SEMINAR NR. 10, REZOLVĂRI
EDCO, AIA

○5. INTEGRALA IMPROPRIE $f : \mathbb{I} \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

-se va studia la Statistică şi Prelucrarea Datelor

5.1. Definiţii. Exemple. Proprietăţi

Observaţie-definiţie.

I. Integrale improprii de speţa întâi, pe interval nemărginit.

În ipotezele din Curs asupra $f \in \mathcal{R}_{\text{loc}}(\mathbb{I})$, se face convenţia ca definiţia să se rescrie:

$$\boxed{\int_a^{+\infty} f(x)\,dx \overset{\text{d. }\exists}{=} \lim_{\lambda\to+\infty}\left(\int_a^{\lambda} f(x)\,dx\right).}$$

$$\boxed{\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx \overset{\text{d. }\exists}{=} \lim_{\lambda\to-\infty}\left(\int_{\lambda}^{b} f(x)\,dx\right).}$$

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx \overset{\text{d. }\exists}{=} \lim_{\lambda\to-\infty}\left(\int_{\lambda}^{c} f(x)\,dx\right) + \lim_{\mu\to+\infty}\left(\int_{c}^{\mu} f(x)\,dx\right).}$$

Integralele anterioare sunt *convergente* (C) dacă limita anterioară există şi este finită şi *divergentă* (D) dacă nu există limita anterioară, sau există şi este $-\infty$ sau $+\infty$.
În ipoteza că F este o primitivă a lui f, atunci

$$\boxed{\int_a^{+\infty} f(x)\,dx \overset{\text{dacă }\exists}{=} \left(\lim_{x\to+\infty} F(x)\right) - F(a) \overset{\text{not.}}{=} F(x)\Big|_{x=a}^{x\to+\infty}.}$$

$$\boxed{\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx \overset{\text{dacă }\exists}{=} F(b) - \left(\lim_{x\to-\infty} F(x)\right) \overset{\text{not.}}{=} F(x)\Big|_{x\to-\infty}^{x=b}.}$$

II. Integrale improprii de speţa a doua, cu integrant nemărginit.

În ipotezele din Curs asupra $f \in \mathcal{R}_{\text{loc}}(\mathbb{I})$ care este nemărginită, se face convenţia ca definiţia să se rescrie:

$$\boxed{\int_a^{b-0} f(x)\,dx \overset{\text{d. }\exists}{=} \lim_{\lambda\to b,\lambda<b}\left(\int_a^{\lambda} f(x)\,dx\right).}$$

$$\boxed{\int_{a+0}^{b} f(x)\,dx \overset{\text{d. }\exists}{=} \lim_{\lambda\to a,\lambda>a}\left(\int_{\lambda}^{b} f(x)\,dx\right).}$$

$$\boxed{\int_{a+0}^{b-0} f(x)\,dx \overset{\text{d. }\exists}{=} \lim_{\lambda\to a,\lambda>a}\left(\int_{\lambda}^{c} f(x)\,dx\right) + \lim_{\mu\to b,\mu<b}\left(\int_{c}^{\mu} f(x)\,dx\right).}$$

Integralele anterioare sunt *convergente* (C) dacă limita anterioară există şi este finită şi *divergentă* (D) dacă nu există limita anterioară, sau există şi este $-\infty$ sau $+\infty$.
În ipoteza că F este o primitivă a lui f, atunci

$$\boxed{\int_a^{b-0} f(x)\,dx \overset{\text{dacă }\exists}{=} \left(\lim_{x\to b,x<b} F(x)\right) - F(a) \overset{\text{not.}}{=} F(x)\Big|_{x=a}^{x\to b,x<b}.}$$

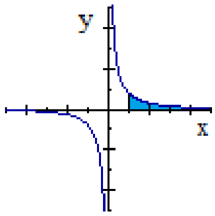
$$\boxed{\int_{a+0}^{b} f(x)\,dx \overset{\text{dacă }\exists}{=} F(b) - \lim_{x\to a,x>a}(F(x)) \overset{\text{not.}}{=} F(x)\Big|_{x\to a,x>a}^{x=b}.}$$

Exerciţiul 1. Să se studieze natura şi valoarea integralelor de speţa întâi, pe interval nemărginit:
a) $\int_0^{+\infty}(xe^x)\,dx$- a se vedea Curs;
b) $\int_{-\infty}^{0}(xe^x)\,dx$ - a se vedea Curs;

c) $\int_{-\infty}^{-\pi} (\cos x)\, dx$ - a se vedea Curs;

d) $\int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{x^2} dx.$

Rezolvare. etapa 1. $f : [1, +\infty[\to \mathbb{R}, f(x) = \frac{\operatorname{arctg} x}{x^2}.$



f este bine definită şi continuă pe $[1, +\infty[\Rightarrow f \in \mathcal{R}_{\text{loc}}([1, +\infty[)$

$b = +\infty$ este unicul punct singular pentru integrala improprie de speţa 1, pe interval nemărginit.

etapa 2. Se studiază natura şi valoarea integralei, aplicând Definiţia.

pasul 1. Se determină o primitivă pe $[1, +\infty[$ pentru f.

$$F(x;c) = \int \frac{\operatorname{arctg} x}{x^2} dx = \int (\operatorname{arctg} x) \left(\frac{-1}{x}\right)' dx =$$
$$= (\operatorname{arctg} x) \left(\frac{-1}{x}\right) - \int \frac{1}{1+x^2} \cdot \frac{-1}{x} dx = -\frac{\operatorname{arctg} x}{x} + \int \left(\frac{1}{x} - \frac{x}{1+x^2}\right) dx =$$
$$= -\frac{\operatorname{arctg} x}{x} + \int \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2}\frac{(1+x^2)'}{1+x^2}\right) dx = -\frac{\operatorname{arctg} x}{x} + \ln x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) =$$
$$= -\frac{\operatorname{arctg} x}{x} + \frac{1}{2}\ln \frac{x^2}{1+x^2} + c, \forall x \in [1, +\infty[, \forall c \in \mathbb{R}.$$

pasul 2-detaliat $\int_1^{+\infty} f(x)\, dx \overset{\text{dacă } \exists}{=} \lim_{\lambda \to +\infty} \left(\int_1^{\lambda} f(x)\, dx\right).$

Se calculează, pentru $\lambda \in [1, +\infty[$,

$$\int_1^{\lambda} \frac{\operatorname{arctg} x}{x^2} dx = \left(-\frac{\operatorname{arctg} x}{x} + \frac{1}{2}\ln\frac{x^2}{1+x^2}\right)\Bigg|_{x=1}^{x=\lambda} = \left(-\frac{\operatorname{arctg}\lambda}{\lambda} + \frac{1}{2}\ln\frac{\lambda^2}{1+\lambda^2}\right) - \left(-\frac{\operatorname{arctg} 1}{1} + \frac{1}{2}\ln\frac{1^2}{1+1^2}\right).$$

Se determină, dacă există,

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\left(\int_1^{\lambda}\frac{\operatorname{arctg} x}{x^2}dx\right) = \lim_{\lambda\to+\infty}\left(-\frac{\operatorname{arctg}\lambda}{\lambda} + \frac{1}{2}\ln\frac{\lambda^2}{1+\lambda^2} + \frac{\frac{\pi}{4}}{1} - \frac{1}{2}\ln\frac{1}{2}\right) = -0 + 0 + \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\ln 2.$$

pasul 2-direct. $\int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{x^2} dx \overset{\text{dacă } \exists}{=} \left(-\frac{\operatorname{arctg} x}{x} + \frac{1}{2}\ln\frac{x^2}{1+x^2}\right)\Bigg|_{x=1}^{x\to+\infty} =$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{\operatorname{arctg} x}{x} + \frac{1}{2}\ln\frac{x^2}{1+x^2}\right) - \left(-\frac{\operatorname{arctg} 1}{1} + \frac{1}{2}\ln\frac{1^2}{1+1^2}\right) = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\ln 2.$$

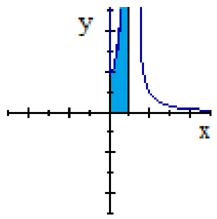
Se deduce că integrala improprie dată este convergentă şi are valoarea $\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\ln 2$, adică

$$\int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{x^2} dx = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\ln 2.$$

Execiţiul 2. Să se studieze natura şi valoarea integralelor de speţa a doua, cu integrant nemărginit:

a) $\int_{\frac{1}{e}}^{1} \frac{1}{x\ln^2 x} dx.$

Rezolvare. etapa 1. $f : \left[\frac{1}{e}, 1\right[\to \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{x\ln^2 x}.$



f este bine definită şi continuă pe $\left[\frac{1}{e}, 1\right[\Rightarrow f \in \mathcal{R}_{\text{loc}}\left(\left[\frac{1}{e}, 1\right[\right)$.

$b = 1$ este unicul punct singular pentru integrala improprie de speţa 2, cu integrant nemărginit, deoarece $\lim\limits_{x\to 1, x<1} f(x) = \lim\limits_{x\to 1, x<1} \dfrac{1}{x \ln^2 x} = +\infty$.

etapa 2. Se studiază natura şi valoarea integralei, aplicând Definiţia.

pasul 1.Se determină o primitivă pe $\left[\frac{1}{e}, 1\right[$ pentru f.

$$\int \frac{1}{x \ln^2 x} dx = \int (\ln x)^{-2} (\ln x)' \, dx = \frac{(\ln x)^{-1}}{-1} + c, \forall x \in \left[\tfrac{1}{e}, 1\right[, \forall c \in \mathbb{R}.$$

pasul 2-detaliat. $\int_{\frac{1}{e}}^{1-0} f(x)\, dx \overset{\text{dacă } \exists}{=} \lim\limits_{\lambda\to 1, \lambda<1} \left(\int_{\frac{1}{e}}^{\lambda} f(x)\, dx\right)$.

Se calculează, pentru $\lambda \in \left[\frac{1}{e}, 1\right[$,

$$\int_{\frac{1}{e}}^{\lambda} \frac{1}{x \ln^2 x} dx = \left.\frac{(\ln x)^{-1}}{-1}\right|_{x=\frac{1}{e}}^{x=\lambda} = \frac{-1}{\ln \lambda} - \frac{-1}{\ln \frac{1}{e}}.$$

Se determină, dacă există,

$$\lim_{\lambda\to 1, \lambda<1} \left(\int_{\frac{1}{e}}^{\lambda} \frac{1}{x \ln^2 x} dx\right) = \lim_{\lambda\to 1, \lambda<1} \left(\frac{-1}{\ln \lambda} - \frac{-1}{-1}\right) = +\infty.$$

pasul 2-direct. $\int_{\frac{1}{e}}^{1-0} \dfrac{1}{x \ln^2 x} dx \overset{\text{dacă } \exists}{=} \left.\dfrac{(\ln x)^{-1}}{-1}\right|_{x=\frac{1}{e}}^{x\to 1, x<1} = \lim\limits_{x\to 1, x<1} \left(\dfrac{-1}{\ln x}\right) - \left(\dfrac{-1}{\ln \frac{1}{e}}\right) = +\infty$.

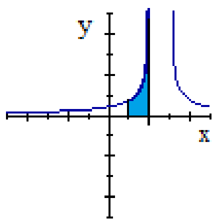
Se deduce că integrala improprie dată este divergentă şi are valoarea $+\infty$, adică

$$\int_{\frac{1}{e}}^{1} \frac{1}{x \ln^2 x} dx = +\infty.$$

b) $\int_1^2 \dfrac{1}{\sqrt[3]{x-1}} dx$- a se vedea Curs;

c) $\int_1^2 \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - 5x + 6}} dx$.

Rezolvare. etapa 1. $f : [1, 2[\to \mathbb{R}, f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - 5x + 6}}$.



f este bine definită şi continuă pe $[1, 2[\Rightarrow f \in \mathcal{R}_{\text{loc}}([1, 2[)$

$b = 2$ este unicul punct singular pentru integrala improprie de speţa 2, cu integrant nemărginit, deoarece $\lim\limits_{x\to 2, x<2} f(x) = \lim\limits_{x\to 2, x<2} \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - 5x + 6}} = +\infty$.

etapa 2. Se studiază natura şi valoarea integralei, aplicând Definiţia.
pasul 1.Se determină o primitivă pe $[1,2[$ pentru f.

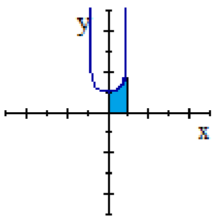
$$F(x;c)=\int\frac{1}{\sqrt{x^2-5x+6}}dx=\int\frac{1}{\sqrt{\left(x-\frac{5}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2}}\left(x-\tfrac{5}{2}\right)'dx=$$
$$=\ln\left|\left(x-\tfrac{5}{2}\right)+\sqrt{\left(x-\tfrac{5}{2}\right)^2-\left(\tfrac{1}{2}\right)^2}\right|+c=$$
$$=\begin{cases}\ln\left(-\left(x-\frac{5}{2}\right)-\sqrt{\left(x-\frac{5}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2}\right)+c_1, & \forall x \text{ a.î. } x-\frac{5}{2}\in\left]-\infty,-\frac{1}{2}\right[,c_1\in\mathbb{R}\\ \ln\left(\left(x-\frac{5}{2}\right)+\sqrt{\left(x-\frac{5}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2}\right)+c_2, & \forall x \text{ a.î. } x-\frac{5}{2}\in\left]\frac{1}{2},+\infty\right[,c_2\in\mathbb{R}\end{cases}$$
$$=\begin{cases}\ln\left(-\left(x-\frac{5}{2}\right)-\sqrt{x^2-5x+6}\right)+c_1, & x\in\left]-\infty,2\right[,c_1\in\mathbb{R}\\ \ln\left(\left(x-\frac{5}{2}\right)+\sqrt{x^2-5x+6}\right)+c_2, & x\in\left]3,+\infty\right[,c_2\in\mathbb{R}\end{cases}$$
$$F(x;c)=\ln\left(-\left(x-\tfrac{5}{2}\right)-\sqrt{x^2-5x+6}\right)+c,\forall x\in[1,2[,\forall c\in\mathbb{R}.$$

pasul 2-direct. $\int_1^{2-0}\frac{1}{\sqrt{x^2-5x+6}}dx\overset{\text{dacă }\exists}{=}\ln\left(-\left(x-\frac{5}{2}\right)-\sqrt{x^2-5x+6}\right)\Big|_{x=1}^{x\to2,x<2}=$

$$=\lim_{x\to2,x<2}\ln\left(-\left(x-\tfrac{5}{2}\right)-\sqrt{x^2-5x+6}\right)-\ln\left(-\left(1-\tfrac{5}{2}\right)-\sqrt{1^2-5+6}\right)=$$
$$=\ln\left(\tfrac{1}{2}\right)-\ln\left(\tfrac{3}{2}-\sqrt{2}\right)=\ln\tfrac{1}{3-2\sqrt{2}}=-\ln\left(3-2\sqrt{2}\right).$$

d) $\int_0^1\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx.$

Rezolvare. etapa 1. $f:[0,1[\to\mathbb{R},f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$



f este bine definită şi continuă pe $[0,1[\Rightarrow f\in\mathcal{R}_{\text{loc}}([0,1[)$.

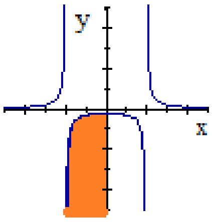
$b=1$ este unicul punct singular pentru integrala improprie de speţa 2, cu integrant nemărginit, deoarece $\lim\limits_{x\to1,x<1}f(x)=\lim\limits_{x\to1,x<1}\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}=+\infty.$

etapa 2. Se studiază natura şi valoarea integralei, aplicând Definiţia. Direct:

$$\int_0^{1-0}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx\overset{\text{dacă }\exists}{=}\arcsin x\Big|_{x=0}^{x\to1,x<1}=\lim_{x\to1,x<1}(\arcsin x)-\arcsin 0=\frac{\pi}{2}.$$

e) $\int_{-2}^0\frac{1}{x^2-4}dx.$

Rezolvare. etapa 1. $f:]-2,0]\to\mathbb{R},f(x)=\dfrac{1}{x^2-4}.$



f este bine definită şi continuă pe $]-2,0] \Rightarrow f \in \mathcal{R}_{\text{loc}}\left(]-2,0]\right)$.

$a=-2$ este unicul punct singular pentru integrala improprie de speţa 2, cu integrant nemărginit, deoarece

$$\lim_{x\to -2, x>-2} f(x) = \lim_{x\to -2, x>-2} \frac{1}{x^2-4} = -\infty.$$

<u>etapa 2.</u> Se studiază natura şi valoarea integralei, aplicând Definiţia. Direct:

$$\int_{-2+0}^{0} \frac{1}{x^2-4}dx \overset{\text{dacă } \exists}{=} \frac{1}{2\cdot 2}\ln\left(\frac{2-x}{x+2}\right)\Bigg|_{x\to -2, x>-2}^{x=0} = \frac{1}{2\cdot 2}\ln 1 - \lim_{x\to -2, x>-2}\left(-\frac{1}{2\cdot 2}\ln\left(\frac{2-x}{x+2}\right)\right) = -\infty.$$

Observaţia 4. Dacă pentru $\int_{[a,b[} f(x)\,dx$, f nu este definită în b, dar $\lim\limits_{x\to b, x<b} f(x)$ există şi este finită, atunci integrala scrisă anterior poate fi considerată ca o integrala improprie convergentă identificată cu integrala Riemann a prelungirii funcţiei f prin continuitate la $[a,b]$. De exemplu, a se vedea în curs $\int_{[-1,0[} \frac{\operatorname{arctg} x}{x}dx$.

Exerciţiul 3. Fie $0<a<+\infty, 0<b<+\infty$ fixate. Fie $\alpha \in \mathbb{R}$ fixat.

a) $\boxed{\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}dx}$ este

(C), dacă $\alpha \in]1,+\infty[$, şi $\boxed{\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}dx = \frac{a^{1-\alpha}}{1-\alpha}, \text{ dacă } \alpha > 1}$

(D), dacă $\alpha \in]-\infty,1]$, şi $\boxed{\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}dx = +\infty, \text{ dacă } \alpha \leq 1.}$

De exemplu, $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}dx = \frac{1}{1-2}\,(C)$; $\int_{\frac{1}{2}}^{+\infty} \frac{1}{x^3}dx = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{1-3}}{1-3}\,(C)$; $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{x}}dx = \frac{(2)^{1-\frac{3}{2}}}{1-\frac{3}{2}}\,(C)$;

$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}dx = +\infty\,(D)$; $\int_{\frac{1}{2}}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}}dx = +\infty\,(D)$; $\int_2^{+\infty} x^3 dx = +\infty\,(D)$;

b) $\boxed{\int_a^b \frac{1}{(b-x)^\alpha}dx}$ este

(C), dacă $\alpha \in]-\infty,1[$, şi $\boxed{\int_a^{b-0} \frac{1}{(b-x)^\alpha}dx = \int_{[a,b[} \frac{1}{(b-x)^\alpha}dx = \frac{(b-a)^{1-\alpha}}{1-\alpha}, \text{ dacă } \alpha < 1}$

(D), dacă $\alpha \in [1,+\infty[$, şi $\boxed{\int_a^{b-0} \frac{1}{(b-x)^\alpha}dx = \int_{[a,b[} \frac{1}{(b-x)^\alpha}dx = +\infty, \text{ dacă } \alpha \geq 1.}$

De exemplu, $\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{2-x}}dx = \frac{1}{1-\frac{1}{2}}\,(C)$; $\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{\sqrt[3]{1-x}}dx = \frac{\left(1-\frac{1}{2}\right)^{1-\frac{1}{3}}}{1-\frac{1}{3}}\,(C)$;

$\int_1^3 \frac{1}{x-3}dx = +\infty\,(D)$; $\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{(1-x)\sqrt{1-x}}dx = +\infty\,(D)$.

c) $\boxed{\int_a^b \frac{1}{(x-a)^\alpha}dx}$ este

(C), dacă $\alpha \in]-\infty, 1[$, şi $\boxed{\int_{a+0}^b \frac{1}{(x-a)^\alpha}dx = \int_{]a,b]} \frac{1}{(x-a)^\alpha}dx = \frac{(b-a)^{1-\alpha}}{1-\alpha}, \text{ dacă } \alpha < 1}$

(D), dacă $\alpha \in [1, +\infty[$, şi $\boxed{\int_{a+0}^b \frac{1}{(x-a)^\alpha}dx = \int_{]a,b]} \frac{1}{(x-a)^\alpha}dx = +\infty, \text{ dacă } \alpha \geq 1.}$

De exemplu, $\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x-1}}dx = \frac{1}{1-\frac{1}{2}}\,(C)$; $\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{\sqrt[3]{x-\frac{1}{2}}}dx = \frac{\left(1-\frac{1}{2}\right)^{1-\frac{1}{3}}}{1-\frac{1}{3}}\,(C)$;

$\int_2^3 \frac{1}{x-2}dx = +\infty\,(D)$; $\int_1^2 \frac{1}{(x-1)\sqrt{x-1}}dx = +\infty\,(D)$.

Observaţia 5. Există integrale improprii cu două puncte singulare *mixte*, în care apar şi puncte singulare pentru interval nemărginit şi puncte sigulare pentru integrant nemărginit. De exemplu

$\int_{a+0}^{+\infty} f(x)\,dx \overset{\text{dacă } \exists}{=} \lim_{\lambda \to a, \lambda > a} \left(\int_\lambda^c f(x)\,dx\right) + \lim_{\mu \to +\infty} \left(\int_c^\mu f(x)\,dx\right)$

Integrala $\int_{a+0}^{+\infty} f(x)\,dx$ este *convergentă* (C) dacă valoarea există şi este finită şi este *divergentă* (D) dacă nu există măcar una din limitele anterioare sau dacă există amândouă şi suma lor este $-\infty$ sau $+\infty$.

$\int_{-\infty}^{b-0} f(x)\,dx \overset{\text{dacă } \exists}{=} \lim_{\lambda \to -\infty} \left(\int_\lambda^c f(x)\,dx\right) + \lim_{\mu \to b, \mu < b} \left(\int_c^\mu f(x)\,dx\right)$

Integrala $\int_{-\infty}^{b-0} f(x)\,dx$ este *convergentă* (C) dacă valoarea există şi este finită şi este *divergentă* (D) dacă nu există măcar una din limitele anterioare sau dacă există amândouă şi suma lor este $-\infty$ sau $+\infty$.

Există integrale improprii cu mai mult de două puncte singulare, unele chiar şi în interiorul intervalului de integrare.

Teorema 2.(**de aditivitate a integralei improprii în raport cu funcţia integrant**) Fie $\int_{\mathbb{I}} f(x)\,dx, \int_{\mathbb{I}} g(x)\,dx$ -integrale improprii ambele de speţa întâi, sau a doua, sau mixte, cu $f, g \in \mathcal{R}_{\text{loc}}(\mathbb{I})$.

Dacă $\int_{\mathbb{I}} f(x)\,dx$ (C) şi $\int_{\mathbb{I}} g(x)\,dx$ (C), atunci$\Rightarrow$ $\int_{\mathbb{I}} (f+g)(x)\,dx$ (C) şi

$\int_{\mathbb{I}} (f+g)(x)\,dx = \int_{\mathbb{I}} f(x)\,dx + \int_{\mathbb{I}} g(x)\,dx.$

Observaţia 6. În ipotezele Teoremei 2,

$\int_{\mathbb{I}} f(x)\,dx\ (C)$ şi $\int_{\mathbb{I}} g(x)\,dx\ (C) \Rightarrow \int_{\mathbb{I}} (f+g)(x)\,dx\ (C)$;

$\int_{\mathbb{I}} f(x)\,dx\ (D)$ şi $\int_{\mathbb{I}} g(x)\,dx\ (C) \Rightarrow \int_{\mathbb{I}} (f+g)(x)\,dx\ (D)$;

$\int_{\mathbb{I}} f(x)\,dx\ (C)$ şi $\int_{\mathbb{I}} g(x)\,dx\ (D) \Rightarrow \int_{\mathbb{I}} (f+g)(x)\,dx\ (D)$;

$\int_{\mathbb{I}} f(x)\,dx\ (D)$ şi $\int_{\mathbb{I}} g(x)\,dx\ (D) \Rightarrow \int_{\mathbb{I}} (f+g)(x)\,dx$ poate fi sau (C) sau (D).

Teorema 3.(**de omogeneitate a integralei improprii în raport cu funcţia integrant**) Fie $\int_{\mathbb{I}} f(x)\,dx$ -integrală improprie de speţa întâi, sau a doua, sau mixtă cu $f \in \mathcal{R}_{\text{loc}}(\mathbb{I})$. Fie $\alpha \in \mathbb{R}^*$. Atunci $\int_{\mathbb{I}} (\alpha f)(x)\,dx$ şi $\int_{\mathbb{I}} f(x)\,dx$ au aceeaşi natură (sunt ambele (C) sau (D) simultan) şi, în caz de convergenţă

$\int_{\mathbb{I}} (\alpha f)(x)\,dx = \alpha \int_{\mathbb{I}} f(x)\,dx.$

Teorema 4.(**de aditivitate a integralei improprii în raport cu intervalul**) Fie $\int_{]a,b[} f(x)\,dx$ -integrală improprie de speţa întâi, sau a doua, sau mixtă cu a şi b exact două puncte singulare, cu $f \in \mathcal{R}_{\text{loc}}(]a,b[)$.

a) Dacă $\int_{]a,b[} f(x)\,dx\ (C)$, atunci $\forall c \in]a,b[\Rightarrow \int_{]a,c]} f(x)\,dx\ (C)$ şi $\int_{[c,b[} f(x)\,dx\ (C)$ şi
$\int_{]a,c]} f(x)\,dx + \int_{[c,b[} f(x)\,dx = \int_{]a,b[} f(x)\,dx$.

b) Dacă $\exists c \in]a,b[$ a.î. $\int_{]a,c]} f(x)\,dx\ (C)$ şi $\int_{[c,b[} f(x)\,dx\ (C)$ atunci $\Rightarrow \int_{]a,b[} f(x)\,dx\ (C)$ şi
$\int_{]a,b[} f(x)\,dx = \int_{]a,c]} f(x)\,dx + \int_{[c,b[} f(x)\,dx$.

Observaţia 7. În ipotezele Teoremei 4, pentru un $c \in]a,b[$ oarecare dat,

$\int_a^c f(x)\,dx\ (C)$ şi $\int_c^b f(x)\,dx\ (C) \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx\ (C)$;
$\int_a^c f(x)\,dx\ (D)$ şi $\int_c^b f(x)\,dx\ (C) \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx\ (D)$;
$\int_a^c f(x)\,dx\ (C)$ şi $\int_c^b f(x)\,dx\ (D) \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx\ (D)$;
$\int_a^c f(x)\,dx\ (D)$ şi $\int_c^b f(x)\,dx\ (D) \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx$ poate fi sau (C) sau (D).

Observaţia 8.

I. Fie $\int_{[a,b[} f(x)\,dx$ -integrală improprie de speţa întâi sau a doua cu b unicul punct singular, $f \in \mathcal{R}_{\text{loc}}([a,b[)$.

$\int_{[a,b[} f(x)\,dx\ (C) \Leftrightarrow \int_{[c,b[} f(x)\,dx\ (C)$ unde $c \in [a,b[$ este arbitrar ales. Mai mult,

$$\underbrace{\int_{[a,b[} f(x)\,dx}_{\text{improprie}} = \underbrace{\int_{[a,c]} f(x)\,dx}_{\text{Riemann, deci } (C)} + \underbrace{\int_{[c,b[} f(x)\,dx}_{\text{improprie}}.$$

Rezultă că este suficient să se studieze convergenţa pe intervale $[c,b[$, cu c "spre" punctul singular b.

II. Fie $\int_{]a,b]} f(x)\,dx$ -integrală improprie de speţa întâi sau a doua cu a unicul punct singular, $f \in \mathcal{R}_{\text{loc}}(]a,b])$.

$\int_{]a,b]} f(x)\,dx\ (C) \Leftrightarrow \int_{]c,b]} f(x)\,dx\ (C)$ unde $c \in]a,b]$ este arbitrar ales. Mai mult

$$\underbrace{\int_{]a,b]} f(x)\,dx}_{\text{improprie}} = \underbrace{\int_{]a,c]} f(x)\,dx}_{\text{improprie}} + \underbrace{\int_{[c,b]} f(x)\,dx}_{\text{Riemann, deci } (C)}.$$

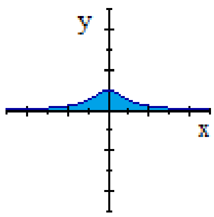
Rezultă că este suficient să se studieze convergenţa pe intervale $]a,c]$, cu c "spre" punctul singular a.

Exerciţiul 4. Să se studieze natura şi valoarea integralei:

a) $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{x-1}}dx$- a se vedea Curs.

b) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}dx$.

Rezolvare. etapa 1.$f:]-\infty,+\infty[\to \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{1+x^2}$.



f este bine definită şi continuă pe $]-\infty,+\infty[\Rightarrow f \in \mathcal{R}_{\text{loc}}(]-\infty,+\infty[)$

$a = -\infty$ şi $b = +\infty$ sunt două puncte singulare, ambele pentru integrala improprie de speţa 1,

pe interval nemărginit.
etapa 2. Se studiază natura şi valoarea integralei, cu Definiţia.
pasul 0. Se izolează cele două puncte singulare, alegând $0 \in]-\infty, +\infty[$ şi se studiază separat

$\mathcal{I}_1 = \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{1+x^2} dx$ şi $\mathcal{I}_2 = \int_{0}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx$

pasul 1. Se determină o primitivă pe $]-\infty, +\infty[$ pentru f.

$F(x;c) = \int \frac{1}{1+x^2} dx = \operatorname{arctg} x + c, \forall x \in]-\infty, +\infty[, \forall c \in \mathbb{R}.$

pasul 2-direct. $\mathcal{I}_1 = \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{1+x^2} dx = \operatorname{arctg} x|_{x\to-\infty}^{x=0} = \operatorname{arctg} 0 - \lim_{x\to-\infty} (\operatorname{arctg} x) = \frac{\pi}{2}.$

$\mathcal{I}_2 = \int_{0}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \operatorname{arctg} x|_{x=0}^{x\to+\infty} = \lim_{x\to+\infty} (\operatorname{arctg} x) - \operatorname{arctg} 0 = \frac{\pi}{2}.$

Se deduce că $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx$ (C) şi are valoarea

$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{1+x^2} dx + \int_{0}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi.$

5.2. Criterii de convergenţă a integralelor improprii

Observaţia 1. Există funcţii care admit primitive, dar acestea nu sunt exprimabile cu funcţii elementare. Sau nuse poate studia limita ce apare în definiţia integralei improprii. În aceste situaţii nu se poate determina natura şi eventual valoarea integralelor improprii cu definiţia. Atunci:
-se aplică unul dintre criteriile de mai jos pentru a determina natura integralei;
-în caz de convergenţă, se poate încerca un calcul al valorii integralei, folosind
–metoda integrării prin părţi în integralele improprii convergente;
–schimbare de variabilă de integrare în integralele improprii convergente;
–altele, chiar şi metode numerice (calculator).

Observaţia 2. Fie $\int_{\mathbb{I}} f(x)\, dx$ -integrală improprie de speţa întâi sau a doua sau mixtă.
a) Integrala $\int_{\mathbb{I}} f(x)\, dx$ este *absolut convergentă* (AC) dacă $\int_{\mathbb{I}} |f(x)|\, dx$ este convergentă.
b) Dacă $\int_{\mathbb{I}} f(x)\, dx$ (AC) atunci $\int_{\mathbb{I}} f(x)\, dx$ (C). Reciproca nu este adevărată.
c) Integrala $\int_{\mathbb{I}} f(x)\, dx$ este *semiconvergentă* (SC) dacă $\int_{\mathbb{I}} f(x)\, dx$ este (C), dar nu este (AC).

Teorema 1.(**Criteriul comparaţiei-cu inegalităţi**)
Fie $\int_{\mathbb{I}} f(x)\, dx$ -integrală improprie de speţa întâi sau a doua.

a) Dacă $\exists g$ a.î. $\left.\begin{array}{l} 0 \le |f(x)| \le g(x), \forall x \in \mathbb{I} \\ \int_{\mathbb{I}} g(x)\, dx\, (C) \end{array}\right\}$, atunci $\int_{\mathbb{I}} f(x)\, dx\, (AC)$.

b) Dacă $\exists g$ a.î. $\left.\begin{array}{l} f(x) \ge g(x) \ge 0, \forall x \in \mathbb{I} \\ \int_{\mathbb{I}} g(x)\, dx\, (D) \end{array}\right\}$, atunci $\int_{\mathbb{I}} f(x)\, dx\, (D)$.

Observaţia 3. Şi folosind criteriile de convergenţă este suficient să se studieze convergenţa integralei improprii $\int_{[a,b[} f(x)\, dx$ pe intervale $[c,b[$, cu c "suficient de aproape" de punctul singular b.

$$\underbrace{\int_{[a,b[} f(x)\, dx}_{\text{improprie}} = \underbrace{\int_{[a,c]} f(x)\, dx}_{\text{Riemann, deci } (C)} + \underbrace{\int_{[c,b[} f(x)\, dx}_{\text{improprie}}.$$

Analog, este suficient să se studieze convergenţa integralei $\int_{]a,b]} f(x)\, dx$ pe intervale $]a,c]$, cu c "suficient de aproape" de punctul singular a.

$$\underbrace{\int_{]a,b]} f(x)\, dx}_{\text{improprie}} = \underbrace{\int_{]a,c]} f(x)\, dx}_{\text{improprie}} + \underbrace{\int_{[c,b]} f(x)\, dx}_{\text{Riemann, deci } (C)}.$$

Exerciţiul 5. Să se studieze natura integralelor

a) $\int_1^{+\infty} \dfrac{\sin x}{x\,(x+1)}dx-$ a se vedea Curs

b) $\int_0^{+\infty} e^{-x}\cos\left(x^2\right)dx.$

Rezolvare. etapa 1. $f:[0,+\infty[\,\to\mathbb{R}, f(x)=e^{-x}\cos\left(x^2\right).$

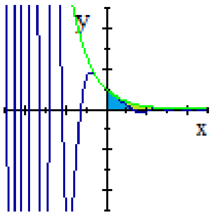
f este bine definită şi continuă pe $[0,+\infty[\,\Rightarrow f\in\mathcal{R}_{\text{loc}}([0,+\infty[)\,.$

$b=+\infty$ este unicul punct singular pentru integrala improprie de speţa 1, pe interval nemărginit.

etapa 2. Se studiază natura şi valoarea integralei, utilizând Definiţia -nu este posibil.

etapa 3. Se studiază natura integralei, utilizând Criterii:

modul 1. Criteriul comparaţiei cu inegalităţi



$$\left.\begin{array}{l} 0\le |f(x)|=\left|e^{-x}\cos\left(x^2\right)\right|=\left|e^{-x}\right|\cdot\left|\cos\left(x^2\right)\right|\le \underbrace{e^{-x}\cdot 1}_{g(x)}, \forall x\in[0,+\infty[\,. \\ \int_0^{+\infty} e^{-x}dx\,(C) \text{ deoarece, direct} \\ \qquad \int_0^{+\infty} e^{-x}dx \overset{\text{d. }\exists}{=} \left(-e^{-x}\right)\Big|_{x=0}^{x\to+\infty}=-0+1. \end{array}\right\}$$

$$\overset{\text{Crit. Comp.}}{\Rightarrow} \int_0^{+\infty} f(x)\,dx\,(AC)\,.$$

c) $\int_{-\infty}^{0} \dfrac{\cos x}{1+x^4}dx.$

Rezolvare. etapa 1. $f:\,]-\infty,0]\to\mathbb{R}, f(x)=\dfrac{\cos x}{1+x^4}.$

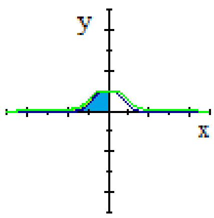
f este bine definită şi continuă pe $]-\infty,0]\Rightarrow f\in\mathcal{R}_{\text{loc}}(]-\infty,0])$

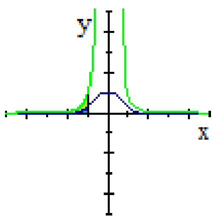
$a=-\infty$ este unicul punct singular pentru integrala improprie de speţa 1, pe interval nemărginit.

etapa 2. Se studiază natura şi valoarea integralei, utilizând Definiţia-nu este posibil.

etapa 3. Se studiază natura integralei, utilizând Criterii:

modul 1. Criteriul comparaţiei cu inegalităţi





sau

$$\left.\begin{array}{l} 0 \leq |f(x)| = \left|\dfrac{\cos x}{1+x^4}\right| = \dfrac{|\cos x|}{1+x^4} \leq \underbrace{\dfrac{1}{1+x^4}}_{g(x)}, \forall x \in \left]-\infty, 0\right]. \\ \int_{-\infty}^{0} \dfrac{1}{1+x^4} dx\,(C) \text{ deoarece, direct} \\ \qquad \int_{-\infty}^{0} \dfrac{1}{1+x^4} dx \overset{\text{d. } \exists}{=} G(x)\Big|_{x\to-\infty}^{x=0} = \frac{1}{4}\pi\sqrt{2}. \end{array}\right\} \overset{\text{Crit. Comp.}}{\Rightarrow} \int_{-\infty}^{0} f(x)\,dx\,(AC).$$

Sau:

$$\left.\begin{array}{l} 0 \leq |f(x)| = \left|\dfrac{\cos x}{1+x^4}\right| \leq \dfrac{1}{1+x^4} < \underbrace{\dfrac{1}{x^4}}_{g(x)}, \forall x \in \left]-\infty, -1\right]. \\ \int_{-\infty}^{-1} \dfrac{1}{x^4} dx\,(C) \text{ deoarece, direct} \\ \qquad \int_{-\infty}^{-1} \dfrac{1}{x^4} dx \overset{\text{d. } \exists}{=} \dfrac{x^{-3}}{-3}\Bigg|_{x\to-\infty}^{x=-1} = \dfrac{1}{3}. \end{array}\right\} \overset{\text{Crit. Comp.}}{\Rightarrow} \int_{-\infty}^{-1} f(x)\,dx\,(AC), \text{ deci}$$

(C).

Atunci $\underbrace{\int_{]-\infty,0]} f(x)\,dx}_{\text{improprie}} = \underbrace{\int_{]-\infty,-1]} f(x)\,dx}_{\text{improprie } (AC)} + \underbrace{\int_{[-1,0]} f(x)\,dx}_{\text{Riemann, deci } (C)}$ este integrală (C).

d) $\int_1^{+\infty} \dfrac{\ln x}{\sqrt{1+x^2}} dx.$

Rezolvare. etapa 1. $f : [1, +\infty[\to \mathbb{R}, f(x) = \dfrac{\ln x}{\sqrt{1+x^2}}.$

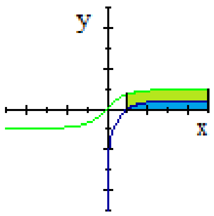
f este bine definită şi continuă pe $[1, +\infty[\Rightarrow f \in \mathcal{R}_{\text{loc}}([1, +\infty[)$.

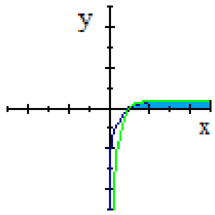
$b = +\infty$ este unicul punct singular pentru integrala improprie de speţa 1, pe interval nemărginit.

etapa 2. Se studiază natura şi valoarea integralei, utilizând Definiţia- nu este posibil.

etapa 3. Se studiază natura integralei improprii date, utilizând Criterii:

modul 1. Criteriul comparaţiei





sau

•Se încearcă:

$$\left.\begin{array}{l} 0 \leq |f(x)| = \left|\dfrac{\ln x}{\sqrt{1+x^2}}\right| \overset{x\geq 1}{=} \dfrac{\ln x}{\sqrt{1+x^2}} \overset{0\leq \ln x < x, \forall x\in[1,+\infty[}{\leq} \underbrace{\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}}_{g(x)}, \forall x \in [1, +\infty[. \\ \text{Dar } \int_1^{+\infty} \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}} dx\,(D) \text{ deoarece, direct} \\ \qquad \int_1^{+\infty} \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}} dx \overset{\text{d. } \exists}{=} \left(\sqrt{1+x^2}\right)\Big|_{x=1}^{x\to+\infty} = +\infty. \end{array}\right\}$$

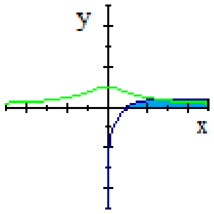
$\Rightarrow$nu se poate aplica Crit. Comp.

•Se încearcă:

$$\left.\begin{array}{l} 0 \leq |f(x)| = \left|\dfrac{\ln x}{\sqrt{1+x^2}}\right| = \dfrac{\ln x}{x}\cdot\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \dfrac{\ln x}{x}\cdot\sqrt{\dfrac{x^2}{1+x^2}} \leq \underbrace{\dfrac{\ln x}{x}}_{g(x)}\cdot\sqrt{1}, \forall x\in[1,+\infty[\,. \\ \text{Dar } \int_1^{+\infty}\dfrac{\ln x}{x}dx\,(D) \text{ deoarece, direct} \\ \quad \int_1^{+\infty}\dfrac{\ln x}{x}dx \overset{\text{d. }\exists}{=} \left(\ln^2 x\right)\Big|_{x=1}^{x\to+\infty} = +\infty. \end{array}\right\}$$

$\Rightarrow$nu putem aplica Crit. Comp.

$\bullet$Se încearcă:



Se observă că

$f(x) = \dfrac{\ln x}{\sqrt{1+x^2}} \geq 0, \forall x \in [1,+\infty[\,.$

$$\left.\begin{array}{l} f(x) = \dfrac{\ln x}{\sqrt{1+x^2}} \overset{x\geq e}{\geq} \dfrac{\ln e}{\sqrt{1+x^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}, \forall x\in[e,+\infty[\,. \\ \int_e^{+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx\,(D) \text{ deoarece, direct} \\ \quad \int_e^{+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx \overset{\text{d. }\exists}{=} \left(\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\right)\Big|_{x=e}^{x\to+\infty} = +\infty. \end{array}\right\} \overset{\text{Crit. Comp.}}{\Rightarrow} \int_e^{+\infty} f(x)\,dx\,(D)\,.$$

Atunci $\underbrace{\int_{[1,+\infty[} f(x)\,dx}_{\text{improprie}} = \underbrace{\int_{[1,e]} f(x)\,dx}_{\text{Riemann, deci }(C)} + \underbrace{\int_{[e,+\infty[} f(x)\,dx}_{\text{improprie }(D)}$ este integrală (D).

Exerciţiul 6. Să se studieze natura integralelor

a) $\int_0^2 \dfrac{x^5}{\sqrt{4-x^2}}dx$ - a se vedea Curs.

b) $\int_3^6 \dfrac{x^3}{\sqrt{x^2-9}}dx.$

Rezolvare. <u>etapa 1.</u> $f:]3,6] \to \mathbb{R}, f(x) = \dfrac{x^3}{\sqrt{x^2-9}}$

f este bine definită şi continuă pe $]3,6] \Rightarrow f \in \mathcal{R}_{\text{loc}}(]3,6])$.

$a = 3$ este unicul punct singular pentru integrala improprie de speţa 2, cu integrant nemărginit, deoarece $\lim\limits_{x\to3,x>3}\dfrac{x^3}{\sqrt{x^2-9}} = +\infty.$

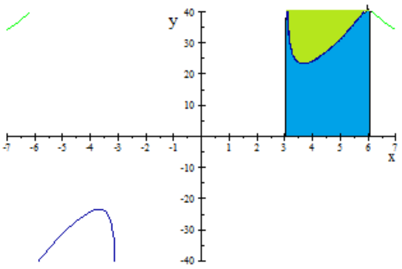
<u>etapa 2.</u> Se studiază natura şi valoarea integralei, utilizând Definiţia. Aici este posibil, dar greoi.

$\int \dfrac{x^3}{\sqrt{x^2-9}}dx = 6\sqrt{x^2-9} + \frac{1}{3}x^2\sqrt{x^2-9} + c, \forall x \in]3,6]\,, \forall c \in \mathbb{R}.$

$\int_3^6 \dfrac{x^3}{\sqrt{x^2-9}}dx \overset{\text{d.}\exists}{=} \left(6\sqrt{x^2-9} + \frac{1}{3}x^2\sqrt{x^2-9}\right)\Big|_{x\to3,x>3}^{x=6} = 54\sqrt{3}.$

<u>etapa 3.</u> Se studiază natura integralei, utilizând Criterii:

<u>modul 1.</u> <u>Criteriul comparaţiei cu inegalităţi</u>



$$\left.\begin{array}{l} 0 \le |f(x)| = \left|\dfrac{x^3}{\sqrt{x^2-9}}\right| = \dfrac{x^3}{\sqrt{x^2-9}} < \dfrac{6^3}{\sqrt{x^2-9}}, \forall x \in \,]3,6]\,. \\ \int_3^6 \dfrac{6^3}{\sqrt{x^2-9}} dx\,(C) \text{ deoarece, direct} \\ \qquad \int_{3+0}^6 \dfrac{6^3}{\sqrt{x^2-9}} dx \overset{\text{d. }\exists}{=} 6^3 \ln\left(x+\sqrt{x^2-9}\right)\Big|_{x\to 3, x>0}^{x=6} = 6^3 \cdot \ln \frac{6+5}{3}. \end{array}\right\} \overset{\text{Crit. Comp.}}{\Rightarrow} \int_3^6 f(x)\,dx\,(AC)\,.$$

Teorema 2.(**Criteriul în** α **pentru integrale improprii de speţa** 1)

I. Fie $\int_{[a,+\infty[} f(x)\,dx$ -integrală improprie de speţa întâi, cu $b = +\infty$ unicul punct singular. Se presupune că f are semn constant pe intervalul de integrare.

a) Dacă $\left.\begin{array}{l} \exists \alpha \in \,]1,+\infty[\text{ a.î.} \\ \exists \lim\limits_{x\to+\infty} x^\alpha |f(x)| = l \text{ şi } 0 \le l < +\infty \end{array}\right\} \Rightarrow \int_{[a,+\infty[} f(x)\,dx\,(AC)\,.$

b) Dacă $\left.\begin{array}{l} \exists \alpha \in \,]-\infty,1] \text{ a.î.} \\ \exists \lim\limits_{x\to+\infty} x^\alpha |f(x)| = l \text{ şi } 0 < l \le +\infty \end{array}\right\} \Rightarrow \int_{[a,+\infty[} f(x)\,dx\,(D)\,.$

II. Fie $\int_{]-\infty,b]} f(x)\,dx$ -integrală improprie de speţa întâi, cu $a = -\infty$ unicul punct singular. Se presupune că f are semn constant pe intervalul de integrare.

a) Dacă $\left.\begin{array}{l} \exists \alpha \in \,]1,+\infty[\text{ a.î.} \\ \exists \lim\limits_{x\to-\infty} (-x)^\alpha |f(x)| = l \text{ şi } 0 \le l < +\infty \end{array}\right\} \Rightarrow \int_{]-\infty,b]} f(x)\,dx\,(AC)\,.$

b) Dacă $\left.\begin{array}{l} \exists \alpha \in \,]-\infty,1] \text{ a.î.} \\ \exists \lim\limits_{x\to-\infty} (-x)^\alpha |f(x)| = l \text{ şi } 0 < l \le +\infty \end{array}\right\} \Rightarrow \int_{]-\infty,b]} f(x)\,dx\,(D)\,.$

Teorema 3.(**Criteriul în** α **pentru integrale improprii de speţa** 2)

I. Fie $\int_{[a,b[} f(x)\,dx$ -integrală improprie de speţa a doua, cu $b < +\infty$ unicul punct singular, adică $\lim\limits_{x\to b, x<b} f(x) = +\infty$ (sau $= -\infty$). Se presupune că f are semn constant pe intervalul de integrare.

a) Dacă $\left.\begin{array}{l} \exists \alpha \in \,]0,1[\text{ a.î.} \\ \exists \lim\limits_{x\to b, x<b} (b-x)^\alpha |f(x)| = l \text{ şi } 0 \le l < +\infty \end{array}\right\} \Rightarrow \int_{[a,b[} f(x)\,dx\,(AC)\,.$

b) Dacă $\left.\begin{array}{l} \exists \alpha \in [1,+\infty[\text{ a.î.} \\ \exists \lim\limits_{x\to b, x<b} (b-x)^\alpha |f(x)| = l \text{ şi } 0 < l \le +\infty \end{array}\right\} \Rightarrow \int_{[a,b[} f(x)\,dx\,(D)\,.$

II. Fie $\int_{]a,b]} f(x)\,dx$ -integrală improprie de speţa a doua, cu $a > -\infty$ unicul punct singular, adică $\lim\limits_{x\to a, x>a} f(x) = +\infty$ (sau $= -\infty$). Se presupune că f are semn constant pe intervalul de integrare.

a) Dacă $\left.\begin{array}{l} \exists \alpha \in \,]0,1[\text{ a.î.} \\ \exists \lim\limits_{x\to a, x>a} (x-a)^\alpha |f(x)| = l \text{ şi } 0 \le l < +\infty \end{array}\right\} \Rightarrow \int_{]a,b]} f(x)\,dx\,(AC)\,.$

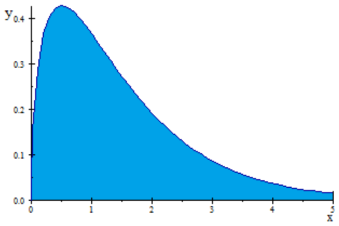
b) Dacă $\left.\begin{array}{l} \exists \alpha \in [1,+\infty[\text{ a.î.} \\ \exists \lim\limits_{x\to a, x>a} (x-a)^\alpha |f(x)| = l \text{ şi } 0 < l \le +\infty \end{array}\right\} \Rightarrow \int_{]a,b]} f(x)\,dx\,(D)\,.$

Exerciţiul 7. Să se studieze natura integralelor

a) $\int_1^{+\infty} \dfrac{x}{3x^4+5x^2+1} dx$- a se vedea Curs

b) $\int_0^{+\infty} \sqrt{x} \cdot e^{-x} dx.$

Rezolvare. etapa 1.$f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{x} \cdot e^{-x}$



f este bine definită şi continuă pe $[0, +\infty[\Rightarrow f \in \mathcal{R}_{\text{loc}}([0, +\infty[)$.

$b = +\infty$ este unicul punct singular pentru integrala improprie de speţa 1, pe interval nemărginit.

etapa 2. Se studiază natura şi valoarea integralei, utilizând Definiţia-nu este posibil.

etapa 3. Se studiază natura integralei, utilizând Criterii:

modul 1. Criteriul comparaţiei . NU.

modul 2. Criteriul în α cu limită pentru integrale improprii de speţa 1.

$f(x) = \sqrt{x} \cdot e^{-x} \geq 0, \forall x \in [0, +\infty[$.

$$l = \lim_{x\to+\infty} x^\alpha |f(x)| = \lim_{x\to+\infty} x^\alpha \sqrt{x} \cdot e^{-x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^{\alpha+\frac{1}{2}}}{e^x}.$$

•Se încearcă $\alpha = \frac{1}{2}$.∃? $\lim\limits_{x\to+\infty} x^\alpha |f(x)| \overset{\alpha=\frac{1}{2}}{=} \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{e^x} = 0.$

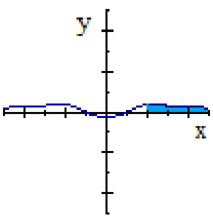
$$\left.\begin{array}{l} \exists \alpha = \frac{1}{2} \in]-\infty, 1] \text{ a.î.} \\ \exists \lim\limits_{x\to+\infty} x^\alpha |f(x)| = l = 0 \text{ dar nu e adevărat că } 0 < l \leq +\infty \end{array}\right\}$$

$\overset{\text{Crit. în } \alpha}{\Rightarrow}$nu se poate afirma nimic despre natura integralei.

•Se încearcă $\alpha = \frac{3}{2}$.∃? $\lim\limits_{x\to+\infty} x^\alpha |f(x)| \overset{\alpha=\frac{3}{2}}{=} \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2}{e^x} = 0.$

$$\left.\begin{array}{l} \exists \alpha = \frac{3}{2} \in]1, +\infty[\text{ a.î.} \\ \exists \lim\limits_{x\to+\infty} x^\alpha |f(x)| = l = 0 \text{ şi } 0 \leq l < +\infty \end{array}\right\} \overset{\text{Crit. în } \alpha}{\Rightarrow} \int_0^{+\infty} \sqrt{x} \cdot e^{-x} dx\,(AC).$$

c) $\int_2^{+\infty} \dfrac{x^2-1}{\sqrt{x^6+16}} dx.$



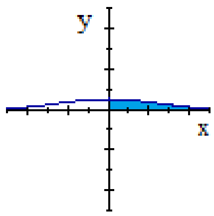
Indicaţie. $\alpha = 1, l = 1 \Rightarrow \mathcal{I}(D)$.

d) $\int_1^{+\infty} \dfrac{\ln x}{x+a} dx$, pentru $a > 0$ fixat.

Indicaţie. $\alpha = 1, l = +\infty \Rightarrow \mathcal{I}(D)$.

e) $\int_0^{+\infty} \dfrac{1-\cos x}{x^2} dx.$

Indicaţie.



$\mathcal{I}_1 = \int_0^1 \frac{1-\cos x}{x^2} dx\,(C)$ ca şi integrală Riemann din prelungirea prin continuitate în $a=0$.

$\mathcal{I}_2 = \int_1^{+\infty} \frac{1-\cos x}{x^2} dx\,(C)$. Se încearcă

$\alpha = 2, l\nexists \Rightarrow$Nu; $\alpha = 1, l = 0 \Rightarrow$Nu; $\alpha = 3, l\nexists \Rightarrow$Nu.

$\alpha = \frac{3}{2}, l = 0 \Rightarrow \mathcal{I}_1\,(C)$.

f) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^3+x^2}{x^6+1} dx.$

Indicaţie. $\frac{x^3+x^2}{x^6+1} = -\frac{1}{3}\frac{x+1}{x^2+1} + \frac{1}{3}\frac{x^3+x^2+x+1}{x^4-x^2+1}$-greoi cu definiţia

$\mathcal{I}_1 = \int_{-\infty}^{0} \frac{x^3+x^2}{x^6+1} dx\,(C)$. Se încearcă $\alpha = 3, l = 1 \Rightarrow \mathcal{I}_1\,(C)$.

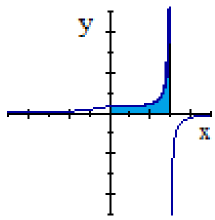
$\mathcal{I}_2 = \int_{0}^{+\infty} \frac{x^3+x^2}{x^6+1} dx\,(C)$. Se încearcă $\alpha = 3, l = 1 \Rightarrow \mathcal{I}_2\,(C)$.

Exerciţiul 8. Să se studieze natura integralelor

a) $\int_2^3 \frac{1}{x^2\left(x^3-8\right)^{\frac{2}{3}}} dx$- a se vedea Curs;

b) $\int_0^3 \frac{1}{(3-x)\sqrt{x^2+1}} dx.$

Rezolvare. etapa 1. $f : [0,3[\to \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{(3-x)\sqrt{x^2+1}}.$



f este bine definită şi continuă pe $[0,3[\Rightarrow f \in \mathcal{R}_{\text{loc}}\left([0,3[\right)$

$b = 3$ este unicul punct singular pentru integrala improprie de speţa 2, cu integrant nemărginit, deoarece

$$\lim_{x\to 3, x>3} f(x) = \lim_{x\to 3, x>3} \frac{1}{(3-x)\sqrt{x^2+1}} = +\infty.$$

etapa 2. Se studiază natura şi valoarea integralei, utilizând Definiţia-aici este este posibil-temă.

etapa 3. Se studiază natura integralei improprii date, utilizând Criterii:

modul 1. Criteriul comparaţiei . NU.

modul 2. Criteriul în α cu limită pentru integrale improprii de speţa 2.

$f(x) = \dfrac{1}{(3-x)\sqrt{x^2+1}} \geq 0, \forall x \in [0,3[\,.$

$l = \lim\limits_{x\to 3, x>3} (3-x)^\alpha |f(x)| = \lim\limits_{x\to 3, x>3} (3-x)^\alpha \dfrac{1}{(3-x)\sqrt{x^2+1}}.$

$\bullet$Se încearcă $\alpha = 1.\exists? \lim\limits_{x\to 3, x>3} (3-x)^\alpha |f(x)| \overset{\alpha=1}{=} \lim\limits_{x\to 3, x>3} \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}} = \dfrac{1}{\sqrt{10}}.$

$$\left.\begin{array}{l} \exists\alpha = 1 \in [1,+\infty[\text{ a.î.} \\ \exists \lim\limits_{x\to 3, x>3} (3-x)^\alpha |f(x)| = l = \dfrac{1}{\sqrt{10}} \text{ şi } 0 < l \leq +\infty \end{array}\right\} \overset{\text{Crit. în } \alpha}{\Rightarrow} \int_0^3 \frac{1}{(3-x)\sqrt{x^2+1}} dx\,(D).$$

c) $\int_{-1}^{1} \dfrac{2^{\arcsin x}}{1-x} dx.$

Rezolvare. etapa 1.$f: [-1,1[\, \to \mathbb{R}, f(x) = \dfrac{2^{\arcsin x}}{1-x}.$

f este bine definită şi continuă pe $[-1,1[\, \Rightarrow f \in \mathcal{R}_{\text{loc}}([-1,1[)\,.$

$b = 1$ este unicul punct singular pentru integrala improprie de speţa 2, cu integrant nemărginit, deoarece $\lim\limits_{x\to 1, x<1} f(x) = \lim\limits_{x\to 1, x>1} \dfrac{2^{\arcsin x}}{1-x} = +\infty.$

etapa 2. Se studiază natura şi valoarea integralei, utilizând Definiţia-aici este este posibil, dar greoi.

etapa 3. Se studiază natura integralei improprii date, utilizând Criterii:

modul 1. Criteriul comparaţiei . NU.

modul 2. Criteriul în α cu limită pentru integrale improprii de speţa 2.

$f(x) = \dfrac{2^{\arcsin x}}{1-x} \geq 0, \forall x \in [-1,1[\,.$

$l = \lim\limits_{x\to 1, x>1} (1-x)^\alpha |f(x)| = \lim\limits_{x\to 1, x<1} (1-x)^\alpha \dfrac{2^{\arcsin x}}{1-x}.$

$\bullet$Se încearcă $\alpha = 1.\exists? \lim\limits_{x\to 1, x<1} (1-x)^\alpha |f(x)| \overset{\alpha=1}{=} \lim\limits_{x\to 1, x<1} 2^{\arcsin x} = 2^{\frac{\pi}{2}}.$

$$\left.\begin{array}{l} \exists\alpha = 1 \in [1,+\infty[\text{ a.î.} \\ \exists \lim\limits_{x\to 1, x<1} (1-x)^\alpha |f(x)| = l = 2^{\frac{\pi}{2}} \text{ şi } 0 < l \leq +\infty \end{array}\right\} \overset{\text{Crit. în } \alpha}{\Rightarrow} \int_{-1}^{1} \frac{2^{\arcsin x}}{1-x} dx\,(D).$$

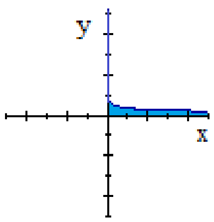
d) $\int_1^5 \dfrac{1}{\sqrt{x^4-1}} dx.$

Indicaţie. $\alpha = \frac{1}{2}, l = \frac{1}{2} \Rightarrow \mathcal{I}(C)\,.$

Exerciţiul 9. Să se studieze natura integralelor

a) $\int_0^{+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x} + \sqrt[5]{x}} dx.$

Rezolvare. etapa 1. $f:]0,+\infty[\, \to \mathbb{R}, f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x} + \sqrt[5]{x}}.$



f este bine definită şi continuă pe $]0,+\infty[\, \Rightarrow f \in \mathcal{R}_{\text{loc}}(]0,+\infty[)$

$b=+\infty$ este punct singular pentru integrala improprie de speţa 1, pe interval nemărginit.

$a=0$ este punct singular pentru integrala improprie de speţa 2, cu integrant nemărginit, deoarece

$$\lim_{x\to 0,x>0} f(x) = \lim_{x\to 0,x>0} \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}+\sqrt[5]{x}} = +\infty.$$

etapa 2. Se studiază natura şi valoarea integralei, utilizând Definiţia -aici este este posibil, dar greoi.

etapa 3. Se studiază natura integralei improprii date, utilizând Criterii:

modul 1. Criteriul comparaţiei . NU.

modul 2. Integrala improprie dată are două puncte singulare. Le izolăm şi se studiază separat natura integralelor

$$\mathcal{I}_1 = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}+\sqrt[5]{x}}dx \text{ şi } \mathcal{I}_2 = \int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}+\sqrt[5]{x}}dx.$$

Pentru $\mathcal{I}_1$-Criteriul în α cu limită pentru integrale improprii de speţa 2.

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}+\sqrt[5]{x}} \geq 0, \forall x \in \left]0,1\right].$$

$$l_1 = \lim_{x\to 0,x>0} (x-0)^{\alpha_1}|f(x)| = \lim_{x\to 0,x>0} x^{\alpha_1}\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{3}}+x^{\frac{1}{5}}}.$$

•Se încearcă $\alpha_1 = \frac{1}{5}$.$\exists$? $\lim\limits_{x\to 0,x>0}(x-0)^{\alpha_1}|f(x)| \overset{\alpha_1=\frac{1}{5}}{=} \lim\limits_{x\to 0,x>0} x^{\frac{1}{5}}\frac{1}{x^{\frac{1}{5}}\left(x^{\frac{1}{2}-\frac{1}{5}}+x^{\frac{1}{3}-\frac{1}{5}}+1\right)} = \frac{1}{0+0+1}$.

$$\left.\begin{array}{l} \exists \alpha_1 = \frac{1}{5} \in \left]0,1\right[\text{ a.î.} \\ \exists \lim\limits_{x\to 0,x>0}(x-0)^{\alpha}|f(x)| = l_1 = 1 \text{ şi } 0 \leq l < +\infty \end{array}\right\} \overset{\text{Crit. în } \alpha}{\Rightarrow} \mathcal{I}_1 = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}+\sqrt[5]{x}}dx\,(AC)$$

Pentru $\mathcal{I}_2$- Criteriul în α cu limită pentru integrale improprii de speţa 1.

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}+\sqrt[5]{x}} \geq 0, \forall x \in \left[1,+\infty\right[.$$

$$l_2 = \lim_{x\to+\infty} x^{\alpha_2}|f(x)| = \lim_{x\to+\infty} x^{\alpha_2}\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{3}}+x^{\frac{1}{5}}}.$$

•Se încearcă $\alpha_2 = \frac{1}{2}$.$\exists$? $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\alpha_2}|f(x)| \overset{\alpha_2=\frac{1}{2}}{=} \lim\limits_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{2}}\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}\left(1+x^{\frac{1}{3}-\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{5}-\frac{1}{2}}\right)} = \frac{1}{1+0+0}$.

$$\left.\begin{array}{l} \exists \alpha_2 = \frac{1}{2} \in \left]-\infty,1\right] \text{ a.î.} \\ \exists \lim\limits_{x\to+\infty} x^{\alpha}|f(x)| = l_2 = 1 \text{ şi } 0 < l_2 \leq +\infty \end{array}\right\} \overset{\text{Crit. în } \alpha}{\Rightarrow} \int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}+\sqrt[5]{x}}dx\,(D)$$

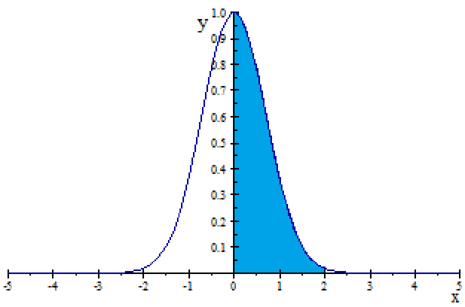
Atunci $\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}+\sqrt[5]{x}}dx$ este (D).

Exerciţiul 10. Să se studieze natura integralelor:

a) *integrala Gauss-Poisson* sau *a probabilităţilor*

$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx.$

Rezolvare. etapa 1. $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}, f(x) = e^{-x^2}$



f este bine definită şi continuă pe $[0,+\infty[\Rightarrow f\in\mathcal{R}_{\text{loc}}([0,+\infty[)$

$b=+\infty$ este unicul punct singular pentru integrala improprie de speţa 1, pe interval nemărginit.

etapa 2. Se studiază natura şi valoarea integralei, utilizând Definiţia-nu este posibil.

etapa 3. Se studiază natura integralei, utilizând Criterii:

modul 1. Criteriul comparaţiei cu inegalităţi

$$\left.\begin{array}{l} 0\le |f(x)| = e^{-x^2} \overset{x\ge 1}{\le} e^{-x}, \forall x\in[1,+\infty[\\ \int_1^{+\infty} e^{-x}dx\,(C) \ \text{deoarece, direct} \\ \quad \int_1^{+\infty} e^{-x}dx \overset{\text{d. }\exists}{=} (-e^{-x})\big|_{x=1}^{x\to+\infty} = -0+e^{-1}. \end{array}\right\} \overset{\text{Crit. Comp.}}{\Rightarrow} \int_1^{+\infty} e^{-x^2}dx\,(AC).$$

Atunci $\underbrace{\int_{[0,+\infty[} e^{-x^2}dx}_{\text{improprie}} = \underbrace{\int_{[0,1]} e^{-x^2}dx}_{\text{Riemann, deci }(C)} + \underbrace{\int_{[1,+\infty[} e^{-x^2}dx}_{\text{improprie }(AC)}$ este integrală (C), chiar (AC) (deoarece f ia valori pozitive).

modul 2. Criteriul în α cu limită pentru integrale improprii de speţa 1.

$f(x)=e^{-x^2}\ge 0, \forall x\in[0,+\infty[.$

$l=\lim\limits_{x\to+\infty} x^\alpha |f(x)| = \lim\limits_{x\to+\infty} x^\alpha\cdot e^{-x^2}.$

•ÎSe încearcă $\alpha=2.\exists?\ \lim\limits_{x\to+\infty} x^\alpha|f(x)| \overset{\alpha=2}{=} \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{e^{x^2}}=0.$

$$\left.\begin{array}{l} \exists\alpha=2\in\,]1,+\infty[\ \text{ a.î.} \\ \exists \lim\limits_{x\to+\infty} x^\alpha|f(x)| = l = 0 \text{ şi } 0\le l<+\infty \end{array}\right\} \overset{\text{Crit. în }\alpha}{\Rightarrow} \boxed{\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx\,(AC).}$$

b) Pentru $p>0$ dat, *integralele Dirichlet* $\int_0^{+\infty}\dfrac{\sin x}{x^p}dx$ şi $\int_1^{+\infty}\dfrac{\cos x}{x^p}dx.$

Rezolvare pentru $\int_0^{+\infty}\dfrac{\sin x}{x^p}dx$**.**

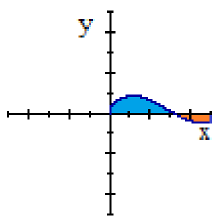
etapa 1.$f:\,]0,+\infty[\,\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{\sin x}{x^p}.$

f este bine definită şi continuă pe $]0,+\infty[\Rightarrow f\in\mathcal{R}_{\text{loc}}(]0,+\infty[)$

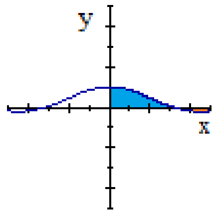
$b=+\infty$ este punct singular pentru integrala improprie de speţa 1, pe interval nemărginit.

$a=0$ este punct singular pentru integrala improprie de speţa 2, cu integrant nemărginit, doar pentru $p>1$, deoarece

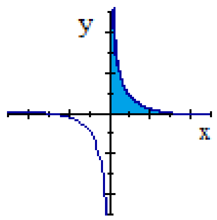
$p\in\,]0,1[\Rightarrow \lim\limits_{x\to0,x>0} f(x) = \lim\limits_{x\to0,x>0}\dfrac{\sin x}{x^1}\cdot x^{1-p} = 1\cdot 0 = 0\ne\pm\infty.$



$p=1\Rightarrow \lim\limits_{x\to0,x>0} f(x) = \lim\limits_{x\to0,x>0}\dfrac{\sin x}{x^1} = 1\ne\pm\infty.$



$p \in \left]1,+\infty\right[\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0,x>0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0,x>0} \dfrac{\sin x}{x^1} \cdot \dfrac{1}{x^{p-1}} = 1 \cdot (+\infty) = +\infty.$



etapa 2. Se studiază natura şi valoarea integralei, utilizând Definiţia -nu este posibil.
etapa 3. Se studiază natura integralei improprii date, utilizând Criterii. Se studiază separat natura integralelor

$\mathcal{I}_1 = \int_0^1 \dfrac{\sin x}{x^p} dx$ şi $\mathcal{I}_2 = \int_1^{+\infty} \dfrac{\sin x}{x^p} dx.$

•Pentru $\mathcal{I}_1$:

-dacă $p \in \left]0,1\right]$ atunci $\mathcal{I}_1$ este (C), ca fiind identificată cu integrala Riemann ataşată funcţiei prelungire prin continuitate a lui f.

-dacă $p \in \left]1,+\infty\right[$ se aplică pentru integrala improprie:

Criteriul în α cu limită pentru integrale improprii de speţa 2.

$f(x) = \dfrac{\sin x}{x^p} \geq 0, \forall x \in \left[0,1\right[.$

$l_1 = \lim\limits_{x\to 0,x>0} (x-0)^{\alpha_1} |f(x)| = \lim\limits_{x\to 0,x>0} x^{\alpha_1} \dfrac{\sin x}{x^p} = \lim\limits_{x\to 0,x>0} x^{\alpha_1} \dfrac{\sin x}{x^1} \cdot \dfrac{1}{x^{p-1}}.$

•Se încearcă $\alpha_1 = p-1 \in \left]0,1\right[$, adică $p \in \left]1,2\right[. \exists ? l_1 = \lim\limits_{x\to 0,x>0} x^{\alpha_1} \dfrac{\sin x}{x^1} \cdot \dfrac{1}{x^{p-1}} \overset{\alpha_1 = p-1}{=} \lim\limits_{x\to 0,x>0} \dfrac{\sin x}{x^1} = 1.$

$$\left.\begin{array}{l} \exists \alpha_1 = p-1 \in \left]0,1\right[\text{ a.î.} \\ \exists \lim\limits_{x\to 0,x>0} (x-0)^{\alpha} |f(x)| = l_1 = 1 \text{ şi } 0 \leq l < +\infty \end{array}\right\} \overset{\text{Crit. în } \alpha}{\Rightarrow} \mathcal{I}_1 = \int_0^1 \frac{\sin x}{x^p} dx \, (AC)$$

•Se încearcă $\alpha_1 = p-1 \in \left[1,+\infty\right[$, adică $p \in \left[2,+\infty\right[. \exists ? l_1 = \lim\limits_{x\to 0,x>0} x^{\alpha_1} \dfrac{\sin x}{x^1} \cdot \dfrac{1}{x^{p-1}} \overset{\alpha_1 = p-1}{=} \lim\limits_{x\to 0,x>0} \dfrac{\sin x}{x^1} = 1.$

$$\left.\begin{array}{l} \exists \alpha_1 = p-1 \in \left[1,+\infty\right[\text{ a.î.} \\ \exists \lim\limits_{x\to 0,x>0} (x-0)^{\alpha} [f(x)| = l_1 = 1 \text{ şi } 0 \leq l < +\infty \end{array}\right\} \overset{\text{Crit. în } \alpha}{\Rightarrow} \mathcal{I}_1 = \int_0^1 \frac{\sin x}{x^p} dx \, (D).$$

Deci $\mathcal{I}_1 - (C)$ pentru $p \in \left]0,2\right[$ şi $\mathcal{I}_1 - (D)$ pentru $p \in \left[2,+\infty\right[.$

•Pentru $\mathcal{I}_2$-

Criteriul în α cu limită pentru integrale improprii de speţa 1. Precizăm că, pentru $x \in [1,+\infty[$, $\sin x$ ia şi valori pozitive şi valori negative. Deci f nu admite un semn constant pe $[1,+\infty[$, nu putem aplica Criteriul în α cu limită pentru integrale improprii de speţa 1.

Criteriul comparaţiei cu inegalităţi

$$\left.\begin{array}{l} 0 \leq |f(x)| = \left|\dfrac{\sin x}{x^p}\right| = \dfrac{|\sin x|}{x^p} \leq \dfrac{1}{x^p}, \forall x \in [1,+\infty[\\ \int_1^{+\infty} \dfrac{1}{x^p} dx\,(C) \text{ conform exerciţiului 3 (sau direct)} \\ \int_1^{+\infty} \dfrac{1}{x^p} dx = \dfrac{1}{1-p}, \text{ dacă } p > 1. \end{array}\right\} \overset{\text{Crit. Comp.}}{\Rightarrow} \int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^p} dx\,(AC) \text{ pentru } p > 1.$$

Deoarece se poate arăta, folosind Criteriul lui Dirichlet (neprezentat aici), că, pentru $p > 0$ (deci şi $p \in]0,1]$), $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^p} dx\,(C)$, se va reface reface studiul.

Se anticipează formal că sunt îndeplinite ipotezele de integrare prin părţi într-o integrală improprie convergentă şi

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^p} dx \overset{\text{formal, d. }\exists}{=} \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p}(-\cos x)' dx = \frac{1}{x^p}(-\cos x)\Big|_{x=1}^{x\to+\infty} - \int_1^{+\infty} \frac{-p}{x^{p+1}}(-\cos x)\,dx =$$
$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{-\cos x}{x^p} - \frac{-\cos 1}{1^p} - p\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^{p+1}} dx = 0 + \cos 1 - p\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^{p+1}} dx.$$

Se aplică criteriul comparaţiei cu inegalităţi pentru $\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^{p+1}} dx$.

$$\left.\begin{array}{l} 0 \leq |f_1(x)| = \left|\dfrac{\cos x}{x^{p+1}}\right| = \dfrac{|\cos x|}{x^{p+1}} \leq \dfrac{1}{x^{p+1}}, \forall x \in [1,+\infty[\\ \int_1^{+\infty} \dfrac{1}{x^{p+1}} dx\,(C) \text{ conform exerciţiului 3 (sau direct)} \\ \int_1^{+\infty} \dfrac{1}{x^{p+1}} dx = \dfrac{1}{-p}, \text{ dacă } p+1 > 1, \text{ adică } p > 0. \end{array}\right\} \overset{\text{Crit. Comp.}}{\Rightarrow} \int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^{p+1}} dx\,(AC), \text{ deci } (C) \text{ pentru } p > 0$$

$\Rightarrow \int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^p} dx\,(C)$ pentru $p > 0$.

Deci $\mathcal{I}_2 - (C)$ pentru $p \in]0,+\infty[$.

Concluzii:

$$\boxed{\begin{cases} \text{-pentru } p \in]0,2[\Rightarrow \mathcal{I}_1 - (C) \text{ şi } \mathcal{I}_2 - (C) \Rightarrow \int_0^{+\infty} \dfrac{\sin x}{x^p} dx\,(C)\,(\text{ chiar } (SC)). \\ \text{-pentru } p \in [2,+\infty[\Rightarrow \mathcal{I}_1 - (D) \text{ şi } \mathcal{I}_2 - (C) \Rightarrow \int_0^{+\infty} \dfrac{\sin x}{x^p} dx\,(D). \end{cases}}$$

Rezolvare pentru $\int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{x^p} dx$.

etapa 1. $f :]0,+\infty[\to \mathbb{R}, f(x) = \frac{\cos x}{x^p}$.

f este bine definită şi continuă pe $]0,+\infty[\Rightarrow f \in \mathcal{R}_{\text{loc}}(]0,+\infty[)$

$b = +\infty$ este punct singular pentru integrala improprie de speţa 1, pe interval nemărginit.

$a = 0$ este punct singular pentru integrala improprie de speţa 2, cu integrant nemărginit, pentru $p > 0$, deoarece

$$\lim_{x\to 0, x>0} f(x) = \lim_{x\to 0, x>0} \frac{\cos x}{x^p} = +\infty.$$

etapa 2. Se studiază natura şi valoarea integralei, utilizând Definiţia -nu este posibil.

etapa 3. Se studiază natura integralei improprii date, utilizând Criterii. Se studiazăseparat natura integralelor

$\mathcal{I}_1 = \int_0^1 \frac{\cos x}{x^p} dx$ şi $\mathcal{I}_2 = \int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^p} dx$.

•Pentru $\mathcal{I}_1$:

Criteriul în α cu limită pentru integrale improprii de speţa 2.

$f(x) = \dfrac{\cos x}{x^p} \geq 0, \forall x \in [0,1[\,.$

$l_1 = \lim\limits_{x\to 0, x>0} (x-0)^{\alpha_1} |f(x)| = \lim\limits_{x\to 0, x>0} x^{\alpha_1} \dfrac{\cos x}{x^p}.$

•Se încearcă $\alpha_1 = p \in\,]0,1[\,.\exists ? l_1 = \lim\limits_{x\to 0, x>0} x^{\alpha_1} \dfrac{\cos x}{x^p} \overset{\alpha_1 = p}{=} \lim\limits_{x\to 0, x>0} \cos x = 1.$

$$\left.\begin{array}{l} \exists \alpha_1 = p \in\,]0,1[\text{ a.î.} \\ \exists \lim\limits_{x\to 0, x>0} (x-0)^{\alpha} |f(x)| = l_1 = 1 \text{ şi } 0 \leq l < +\infty \end{array}\right\} \overset{\text{Crit. în } \alpha}{\Rightarrow} \mathcal{I}_1 = \int_0^1 \frac{\cos x}{x^p} dx\, (AC)$$

•Se încearcă $\alpha_1 = p \in [1,+\infty[\,.\exists ? l_1 = \lim\limits_{x\to 0, x>0} x^{\alpha_1} \dfrac{\cos x}{x^p} \overset{\alpha_1 = p}{=} \lim\limits_{x\to 0, x>0} \cos x = 1.$

$$\left.\begin{array}{l} \exists \alpha_1 = p \in [1,+\infty[\text{ a.î.} \\ \exists \lim\limits_{x\to 0, x>0} (x-0)^{\alpha} |f(x)| = l_1 = 1 \text{ şi } 0 \leq l < +\infty \end{array}\right\} \overset{\text{Crit. în } \alpha}{\Rightarrow} \mathcal{I}_1 = \int_0^1 \frac{\cos x}{x^p} dx\, (D)\,.$$

Deci $\mathcal{I}_1 - (C)$ pentru $p \in\,]0,1[$ şi $\mathcal{I}_1 - (D)$ pentru $p \in [1,+\infty[\,.$

•Pentru $\mathcal{I}_2$-

Criteriul în α cu limită pentru integrale improprii de speţa 1. De precizat că, pentru $x \in [1,+\infty[\,,$ $\sin x$ ia şi valori pozitive şi valori negative. Deci f nu admite un semn constant pe $[1,+\infty[\,,$ nu se poate aplica Criteriul în α cu limită pentru integrale improprii de speţa 1.

Criteriul comparaţiei cu inegalităţi

$$\left.\begin{array}{l} 0 \leq |f(x)| = \left|\dfrac{\cos x}{x^p}\right| = \dfrac{|\cos x|}{x^p} \leq \dfrac{1}{x^p}, \forall x \in [1,+\infty[\\ \int_1^{+\infty} \dfrac{1}{x^p} dx\, (C) \text{ conform exerciţiului 3 (sau direct)} \\ \quad \int_1^{+\infty} \dfrac{1}{x^p} dx = \dfrac{1}{1-p}, \text{ dacă } p > 1. \end{array}\right\} \overset{\text{Crit. Comp.}}{\Rightarrow} \int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^p} dx\, (AC) \text{ pentru } p > 1.$$

Deoarece se poate arăta, folosind Criteriul lui Dirichlet (neprezentat aici), că, pentru $p > 0$(deci şi $p \in\,]0,1]$), $\int_1^{+\infty} \dfrac{\cos x}{x^p} dx\, (C)$, este de refăcut studiul.

Se anticipează formal că sunt îndeplinite ipotezele de integrare prin părţi într-o integrală improprie convergentă şi

$$\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^p} dx \overset{\text{formal, d. } \exists}{=} \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p} (\sin x)' dx = \frac{1}{x^p} (\sin x) \bigg|_{x=1}^{x\to+\infty} - \int_1^{+\infty} \frac{-p}{x^{p+1}} (\sin x)\, dx =$$
$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\sin x}{x^p} - \frac{\sin 1}{1^p} + p \int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^{p+1}} dx = 0 - \sin 1 + p \int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^{p+1}} dx.$$

Se aplică criteriul comparaţiei cu inegalităţi pentru $\int_1^{+\infty} \dfrac{\cos x}{x^{p+1}} dx.$

$$\left.\begin{array}{l} 0 \leq |f_1(x)| = \left|\dfrac{\sin x}{x^{p+1}}\right| = \dfrac{|\sin x|}{x^{p+1}} \leq \dfrac{1}{x^{p+1}}, \forall x \in [1,+\infty[\\ \int_1^{+\infty} \dfrac{1}{x^{p+1}} dx\, (C) \text{ conform exerciţiului 3 (sau direct)} \\ \quad \int_1^{+\infty} \dfrac{1}{x^{p+1}} dx = \dfrac{1}{-p}, \text{ dacă } p+1 > 1, \text{ adică } p > 0. \end{array}\right\} \overset{\text{Crit. Comp.}}{\Rightarrow} \int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^{p+1}} dx\, (AC)\,, \text{ deci } (C) \text{ pentru } p > 0$$

$\Rightarrow \int_1^{+\infty} \dfrac{\sin x}{x^p} dx\, (C)$ pentru $p > 0.$

Deci $\mathcal{I}_2 - (C)$ pentru $p \in\,]0,+\infty[\,.$

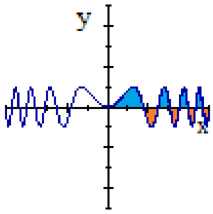
Concluzii:

$$\boxed{\begin{cases} \text{-pentru } p \in \left]0,1\right[\Rightarrow \mathcal{I}_1 - (C) \text{ şi } \mathcal{I}_2 - (C) \Rightarrow \int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{x^p} dx \, (C) \, (\text{ chiar } (SC)). \\ \text{-pentru } p \in \left[1,+\infty\right[\Rightarrow \mathcal{I}_1 - (D) \text{ şi } \mathcal{I}_2 - (C) \Rightarrow \int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{x^p} dx \, (D) \, . \end{cases}}$$

c) Pentru $p > 0$ dat, *integralele Fresnel* (folosite în optică)
$\int_0^{+\infty} \sin x^2 dx$ şi $\int_0^{+\infty} \cos x^2 dx$

Rezolvare pentru $\int_0^{+\infty} \sin x^2 dx$**.**

etapa 1. $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}, f_1(x) = \sin x^2$.



f este bine definită şi continuă pe $[0, +\infty[\Rightarrow f \in \mathcal{R}_{\text{loc}}([0, +\infty[)$

$b = +\infty$ este unicul punct singular pentru integrala improprie de speţa 1, pe interval nemărginit.

etapa 2. Se studiază natura şi valoarea integralei, utilizând Definiţia -nu este posibil.

etapa 3. Se studiază natura integralei improprii date, utilizând Criterii.

Deoarece se poate arăta, folosind Criteriul lui Dirichlet (neprezentat aici), că $\int_0^{+\infty} \sin x^2 dx \, (C)$, se va reface studiul.

Se anticipează formal că sunt îndeplinite ipotezele de schimbare de variabilă într-o integrală improprie convergentă şi facem schimbarea de variabilă de integrare

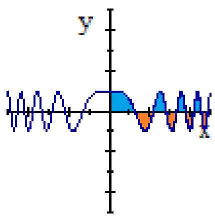
$$\begin{cases} x^2 = t, \, t \in \left]0, +\infty\right[\,|\, \text{inversăm} \\ x = \sqrt{t}, \, t \in \left]0, +\infty\right[\,|\, \text{diferenţiem} \\ dx = \frac{1}{2\sqrt{t}} dt \\ \text{capete: } \begin{cases} x \to 0 \Rightarrow t \to 0 \\ x \to +\infty \Rightarrow t \to +\infty \end{cases} \end{cases}$$

Se înlocuieşte$\Rightarrow \int_0^{+\infty} \sin t \cdot \frac{1}{2\sqrt{t}} dt = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t^{\frac{1}{2}}} dt$, care este o integrală Dirichlet cu $p = \frac{1}{2}$, deci (C).

Atunci $\boxed{\int_0^{+\infty} \sin\left(x^2\right) dx \, (C) \, .}$

Rezolvare pentru $\int_0^{+\infty} \cos x^2 dx$**.**

etapa 1. $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}, f_1(x) = \cos x^2$.



f este bine definită şi continuă pe $[0, +\infty[\Rightarrow f \in \mathcal{R}_{\text{loc}}([0, +\infty[)$

$b = +\infty$ este unicul punct singular pentru integrala improprie de speţa 1, pe interval nemărginit.

etapa 2. Se studiază natura şi valoarea integralei, utilizând Definiţia -nu este posibil.
etapa 3. Se studiază natura integralei improprii date, utilizând Criterii.

Deoarece se poate arăta, folosind Criteriul lui Dirichlet (neprezentat aici), că $\int_0^{+\infty} \cos x^2 dx \, (C)$, vom reface studiul.

Se anticipează formal că sunt îndeplinite ipotezele de schimbare de variabilă într-o integrală improprie convergentă şi se face schimbarea de variabilă de integrare

$$\begin{cases} x^2 = t, \, t \in \,]0, +\infty[| \text{ inversăm} \\ x = \sqrt{t}, \, t \in \,]0, +\infty[| \text{ diferenţiem} \\ dx = \frac{1}{2\sqrt{t}} dt \\ \text{capete: } \begin{cases} x \to 0 \Rightarrow t \to 0 \\ x \to +\infty \Rightarrow t \to +\infty \end{cases} \end{cases}$$

Se înlocuieşte$\Rightarrow$ $\int_0^{+\infty} \cos t \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{t}} dt = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \dfrac{\cos t}{t^{\frac{1}{2}}} dt$, care este o integrală Dirichlet cu $p = \frac{1}{2}$, deci (C).

Atunci $\boxed{\int_0^{+\infty} \cos\left(x^2\right) dx \, (C).}$

Observaţia 4. Teorema de liniaritate a integralei improprii
$\int_{\mathbb{I}} (\alpha f(x) + \beta g(x)) \, dx = \alpha \int_{\mathbb{I}} f(x) \, dx + \beta \int_{\mathbb{I}} g(x) \, dx$,
teorema integrării prin părţi, precum şi teoremele de schimbare de variabilă se pot aplica numai dacă, anterior, s-a stabilit, pe baza unui criteriu, că integralele şi limitele ce apar în formule sunt convergente.

Este posibil ca, printr-o schimbare de variabilă, o integrală improprie să se transforme într-o integrală Riemann şi reciproc.

Exerciţiul 11. Să se studieze natura următoarelor integrale şi, în caz de convergenţă, să se determine valoarea lor
a) $\int_0^1 x \cdot \sqrt{\dfrac{x}{1-x}} dx-$ a se vedea Curs.

○6. INTEGRALA IMPROPRIE CU PARAMETRI. FUNCŢIILE EULER Γ şi B

-se va studia la Statistică şi Prelucrarea Datelor

6.1. Integrala improprie cu parametri. Definiţii. Exemple. Criterii...

6.2. Funcţiile Γ şi B ale lui Euler

-a se vedea Curs