cases} x'(t) = \qquad\ y(t) + z(t) \\ y'(t) = x(t) \qquad\ + z(t) \\ z'(t) = x(t) + y(t) \end{cases}, t \in \mathbb{R},$

este sistem de $n = 3$ ecuaţii diferenţiale de ordin 1, liniare, cu coeficienţii constanţi, daţi de

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \text{omogen, cu } \underline{\mathbf{b}}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ cu } n = 3 \text{ necunoscute } \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = ?$$

<u>**Metoda eliminării**</u>- greoaie pentru $n \geq 3$; a se vedea la seminar, Exerciţiul 2 din Seminarul 7; se foloseşte mai ales pentru $n = 2$.

<u>**Metoda cu valori proprii**</u>

<u>Pasul 1</u> Se ataşează ecuaţia caracteristică a matricei A şi se rezolvă. Adică se determină valorile proprii în $\mathbb{C}$ ale matricei A, precum şi multiplicitatea lor algebrică.
•Se determină polinomul caracteristic al matricei $A, P_A(\lambda)$.

$$\boxed{P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_3)} = \begin{vmatrix} 0-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 0-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 0-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 3\lambda + 2 \text{ sau}$$

$\boxed{P_A(\lambda) = (-1)^3 \left(\lambda^3 - \delta_1\lambda^2 + \delta_2\lambda - \delta_3\right)}$, unde δ_i este suma minorilor principali de ordin i ai matricei A, adică

$\boxed{\delta_1 = \operatorname{Tr} A} = 0 + 0 + 0 = 0;$

$$\delta_2 = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}_{1,2} + \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}_{1,3} + \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}_{2,3} = -3;$$

$$\boxed{\delta_3 = \det A} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2.$$

$P_A(\lambda) = -\left(\lambda^3 - 0\lambda^2 + (-3)\lambda - 2\right).$

•Se rezolvă ecuaţia caracteristică a matricei A,

$$P_A(\lambda) = 0 \Leftrightarrow -(\lambda+1)^2(\lambda-2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = -1 \in \mathbb{R} \text{ cu } m(\lambda_1) = 2; \\ \lambda_2 = 2 \in \mathbb{R} \text{ cu } m(\lambda_2) = 1. \end{cases}$$

Se observă că toate rădăcinile caracteristice sunt din $\mathbb{R}$, adică sunt valori proprii ale matricei A în $\mathbb{R}$.

Spectrul matricei A este $\sigma(A) = \{-1, 2\}$.

Raza spectrală a matricei A este $\rho(A) = \max\{|-1|, |2|\} = 2$.

<u>Pasul 2.</u> Se determină un sitem fundamental de soluţii ale SO / o matrice fundamentală a SO.

$\boxed{\text{modul 1.}}$- aplicabil dacă $A \sim D$ în $\mathbb{R}$. Se determină subspaţiile proprii ale matricei A, precum şi dimensiunile lor.

$\underline{|\lambda_1 = -1|}$ Se caută vectorii proprii corespunzători valorii proprii $\lambda_1 = -1$, adică

$$\underline{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times1}(\mathbb{R}),\ \underline{\mathbf{x}} \neq \underline{\boldsymbol{\theta}}_{\mathcal{M}_{3\times1}(\mathbb{R})} \text{ a.î.} (A - (-1) I_3)\,\underline{\mathbf{x}} = \underline{\boldsymbol{\theta}}_{\mathcal{M}_{3\times1}(\mathbb{R})}, \text{ adică}$$

$$\begin{cases} (0+1)x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + (0+1)x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + (0+1)x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -\alpha - \beta \\ x_2 = \alpha \in \mathbb{R} \\ x_3 = \beta \in \mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow$$

$$S_{\lambda_1}(A) = \{\underline{\mathbf{x}} \in \mathcal{M}_{3\times1}(\mathbb{R})\,; \underline{\mathbf{x}} \text{ este vect. propriu. pt. } A \text{ coresp. val. proprii } \lambda_1 = -1\} \cup \left\{\underline{\boldsymbol{\theta}}_{\mathcal{M}_{3\times1}(\mathbb{R})}\right\} =$$

$$= \left\{ \underline{\mathbf{x}} \in \mathcal{M}_{3\times1}(\mathbb{R})\,; \underline{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} -\alpha-\beta \\ \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \alpha \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\mathbf{u}_1^1 = \mathbf{v}_1} + \beta \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\mathbf{u}_2^1 = \mathbf{v}_2}, \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\} =$$

$= \left[\left(\mathbf{u}_1^1, \mathbf{u}_2^1\right)\right] \Rightarrow \dim_{\mathbb{R}} S_{\lambda_1}(A) = 2 = m(\lambda_1).$

$\underline{|\lambda_2 = 2|}$ Se caută vectorii proprii corespunzători valorii proprii $\lambda_2 = 2$, adică

$$\underline{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times1}(\mathbb{R}),\ \underline{\mathbf{x}} \neq \underline{\boldsymbol{\theta}}_{\mathcal{M}_{3\times1}(\mathbb{R})} \text{ a.î.} (A - 2I_3)\,\underline{\mathbf{x}} = \underline{\boldsymbol{\theta}}_{\mathcal{M}_{3\times1}(\mathbb{R})}, \text{ adică}$$

$$\begin{cases} (0-2)x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + (0-2)x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + (0-2)x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \gamma \\ x_2 = \gamma \\ x_3 = \gamma \in \mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow$$

$S_{\lambda_2}(A) = \{\underline{\mathbf{x}} \in \mathcal{M}_{3\times 1}(\mathbb{R})\,; \underline{\mathbf{x}}$ este vect. propriu. pt. A coresp. val. proprii $\lambda_2 = 2\} \cup \left\{\underline{\boldsymbol{\theta}}_{\mathcal{M}_{3\times 1}(\mathbb{R})}\right\} =$

$$= \left\{ \underline{\mathbf{x}} \in \mathcal{M}_{3\times 1}(\mathbb{R})\,; \underline{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \gamma \\ \gamma \\ \gamma \end{pmatrix} = \gamma \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\mathbf{u}_1^2 = \mathbf{v}_3}, \gamma \in \mathbb{R} \right\} =$$

$= \left[\left(\mathbf{u}_1^2\right)\right] \Rightarrow \dim_{\mathbb{R}} S_{\lambda_2}(A) = 1 = m(\lambda_2)\,.$

Cum toate rădăcinile caracteristice ale matricei A sunt din $\mathbb{R}$ (sunt valori proprii) si cum multiplicităţile geometrice (dimensiunile subspaţiilor proprii) coincid cu multiplicităţile algebrice ale valorilor proprii, atunci, conform teoremei Jordan, matricea A este diagonalizabilă în $\mathbb{R}$, adică $\exists D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ matrice diagonală şi $\exists P = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ matrice modală, astfel încât $A \sim D$, adică $A = P \cdot D \cdot P^{-1}$ sau $D = P^{-1} \cdot A \cdot P$. Se precizează că matricea modală P este formată din coloanele vectorilor proprii, baze în $S_{\lambda_1}(A)$ respectiv $S_{\lambda_2}(A)$. Mai mult, matricea modală P este nesingulară, deoarece respectivii vectori proprii formează o bază în $\mathcal{M}_{3\times 1}(\mathbb{R})$, cu $P =_C A_S$.

<u>modul 1.1.</u> Deoarece A este diagonalizabilă,

$$\bullet \lambda_1 = -1,\ m(\lambda_1) = 2 \rightsquigarrow \underline{\mathbf{x}}_1(t) \overset{\text{not.}}{=} \varphi_1(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ y_1(t) \\ z_1(t) \end{pmatrix} = e^{-t} \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\mathbf{v}_1} = \begin{pmatrix} -e^{-t} \\ e^{-t} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\underline{\mathbf{x}}_2(t) \overset{\text{not.}}{=} \varphi_2(t) = \begin{pmatrix} x_2(t) \\ y_2(t) \\ z_2(t) \end{pmatrix} = e^{-t} \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\mathbf{v}_2} = \begin{pmatrix} -e^{-t} \\ 0 \\ e^{-t} \end{pmatrix}.$$

$$\bullet \lambda_2 = 2,\ m(\lambda_2) = 1 \rightsquigarrow \underline{\mathbf{x}}_3(t) \overset{\text{not.}}{=} \varphi_3(t) = \begin{pmatrix} x_3(t) \\ y_3(t) \\ z_3(t) \end{pmatrix} = e^{2t} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\mathbf{v}_3} = \begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}.$$

<u>modul 1.2.</u> O matrice fundamentală este

-sau $\mathcal{X}(t) = \mathcal{X}(t; \underline{\mathbf{x}}_1, \underline{\mathbf{x}}_2, \underline{\mathbf{x}}_3) = \begin{pmatrix} -e^{-t} & -e^{-t} & e^{2t} \\ e^{-t} & 0 & e^{2t} \\ 0 & e^{-t} & e^{2t} \end{pmatrix}.$

-sau $\mathcal{X}(t) = e^{tA} = Pe^{tD}P^{-1} =$

$$= \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} =$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{2}{3}e^{-t} + \frac{1}{3}e^{2t} & \frac{1}{3}e^{2t} - \frac{1}{3}e^{-t} & \frac{1}{3}e^{2t} - \frac{1}{3}e^{-t} \\ \frac{1}{3}e^{2t} - \frac{1}{3}e^{-t} & \frac{2}{3}e^{-t} + \frac{1}{3}e^{2t} & \frac{1}{3}e^{2t} - \frac{1}{3}e^{-t} \\ \frac{1}{3}e^{2t} - \frac{1}{3}e^{-t} & \frac{1}{3}e^{2t} - \frac{1}{3}e^{-t} & \frac{2}{3}e^{-t} + \frac{1}{3}e^{2t} \end{pmatrix}.$$

$\boxed{\text{modul 2.}}$ (aici nu se justifică, deoarece $A \sim D$ în $\mathbb{R}$ şi apar siteme algebrice liniare omogene de ordin mare) Pe baza teoriei de la ecuaţii diferenţiale de ordin 3, liniare omogene, se caută $n = 3$ soluţii particulare liniar independente ale (SO):
$\bullet\lambda_1 = -1 \in \mathbb{R}$ cu $m(\lambda_1) = 2 \rightsquigarrow$se caută două soluţii particulare l.i. ale SO de forma

$$\varphi(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1e^{-t} + a_2te^{-t} \\ a_3e^{-t} + a_4te^{-t} \\ a_5e^{-t} + a_6te^{-t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (a_1 + ta_2)e^{-t} \\ (a_3 + ta_4)e^{-t} \\ (a_5 + ta_6)e^{-t} \end{pmatrix}.$$

Se determină numerele $a_1, ..., a_6$, impunând ca x, y, z să verifice (SO) :

$$\begin{cases} a_2e^{-t} + (a_1 + ta_2)e^{-t}(-1) = (a_3 + ta_4)e^{-t} + (a_5 + ta_6)e^{-t} \\ a_4e^{-t} + (a_3 + ta_4)e^{-t}(-1) = (a_1 + ta_2)e^{-t} + (a_5 + ta_6)e^{-t} \\ a_6e^{-t} + (a_5 + ta_6)e^{-t}(-1) = (a_1 + ta_2)e^{-t} + (a_3 + ta_4)e^{-t} \end{cases}, t \in \mathbb{R},$$

Se împarte fiecare ecuaţie prin e^{-t} şi se identifică coeficienţii polinoamelor din cele trei ecuaţii:

$$\begin{array}{l} t^0: \\ t^1: \\ t^0: \\ t^1: \\ t^0: \\ t^1: \end{array} \begin{cases} a_2 - a_1 = a_3 + a_5 \\ -a_2 = a_4 + a_6 \\ a_4 - a_3 = a_1 + a_5 \\ -a_4 = a_2 + a_6 \\ a_6 - a_5 = a_1 + a_3 \\ -a_6 = a_2 + a_4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 - a_2 + a_3 + a_5 = 0 \\ a_2 + a_4 + a_6 = 0 \\ a_1 + a_3 - a_4 + a_5 = 0 \\ a_2 + a_4 + a_6 = 0 \\ a_1 + a_3 + a_5 - a_6 = 0 \\ a_2 + a_4 + a_6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 - a_2 + a_3 + a_5 = 0 \\ a_1 + a_3 - a_4 + a_5 = 0 \\ a_1 + a_3 + a_5 - a_6 = 0 \\ a_2 + a_4 + a_6 = 0 \end{cases}$$

$\bullet$Gauss:

$$\begin{array}{cccc} 0 & -1 & -1 & 1 \\ & & 1 & \\ & 1 & & \\ 1 & & & \end{array} \left(\underbrace{\begin{array}{cccccc} \boxed{1} & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}}\ \middle|\ \underbrace{\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array}} \right) \underset{\begin{array}{c} l_1 \\ -l_1 + l_2 \\ -l_1 + l_3 \\ 0l_1 + l_4 \end{array}}{\overset{pas1}{\sim}}$$

$$\begin{array}{cccc} & & & 1 \\ -1 & -1 & 1 & \\ & 1 & & \\ 1 & & & \end{array} \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \underset{\begin{array}{c} l_1 \\ l_2 \\ -l_2 + l_3 \\ -l_2 + l_4 \end{array}}{\overset{pas2}{\sim}}$$

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \underset{\begin{array}{c} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \\ -2l_3 + l_4 \end{array}}{\overset{pas3}{\sim}} \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \end{array} \right)$$

Deoarece $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 3 \neq 0 \Rightarrow$

-ecuaţiile 1, 2, 3, 4, corespunzătoare liniilor, se aleg drept ecuaţii principale;
-necunoscutele 1, 2, 4, 6, corespunzătoare coloanelor, se aleg drept necunoscute principale.
$\bullet$Sau direct:

Deoarece $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0 \Rightarrow$

-ecuaţiile 1, 2, 3, 4, corespunzătoare liniilor, se aleg drept ecuaţii principale;
-necunoscutele 1, 2, 4, 6, corespunzătoare coloanelor, se aleg drept necunoscute principale.

•Atunci $\begin{cases} a_1 - a_2 + a_3 \quad + a_5 \quad = 0 \\ a_2 \quad - a_4 \quad = 0 \\ a_4 \quad - a_6 = 0 \\ 3a_6 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = -\alpha - \beta \\ a_2 = 0 \\ a_3 = \alpha \in \mathbb{R} \\ a_4 = 0 \\ a_5 = \beta \in \mathbb{R} \\ a_6 = 0 \end{cases}.$

S-a găsit

$$\varphi(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-\alpha - \beta + 0t) e^{-t} \\ (\alpha + 0t) e^{-t} \\ (\beta + 0t) e^{-t} \end{pmatrix} = \alpha e^{-t} \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}} + \beta e^{-t} \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}, \alpha \in \mathbb{R}, \beta \in \mathbb{R}.$$

Se caută două soluţii particulare l.i. ale $(SO) \Rightarrow$

$$\alpha = 1, \beta = 0 \rightsquigarrow \underline{\mathbf{x}}_1(t) \overset{\text{not.}}{=} \varphi_1(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ y_1(t) \\ z_1(t) \end{pmatrix} = e^{-t} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -e^{-t} \\ e^{-t} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\alpha = 0, \beta = 1 \rightsquigarrow \underline{\mathbf{x}}_2(t) \overset{\text{not.}}{=} \varphi_2(t) = \begin{pmatrix} x_2(t) \\ y_2(t) \\ z_2(t) \end{pmatrix} = e^{-t} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -e^{-t} \\ 0 \\ e^{-t} \end{pmatrix}$$

•$\lambda_2 = 2 \in \mathbb{R}$ cu $m(\lambda_2) = 1 \rightsquigarrow$ se caută o soluţie particulară a SO de forma

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_7 e^{2t} \\ a_8 e^{2t} \\ a_9 e^{2t} \end{pmatrix}.$$

Se determină numerele a_7, a_8, a_9, impunând ca x, y, z să verifice (SO)

$$\begin{cases} a_7 e^{2t} \cdot 2 = \quad a_8 e^{2t} + a_9 e^{2t} \\ a_8 e^{2t} \cdot 2 = a_7 e^{2t} \quad + a_9 e^{2t} \\ a_9 e^{2t} \cdot 2 = a_7 e^{2t} + a_8 e^{2t} \end{cases}, t \in \mathbb{R},$$

Se împarte fiecare ecuaţie prin e^{2t}

$$\begin{cases} a_7 \cdot 2 = \quad a_8 + a_9 \\ a_8 \cdot 2 = a_7 \quad + a_9 \\ a_9 \cdot 2 = a_7 + a_8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2a_7 + a_8 + a_9 = 0 \\ a_7 - 2a_8 + a_9 = 0 \\ a_7 + a_8 - 2a_9 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_7 = \gamma \\ a_8 = \gamma \\ a_9 = \gamma \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$-$este acelaşi sistem ca la $S_{\lambda_2}(A)$.

S-a găsit

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma e^{2t} \\ \gamma e^{2t} \\ \gamma e^{2t} \end{pmatrix} = \gamma e^{2t} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}, \gamma \in \mathbb{R}.$$

Se caută o soluţie particulară$\Rightarrow$

$$\gamma = 1 \rightsquigarrow \underline{\mathbf{x}}_3(t) \overset{\text{not.}}{=} \varphi_3(t) = \begin{pmatrix} x_3(t) \\ y_3(t) \\ z_3(t) \end{pmatrix} = e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}.$$

Din algoritm se obţin 3 soluţii liniar independente, adică $B = (\underline{\mathbf{x}}_1, \underline{\mathbf{x}}_2, \underline{\mathbf{x}}_3) = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ este un sistem fundamental de soluţii ale (SO).

<u>Pasul 3.</u> Soluţia generală a SO este:

-sau $\underline{\mathbf{x}}_o(t;\underline{\mathbf{c}}) = \mathcal{X}(t;\underline{\mathbf{x}}_1,\underline{\mathbf{x}}_2,\underline{\mathbf{x}}_3)\cdot\underline{\mathbf{c}} = c_1\underline{\mathbf{x}}_1(t) + c_2\underline{\mathbf{x}}_2(t) + c_3\underline{\mathbf{x}}_3(t), t\in\mathbb{R},\ c_1,c_2,c_3\in\mathbb{R}.$

$$\begin{pmatrix} x_o(t;c_1,c_2,c_3) \\ y_o(t;c_1,c_2,c_3) \\ z_o(t;c_1,c_2,c_3) \end{pmatrix} = c_1e^{-t}\underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\mathbf{v}_1} + c_2e^{-t}\underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\mathbf{v}_2} + c_3e^{2t}\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\mathbf{v}_3}, c_1,c_2,c_3\in\mathbb{R}.$$

-sau $\underline{\mathbf{x}}_o(t;\underline{\mathbf{c}}) = e^{tA}\cdot\underline{\mathbf{c}}, \forall t\in\mathbb{I},\ \underline{\mathbf{c}} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times1}(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^3,$

$$\begin{pmatrix} x_o(t;c_1,c_2,c_3) \\ y_o(t;c_1,c_2,c_3) \\ z_o(t;c_1,c_2,c_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3}e^{-t}+\frac{1}{3}e^{2t} & \frac{1}{3}e^{2t}-\frac{1}{3}e^{-t} & \frac{1}{3}e^{2t}-\frac{1}{3}e^{-t} \\ \frac{1}{3}e^{2t}-\frac{1}{3}e^{-t} & \frac{2}{3}e^{-t}+\frac{1}{3}e^{2t} & \frac{1}{3}e^{2t}-\frac{1}{3}e^{-t} \\ \frac{1}{3}e^{2t}-\frac{1}{3}e^{-t} & \frac{1}{3}e^{2t}-\frac{1}{3}e^{-t} & \frac{2}{3}e^{-t}+\frac{1}{3}e^{2t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}.$$

Comentariu. **a)** Deşi $\lambda_1 = -1$ cu $m(\lambda_1) = 2$, la modul 2 nu au intervenit în final, în expresia soluţiei generale, funcţiile te^{-t}, cum ar fi apărut la ecuaţii diferenţiale liniare de ordin 3. Aceasta deoarece, la acest exerciţiu, A este diagonalizabilă în $\mathbb{R}$.

b) Fiecare componentă a matricei fundamentale este o <u>combinaţie liniară de funcţiile e^{-t} şi e^{2t}.</u>

c) Modul cu determinarea matricei fundamentale $\mathcal{X}(t;\underline{\mathbf{x}}_1,\ldots,\underline{\mathbf{x}}_n)$ se foloseşte uşor pentru n oarecare (chiar $n = 3,4,5,...$) când A este diagonalizabilă, cu modul 1.1; se poate folosi programul Scientific WorkPlace sau Matlab sau altele, pentru a determina automat forma Jordan (diagonală) a matricei A şi vectorii proprii, pe coloanele matricei P.

d) Modul cu determinarea matricei fundamentale e^{tA} se foloseşte uşor pentru n oarecare (chiar $n = 3,4,5,...$) când A este diagonalizabilă, cu modul 1.2; este utilă folosirea programului Scientific WorkPlace sau altele, pentru a determina automat forma Jordan (diagonală) a matricei A, adică D,P,P^{-1}, pentru a determina automat produse cu matrice şi alte calcule matriceale.

e) Dacă în fenomenele de modelat au semnificaţie atât valorile proprii cât şi vectorii proprii, la pasul 2 se foloseşte modul 1; dacă au semnificaţie doar valorile proprii, la pasul 2 se poate folosi modul 2.

f) Modul 2 de la Pasul 2 se foloseşte cu pondere în cazul în care matricea A nu este diagonalizabilă în $\mathbb{R}$ şi $n = 2,3$. Pentru $n \geq 4$, dacă A are o rădăcină caracteristică de multiplicitate ≥ 2, atunci modul 2 devine greoi, cu rezolvare de sisteme algebrice liniare omogene de ordin mare (a se vedea Exemplul 4.2.3).

g) De menţionat, fără demonstraţie, că în cazul în care matricea A are rădăcini caracteristice complexe $\lambda = \alpha\pm i\beta$, atunci componentele matricei fundamentale vor conţine şi $e^{\alpha t}\cos\beta t, e^{\alpha t}\sin\beta t$.(a se vedea exemplul 4.2.4).

Forma Jordan, chiar şi în $\mathbb{C}$, ataşată unei astfel de matrice, din nou se poate determina cu ajutorul programului Scientific WorkPlace. De exemplu, $A = PJP^{-1}$ ar fi

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1+i & 1-i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{2}+\frac{1}{2}i & -\frac{1}{2}i \\ \frac{1}{2}-\frac{1}{2}i & \frac{1}{2}i \end{pmatrix}.$$

$\bigcirc$**Exemplul 4.2.3**. Să se rezolve

$$\begin{cases} x_1' = x_1 & & + x_4 \\ x_2' = & x_2 & \\ x_3' = & & +x_3 - 2x_4 \\ x_4' = x_1 & & -2x_3 + 5x_4 \end{cases}$$

Rezolvare: Sistemul (SO) $\begin{cases} x_1'(t) = x_1(t) & & + x_4(t) \\ x_2'(t) = & x_2(t) & \\ x_3'(t) = & & +x_3(t) - 2x_4(t) \\ x_4'(t) = x_1(t) & & -2x_3(t) + 5x_4(t) \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$,

este sistem de $n = 4$ ecuaţii diferenţiale de ordin 1, liniare, cu coeficienţii constanţi, daţi de

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -2 & 5 \end{pmatrix} \text{,omogen, cu } \underline{\mathbf{b}}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ cu } n = 4 \text{ necunoscute } \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{pmatrix} = ?$$

__**Metoda eliminării**__- NU, pentru $n = 4$, este greoaie pentru $n \geq 3$; a se vedea la seminar, Exerciţiul 2 din Seminarul 7; se foloseşte mai ales pentru $n = 2$.

__**Metoda cu valori proprii**__

__Pasul 1__ Se ataşează ecuaţia caracteristică a matricei A şi se rezolvă. Adică se determină valorile proprii în $\mathbb{C}$ ale matricei A, precum şi multiplicitatea lor algebrică.

•Se determină polinomul caracteristic al matricei $A, P_A(\lambda)$.

$$\boxed{P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_4)} = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda & -2 \\ 1 & 0 & -2 & 5-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^4 - 8\lambda^3 + 13\lambda^2 - 6\lambda$$

$\boxed{P_A(\lambda) = (-1)^4 \left(\lambda^4 - \delta_1\lambda^3 + \delta_2\lambda^2 - \delta_3\lambda + \delta_4\right)}$, unde δ_i este suma minorilor principali de ordin i ai matricei A, $\boxed{\delta_1 = \operatorname{Tr} A}$, $\boxed{\delta_4 = \det A}$ - greoi

•Se rezolvă ecuaţia caracteristică a matricei A,

$$P_A(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda(\lambda - 1)^2(\lambda - 6) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0 \in \mathbb{R} \text{ cu } m(\lambda_1) = 1; \\ \lambda_2 = 1 \in \mathbb{R} \text{ cu } m(\lambda_2) = 2; \\ \lambda_3 = 6 \in \mathbb{R} \text{ cu } m(\lambda_3) = 1; \end{cases}$$

Se observă că toate rădăcinile caracteristice sunt din $\mathbb{R}$, adică sunt valori proprii ale matricei A.

Spectrul matricei A este $\sigma(A) = \{0, 1, 6\}$.

Raza spectrală a matricei A este $\rho(A) = \max\{|0|, |1|, |6|\} = 6$.

__Pasul 2.__ Se determină un sitem fundamental de soluţii ale SO / o matrice fundamentală a SO.

$\boxed{\text{modul 1.}}$- aplicabil dacă $A \sim D$ în $\mathbb{R}$. Se determină subspaţiile proprii ale matricei A, precum şi dimensiunile lor.

$\underline{|\lambda_1 = 0|}$ Se caută vectorii proprii corespunzători valorii proprii $\lambda_1 = 0$, adică

$$\underline{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{4\times1}(\mathbb{R}),\ \underline{\mathbf{x}} \neq \underline{\boldsymbol{\theta}}_{\mathcal{M}_{4\times1}(\mathbb{R})} \text{ a.î.} (A - 0\mathbf{I}_4)\,\underline{\mathbf{x}} = \underline{\boldsymbol{\theta}}_{\mathcal{M}_{4\times1}(\mathbb{R})}, \text{ adică}$$

$$\begin{cases} (1-0)x_1 & & & + x_4 = 0 \\ & (1-0)x_2 & & = 0 \\ & & (1-0)x_3 & - 2x_4 = 0 \\ x_1 & & -2x_3 & + (5-0)x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -\alpha \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 2\alpha \\ x_4 = \alpha \in \mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow$$

$S_{\lambda_1}(A) = \{\underline{\mathbf{x}} \in \mathcal{M}_{4\times1}(\mathbb{R}); \underline{\mathbf{x}} \text{ este vect. propriu. pt. } A \text{ coresp. val. proprii } \lambda_1 = 0\} \cup \left\{\underline{\boldsymbol{\theta}}_{\mathcal{M}_{4\times1}(\mathbb{R})}\right\} =$

$$= \left\{ \underline{\mathbf{x}} \in \mathcal{M}_{4\times 1}(\mathbb{R}) ; \underline{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} -\alpha \\ 0 \\ 2\alpha \\ \alpha \end{pmatrix} = \alpha \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\mathbf{u}_1^1 = \mathbf{v}_1}, \alpha \in \mathbb{R} \right\} =$$

$$= \left[\left(\mathbf{u}_1^1 \right) \right] \Rightarrow \dim_{\mathbb{R}} S_{\lambda_1}(A) = 1 = m(\lambda_1).$$

$\boxed{\lambda_2 = 1}$ Se caută vectorii proprii corespunzători valorii proprii $\lambda_1 = 1$, adică

$$\underline{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{4\times 1}(\mathbb{R}),\ \underline{\mathbf{x}} \neq \underline{\boldsymbol{\theta}}_{\mathcal{M}_{4\times 1}(\mathbb{R})} \text{ a.î.} (A - 1\mathbf{I}_4)\, \underline{\mathbf{x}} = \underline{\boldsymbol{\theta}}_{\mathcal{M}_{4\times 1}(\mathbb{R})}, \text{ adică}$$

$$\begin{cases} (1-1)\,x_1 & & & + x_4 = 0 \\ & (1-1)\,x_2 & & = 0 \\ & & (1-1)\,x_3 & - 2x_4 = 0 \\ x_1 & & - 2x_3 & + (5-1)\,x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2\beta \\ x_2 = \alpha \in \mathbb{R} \\ x_3 = \beta \in \mathbb{R} \\ x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$S_{\lambda_2}(A) = \{ \underline{\mathbf{x}} \in \mathcal{M}_{4\times 1}(\mathbb{R}) ; \underline{\mathbf{x}} \text{ este vect. propriu. pt. } A \text{ coresp. val. proprii } \lambda_2 = 1 \} \cup \left\{ \underline{\boldsymbol{\theta}}_{\mathcal{M}_{4\times 1}(\mathbb{R})} \right\} =$$

$$= \left\{ \underline{\mathbf{x}} \in \mathcal{M}_{4\times 1}(\mathbb{R}) ; \underline{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 2\beta \\ \alpha \\ \beta \\ 0 \end{pmatrix} = \alpha \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\mathbf{u}_1^2 = \mathbf{v}_2} + \beta \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\mathbf{u}_2^2 = \mathbf{v}_3}, \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\} =$$

$$= \left[\left(\mathbf{u}_1^2, \mathbf{u}_2^2 \right) \right] \Rightarrow \dim_{\mathbb{R}} S_{\lambda_2}(A) = 2 = m(\lambda_2).$$

$\boxed{\lambda_3 = 6}$ Se caută vectorii proprii corespunzători valorii proprii $\lambda_3 = 6$, adică

$$\underline{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{4\times 1}(\mathbb{R}),\ \underline{\mathbf{x}} \neq \underline{\boldsymbol{\theta}}_{\mathcal{M}_{4\times 1}(\mathbb{R})} \text{ a.î.} (A - 6\mathbf{I}_4)\, \underline{\mathbf{x}} = \underline{\boldsymbol{\theta}}_{\mathcal{M}_{4\times 1}(\mathbb{R})}, \text{ adică}$$

$$\begin{cases} (1-6)\,x_1 & & & + x_4 = 0 \\ & (1-6)\,x_2 & & = 0 \\ & & (1-6)\,x_3 & - 2x_4 = 0 \\ x_1 & & - 2x_3 & + (5-6)\,x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \gamma \\ x_2 = 0 \\ x_3 = -2\gamma \\ x_4 = 5\gamma \in \mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow$$

$$S_{\lambda_3}(A) = \{ \underline{\mathbf{x}} \in \mathcal{M}_{4\times 1}(\mathbb{R}) ; \underline{\mathbf{x}} \text{ este vect. propriu. pt. } A \text{ coresp. val. proprii } \lambda_3 = 6 \} \cup \left\{ \underline{\boldsymbol{\theta}}_{\mathcal{M}_{4\times 1}(\mathbb{R})} \right\} =$$

$$= \left\{ \underline{\mathbf{x}} \in \mathcal{M}_{4\times 1}(\mathbb{R}) ; \underline{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \gamma \\ 0 \\ -2\gamma \\ 5\gamma \end{pmatrix} = \gamma \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}}_{\mathbf{u}_1^3 = \mathbf{v}_4}, \gamma \in \mathbb{R} \right\} =$$

$$= \left[\left(\mathbf{u}_1^3 \right) \right] \Rightarrow \dim_{\mathbb{R}} S_{\lambda_3}(A) = 1 = m(\lambda_3).$$

Cum toate rădăcinile caracteristice ale matricei A sunt din $\mathbb{R}$ (sunt valori proprii) si cum multiplicităţile geometrice (dimensiunile subspaţiilor proprii) coincid cu multiplicităţile algebrice ale valorilor proprii, atunci, conform teoremei Jordan, matricea A este diagonalizabilă, adică

$$\exists D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R}) \text{ matrice diagonală şi } \exists P = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$$

matrice modală, astfel încât $A \sim D$, adică $A = P \cdot D \cdot P^{-1}$ sau $D = P^{-1} \cdot A \cdot P$. Se precizează că matricea modală P este formată din coloanele vectorilor proprii, baze în $S_{\lambda_1}(A)$, respectiv $S_{\lambda_2}(A)$, $S_{\lambda_3}(A)$. Mai mult, matricea modală P este nesingulară, deoarece respectivii vectori proprii formează o bază în $\mathcal{M}_{4\times 1}(\mathbb{R})$, cu $P =_C A_S$.

<u>modul 1.1.</u> Deoarece A este diagonalizabilă,

$$\bullet \lambda_1 = 0,\ m(\lambda_1) = 1 \rightsquigarrow \underline{\mathbf{x}}_1(t) \overset{\text{not.}}{=} \varphi_1(t) = \begin{pmatrix} x_{1,1}(t) \\ x_{2,1}(t) \\ x_{3,1}(t) \\ x_{4,1}(t) \end{pmatrix} = e^{0t} \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\mathbf{v}_1} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$\bullet \lambda_2 = 1,\ m(\lambda_1) = 2 \rightsquigarrow \underline{\mathbf{x}}_2(t) \overset{\text{not.}}{=} \varphi_2(t) = \begin{pmatrix} x_{1,2}(t) \\ x_{2,2}(t) \\ x_{3,2}(t) \\ x_{4,2}(t) \end{pmatrix} = e^{1t} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\mathbf{v}_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ e^t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\underline{\mathbf{x}}_3(t) \overset{\text{notez}}{=} \varphi_3(t) = \begin{pmatrix} x_{1,3}(t) \\ x_{2,3}(t) \\ x_{3,3}(t) \\ x_{4,3}(t) \end{pmatrix} = e^{1t} \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\mathbf{v}_3} = \begin{pmatrix} 2e^t \\ 0 \\ e^t \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\bullet \lambda_3 = 6,\ m(\lambda_3) = 1 \rightsquigarrow \underline{\mathbf{x}}_4(t) \overset{\text{notez}}{=} \varphi_4(t) = \begin{pmatrix} x_{1,4}(t) \\ x_{2,4}(t) \\ x_{3,4}(t) \\ x_{4,4}(t) \end{pmatrix} = e^{6t} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}}_{\mathbf{v}_4} = \begin{pmatrix} e^{6t} \\ 0 \\ -2e^{6t} \\ 5e^{6t} \end{pmatrix}.$$

<u>modul 1.2.</u> O matrice fundamentală este

-sau $\mathcal{X}(t) = \mathcal{X}(t; \underline{\mathbf{x}}_1, \underline{\mathbf{x}}_2, \underline{\mathbf{x}}_3, \underline{\mathbf{x}}_4) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2e^t & e^{6t} \\ 0 & e^t & 0 & 0 \\ 2 & 0 & e^t & -2e^{6t} \\ 1 & 0 & 0 & 5e^{6t} \end{pmatrix}.$

(cu $\det \mathcal{X}(t) = W(t; \underline{\mathbf{x}}_1, \underline{\mathbf{x}}_2, \underline{\mathbf{x}}_3, \underline{\mathbf{x}}_4) = -30e^{8t} \neq 0$)

-sau $\mathcal{X}(t) = e^{tA} = Pe^{tD}P^{-1} =$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{0t} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{1t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{1t} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{6t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}^{-1} =$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{0t} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{1t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{1t} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{6t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{6} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{2}{5} & 0 & \frac{1}{5} & 0 \\ \frac{1}{30} & 0 & -\frac{1}{15} & \frac{1}{6} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{4}{5}e^t + \frac{1}{30}e^{6t} + \frac{1}{6} & 0 & \frac{2}{5}e^t - \frac{1}{15}e^{6t} - \frac{1}{3} & \frac{1}{6}e^{6t} - \frac{1}{6} \\ 0 & e^t & 0 & 0 \\ \frac{2}{5}e^t - \frac{1}{15}e^{6t} - \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{5}e^t + \frac{2}{15}e^{6t} + \frac{2}{3} & \frac{1}{3} - \frac{1}{3}e^{6t} \\ \frac{1}{6}e^{6t} - \frac{1}{6} & 0 & \frac{1}{3} - \frac{1}{3}e^{6t} & \frac{5}{6}e^{6t} + \frac{1}{6} \end{pmatrix}.$$

$\boxed{\text{modul 2.}}$ Pe baza teoriei de la ecuaţii diferenţiale liniare de ordin 3, se caută soluţii particulare liniar independente ale (SO): greoi pentru $\lambda_2 = 1 \in \mathbb{R}$ cu $m(\lambda_2) = 2$ din cauza $n = 4$.
Din algoritm se obţin 4 soluţii liniar independente, adică $B = (\underline{\mathbf{x}}_1, \underline{\mathbf{x}}_2, \underline{\mathbf{x}}_3, \underline{\mathbf{x}}_4)$ este un sistem fundamental de soluţii ale (SO).

Pasul 3. Soluţia generală a SO este:

-sau $\underline{\mathbf{x}}_o(t; \underline{\mathbf{c}}) = \mathcal{X}(t; \underline{\mathbf{x}}_1, \underline{\mathbf{x}}_2, \underline{\mathbf{x}}_3, \underline{\mathbf{x}}_4) \cdot \underline{\mathbf{c}} = c_1\underline{\mathbf{x}}_1(t) + c_2\underline{\mathbf{x}}_2(t) + c_3\underline{\mathbf{x}}_3(t) + c_4\underline{\mathbf{x}}_4(t), t \in \mathbb{R}, c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{R}.$

$$\begin{pmatrix} x_{1,o}(t; c_1, c_2, c_3, c_4) \\ x_{2,o}(t; c_1, c_2, c_3, c_4) \\ x_{3,o}(t; c_1, c_2, c_3, c_4) \\ x_{4,o}(t; c_1, c_2, c_3, c_4) \end{pmatrix} = c_1 e^{0t} \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\mathbf{v}_1} + c_2 e^t \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\mathbf{v}_2} + c_3 e^t \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\mathbf{v}_3} + c_4 e^{6t} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}}_{\mathbf{v}_4}, c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{R}.$$

-sau $\underline{\mathbf{x}}_o(t; \underline{\mathbf{c}}) = e^{tA} \cdot \underline{\mathbf{c}}, \forall t \in \mathbb{I}, \underline{\mathbf{c}} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{4\times 1}(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^4,$

$$\begin{pmatrix} x_{1,o}(t; c_1, c_2, c_3, c_4) \\ x_{2,o}(t; c_1, c_2, c_3, c_4) \\ x_{3,o}(t; c_1, c_2, c_3, c_4) \\ x_{4,o}(t; c_1, c_2, c_3, c_4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{5}e^t + \frac{1}{30}e^{6t} + \frac{1}{6} & 0 & \frac{2}{5}e^t - \frac{1}{15}e^{6t} - \frac{1}{3} & \frac{1}{6}e^{6t} - \frac{1}{6} \\ 0 & e^t & 0 & 0 \\ \frac{2}{5}e^t - \frac{1}{15}e^{6t} - \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{5}e^t + \frac{2}{15}e^{6t} + \frac{2}{3} & \frac{1}{3} - \frac{1}{3}e^{6t} \\ \frac{1}{6}e^{6t} - \frac{1}{6} & 0 & \frac{1}{3} - \frac{1}{3}e^{6t} & \frac{5}{6}e^{6t} + \frac{1}{6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{pmatrix}.$$

Comentariu. De menţionat că $\boxed{e^{0A} = I_4}$!!!

De menţionat că $\mathcal{X}(t; \underline{\mathbf{x}}_1, \underline{\mathbf{x}}_2, \underline{\mathbf{x}}_3, \underline{\mathbf{x}}_4)$ este tot o matrice fundamentală, deoarece coloanele sunt soluţii particulare ale SO şi liniar independente, cu

$W(t; \underline{\mathbf{x}}_1, \underline{\mathbf{x}}_2, \underline{\mathbf{x}}_3, \underline{\mathbf{x}}_4) = -30e^{8t} \neq 0, \forall t$. Dar

$$\mathcal{X}(0; \underline{\mathbf{x}}_1, \underline{\mathbf{x}}_2, \underline{\mathbf{x}}_3, \underline{\mathbf{x}}_4) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \neq I_4 \Rightarrow \mathcal{W}(t; \underline{\mathbf{x}}_1, \underline{\mathbf{x}}_2, \underline{\mathbf{x}}_3, \underline{\mathbf{x}}_4) \neq e^{tA}.$$

Determinarea matricei e^{tA} poate fi uşurată folosind programe de calcul, precum SWP.

Convenţie. Peste tot în cele ce urmează, se va nota:

-pentru $n = 2$, $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ cu $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ şi, pentru $n = 3$, $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix}$ cu $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$.

În cazurile $n \geq 4$, de menţionat a nu se se face confuzie între vectorii proprii pentru A, căutaţi pentru fiecare valoare proprie în parte, $\begin{pmatrix} x_1 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix}$ =? ca vectori coloană de numere, şi soluţiile SO

căutate $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ ... \\ x_n(t) \end{pmatrix}$ =? ca vectori coloană de funcţii.

Exemplul 4.2.4. Să se rezolve

$$\begin{cases} x' = 2x + y \\ y' = x + 3y - z \\ z' = -x + 2y + 3z \end{cases}$$

Rezolvare: Sistemul $(SO)\begin{cases} x'(t) = 2x(t) + y(t) \\ y'(t) = x(t) + 3y(t) - z(t) \\ z'(t) = -x(t) + 2y(t) + 3z(t) \end{cases}, t \in \mathbb{R}$,

este sistem de $n = 3$ ecuaţii diferenţiale de ordin 1, liniare, cu coeficienţii constanţi, daţi de $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, omogen, cu $\underline{\mathbf{b}}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Are $n = 3$ necunoscute $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$ =?

Metoda cu valori proprii

Pasul 1 Se ataşează ecuaţia caracteristică a matricei A şi se rezolvă. Adică se determină valorile proprii în $\mathbb{C}$ ale matricei A, precum şi multiplicitatea lor algebrică.

•Se determină polinomul caracteristic al matricei $A, P_A(\lambda)$.

$$\boxed{P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_3)} = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 3-\lambda & -1 \\ -1 & 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 8\lambda^2 - 22\lambda + 20.$$

$\boxed{P_A(\lambda) = (-1)^3\left(\lambda^3 - \delta_1\lambda^2 + \delta_2\lambda - \delta_3\right)}$, unde δ_i este suma minorilor principali de ordin i ai matricei A-greoi.

•Se rezolvă ecuaţia caracteristică a matricei A,

$$P_A(\lambda) = 0 \Leftrightarrow -(\lambda - 2)\left(\lambda^2 - 6\lambda + 10\right) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 2 \in \mathbb{R} \text{ cu } m(\lambda_1) = 1; \\ \lambda_2 = 3 - i \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R} \text{ cu } m(\lambda_2) = 1; \\ \lambda_3 = 3 + i \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R} \text{ cu } m(\lambda_3) = 1; \end{cases}$$

Se observă că există rădăcini caracteristice şi în $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$, adică sunt valori proprii ale matricei A în $\mathbb{C}$.

Spectrul matricei A este $\sigma(A) = \{2, 3 \pm i\}$.

Raza spectrală a matricei A este $\rho(A) = \max\{|2|, |3 \pm i|\} = \sqrt{10}$.

Pasul 2. Se determină un sitem fundamental de soluţii ale SO / o matrice fundamentală a SO.

○$\boxed{\text{modul 1.}}$- aplicabil dacă $A \sim D$ în $\mathbb{R}$. Se poate şi dacă $A \sim D$ în $\mathbb{C}$, dar în cele ce urmează nu se va apela la acest mod. Se determină subspaţiile proprii ale matricei A în $\mathbb{C}$, precum şi dimensiunile lor.

$\boxed{\lambda_1 = 2}$ Se caută vectorii proprii corespunzători valorii proprii $\lambda_1 = 2$, adică

$\underline{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times1}(\mathbb{R})$, $\underline{\mathbf{x}} \neq \underline{\boldsymbol{\theta}}_{\mathcal{M}_{3\times1}(\mathbb{R})}$ a.î.$(A - 2I_3)\underline{\mathbf{x}} = \underline{\boldsymbol{\theta}}_{\mathcal{M}_{3\times1}(\mathbb{R})}$, adică

$$\begin{cases} (2-2)x_1 + x_2 + 0x_3 = 0 \\ x_1 + (3-2)x_2 - x_3 = 0 \\ -x_1 + 2x_2 + (3-2)x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \alpha \\ x_2 = 0 \\ x_3 = \alpha \in \mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow$$

$S_{\lambda_1}(A) = \{\underline{\mathbf{x}} \in \mathcal{M}_{3\times1}(\mathbb{R}); \underline{\mathbf{x}}$ este vect. propriu. pt. A coresp. val. proprii $\lambda_1 = -1\} \cup \left\{\underline{\boldsymbol{\theta}}_{\mathcal{M}_{3\times1}(\mathbb{R})}\right\} =$

$$= \left\{ \underline{\mathbf{x}} \in \mathcal{M}_{3\times 1}(\mathbb{R}) ; \underline{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \\ \alpha \end{pmatrix} = \alpha \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\mathbf{u}_1^1 = \mathbf{v}_1}, \alpha \in \mathbb{R} \right\} =$$

$$= \left[\left(\mathbf{u}_1^1 \right) \right] \Rightarrow \dim_{\mathbb{R}} S_{\lambda_1}(A) = 1 = m(\lambda_1).$$

De menţionat că $\mathbf{v}_1 \in \mathcal{M}_{3\times 1}(\mathbb{R})$ chiar, datorită coeficienţilor reali ai sistemului.

$\boxed{\lambda_2 = 3 - i}$ Se caută vectorii proprii corespunzători valorii proprii $\lambda_2 = 3 - i$, adică

$\underline{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 1}(\mathbb{C})$, $\underline{\mathbf{x}} \neq \boldsymbol{\theta}_{\mathcal{M}_{3\times 1}(\mathbb{C})}$ a.î.$(A - (3-i) I_3)\underline{\mathbf{x}} = \underline{\boldsymbol{\theta}}_{\mathcal{M}_{3\times 1}(\mathbb{C})}$, adică

$$\begin{cases} (2 - (3-i)) x_1 + x_2 + 0x_3 = 0 \\ x_1 + (3 - (3-i)) x_2 - x_3 = 0 \\ -x_1 + 2x_2 + (3 - (3-i)) x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (-1+i) x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 + ix_2 - x_3 = 0 \\ -x_1 + 2x_2 + ix_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (-1+i) x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 + ix_2 = 5\beta \\ x_3 = 5\beta \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} -1+i & 1 \\ 1 & i \end{vmatrix} = -2 - i \neq 0;$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 5\beta & i \end{vmatrix} = -5\beta; \Delta_2 = \begin{vmatrix} -1+i & 0 \\ 1 & 5\beta \end{vmatrix} = -(1-i)5\beta$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{-5\beta}{-2-i} = \dfrac{5\beta(2-i)}{5} = (2-i)\beta \\ x_2 = \dfrac{-5\beta(1-i)}{-2-i} = \dfrac{5\beta(1-i)(2-i)}{5} = \beta(2 - i - 2i - 1) = (1-3i)\beta \\ x_3 = 5\beta \in \mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow$$

$S_{\lambda_2}(A) = \{\underline{\mathbf{x}} \in \mathcal{M}_{3\times 1}(\mathbb{C}) ; \underline{\mathbf{x}}$ este vect. propriu. pt. A coresp. val. proprii $\lambda_2 = 3 - i\} \cup \left\{ \underline{\boldsymbol{\theta}}_{\mathcal{M}_{3\times 1}(\mathbb{C})} \right\} =$

$$= \left\{ \underline{\mathbf{x}} \in \mathcal{M}_{3\times 1}(\mathbb{R}) ; \underline{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} (2-i)\beta \\ (1-3i)\beta \\ 5\beta \end{pmatrix} = \beta \underbrace{\begin{pmatrix} 2-i \\ 1-3i \\ 5 \end{pmatrix}}_{\mathbf{u}_1^2 = \mathbf{v}_2}, \beta \in \mathbb{R} \right\} =$$

$$= \left[\left(\mathbf{u}_1^2 \right) \right] \Rightarrow \dim_{\mathbb{R}} S_{\lambda_2}(A) = 1 = m(\lambda_2).$$

$\boxed{\lambda_3 = 3 + i}$ Se caută vectorii proprii corespunzători valorii proprii $\lambda_3 = 3 + i$, adică

$\underline{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 1}(\mathbb{C})$, $\underline{\mathbf{x}} \neq \boldsymbol{\theta}_{\mathcal{M}_{3\times 1}(\mathbb{C})}$ a.î.$(A - (3+i) I_3)\underline{\mathbf{x}} = \underline{\boldsymbol{\theta}}_{\mathcal{M}_{3\times 1}(\mathbb{C})}$, adică

$$\begin{cases} (2 - (3+i)) x_1 + x_2 + 0x_3 = 0 \\ x_1 + (3 - (3+i)) x_2 - x_3 = 0 \\ -x_1 + 2x_2 + (3 - (3+i)) x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (-1-i) x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 - ix_2 - x_3 = 0 \\ -x_1 + 2x_2 - ix_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (-1-i) x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 - ix_2 = 5\gamma \\ x_3 = 5\gamma \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} -1-i & 1 \\ 1 & -i \end{vmatrix} = -2 + i \neq 0;$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 5\gamma & -i \end{vmatrix} = -5\gamma; \Delta_2 = \begin{vmatrix} -1-i & 0 \\ 1 & 5\gamma \end{vmatrix} = -(1+i) \cdot 5\gamma$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{-5\gamma}{-2+i} = \dfrac{5\gamma(2+i)}{5} = (2+i)\gamma \\ x_2 = \dfrac{-5\gamma(1+i)}{-2+i} = \dfrac{5\gamma(1+i)(2+i)}{5} = \gamma(2+i+2i-1) = (1+3i)\gamma \\ x_3 = 5\gamma \in \mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow$$

$S_{\lambda_3}(A) = \{\underline{\mathbf{x}} \in \mathcal{M}_{3\times 1}(\mathbb{C}); \underline{\mathbf{x}}$ este vect. propriu. pt. A coresp. val. proprii $\lambda_3 = 3+i\} \cup \left\{\underline{\boldsymbol{\theta}}_{\mathcal{M}_{3\times1}(\mathbb{C})}\right\} =$

$$= \left\{ \underline{\mathbf{x}} \in \mathcal{M}_{3\times1}(\mathbb{R}); \underline{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} (2+i)\gamma \\ (1+3i)\gamma \\ 5\gamma \end{pmatrix} = \gamma \underbrace{\begin{pmatrix} 2+i \\ 1+3i \\ 5 \end{pmatrix}}_{\mathbf{u}_1^3 = \mathbf{v}_3}, \beta \in \mathbb{R} \right\} =$$

$= \left[\left(\mathbf{u}_1^3\right)\right] \Rightarrow \dim_{\mathbb{R}} S_{\lambda_3}(A) = 1 = m(\lambda_3)$.

Cum toate rădăcinile caracteristice ale matricei A sunt din $\mathbb{C}$ (sunt valori proprii în $\mathbb{C}$) si cum multiplicităţile geometrice (dimensiunile subspaţiilor proprii) coincid cu multiplicităţile algebrice ale valorilor proprii, atunci, conform teoremei Jordan, matricea A este diagonalizabilă în $\mathbb{C}$, adică $\exists D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3-i & 0 \\ 0 & 0 & 3+i \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ matrice diagonală şi $\exists P = \begin{pmatrix} 1 & 2-i & 2+i \\ 0 & 1-3i & 1+3i \\ 1 & 5 & 5 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ matrice modală, astfel încât $A \sim D$, adică $A = P \cdot D \cdot P^{-1}$ sau $D = P^{-1} \cdot A \cdot P$. Se precizează că matricea modală P este formată din coloanele vectorilor proprii, baze în $S_{\lambda_1}(A)$ respectiv $S_{\lambda_2}(A), S_{\lambda_3}(A)$. Mai mult, matricea modală P este nesingulară, deoarece respectivii vectori proprii formează o bază în $\mathcal{M}_{3\times1}(\mathbb{C})$, cu $P =_C A_S$.

Se poate verifica, folosind SWP, că

$$\begin{pmatrix} 1 & 2-i & 2+i \\ 0 & 1-3i & 1+3i \\ 1 & 5 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3-i & 0 \\ 0 & 0 & 3+i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{3}{20} + \frac{1}{20}i & \frac{1}{20} + \frac{3}{20}i & \frac{3}{20} - \frac{1}{20}i \\ -\frac{3}{20} - \frac{1}{20}i & \frac{1}{20} - \frac{3}{20}i & \frac{3}{20} + \frac{1}{20}i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

De menţionat că, folosind SWP, se obţine o altă diagonalizare în $\mathbb{C}$:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1-i & 1+i \\ 1 & 2+i & 2-i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3-i & 0 \\ 0 & 0 & 3+i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4} + \frac{1}{4}i & \frac{1}{4} + \frac{1}{4}i & \frac{1}{4} - \frac{1}{4}i \\ -\frac{1}{4} - \frac{1}{4}i & \frac{1}{4} - \frac{1}{4}i & \frac{1}{4} + \frac{1}{4}i \end{pmatrix},$$

aceasta deoarece matricea modală P nu este unică, depinde de alegerea vectorilor proprii corespunzători (care sunt o infinitate).

$\bigcirc$<u>modul 1.1.</u> Deoarece A este diagonalizabilă în $\mathbb{C}$,

$\bullet \lambda_1 = 2,\ m(\lambda_1) = 1 \rightsquigarrow \underline{\mathbf{x}}_1(t) \overset{\text{notez}}{=} \varphi_1(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ y_1(t) \\ z_1(t) \end{pmatrix} = e^{2t} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\mathbf{v}_1} = \begin{pmatrix} e^{2t} \\ 0 \\ e^{2t} \end{pmatrix}$.

$\bullet \lambda_{2,3} = 3 \mp i,\ m(\lambda_{2,3}) = 1 \Rightarrow \mathbf{v}_{2,3} = \begin{pmatrix} 2 \mp i \\ 1 \mp 3i \\ 5 \end{pmatrix}$ vectori proprii corespunzători, generatori de $S_{\lambda_{2,3}}(A) \rightsquigarrow$

$$\underline{\mathbf{x}}_{2,3}(t) \overset{\text{notez}}{=} \varphi_{2,3}(t) = e^{(3\mp i)t} \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \mp i \\ 1 \mp 3i \\ 5 \end{pmatrix}}_{\mathbf{v}_{2,3}} = e^{3t}(\cos t + i \sin t) \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} \mp i \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \right) =$$

$$= e^{3t}\left(\cos t\begin{pmatrix}2\\1\\5\end{pmatrix}\mp\sin t\begin{pmatrix}1\\3\\0\end{pmatrix}\right)-ie^{3t}\left(\pm\cos t\begin{pmatrix}1\\3\\0\end{pmatrix}+\sin t\begin{pmatrix}2\\1\\5\end{pmatrix}\right)$$

Se aleg partea reală/ imaginară a vectorului anterior ca soluţii particulare liniar independente (cu menţiunea că şi orice combinaţie liniară de soluţii ale SO este tot soluţie):

$$\underline{\mathbf{x}}_2(t)\overset{\text{notez}}{=}\varphi_2(t)=\begin{pmatrix}x_2(t)\\y_2(t)\\z_2(t)\end{pmatrix}=e^{3t}\begin{pmatrix}2\cos t-\sin t\\\cos t-3\sin t\\5\cos t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}e^{3t}(2\cos t-\sin t)\\e^{3t}(\cos t-3\sin t)\\e^{3t}(5\cos t)\end{pmatrix}$$

$$\underline{\mathbf{x}}_3(t)\overset{\text{notez}}{=}\varphi_3(t)=\begin{pmatrix}x_3(t)\\y_3(t)\\z_3(t)\end{pmatrix}=e^{3t}\begin{pmatrix}\cos t+2\sin t\\3\cos t+\sin t\\5\sin t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}e^{3t}(\cos t+2\sin t)\\e^{3t}(3\cos t+\sin t)\\e^{3t}(5\sin t)\end{pmatrix}$$

○<u>modul 1.2.</u> O matrice fundamentală este

-sau $\mathcal{X}(t)=\mathcal{X}(t;\underline{\mathbf{x}}_1,\underline{\mathbf{x}}_2,\underline{\mathbf{x}}_3)=\begin{pmatrix}e^{2t}&e^{3t}(2\cos t-\sin t)&e^{3t}(\cos t+2\sin t)\\0&e^{3t}(\cos t-3\sin t)&e^{3t}(3\cos t+\sin t)\\e^{2t}&e^{3t}(5\cos t)&e^{3t}(5\sin t)\end{pmatrix}$

(are $W(t;\underline{\mathbf{x}}_1,\underline{\mathbf{x}}_2,\underline{\mathbf{x}}_3)=-10e^{8t}\neq 0$)

-sau $\mathcal{X}(t)=e^{tA}=Pe^{tD}P^{-1}$ greoi.

De menţionat că $\mathcal{X}(t;\underline{\mathbf{x}}_1,\underline{\mathbf{x}}_2,\underline{\mathbf{x}}_3)\neq e^{tA}$, deoarece $\mathcal{X}(0;\underline{\mathbf{x}}_1,\underline{\mathbf{x}}_2,\underline{\mathbf{x}}_3)\neq I_4$.

<u>modul 2.</u> Pe baza teoriei de la ecuaţii diferenţiale liniare de ordin 3, se caută soluţii fundamentale ale SO:

•$\lambda_1=2\in\mathbb{R}$ cu $m(\lambda_1)=1$ ⇝se caută o soluţie particulară SO de forma

$$\begin{pmatrix}x(t)\\y(t)\\z(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_1e^{2t}\\a_2e^{2t}\\a_3e^{2t}\end{pmatrix}.$$

Se determină numerele a_1,a_2,a_3, impunând ca să se verifice SO

$$\begin{cases}a_1e^{2t}\cdot 2=2a_1e^{2t}+a_2e^{2t}\\a_2e^{2t}\cdot 2=a_1e^{2t}+3a_2e^{2t}-a_3e^{2t}\\a_3e^{2t}\cdot 2=-a_1e^{2t}+2a_2e^{2t}+3a_3e^{2t}\end{cases},t\in\mathbb{R}.$$

Se împarte fiecare ecuaţie prin e^{2t}

$$\begin{cases}a_1\cdot 2=2a_1+a_2\\a_2\cdot 2=a_1+3a_2-a_3\\a_3\cdot 2=-a_1+2a_2+3a_3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}+a_2=0\\a_1+a_2-a_3=0\\-a_1+2a_2+a_3=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a_1=\alpha\\a_2=0\\a_3=\alpha\in\mathbb{R}\end{cases}$$

S-a găsit

$$\begin{pmatrix}x(t)\\y(t)\\z(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha e^{2t}\\0e^{2t}\\\alpha e^{2t}\end{pmatrix}=\alpha e^{2t}\underbrace{\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}}.$$

Se caută o soluţie particulară a $(SO)\Rightarrow$

$$\alpha=1\rightsquigarrow\underline{\mathbf{x}}_1(t)\overset{\text{not.}}{=}\varphi_1(t)=\begin{pmatrix}x_1(t)\\y_1(t)\\z_1(t)\end{pmatrix}=e^{2t}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}.$$

•$\lambda_{2,3}=3\mp i\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$ cu $m(\lambda_{2,3})=1$ ⇝se caută două soluţii particulare l.i. ale SO de forma

$$\begin{pmatrix}x(t)\\y(t)\\z(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}e^{3t}(a_4\cos t+a_5\sin t)\\e^{3t}(a_6\cos t+a_7\sin t)\\e^{3t}(a_8\cos t+a_9\sin t)\end{pmatrix}.$$

Se determină $a_4,...,a_9$ (numere, altele decât constantele de indexare), impunând ca să se verifice SO

$$\left\{\begin{array}{l} e^{3t}\cdot 3\left(a_4\cos t+a_5\sin t\right)+e^{3t}\left(-a_4\sin t+a_5\cos t\right)= \\ \qquad =2e^{3t}\left(a_4\cos t+a_5\sin t\right)+e^{3t}\left(a_6\cos t+a_7\sin t\right) \\ e^{3t}\cdot 3\left(a_6\cos t+a_7\sin t\right)+e^{3t}\left(-a_6\sin t+a_7\cos t\right)= \\ \qquad =e^{3t}\left(a_4\cos t+a_5\sin t\right)+3e^{3t}\left(a_6\cos t+a_7\sin t\right)-e^{3t}\left(a_8\cos t+a_9\sin t\right) \\ e^{3t}\cdot 3\left(a_8\cos t+a_9\sin t\right)+e^{3t}\left(-a_8\sin t+a_9\cos t\right)= \\ \qquad =-e^{3t}\left(a_4\cos t+a_5\sin t\right)+2e^{3t}\left(a_6\cos t+a_7\sin t\right)+3e^{3t}\left(a_8\cos t+a_9\sin t\right) \end{array}\right., t\in\mathbb{R}.$$

Se împarte prin e^{2t} :

$$\left\{\begin{array}{l} 3\left(a_4\cos t+a_5\sin t\right)+\left(-a_4\sin t+a_5\cos t\right)= \\ \qquad =2\left(a_4\cos t+a_5\sin t\right)+\left(a_6\cos t+a_7\sin t\right) \\ 3\left(a_6\cos t+a_7\sin t\right)+\left(-a_6\sin t+a_7\cos t\right)= \\ \qquad =\left(a_4\cos t+a_5\sin t\right)+3\left(a_6\cos t+a_7\sin t\right)-\left(a_8\cos t+a_9\sin t\right) \\ 3\left(a_8\cos t+a_9\sin t\right)+\left(-a_8\sin t+a_9\cos t\right)= \\ \qquad =-\left(a_4\cos t+a_5\sin t\right)+2\left(a_6\cos t+a_7\sin t\right)+3\left(a_8\cos t+a_9\sin t\right) \end{array}\right.$$

Se identifică coeficienţii funcţiilor liniar independente $(\cos t,\sin t)$ (au $W=1$) :

$$\begin{array}{l} \cos t: \\ \sin t: \\ \cos t: \\ \sin t: \\ \cos t: \\ \sin t: \end{array}\left\{\begin{array}{l} 3a_4+a_5=2a_4+a_6 \\ 3a_5-a_4=2a_5+a_7 \\ 3a_6+a_7=a_4+3a_6-a_8 \\ 3a_7-a_6=a_5+3a_7-a_9 \\ 3a_8+a_9=-a_4+2a_6+3a_8 \\ 3a_9-a_8=-a_5+2a_7+3a_9 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lllllll} -a_4 & -a_5 & +a_6 & & & & =0 \\ a_4 & -a_5 & & +a_7 & & & =0 \\ a_4 & & & -a_7 & -a_8 & & =0 \\ & a_5 & +a_6 & & & -a_9 & =0 \\ -a_4 & & +2a_6 & & & -a_9 & =0 \\ & -a_5 & & +2a_7 & +a_8 & & =0 \end{array}\right.$$

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \overset{Gauss}{\sim} \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{2}{5} & -\frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{5} & -\frac{3}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\left\{\begin{array}{l} a_4+\qquad -\frac{2}{5}a_8-\frac{1}{5}a_9=0 \\ \quad a_5 \qquad +\frac{1}{5}a_8-\frac{2}{5}a_9=0 \\ \qquad a_6 \qquad -\frac{1}{5}a_8-\frac{3}{5}a_9=0 \\ \qquad\qquad a_7+\frac{3}{5}a_8-\frac{1}{5}a_9=0 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} a_4=2\beta+\gamma \\ a_5=-\beta+2\gamma \\ a_6=\beta+3\gamma \\ a_7=-3\beta+\gamma \\ a_8=5\beta\in\mathbb{R} \\ a_9=5\gamma\in\mathbb{R} \end{array}\right. .$$

Sau direct, ca în liceu.

S-a găsit

$$\left(\begin{array}{c} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{array}\right)=\left(\begin{array}{c} e^{3t}\left((2\beta+\gamma)\cos t+(-\beta+2\gamma)\sin t\right) \\ e^{3t}\left((\beta+3\gamma)\cos t+(-3\beta+\gamma)\sin t\right) \\ e^{3t}\left((5\beta)\cos t+(5\gamma)\sin t\right) \end{array}\right)=$$

$$=\beta\left(\begin{array}{c} e^{3t}\left(2\cos t-\sin t\right) \\ e^{3t}\left(\cos t-3\sin t\right) \\ e^{3t}\left(5\cos t\right) \end{array}\right)+\gamma\left(\begin{array}{c} e^{3t}\left(\cos t+2\sin t\right) \\ e^{3t}\left(3\cos t+\sin t\right) \\ e^{3t}\left(5\sin t\right) \end{array}\right).$$

Se caută două soluţii particulare l.i. ale $(SO)\Rightarrow$

$$\beta=1,\gamma=0\rightsquigarrow \underline{\mathbf{x}}_2(t)\overset{\text{not.}}{=}\varphi_2(t)=\left(\begin{array}{c} x_2(t) \\ y_2(t) \\ z_2(t) \end{array}\right)=\left(\begin{array}{c} e^{3t}\left(2\cos t-\sin t\right) \\ e^{3t}\left(\cos t-3\sin t\right) \\ e^{3t}\left(5\cos t\right) \end{array}\right)$$

$$\beta=0,\gamma=1\rightsquigarrow \underline{\mathbf{x}}_3(t)\overset{\text{not.}}{=}\varphi_3(t)=\left(\begin{array}{c} x_3(t) \\ y_3(t) \\ z_3(t) \end{array}\right)=\left(\begin{array}{c} e^{3t}\left(\cos t+2\sin t\right) \\ e^{3t}\left(3\cos t+\sin t\right) \\ e^{3t}\left(5\sin t\right) \end{array}\right)$$

Din algoritm se obţin 3 soluţii liniar independente, adică $B = (\underline{\mathbf{x}}_1, \underline{\mathbf{x}}_2, \underline{\mathbf{x}}_3)$ este un sistem fundamental de soluţii ale (SO) :

$$W(t; \underline{\mathbf{x}}_1, \underline{\mathbf{x}}_2, \underline{\mathbf{x}}_3) = \begin{vmatrix} e^{2t} & e^{3t}(2\cos t - \sin t) & e^{3t}(\cos t + 2\sin t) \\ 0 & e^{3t}(\cos t - 3\sin t) & e^{3t}(3\cos t + \sin t) \\ e^{2t} & e^{3t}(5\cos t) & e^{3t}(5\sin t) \end{vmatrix} = -10e^{8t} \neq 0, \forall t$$

Coloanele $(\underline{\mathbf{x}}_1, \underline{\mathbf{x}}_2, \underline{\mathbf{x}}_3)$ nu generează $e^{tA}, \mathcal{W}(0; \underline{\mathbf{x}}_1, \underline{\mathbf{x}}_2, \underline{\mathbf{x}}_3) \neq I_3$.

Pasul 3. Soluţia generală a SO este:

-sau $\underline{\mathbf{x}}_o(t; \underline{\mathbf{c}}) = \mathcal{X}(t; \underline{\mathbf{x}}_1, \underline{\mathbf{x}}_2, \underline{\mathbf{x}}_3) \cdot \underline{\mathbf{c}} = c_1\underline{\mathbf{x}}_1(t) + c_2\underline{\mathbf{x}}_2(t) + c_3\underline{\mathbf{x}}_3(t), t \in \mathbb{R}$, $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$.

$$\begin{pmatrix} x_o(t; c_1, c_2, c_3) \\ y_o(t; c_1, c_2, c_3) \\ z_o(t; c_1, c_2, c_3) \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} e^{2t} \\ 0 \\ e^{2t} \end{pmatrix} + c_2 e^{-t} \begin{pmatrix} e^{3t}(2\cos t - \sin t) \\ e^{3t}(\cos t - 3\sin t) \\ e^{3t}(5\cos t) \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} e^{3t}(\cos t + 2\sin t) \\ e^{3t}(3\cos t + \sin t) \\ e^{3t}(5\sin t) \end{pmatrix},$$

$c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$.

-sau $\underline{\mathbf{x}}_o(t; \underline{\mathbf{c}}) = e^{tA} \cdot \underline{\mathbf{c}}, \forall t \in \mathbb{I}$, $\underline{\mathbf{c}} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^n$−greoi.

Observaţia 4.2.3. <u>**Metoda eliminării**</u> a fost prezentată în Exemplul 4.1.1, pentru $n = 2$. Pentru $n \geq 3$ se face discuţie după rangul matricei coeficienţilor necunoscutelor ce se elimină, explicaţiile fiind în fiecare caz în parte prezentate nu pe teoria generală, ci doar în exerciţiile din seminar (pentru $n = 3$).

*REZOLVAREA SISTEMULUI DIFERENŢIAL NEOMOGEN SN ŞI A PROBLEMEI CAUCHY

Euristică 4.2.2. Se propune determinarea soluţiei generale pe $\mathbb{I}$ a sistemului neomogen (1). Teoremele 4.2.4., 4.2.5 ulterioare asigură soluţia generală a SN când se cunoaşte soluţia generală a SO (oferită de o matrice fundamentală $\mathcal{X}(t; \underline{\mathbf{x}}_1, \underline{\mathbf{x}}_2, \ldots, \underline{\mathbf{x}}_n)$ corespunzătoare unui sistem fundamental de soluţii sau $\mathcal{X}(t) = e^{tA}$) şi o soluţie particulară a SN (oferită ulterior de Teorema 4.2.6, în cazul general, când se cunoaşte un sistem fundamental de soluţii ale (SO), sau de Teoremele 4.2.7 şi 4.2.8, în cazul particular, când se cunoaşte un sistem fundamental de soluţii ale (SO), sistemul SN are coeficienţi <u>constanţi</u> şi termenii liberi <u>cvasipolinoame</u> de acelaşi tip sau o combinaţie liniară de cvasipolinoame de acelaşi tip).

Teorema 4.2.4. Fie $\mathcal{X}$ o matrice fundamentală a sistemului diferenţial omogen (2) şi fie $\underline{\mathbf{x}}_p : \mathbb{I} \to \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^n$ o soluţie particulară a sistemului diferenţial neomogen (1). O funcţie $\underline{\mathbf{x}} : \mathbb{I} \to \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^n$ este soluţie a sistemului diferenţial neomogen (1) dacă şi numai dacă este de forma

$$\boxed{\underline{\mathbf{x}}(t) = \mathcal{X}(t) \cdot \underline{\mathbf{c}} + \underline{\mathbf{x}}_p(t), t \in \mathbb{I}, \underline{\mathbf{c}} \in \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^n.}$$

În particular, soluţia generală a sistemului diferenţial neomogen (1) este

$$\boxed{\underline{\mathbf{x}}(t; \underline{\mathbf{c}}) = \underline{\mathbf{x}}_o(t; \underline{\mathbf{c}}) + \underline{\mathbf{x}}_p(t), t \in \mathbb{I}, \underline{\mathbf{c}} \in \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^n.}$$

unde $\underline{\mathbf{x}}_o(t; \underline{\mathbf{c}})$ este soluţia generală a sistemului diferenţial omogen (2) şi $\underline{\mathbf{x}}_p(t)$ este o soluţie particulară a sistemului diferenţial neomogen (1).

Demonstraţie. Ca în Secţiunea 4.1.

În ipotezele anterioare, fie problema Cauchy

$$\mathcal{PC}(\mathcal{D}) : \begin{cases} (1) & \underline{\mathbf{x}}'(t) = A \cdot \underline{\mathbf{x}}(t) + \underline{\mathbf{b}}(t), t \in \mathbb{I} \\ (CI) & \underline{\mathbf{x}}(t) = \underline{\mathbf{x}}_0. \end{cases}$$

Teorema 4.2.5. Fie $\mathcal{X}$ o matrice fundamentală a sistemului diferenţial omogen (2) (e^{tA} sau

$\mathcal{X}(t;\underline{\mathbf{x}}_1,\underline{\mathbf{x}}_2,\ldots,\underline{\mathbf{x}}_n)$). Atunci soluţia problemei Cauchy anterioare este dată de formula variaţiei constantelor:

$$\boxed{\underline{\mathbf{x}}(t)=e^{tA}\cdot e^{-t_0A}\cdot\underline{\mathbf{x}}_0+e^{tA}\cdot\int_{t_0}^{t}e^{-sA}\cdot\underline{\mathbf{b}}(s)\,ds,t\in\mathbb{I}.}$$

De menţionat că, în formulă e^{-tA} se înlocuieşte cu $\mathcal{X}^{-1}(t)$ dacă se cunoaşte altă matrice fundamentală decât e^{tA}.

Teorema 4.2.6. Fie e^{tA} sau $\mathcal{X}(t;\underline{\mathbf{x}}_1,\underline{\mathbf{x}}_2,\ldots,\underline{\mathbf{x}}_n)=\begin{pmatrix}x_{1,1}(t) & x_{1,2}(t) & \ldots & x_{1,n}(t)\\ x_{2,1}(t) & x_{2,2}(t) & \ldots & x_{2,n}(t)\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ x_{n,1}(t) & x_{n,2}(t) & \ldots & x_{n,n}(t)\end{pmatrix}$ o matrice fundamentală a sistemului diferenţial omogen (2), cu soluţia generală a SO

$\underline{\mathbf{x}}_o(t;\underline{\mathbf{c}})=c_1\underline{\mathbf{x}}_1(t)+\ldots+c_n\underline{\mathbf{x}}_n(t),\forall t\in\mathbb{I}$ şi $c_1,\ldots,c_n\in\mathbb{R}$.

(dacă se dă e^{tA}, atunci $\underline{\mathbf{x}}_1,\underline{\mathbf{x}}_2,\ldots,\underline{\mathbf{x}}_n$ sunt coloanele matricei e^{tA}).

Atunci o soluţie particulară $\underline{\mathbf{x}}_p(t)$ pe $\mathbb{I}$ a sistemului diferenţial neomogen (1) este de forma

$$\boxed{\underline{\mathbf{x}}_p(t)=u_1(t)\,\underline{\mathbf{x}}_1(t)+\ldots+u_n(t)\,\underline{\mathbf{x}}_n(t),\forall t\in\mathbb{I}.}$$

unde $u_i':\mathbb{I}\to\mathbb{R}$, $i\in\{1,\ldots,n\}$, sunt funcţii-soluţii ale sistemului

$$\begin{cases}u_1'(t)\,x_{1,1}(t)+\ldots+u_n'(t)\,x_{1,n}(t)=b_1(t)\\ u_1'(t)\,x_{2,1}(t)+\ldots+u_n'(t)\,x_{2,n}(t)=b_2(t)\\ \ldots\\ u_1'(t)\,x_{n,1}(t)+\ldots+u_n'(t)\,x_{n,n}(t)=b_n(t).\end{cases}$$

Demonstraţie. Ca în Secţiunea 4.1.

Exemplul 4.2.5. Să se rezolve

$$\begin{cases}x'=-4x-2y+\dfrac{2}{e^t+1}\\ y'=6x+3y-\dfrac{3}{e^t+1}\end{cases}$$

Rezolvare: Sistemul $(SN)\begin{cases}x'(t)=-4x(t)-2y(t)+\dfrac{2}{e^t+1}\\ y'(t)=6x(t)+3y(t)-\dfrac{3}{e^t+1}\end{cases},t\in\mathbb{I}=\mathbb{R}$,

este sistem de $n=2$ ecuaţii diferenţiale de ordin 1, liniare, cu coeficienţii constanţi, daţi de

$$A=\begin{pmatrix}-4 & -2\\ 6 & 3\end{pmatrix},\text{ neomogen, cu }\underline{\mathbf{b}}(t)=\begin{pmatrix}\dfrac{2}{e^t+1}\\ \dfrac{-3}{e^t+1}\end{pmatrix}.\text{ Are }n=2\text{ necunoscute }\begin{pmatrix}x(t)\\ y(t)\end{pmatrix}=?$$

Metoda directă, în SN, a eliminării- se poate aplica.

Metoda cu valori proprii

Etapa 1 : Se determină soluţia generală a SO ataşat sistemului SN:

$$(SO)\begin{cases}x'(t)=-4x(t)-2y(t)\\ y'(t)=6x(t)+3y(t)\end{cases},t\in\mathbb{I}=\mathbb{R}$$

Pasul 1 : Se ataşează ecuaţia caracteristică a matricei A şi se rezolvă. Adică se determină valorile proprii în $\mathbb{C}$ ale matricei A, precum şi multiplicitatea lor algebrică.

•Se determină polinomul caracteristic al matricei $A, P_A(\lambda)$.

$$\boxed{P_A(\lambda)=\det(A-\lambda I_2)}=\begin{vmatrix}-4-\lambda & -2\\ 6 & 3-\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2+\lambda$$

$$\boxed{P_A(\lambda)=(-1)^2\left(\lambda^2-\delta_1\lambda+\delta_2\right)}=\lambda^2+\lambda,\text{ unde}$$

$$\boxed{\delta_1=\operatorname{Tr}A}=-4+3=-1;$$

$\boxed{\delta_2 = \det A} = \begin{vmatrix} -4 & -2 \\ 6 & 3 \end{vmatrix} = 0$

•Se rezolvă ecuaţia caracteristică a matricei A,

$P_A(\lambda) = 0 \Leftrightarrow (*_{EC})\ \lambda^2 + \lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda(\lambda+1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0 \text{ cu } m(\lambda_1) = 1, \\ \lambda_2 = -1 \text{ cu } m(\lambda_2) = 1. \end{cases}$

Se observă că toate rădăcinile caracteristice sunt din $\mathbb{R}$, adică sunt valori proprii ale matricei A.

Spectrul matricei A este $\sigma(A) = \{0, -1\}$.

Raza spectrală a matricei A este $\rho(A) = \max\{|0|, |-1|\} = 1$.

<u>Pasul 2.</u> Se determină un sitem fundamental de soluţii ale SO / o matrice fundamentală a SO.

$\boxed{\text{modul 1.}}$- aplicabil dacă $A \sim D$ în $\mathbb{R}$. Se determină subspaţiile proprii ale matricei A, precum şi dimensiunile lor.

$\boxed{\lambda_1 = 0}$ Se caută vectorii proprii corespunzători valorii proprii $\lambda_1 = 0$, adică

$\underline{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times1}(\mathbb{R})$, $\underline{\mathbf{x}} \neq \underline{\boldsymbol{\theta}}_{\mathcal{M}_{2\times1}(\mathbb{R})}$ a.î.$(A - 0I_2)\underline{\mathbf{x}} = \underline{\boldsymbol{\theta}}_{\mathcal{M}_{2\times1}(\mathbb{R})}$, adică

$$\begin{cases} (-4-0)x_1 - 2x_2 = 0 \\ 6x_1 + (3-0)x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -\alpha \\ x_2 = 2\alpha \in \mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow$$

$S_{\lambda_1}(A) = \{\underline{\mathbf{x}} \in \mathcal{M}_{2\times1}(\mathbb{R}); \underline{\mathbf{x}} \text{ este vect. propriu. pt. } A \text{ coresp. val. proprii } \lambda_1 = 0\} \cup \left\{\underline{\boldsymbol{\theta}}_{\mathcal{M}_{2\times1}(\mathbb{R})}\right\} =$

$$= \left\{ \underline{\mathbf{x}} \in \mathcal{M}_{2\times1}(\mathbb{R}); \underline{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} -\alpha \\ 2\alpha \end{pmatrix} = \alpha \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}}_{\mathbf{u}_1^1 = \mathbf{v}_1}, \alpha \in \mathbb{R} \right\} =$$

$= \left[\left(\mathbf{u}_1^1\right)\right] \Rightarrow \dim_{\mathbb{R}} S_{\lambda_1}(A) = 1 = m(\lambda_1)$.

$\boxed{\lambda_2 = -1}$ Se caută vectorii proprii corespunzători valorii proprii $\lambda_2 = -1$, adică

$\underline{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times1}(\mathbb{R})$, $\underline{\mathbf{x}} \neq \underline{\boldsymbol{\theta}}_{\mathcal{M}_{2\times1}(\mathbb{R})}$ a.î.$(A + 1I_2)\underline{\mathbf{x}} = \underline{\boldsymbol{\theta}}_{\mathcal{M}_{2\times1}(\mathbb{R})}$, adică

$$\begin{cases} (-4+1)x_1 - 2x_2 = 0 \\ 6x_1 + (3+1)x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2\beta \\ x_2 = 3\beta \in \mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow$$

$S_{\lambda_2}(A) = \{\underline{\mathbf{x}} \in \mathcal{M}_{2\times1}(\mathbb{R}); \underline{\mathbf{x}} \text{ este vect. propriu. pt. } A \text{ coresp. val. proprii } \lambda_2 = -1\} \cup \left\{\underline{\boldsymbol{\theta}}_{\mathcal{M}_{2\times1}(\mathbb{R})}\right\} =$

$$= \left\{ \underline{\mathbf{x}} \in \mathcal{M}_{2\times1}(\mathbb{R}); \underline{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} -2\beta \\ 3\beta \end{pmatrix} = \beta \underbrace{\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}}_{\mathbf{u}_2^1 = \mathbf{v}_2}, \beta \in \mathbb{R} \right\} =$$

$= \left[\left(\mathbf{u}_1^2\right)\right] \Rightarrow \dim_{\mathbb{R}} S_{\lambda_2}(A) = 1 = m(\lambda_2)$.

Cum toate rădăcinile caracteristice ale matricei A sunt din $\mathbb{R}$ (sunt valori proprii) si cum multiplicităţile geometrice (dimensiunile subspaţiilor proprii) coincid cu multiplicităţile algebrice ale valorilor proprii, atunci, conform teoremei Jordan, matricea A este diagonalizabilă, adică

$\exists D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ matrice diagonală şi $\exists P = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ matrice modală, astfel încât $A \sim D$, adică $A = P \cdot D \cdot P^{-1}$ sau $D = P^{-1} \cdot A \cdot P$. Se precizează că matricea modală P este formată din coloanele vectorilor proprii, baze în $S_{\lambda_1}(A)$ respectiv $S_{\lambda_2}(A)$. Mai mult, matricea modală P este nesingulară, deoarece respectivii vectori proprii formează o bază în $\mathcal{M}_{2\times1}(\mathbb{R})$, cu $P =_C A_S$.

<u>modul 1.1.</u> Deoarece A este diagonalizabilă,

$\bullet\lambda_1 = 0,\ m(\lambda_1) = 1 \rightsquigarrow \underline{\mathbf{x}}^1(t) \overset{\text{notez}}{=} \varphi_1(t) = \begin{pmatrix} x^1(t) \\ y^1(t) \end{pmatrix} = e^{0t}\underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}}_{\mathbf{v}_1} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$

$\bullet\lambda_2 = -1,\ m(\lambda_2) = 1 \rightsquigarrow \underline{\mathbf{x}}^2(t) \overset{\text{notez}}{=} \varphi_2(t) = \begin{pmatrix} x^2(t) \\ y^2(t) \end{pmatrix} = e^{-t}\underbrace{\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}}_{\mathbf{v}_2} = \begin{pmatrix} -2e^{-t} \\ 3e^{-t} \end{pmatrix}.$

modul 1.2. O matrice fundamentală este

-sau $\mathcal{X}(t) = \mathcal{X}(t;\underline{\mathbf{x}}_1,\underline{\mathbf{x}}_2) = \begin{pmatrix} -1 & -2e^{-t} \\ 2 & 3e^{-t} \end{pmatrix}.$

-sau $\mathcal{X}(t) = e^{tA} = Pe^{tD}P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{0t} & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} =$

$= \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4e^{-t}-3 & 2e^{-t}-2 \\ 6-6e^{-t} & 4-3e^{-t} \end{pmatrix}$

modul 2. Pe baza teoriei de la ecuaţii diferenţiale liniare de ordin 2, se caută soluţii particulare liniar independente ale (SO):[...] Este aplicabil, cu acelaşi rezultat de la modul 1.1.

Pasul 3. Soluţia generală a SO este:

-sau $\underline{\mathbf{x}}_o(t;\underline{\mathbf{c}}) = \mathcal{X}(t;\underline{\mathbf{x}}_1,\underline{\mathbf{x}}_2)\cdot\underline{\mathbf{c}} = c_1\underline{\mathbf{x}}_1(t) + c_2\underline{\mathbf{x}}_2(t),\ t\in\mathbb{R},\ c_1,c_2\in\mathbb{R}.$

$\begin{pmatrix} x_o(t;c_1,c_2) \\ y_o(t;c_1,c_2) \end{pmatrix} = c_1e^{0t}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} + c_2e^{-t}\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -c_1-2c_2e^{-t} \\ 2c_1+3c_2e^{-t} \end{pmatrix},\ t\in\mathbb{R},\ c_1,c_2\in\mathbb{R}.$

-sau $\underline{\mathbf{x}}^o(t;\underline{\mathbf{c}}) = e^{tA}\cdot\underline{\mathbf{c}}, \forall t\in\mathbb{I},\ \underline{\mathbf{c}} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times1}(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^2,$

$\begin{pmatrix} x_o(t;c_1,c_2) \\ y_o(t;c_1,c_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4e^{-t}-3 & 2e^{-t}-2 \\ 6-6e^{-t} & 4-3e^{-t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}.$

Se va utiliza în continuare $\mathcal{X}(t;\underline{\mathbf{x}}_1,\underline{\mathbf{x}}_2)$.

Etapa 2 : Se determină o soluţie particulară a (SN), $\underline{\mathbf{x}}_p(t) =?$.

Metoda variaţiei constantelor pentru SN - teoretic, mereu aplicabilă; practic apar dificultăţi în aplicare când sistemul este de ordin mare şi apar de calculat (fără calculator) determinanţi funcţionali de ordinul respectiv, integrale.

Se caută de forma

$\underline{\mathbf{x}}_p(t) = u_1(t)\underline{\mathbf{x}}_1(t) + u_2(t)\underline{\mathbf{x}}_2(t), \forall t\in\mathbb{R},$

unde $u_i' : \mathbb{I}\to\mathbb{R}$, $i\in\{1,2\}$, sunt funcţii-soluţii ale sistemului

$$\begin{cases} u_1'(t)(-1) + u_2'(t)\left(-2e^{-t}\right) = \dfrac{2}{e^t+1} \\ u_1'(t)(2) + u_2'(t)\left(3e^{-t}\right) = \dfrac{-3}{e^t+1} \end{cases}$$

$\Delta(t) = W(t;\underline{\mathbf{x}}_1,\underline{\mathbf{x}}_2) = \begin{vmatrix} -1 & -2e^{-t} \\ 2 & 3e^{-t} \end{vmatrix} = e^{-t} \neq 0, \forall t\in\mathbb{R}.$

$$\Delta_1(t) = \begin{vmatrix} \dfrac{2}{e^t+1} & -2e^{-t} \\ \dfrac{-3}{e^t+1} & 3e^{-t} \end{vmatrix} = 0, \forall t\in\mathbb{R}.$$

$$\Delta_2(t) = \begin{vmatrix} -1 & \dfrac{2}{e^t+1} \\ 2 & \dfrac{-3}{e^t+1} \end{vmatrix} = -\frac{1}{e^t+1}, \forall t\in\mathbb{R}.$$

$$\begin{cases} u_1'(t) = \frac{\Delta_1(t)}{\Delta(t)} = \frac{0}{e^{-t}} = 0 \\ u_2'(t) = \frac{\Delta_2(t)}{\Delta(t)} = \frac{\frac{-1}{e^t+1}}{e^{-t}} = \dfrac{-e^t}{e^t+1} \end{cases} \Bigg| \int (\cdot)\, dt \Rightarrow \begin{cases} u_1(t) = 0 + k_1 \\ u_2(t) = -\ln\left(e^t+1\right) + k_2 \end{cases}$$

Deoarece se caută o soluţie particulară $\underline{\mathbf{x}}_p$, se alege $k_1 = 0$, $k_2 = 0$. S-a obţinut

$$\begin{pmatrix} x_p(t) \\ y_p(t) \end{pmatrix} = 0 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} - \ln\left(e^t+1\right) \begin{pmatrix} -2e^{-t} \\ e^{-t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2e^{-t}\ln\left(e^t+1\right) \\ -e^{-t}\ln\left(e^t+1\right) \end{pmatrix},$$
$\forall t \in \mathbb{R}$

Metoda coeficienţilor nedeterminaţi pentru SN Nu se poate aplica, deoarece sistemul neomogen SN are coeficienţi constanţi, dar nu are termenii liberi cvasipolinoame.

Etapa 3 : Soluţia generală a sistemului diferenţial neomogen SN este

$\underline{\mathbf{x}}(t; \underline{\mathbf{c}}) = \underline{\mathbf{x}}_o(t; \underline{\mathbf{c}}) + \underline{\mathbf{x}}_p(t), t \in \mathbb{R}, \underline{\mathbf{c}} \in \mathcal{M}_{3\times 1}(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^3$,

unde $\underline{\mathbf{x}}_o(t; \underline{\mathbf{c}})$ este soluţia generală SO şi $\underline{\mathbf{x}}_p(t)$ este o soluţie particulară a SN, adică

$$\begin{pmatrix} x(t; c_1, c_2) \\ y(t; c_1, c_2) \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -2e^{-t} \\ e^{-t} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2e^{-t}\ln\left(e^t+1\right) \\ -e^{-t}\ln\left(e^t+1\right) \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} -c_1 - 2c_2e^{-t} + 2e^{-t}\ln\left(e^t+1\right) \\ 2c_1 + c_2e^{-t} - e^{-t}\ln\left(e^t+1\right) \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}, \underline{\mathbf{c}} \in \mathcal{M}_{2\times 1}(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^2.$$

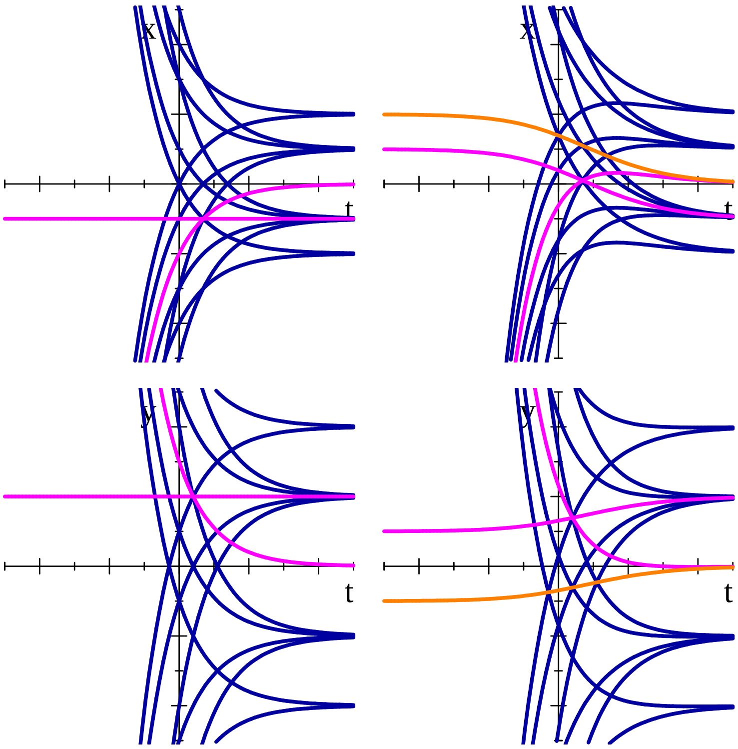
Reprezentând grafic pe x_o şi y_o, alături pe x şi y, pe $\mathbb{I} = \mathbb{R}$ pentru $(c_1, c_2) = (1, 0)$ şi $(c_1, c_2) = (0, 1)$ cu magenta (corespunzătoare soluţiilor particulare din sistemul fundamental) şi pentru

$(c_1, c_2) = (1, 1), (c_1, c_2) = (1, -1), (c_1, c_2) = (-1, 1), (c_1, c_2) = (-1, -1),$

$(c_1, c_2) = (1, 2), (c_1, c_2) = (2, 1), (c_1, c_2) = (-1, 2), (c_1, c_2) = (-2, 1)$

$(c_1, c_2) = (1, -2), (c_1, c_2) = (2, -1), (c_1, c_2) = (-1, -2), (c_1, c_2) = (-2, -1)$

cu albastru şi pentru $(c_1, c_2) = (0, 0)$ cu portocaliu soluţia particulară obţinută cu metoda variaţiei constantelor, se obţine:



Teorema 4.2.7. (**metoda coeficienţilor nedeterminaţi**) Fie SN (1) cu $\underline{\mathbf{b}}$ având pe coloană cvasipolinoame de acelaşi tip, adică

$$\boxed{b_i(t) = e^{\alpha t}\left(P_i(t)\cos(\beta t) + Q_i(t)\sin(\beta t)\right), \forall t \in \mathbb{R}, i = \overline{1,n}}$$

unde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, iar P_i, Q_i sunt polinoame, $i = \overline{1,n}$.
Dacă $\lambda = \alpha + \beta i$ este rădăcină a EC, cu multiplicitatea $m(\lambda) = s$ ($s = 0$ dacă $\lambda = \alpha + \beta i$ nu este rădăcină a EC), atunci SN admite o soluţie particulară de forma

$$\underline{\mathbf{x}}_p(t) = \begin{pmatrix} x_{1,p}(t) \\ ... \\ x_{n,p}(t) \end{pmatrix}, \text{ cu}$$

$$\boxed{x_{i,p}(t) = e^{\alpha t}\left(A_i(t)\cos(\beta t) + B_i(t)\sin(\beta t)\right), \forall t \in \mathbb{R}.}$$

A_i şi B_i sunt polinoame de grad egal cu cel mai mare dintre gradele lui P_i şi Q_i la care se adună s, iar coeficienţii lor se determină impunând ca $\underline{\mathbf{x}}_p$ să verifice SN.
Demonstraţie. Se bazează pe rezolvare de sistem de ecuaţii algebrice liniare, neomogen, obţinut folosind regulile de derivare şi definiţia funcţiei exponenţiale în $\mathbb{C}$.
Teorema 4.2.8. (**principiul superpoziţiei**) Fie SN (1), cu $\underline{\mathbf{b}}$ combinaţie liniară de coloane de funcţii continue (pot fi cvasipolinome în particular), adică

$$\boxed{\underline{\mathbf{b}}(t) = \overline{c}_1\underline{\mathbf{b}}_1(t) + ... + \overline{c}_r\underline{\mathbf{b}}_r(t), \forall t \in \mathbb{I} \text{ şi } \overline{c}_1, ..., \overline{c}_r \in \mathbb{R}.}$$

unde $\underline{\mathbf{b}}_i \in C(\mathbb{R};\mathbb{R}^n)$ (în particular $\underline{\mathbf{b}}_i$ pot fi de forma (7)). Dacă, pentru $\forall i \in \{1, ..., r\}$, $\underline{\mathbf{x}}_{p_i}$ sunt soluţii particulare pentru (SN$_i$)

$$\boxed{\underline{\mathbf{x}}'(t) = A \cdot \underline{\mathbf{x}}(t) + \underline{\mathbf{b}}_i(t), t \in \mathbb{R}}$$

atunci

$$\boxed{\underline{\mathbf{x}}_p(t) = \overline{c}_1\underline{\mathbf{x}}_{p_1}(t) + ... + \overline{c}_r\underline{\mathbf{x}}_{p_r}(t), \forall t \in \mathbb{R} \text{ şi } \overline{c}_1, ..., \overline{c}_r \in \mathbb{R}.}$$

este soluţie particulară pentru EN.
Demonstraţie. Ca la ecuaţii EN de ordin n.

Exemplul 4.2.6. Să se rezolve

$$\begin{cases} x' = \quad\; y + z + t \\ y' = x \quad\; + z \\ z' = x + y \end{cases}$$

Rezolvare: Sistemul $(SN)\begin{cases} x'(t) = \quad\; y(t) + z(t) + t \\ y'(t) = x(t) \quad\; + z(t) + 0 \\ z'(t) = x(t) + y(t) \quad\; + 0 \end{cases}, t \in \mathbb{R},$

este sistem de $n = 3$ ecuaţii diferenţiale de ordin 1, liniare, cu coeficienţii constanţi, daţi de

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \text{ neomogen, cu } \underline{\mathbf{b}}(t) = \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ cu } n = 3 \text{ necunoscute } \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = ?$$

<u>**Metoda cu valori proprii**</u>

<u>Etapa 1 :</u> Se determină soluţia generală a SO ataşat sistemului

$$(SO)\begin{cases} x'(t) = \quad\; y(t) + z(t) + 0 \\ y'(t) = x(t) \quad\; + z(t) + 0 \\ z'(t) = x(t) + y(t) \quad\; + 0 \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

Cu metoda cu valori proprii, s-a găsit la Exemplul 4.2.2, că soluţia generală a SO este:
-sau $\underline{\mathbf{x}}_o(t;\underline{\mathbf{c}}) = \mathcal{X}(t;\underline{\mathbf{x}}_1, \underline{\mathbf{x}}_2, \underline{\mathbf{x}}_3) \cdot \underline{\mathbf{c}} = c_1\underline{\mathbf{x}}_1(t) + c_2\underline{\mathbf{x}}_2(t) + c_3\underline{\mathbf{x}}_3(t), t \in \mathbb{R}, c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}.$

$$\begin{pmatrix} x_o(t;c_1,c_2,c_3) \\ y_o(t;c_1,c_2,c_3) \\ z_o(t;c_1,c_2,c_3) \end{pmatrix} = c_1 e^{-t}\underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\mathbf{v}_1} + c_2 e^{-t}\underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\mathbf{v}_2} + c_3 e^{2t}\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\mathbf{v}_3}, c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}.$$

$$\begin{pmatrix} x_o(t;c_1,c_2,c_3) \\ y_o(t;c_1,c_2,c_3) \\ z_o(t;c_1,c_2,c_3) \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} -e^{-t} \\ e^{-t} \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -e^{-t} \\ 0 \\ e^{-t} \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}.$$

-sau $\underline{\mathbf{x}}_o(t;\underline{\mathbf{c}}) = e^{tA} \cdot \underline{\mathbf{c}}, \forall t \in \mathbb{I}, \underline{\mathbf{c}} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^n,$

$$\begin{pmatrix} x_o(t;c_1,c_2,c_3) \\ y_o(t;c_1,c_2,c_3) \\ z_o(t;c_1,c_2,c_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3}e^{-t}+\frac{1}{3}e^{2t} & \frac{1}{3}e^{2t}-\frac{1}{3}e^{-t} & \frac{1}{3}e^{2t}-\frac{1}{3}e^{-t} \\ \frac{1}{3}e^{2t}-\frac{1}{3}e^{-t} & \frac{2}{3}e^{-t}+\frac{1}{3}e^{2t} & \frac{1}{3}e^{2t}-\frac{1}{3}e^{-t} \\ \frac{1}{3}e^{2t}-\frac{1}{3}e^{-t} & \frac{1}{3}e^{2t}-\frac{1}{3}e^{-t} & \frac{2}{3}e^{-t}+\frac{1}{3}e^{2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}.$$

Se va folosi $\underline{\mathbf{x}}_o(t;\underline{\mathbf{c}}) = \mathcal{X}(t;\underline{\mathbf{x}}_1,\underline{\mathbf{x}}_2,\underline{\mathbf{x}}_3) \cdot \underline{\mathbf{c}}$.

Etapa 2 : Se determină o soluţie particulară a SN, $\underline{\mathbf{x}}_p(t) = ?$.

Metoda variaţiei constantelor – teoretic, mereu aplicabilă; practic apar dificultăţi în aplicare când sistemul este de ordin mare şi apar de calculat (fără calculator) determinanţi funcţionali de ordinul respectiv, integrale.

Se caută de forma

$\underline{\mathbf{x}}_p(t) = u_1(t)\underline{\mathbf{x}}_1(t) + u_2(t)\underline{\mathbf{x}}_2(t) + u_3(t)\underline{\mathbf{x}}_3(t), \forall t \in \mathbb{R},$

unde $u_i' : \mathbb{I} \to \mathbb{R}$, $i \in \{1,2,3\}$, sunt funcţii-soluţii ale sistemului

$$\begin{cases} u_1'(t)\left(-e^{-t}\right) + u_2'(t)\left(-e^{-t}\right) + u_3'(t)\left(e^{2t}\right) = t \\ u_1'(t)\left(e^{-t}\right) + u_2'(t)(0) + u_3'(t)\left(e^{2t}\right) = 0 \\ u_1'(t)(0) + u_2'(t)\left(e^{-t}\right) + u_3'(t)\left(e^{2t}\right) = 0. \end{cases}$$

$$\Delta(t) = W(t;\underline{\mathbf{x}}_1,\underline{\mathbf{x}}_2,\underline{\mathbf{x}}_3) = \begin{vmatrix} -e^{-t} & -e^{-t} & e^{2t} \\ e^{-t} & 0 & e^{2t} \\ 0 & e^{-t} & e^{2t} \end{vmatrix} = 3 \neq 0, \forall t \in \mathbb{R}.$$

$$\Delta_1(t) = \begin{vmatrix} t & -e^{-t} & e^{2t} \\ 0 & 0 & e^{2t} \\ 0 & e^{-t} & e^{2t} \end{vmatrix} = -te^{t}, \forall t \in \mathbb{R}.$$

$$\Delta_2(t) = \begin{vmatrix} -e^{-t} & t & e^{2t} \\ e^{-t} & 0 & e^{2t} \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{vmatrix} = -te^{t}, \forall t \in \mathbb{R}.$$

$$\Delta_3(t) = \begin{vmatrix} -e^{-t} & -e^{-t} & t \\ e^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-t} & 0 \end{vmatrix} = te^{-2t}, \forall t \in \mathbb{R}.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} u_1'(t) = \frac{\Delta_1(t)}{\Delta(t)} = \frac{-te^t}{3} \\ u_2'(t) = \frac{\Delta_2(t)}{\Delta(t)} = \frac{-te^t}{3} \\ u_3'(t) = \frac{\Delta_3(t)}{\Delta(t)} = \frac{te^{-2t}}{3} \end{array} \right| \int(\cdot)\,dt \Rightarrow \begin{cases} u_1(t) = -\frac{1}{3}e^t(t-1) + k_1 \\ u_2(t) = -\frac{1}{3}e^t(t-1) + k_2 \\ u_3(t) = -\frac{1}{12}e^{-2t}(2t+1) + k_3 \end{cases}$$

Deoarece se caută o soluţie particulară $\underline{\mathbf{x}}_p$, se alege $k_1 = 0$, $k_2 = 0$, $k_3 = 0$. S-a obţinut

$$\begin{pmatrix} x_p(t) \\ y_p(t) \\ z_p(t) \end{pmatrix} = -\frac{1}{3}e^t(t-1)\begin{pmatrix} -e^{-t} \\ e^{-t} \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{3}e^t(t-1)\begin{pmatrix} -e^{-t} \\ 0 \\ e^{-t} \end{pmatrix} - \frac{1}{12}e^{-2t}(2t+1)\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}t - \frac{3}{4} \\ \frac{1}{4} - \frac{1}{2}t \\ \frac{1}{4} - \frac{1}{2}t \end{pmatrix}, \forall t \in \mathbb{R}$$

Metoda coeficienţilor nedeterminaţi Deoarece SN are coeficienţi constanţi şi termenul liber având pe coloane cvasipolinoame de acelaşi tip atunci se poate căuta $\underline{\mathbf{x}}_p$ cu Teorema 4.2.7. Întradevăr,

$$\underline{\mathbf{b}}(t)=\begin{pmatrix} t\\ 0\\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} e^{0t}(t\cos(0t)+1\sin(0t))\\ e^{0t}(0\cos(0t)+1\sin(0t))\\ e^{0t}(0\cos(0t)+1\sin(0t))\end{pmatrix}$$

adică este de forma din teoremă Cum $\lambda=0+0i$ nu este rădacină caracteristică$\Rightarrow s=0\Rightarrow$ se caută o soluţie particulară pentru SN de forma

$$\underline{\mathbf{x}}_p(t)=\begin{pmatrix} x_p(t)\\ y_p(t)\\ z_p(t)\end{pmatrix}=t^0\begin{pmatrix} e^{0t}(A_1(t)\cos(0t)+B_1(t)\sin(0t))\\ e^{0t}(A_2(t)\cos(0t)+B_2(t)\sin(0t))\\ e^{0t}(A_3(t)\cos(0t)+B_3(t)\sin(0t))\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A_1(t)\\ A_2(t)\\ A_3(t)\end{pmatrix},\forall t\in\mathbb{R},$$

unde A_i şi B_1 sunt polinooame de grad 1. Se determină coeficienţii polinomului $A_i(t)=\mu_{0,i}+\mu_{1,i}t$, $i\in\{0,1,2\}$, impunând ca

$$\begin{pmatrix} x_p(t)\\ y_p(t)\\ z_p(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \mu_{0,1}+\mu_{1,1}t\\ \mu_{0,2}+\mu_{1,2}t\\ \mu_{0,3}+\mu_{1,3}t\end{pmatrix} \text{ să fie soluţie particulară a } SN.$$

$$\begin{cases} \mu_{1,1}= & (\mu_{0,2}+\mu_{1,2}t)+(\mu_{0,3}+\mu_{1,3}t)+t\\ \mu_{1,2}=(\mu_{0,1}+\mu_{1,1}t) & +(\mu_{0,3}+\mu_{1,3}t)\\ \mu_{1,3}=(\mu_{0,1}+\mu_{1,1}t)+(\mu_{0,2}+\mu_{1,2}t) & \end{cases}$$

Identificăm coeficienţii puterilor lui $t\Rightarrow$

$$\begin{array}{l} t^0:\\ t^1:\\ t^0:\\ t^1:\\ t^0:\\ t^1:\end{array}\begin{cases} \mu_{1,1}=\mu_{0,2}+\mu_{0,3}\\ 0=\mu_{1,2}+\mu_{1,3}+1\\ \mu_{1,2}=\mu_{0,1}+\mu_{0,3}\\ 0=\mu_{1,1}+\mu_{1,3}\\ \mu_{1,3}=\mu_{0,1}+\mu_{0,2}\\ 0=\mu_{1,1}+\mu_{1,2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} \mu_{0,2}+\mu_{0,3}-\mu_{1,1}=0\\ \mu_{1,2}+\mu_{1,3}=-1\\ \mu_{0,1}+\mu_{0,3}-\mu_{1,2}=0\\ \mu_{1,1}+\mu_{1,3}=0\\ \mu_{0,1}+\mu_{0,2}-\mu_{1,3}=0\\ \mu_{1,1}+\mu_{1,2}=0\end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 0&1&1&-1&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&1&-1\\ 1&0&1&0&-1&0&0\\ 0&0&0&1&0&1&0\\ 1&1&0&0&0&-1&0\\ 0&0&0&1&1&0&0\end{array}\right)\overset{Gauss}{\sim}\left(\begin{array}{cccccc|c} 1&0&0&0&0&0&-\frac{3}{4}\\ 0&1&0&0&0&0&\frac{1}{4}\\ 0&0&1&0&0&0&\frac{1}{4}\\ 0&0&0&1&0&0&\frac{1}{2}\\ 0&0&0&0&1&0&-\frac{1}{2}\\ 0&0&0&0&0&1&-\frac{1}{2}\end{array}\right)\Rightarrow\begin{cases} \mu_{0,1}=\frac{-3}{4}\\ \mu_{0,2}=\frac{1}{4}\\ \mu_{0,3}=\frac{1}{4}\\ \mu_{1,1}=\frac{1}{2}\\ \mu_{1,2}=\frac{-1}{2}\\ \mu_{1,3}=\frac{-1}{2}\end{cases}$$

S-a obţinut

$$\begin{pmatrix} x_p(t)\\ y_p(t)\\ z_p(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{-3}{4}+\frac{1}{2}t\\ \frac{1}{4}+\frac{-1}{2}t\\ \frac{1}{4}+\frac{-1}{2}t\end{pmatrix},\forall t\in\mathbb{R}.$$

S-a întâmplat să se obţină exact aceeaşi soluţie ca la metoda variaţiei constantelor de mai sus.

De menţionat că polinoamele se pot considera de coeficienţi numerele reale a,b,c,d,e,f sau $u_1,u_2,...,u_6$, pentru a nu fi dificilă scrierea coeficienţilor.

Etapa 3 : Soluţia generală a sistemului diferenţial neomogen SN este

$$\underline{\mathbf{x}}(t;\underline{\mathbf{c}})=\underline{\mathbf{x}}_o(t;\underline{\mathbf{c}})+\underline{\mathbf{x}}_p(t),t\in\mathbb{R},\ \underline{\mathbf{c}}\in\mathcal{M}_{3\times1}(\mathbb{R})\simeq\mathbb{R}^3,$$

unde $\underline{\mathbf{x}}_o(t;\underline{\mathbf{c}})$ este soluţia generală SO şi $\underline{\mathbf{x}}_p(t)$ este o soluţie particulară a SN, adică

$$\begin{pmatrix} x(t;c_1,c_2,c_3)\\ y(t;c_1,c_2,c_3)\\ z(t;c_1,c_2,c_3)\end{pmatrix}=c_1\begin{pmatrix} -e^{-t}\\ e^{-t}\\ 0\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix} -e^{-t}\\ 0\\ e^{-t}\end{pmatrix}+c_3\begin{pmatrix} e^{2t}\\ e^{2t}\\ e^{2t}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix} \frac{1}{2}t-\frac{3}{4}\\ \frac{1}{4}-\frac{1}{2}t\\ \frac{1}{4}-\frac{1}{2}t\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} -c_1e^{-t}-c_2e^{-t}+c_3e^{2t}+\frac{1}{2}t-\frac{3}{4}\\ c_1e^{-t}+c_3e^{2t}-\frac{1}{2}t+\frac{1}{4}\\ c_2e^{-t}+c_3e^{2t}-\frac{1}{2}t+\frac{1}{4}\end{pmatrix},t\in\mathbb{R},\ \underline{\mathbf{c}}\in\mathcal{M}_{3\times1}(\mathbb{R})\simeq\mathbb{R}^3.$$