SEMINAR NR. 12, REZOLVĂRI
EDCO, AIA

7.2. Metode operaţionale folosind operatorul Laplace

7.2.1. Rezolvarea de ecuaţii şi sisteme de ecuaţii diferenţiale liniare cu coeficienţi constanţi, omogene sau neomogene (cu termeni liberi funcţii original) când se dau condiţii iniţiale în $t_0 = 0$

Regulă. Conform Teoremei Cauchy pentru problemele Cauchy cu ecuaţiile şi sistemele din titlu, acestea admit o soluţie unică, despre care poate fi presupusă drept funcţie original (sau vector coloană de funcţii original); pentru neomogene se impune ca termenii liberi să fie funcţii original. Atunci:

•se aplică ecuaţiei (sau fiecărei ecuaţii a sistemului) transformata Laplace;

•se utilizează Teorema 1(de liniaritate);

•se utilizează Teorema 6(de derivare a originalului), CI şi tabelul (pentru neomogene);

•se obţine o ecuaţie funcţională algebrică sau sistem funcţional algebric (fără derivate sau integrale), având ca necunoscute funcţii imagine; o (îl) rezolvăm;

•se determină originalele corespunzătoare imaginilor găsite.

Observaţie. Utilizând metoda legată de transformata Laplace se obţin atât pentru ecuaţiile cât şi pentru sistemele de ecuaţii diferenţiale din titlu soluţiile definite doar pe $[0, +\infty[$.

Exerciţiul 14. Utilizând transformata Laplace să se rezolve următoarele probleme Cauchy cu ecuaţii diferenţiale:

a) $\begin{cases} x^{(4)} + x''' + 2x'' + x' + x = -2(\cos t)\,\eta(t), \\ CI : x(0) = 0, x'(0) = 2, x''(0) = 0, x'''(0) = -4; \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x''(t) - 2x'(t) = \left(e^{2t} + t^2 - 1\right)\eta(t), \\ CI : x(0) = \frac{1}{8}, x'(0) = 1; \end{cases}$

c) $\begin{cases} x''' + 2x'' + x' = -2e^{-2t}\eta(t), \\ CI : x(0) = 2, x'(0) = 1, x''(0) = 1; \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} x''' - 4x'' + 5x' - 2x = (2t+3)\,\eta(t), \\ CI : x(0) = 1, x'(0) = 0, x''(0) = 2; \end{cases}$

e) $\begin{cases} x'' - 5x' + 6x = e^t\eta(t), \\ CI : x(0) = -1, x'(0) = 1; \end{cases}$ **f)** $\begin{cases} x' + 2x = e^{-t}(2\cos 2t + \sin 2t)\,\eta(t), \\ CI : x(0) = 0; \end{cases}$

g) $\begin{cases} x''' + x' = \left(3t^2 - 6t + 6\right)\eta(t), \\ CI : x(0) = 7, x'(0) = 0, x''(0) = 6; \end{cases}$ ○**h)** $\begin{cases} x''(t) + x(t) = \dfrac{1}{\cos t}\eta(t), t \neq (2k+1)\dfrac{\pi}{2} \\ CI : x(0) = 0, x'(0) = 2; \end{cases}$

i) $\begin{cases} x^{(4)} - 16x = \left(t^2 + 1\right)\eta(t), \\ CI : x(0) = 0, x'(0) = 1, x''(0) = 1, x'''(0) = 0; \end{cases}$ **j)** $\begin{cases} x^{(4)} + x'' = (7t - 3\cos t)\,\eta(t), \\ CI : x(0) = 0, x'(0) = 1, x''(0) = 0, x'''(0) = 6; \end{cases}$

k) $\begin{cases} x''(t) - 7x'(t) + 10x(t) = 3e^t \cdot \eta(t), \\ CI : x(0) = 0, x'(0) = -3; \end{cases}$ **l)** $\begin{cases} x''(t) - 2x'(t) + 5x(t) = \left(2te^t + e^t\sin 2t\right)\cdot\eta(t), \\ CI : x(0) = 1, x'(0) = -1; \end{cases}$

m) $\begin{cases} x''(t) + x(t) = (\sin t + \cos t)\cdot\eta(t), \\ CI : x(0) = -2, x'(0) = 3; \end{cases}$ **n)** $\begin{cases} x''(t) + x(t) = \left(4e^t\right)\cdot\eta(t), \\ CI : x(0) = 2, x'(0) = -4; \end{cases}$

o) $\begin{cases} x''(t) + x(t) = (4\sin t)\cdot\eta(t), \\ CI : x(0) = -1, x'(0) = 0; \end{cases}$ **p)** $\begin{cases} x''(t) - 2x'(t) + x(t) = \left(6te^t\right)\cdot\eta(t), \\ CI : x(0) = 1, x'(0) = 1; \end{cases}$

q) $\begin{cases} x''(t) + 2x'(t) + x(t) = \left(te^{-t} + \sin t\right)\cdot\eta(t), \\ CI : x(0) = 4, x'(0) = 0; \end{cases}$ **r)** $\begin{cases} x''(t) - 2x'(t) - 3x(t) = \left(e^{4t}\right)\cdot\eta(t), \\ CI : x(0) = 2, x'(0) = 2; \end{cases}$

s) $\begin{cases} x''(t) - 5x'(t) + 4x(t) = \left(4t^2 e^{2t}\right) \cdot \eta(t), \\ CI : x(0) = -1, x'(0) = -1; \end{cases}$ **t)** $\begin{cases} x''(t) - 9x(t) = \left(e^{3t}\cos t\right) \cdot \eta(t), \\ CI : x(0) = 1, x'(0) = 2; \end{cases}$

u) $\begin{cases} x''(t) + 3x'(t) + 2x(t) = \left(e^{-t}\cos t\right) \cdot \eta(t), \\ CI : x(0) = -1, x'(0) = 1; \end{cases}$ **v)** $\begin{cases} x''(t) + 3x'(t) + 2x(t) = (\sin t) \cdot \eta(t), \\ CI : x(0) = 0, x'(0) = 5; \end{cases}$

Rezolvare. a) A se vedea Curs.

b) Fie $\begin{cases} (*_{EN}) \;\; x''(t) - 2x'(t) = \left(e^{2t} + t^2 - 1\right)\eta(t), \\ CI : x(0) = \frac{1}{8}, x'(0) = 1; \end{cases}$

Ecuaţia $(*_{EN})$ este o ecuaţie diferenţială de ordin 2, liniară, cu coeficienţii constanţi $a_1 = -2$, $a_2 = 0$, neomogenă cu termenul liber $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(t) = \left(e^{2t} + t^2 - 1\right)\eta(t)$.

Metoda clasică. Pentru $t \geq 0$, variabilă independentă din domeniul de definiţie al soluţiei, se poate determina $x(t; c_1, c_2)$, soluţia generală pentru ecuaţia $(*_{EN})$ ca anterior, etapele $1, 2, 3$. Apoi se impune asupra soluţiei generale CI şi se determină acea soluţie particulară a $(*_{EN})$ ce verifică (CI). Altă metodă de rezolvare este

Metoda transformatei Laplace.

Se observă că ecuaţia $(*_{EN})$ este o ecuaţie diferenţială de ordin 2, liniară, cu coeficienţii constanţi, neomogenă cu termenul liber $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(t) = \left(e^{2t} + t^2 - 1\right)\eta(t)$, care este funcţie original. Se dau CI în $t_0 = 0$. Se caută direct $x(t) = ?$ unica soluţie a problemei Cauchy $(*_{EN}) + CI$. Atunci $x \in \mathcal{O}$ şi se notează

$$X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\}(s).$$

•se aplică ecuaţiei $(*_{EN})$ transformata Laplace$\Rightarrow$

$$\mathcal{L}\{x''(t) - 2x'(t)\}(s) = \mathcal{L}\left\{\left(e^{2t} + t^2 - 1\right) \cdot \eta(t)\right\}(s)$$

•se utilizează Teorema 1(de liniaritate) $\Rightarrow$

$$\mathcal{L}\{x''(t)\}(s) - 2\mathcal{L}\{x'(t)\}(s) = \mathcal{L}\left\{e^{2t} \cdot \eta(t)\right\}(s) + \mathcal{L}\left\{t^2 \cdot \eta(t)\right\}(s) - \mathcal{L}\{\eta(t)\}(s)$$

Din tabel

$$\mathcal{L}\left\{t^n \cdot e^{\lambda t} \cdot \eta(t)\right\}(s) = \frac{n!}{(s-\lambda)^{n+1}} \Rightarrow$$

$$\mathcal{L}\left\{e^{2t} \cdot \eta(t)\right\}(s) = \frac{1}{s-2}; \mathcal{L}\left\{t^2 \cdot \eta(t)\right\}(s) = \frac{2}{s^3}; \mathcal{L}\{\eta(t)\}(s) = \frac{1}{s}.$$

Se utilizeazăTeorema 6 (de derivare a originalului) $\Rightarrow$

$$\begin{array}{rl} 0 & \cdot|\mathcal{L}\{x(t)\}(s) = X(s) \\ -2 & \cdot|\mathcal{L}\{x'(t)\}(s) = sX(s) - (x(0_+)) \\ 1 & \cdot|\mathcal{L}\{x''(t)\}(s) = s^2X(s) - (sx(0_+) + x'(0_+)) \\ \overline{+}| & \dfrac{1}{s-2} + \dfrac{2}{s^3} - \dfrac{1}{s} = \left(-2s + s^2\right)X(s) - (-2+s)\underbrace{x(0_+)}_{\frac{1}{8}} - \underbrace{x'(0_+)}_{1}, \forall s \in D. \end{array}$$

Se aplică $CI \Rightarrow$

$$\frac{1}{s-2} + \frac{2}{s^3} - \frac{1}{s} = s(s-2)X(s) - \tfrac{1}{8}(s-2) - 1, \forall s \in D.$$

S-a obţinut o ecuaţie funcţională algebrică având ca necunoscută funcţia imagine $X(s)$; se rezolvă.

$$X(s) = \frac{\left(\dfrac{1}{s-2} + \dfrac{2}{s^3} - \dfrac{1}{s}\right) + \left(\frac{1}{8}(s-2) + 1\right)}{s(s-2)} \Rightarrow$$

$$X(s) = \frac{s^3 + 2(s-2) - s^2(s-2)}{s^4(s-2)^2} + \frac{1}{8}\frac{s-2+8}{s(s-2)} = \frac{2s^2 + 2s - 4}{s^4(s-2)^2} + \frac{1}{8}\frac{s+6}{s(s-2)} \overset{\text{descompunem în}}{\underset{\text{în fr. simple}}{=}}$$

$$= \left(\frac{3}{8}\frac{1}{s} + \frac{1}{4}\frac{1}{s^2} - \frac{1}{2}\frac{1}{s^3} - \frac{1}{s^4} - \frac{3}{8}\frac{1}{s-2} + \frac{1}{2}\frac{1}{(s-2)^2}\right) + \frac{1}{8}\left(\frac{4}{s-2} - \frac{3}{s}\right) =$$

$$= 0 \cdot \frac{1}{s} + \frac{1}{4}\frac{1}{s^2} - \frac{1}{2}\frac{1}{s^3} - \frac{1}{s^4} + \frac{1}{8}\frac{1}{s-2} + \frac{1}{2}\frac{1}{(s-2)^2}.$$

•se determină originalul $x(t)$ corespunzător funcţiei imagine $X(s)$ găsite.

Din tabel, folosind $T1$, de liniaritate$\Rightarrow$

$$x(t) = 0 \cdot \eta(t) + \frac{1}{4}\frac{t}{1!}\eta(t) - \frac{1}{2}\frac{t^2}{2!}\eta(t) - \frac{t^3}{3!}\eta(t) + \frac{1}{8}e^{2t}\eta(t) + \frac{1}{2}\frac{t}{1!}e^{2t}\eta(t)$$
$$= \left(0 + \frac{1}{4}\frac{t}{1!} - \frac{1}{2}\frac{t^2}{2!} - \frac{t^3}{3!} + \frac{1}{8}e^{2t} + \frac{1}{2}\frac{t}{1!}e^{2t}\right)\eta(t).$$

sau $x(t) = \frac{1}{4}\frac{t}{1!} - \frac{1}{2}\frac{t^2}{2!} - \frac{t^3}{3!} + \frac{1}{8}e^{2t} + \frac{1}{2}\frac{t}{1!}e^{2t}, t \geq 0.$

Comentariu. •Descompunerea

$$\frac{2s^2+2s-4}{s^4(s-2)^2} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{C}{s^3} + \frac{D}{s^4} + \frac{E}{s-2} + \frac{F}{(s-2)^2}$$

se poate face:

-folosind calculatorul;

-folosind modul general, adică rezolvarea sistemului liniar algebric neomogen cu necunoscutele A, B, C, D, E, F, obţinut prin identificarea coeficienţilor puterilor lui s;

-folosind modul general combinat cu un mod particular (a se vedea Anexa 4, AM), adică în sistemul liniar algebric neomogen cu necunoscutele A, B, C, D, E, necunoscutele A şi E corespunzătoare sunt determinate cu limită.

•Mai mult, pentru funcţia

$G_1(s) = \dfrac{2s^2+2s-4}{s^4(s-2)^2}$ se poate determina originalul folosind suma reziduurilor pentru $e^{st}G_1(s)$ calculaţi în polul 2, de ordin 2 şi în polul 0, de ordin 4. Calculele sunt tot de dificultate sporită, din cauza polului de ordin 4.

$*s_1 = 2$ este pol de ordin 2 pentru G_1, şi pentru $e^{st}G_1(s)$.

$*s_2 = 0$ este pol de ordin 4 pentru G_1, şi pentru $e^{st}G_1(s)$.

Este de dorit să nu se facă o confuzie în calcul, ci să se aplice mereu modularea în frecvenţă, adică să se calculeze reziduurile funcţiei $e^{st} \cdot G_1(s)$:

$$\operatorname{rez}\left(e^{st} \cdot G_1(s); 2\right) \underset{\text{conform } 2\cdot}{\overset{0 \text{ e pol de ordin } 2}{=}} \frac{1}{(2-1)!}\lim_{s\to 2}\left((s-2)^2 \frac{2s^2+2s-4}{s^4(s-2)^2}e^{st}\right)^{(2-1)} =$$
$$= \frac{1}{1!}\lim_{s\to 2}\left(\frac{2s^2+2s-4}{s^4}e^{st}\right)' \overset{s \text{ este variabilă de derivare}}{=}$$
$$= \lim_{s\to 2}\left(\frac{\left((4s+2)e^{st} + \left(2s^2+2s-4\right)e^{st}\cdot t\right)s^4 - \left(2s^2+2s-4\right)e^{st}\cdot 4s^3}{\left(s^4\right)^2}\right) =$$
$$= \lim_{s\to 2}\left(\frac{e^{st}\left(\left(4s+2+\left(2s^2+2s-4\right)\cdot t\right)s^4 - \left(2s^2+2s-4\right)\cdot 4s^3\right)}{s^8}\right) =$$
$$= \frac{e^{2t}(10+8t-8\cdot 2)}{2^4} = \frac{e^{2t}(4t-3)}{8}.$$

$$\operatorname{rez}\left(e^{st} \cdot G_1(s); 0\right) \underset{\text{conform } 2\cdot}{\overset{0 \text{ e pol de ordin } 4}{=}} \frac{1}{(4-1)!}\lim_{s\to 0}\left((s-0)^4 \frac{2s^2+2s-4}{s^4(s-2)^2}e^{st}\right)^{(4-1)} =$$
$$= \frac{1}{3!}\lim_{s\to 0}\left(\frac{2s^2+2s-4}{(s-2)^2}e^{st}\right)''' \overset{s \text{ este variabilă de derivare}}{=}$$

$$= \frac{1}{3!}\lim_{s\to 0}\left(\frac{\left((4s+2)e^{st}+\left(2s^2+2s-4\right)e^{st}\cdot t\right)(s-2)^2-\left(2s^2+2s-4\right)e^{st}\cdot 2(s-2)}{\left((s-2)^2\right)^2}\right)'' =$$

$$= \frac{1}{3!}\lim_{s\to 0}\left(\frac{e^{st}\left(\left((4s+2)+\left(2s^2+2s-4\right)\cdot t\right)(s-2)-\left(2s^2+2s-4\right)\cdot 2\right)}{(s-2)^3}\right)'' = \lim_{s\to 0}(...).$$

Atunci,

$f(t)=\dfrac{e^{2t}(4t-3)}{8}+\operatorname{rez}\left(e^{st}\cdot G_1(s);0\right)+\dfrac{1}{8}\left(4e^{2t}-3\cdot 1\right), t\geq 0.$

Uneori metodele pot fi combinate.

c) Fie $\begin{cases} (*_{EN})\ \ x'''(t)+2x''(t)+x'(t)=-2e^{-2t}\eta(t), \\ CI: x(0)=2, x'(0)=1, x''(0)=1; \end{cases}$

Ecuaţia $(*_{EN})$ este o ecuaţie diferenţială de ordin 3, liniară, cu coeficienţii constanţi $a_1=2$, $a_2=1$, $a_3=0$, neomogenă cu termenul liber $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(t)=-2e^{-2t}\eta(t)$.

<u>Metoda clasică.</u>

Pentru $t\geq 0$, variabilă independentă din domeniul de definiţie al soluţiei, se poate determina $x(t;c_1,...,c_3)$, soluţia generală pentru ecuaţia $(*_{EN})$ ca anterior, etapele $1,2,3$. Apoi se impune asupra soluţiei generale CI şi se determină acea soluţie particulară a $(*_{EN})$ ce verifică (CI). Altă metodă de rezolvare este

<u>Metoda transformatei Laplace</u>.

Se observă că ecuaţia $(*_{EN})$ este o ecuaţie diferenţială de ordin 3, liniară, cu coeficienţii constanţi, neomogenă cu termenul liber $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(t)=-2e^{-2t}\eta(t)$, care este funcţie original. Se dau CI în $t_0=0$. Se caută direct $x(t)=?$ unica soluţie a problemei Cauchy $(*_{EN})+CI$. Atunci $x\in\mathcal{O}$ şi se notează

$X(s)=\mathcal{L}\{x(t)\}(s)$.

•se aplică ecuaţiei $(*_{EN})$ transformata Laplace$\Rightarrow$

$\mathcal{L}\{x'''(t)+2x''(t)+x'(t)\}(s)=\mathcal{L}\left\{-2e^{-2t}\cdot\eta(t)\right\}(s)$

•se utilizează Teorema 1(de liniaritate) $\Rightarrow$

$\mathcal{L}\{x'''(t)\}(s)+2\mathcal{L}\{x''(t)\}(s)+\mathcal{L}\{x'(t)\}(s)=-2\mathcal{L}\left\{e^{-2t}\cdot\eta(t)\right\}(s)$

Din tabel $\Rightarrow \mathcal{L}\left\{e^{-2t}\cdot\eta(t)\right\}(s)=\dfrac{1}{s+2}$.

Se utilizeazăTeorema 6 (de derivare a originalului) $\Rightarrow$

$$\begin{array}{ll} 0 & \cdot|\mathcal{L}\{x(t)\}(s)=X(s) \\ 1 & \cdot|\mathcal{L}\{x'(t)\}(s)=sX(s)-(x(0_+)) \\ 2 & \cdot|\mathcal{L}\{x''(t)\}(s)=s^2X(s)-(sx(0_+)+x'(0_+)) \\ 1 & \cdot|\mathcal{L}\{x'''(t)\}(s)=s^3X(s)-\left(s^2x(0_+)+sx'(0_+)+x''(0_+)\right) \\ \overline{+}| & -2\dfrac{1}{s+2}=\left(s+2s^2+s^3\right)X(s)-\left(1+2s+s^2\right)\underbrace{x(0_+)}_{2}-(2+s)\underbrace{x'(0_+)}_{1}-1\cdot\underbrace{x''(0_+)}_{1}, \forall s\in D. \end{array}$$

Se aplică $CI \Rightarrow$

$-2\dfrac{1}{s+2}=s(s+1)^2X(s)-2\left(1+2s+s^2\right)-(2+s)-1, \forall s\in D.$

S-a obţinut o ecuaţie funcţională algebrică având ca necunoscută funcţia imagine $X(s)$; se rezolvă.

$$X(s)=\frac{\left(-2\dfrac{1}{s+2}\right)+\left(2+4s+2s^2+2+s+1\right)}{s(s+1)^2}=\frac{-2+5s+5s^2+2s^3+10+10s+4s^2}{s(s+1)^2(s+2)}=$$

$$= \frac{2s^3+9s^2+15s+8}{s(s+1)^2(s+2)} = \frac{2s^2+7s+8}{s(s+1)(s+2)}.$$

•se determină originalul $x(t)$ corespunzător funcţiei imagine $X(s)$ găsite. Se descompune X în fracţii simple (din tabel) $\Rightarrow$

$X(s) = 4\frac{1}{s} - 3\frac{1}{s+1} + \frac{1}{s+2}.$

$\overset{\text{tabel}}{\Rightarrow} X(s) = 4\mathcal{L}\{\eta(t)\}(s) - 3\mathcal{L}\{e^{-t}\cdot\eta(t)\}(s) + \mathcal{L}\{e^{-2t}\cdot\eta(t)\}(s) \overset{T1,\text{lin}}{=}$
$\mathcal{L}\{4\eta(t) - 3e^{-t}\cdot\eta(t) + e^{-2t}\cdot\eta(t)\}(s)$

$\Rightarrow x(t) = (4 - 3e^{-t} + e^{-2t})\cdot\eta(t)$ sau $x(t) = 4 - 3e^{-t} + e^{-2t}, t \geq 0.$

d) Fie $\begin{cases} (*_{EN})\ x''' - 4x'' + 5x' - 2x = (2t+3)\eta(t), \\ CI: x(0) = 1, x'(0) = 0, x''(0) = 2; \end{cases}$

Ecuaţia $(*_{EN})$ este o ecuaţie diferenţială de ordin 3, liniară, cu coeficienţii constanţi $a_1 = -4$, $a_2 = 5$, $a_3 = -2$, neomogenă cu termenul liber $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(t) = (2t+3)\eta(t)$.

Metoda clasică. Pentru $t \geq 0$, variabilă independentă din domeniul de definiţie al soluţiei, se poate determina $x(t; c_1, ..., c_3)$, soluţia generală pentru ecuaţia $(*_{EN})$ ca anterior, etapele $1, 2, 3$. Apoi se impune asupra soluţiei generale CI şi se determină acea soluţie particulară a $(*_{EN})$ ce verifică (CI). Altă metodă de rezolvare este

Metoda transformatei Laplace. Se observă că ecuaţia $(*_{EN})$ este o ecuaţie diferenţială de ordin 3, liniară, cu coeficienţii constanţi, neomogenă cu termenul liber $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(t) = (2t+3)\eta(t)$, care este funcţie original. Se dau CI în $t_0 = 0$. Se caută direct $x(t) =?$ unica soluţie a problemei Cauchy $(*_{EN}) + CI$. Atunci $x \in \mathcal{O}$ şi se notează

$X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\}(s).$

•se aplică ecuaţiei $(*_{EN})$ transformata Laplace$\Rightarrow$

$\mathcal{L}\{x'''(t) - 4x''(t) + 5x'(t) - 2x(t)\}(s) = \mathcal{L}\{(2t+3)\cdot\eta(t)\}(s)$

•se utilizează Teorema 1(de liniaritate) $\Rightarrow$

$\mathcal{L}\{x'''(t)\}(s) - 4\mathcal{L}\{x''(t)\}(s) + 5\mathcal{L}\{x'(t)\}(s) - 2\mathcal{L}\{x(t)\}(s) = 2\mathcal{L}\{t\cdot\eta(t)\}(s) + 3\mathcal{L}\{\eta(t)\}(s).$

Din tabel $\Rightarrow \mathcal{L}\{\eta(t)\}(s) = \frac{1}{s}; \mathcal{L}\{t\cdot\eta(t)\}(s) = \frac{1}{s^2}.$

Se utilizeazăTeorema 6 (de derivare a originalului) $\Rightarrow$

$$\begin{array}{rl}
-2 & \cdot|\mathcal{L}\{x(t)\}(s) = X(s) \\
5 & \cdot|\mathcal{L}\{x'(t)\}(s) = sX(s) - (x(0_+)) \\
-4 & \cdot|\mathcal{L}\{x''(t)\}(s) = s^2X(s) - (sx(0_+) + x'(0_+)) \\
1 & \cdot|\mathcal{L}\{x'''(t)\}(s) = s^3X(s) - (s^2x(0_+) + sx'(0_+) + x''(0_+)) \\
\overline{+}| & 2\frac{1}{s^2} + 3\frac{1}{s} = (-2+5s-4s^2+s^3)X(s) - (5-4s+s^2)\underbrace{x(0_+)}_{1} - (-4+s)\underbrace{x'(0_+)}_{0} - 1\cdot\underbrace{x''(0_+)}_{2}, \forall s \in D
\end{array}$$

Se aplică $CI \Rightarrow$

$2\frac{1}{s^2} + 3\frac{1}{s} = (-2+5s-4s^2+s^3)X(s) - (5-4s+s^2) - 2, \forall s \in D.$

S-a obţinut o ecuaţie funcţională algebrică având ca necunoscută funcţia imagine $X(s)$; se rezolvă.

$$X(s) = \frac{\left(2\frac{1}{s^2} + 3\frac{1}{s}\right) + (7-4s+s^2)}{-2+5s-4s^2+s^3} = \frac{2+3s+7s^2-4s^3+s^4}{s^2(s-1)^2(s-2)}.$$

•se determină originalul $x(t)$ corespunzător funcţiei imagine $X(s)$ găsite.

<u>modul 1.</u> Se descompune X în fracţii simple (din tabel) $\Rightarrow$

$X(s) = -4\frac{1}{s} - \frac{1}{s^2} + 5\frac{1}{s-2} - 9\frac{1}{(s-1)^2} \overset{\text{tabel}}{\Rightarrow}$

$X(s) = -4\mathcal{L}\{\eta(t)\}(s) - \mathcal{L}\{t\cdot\eta(t)\}(s) + 5\mathcal{L}\left\{e^{2t}\cdot\eta(t)\right\}(s) - 9\mathcal{L}\left\{te^{t}\cdot\eta(t)\right\}(s)$

$\overset{T1,\text{lin}}{=} \mathcal{L}\left\{-4\cdot\eta(t) - t\cdot\eta(t) + 5e^{2t}\cdot\eta(t) - 9te^{t}\cdot\eta(t)\right\}(s)$

$\Rightarrow x(t) = \left(-4 - t + +5e^{2t} - 9te^{t}\right)\cdot\eta(t)$ sau $x(t) = -4 - t + 5e^{2t} - 9te^{t}, t \geq 0.$

e) Fie $\begin{cases} (*_{EN})\ x'' - 5x' + 6x = e^{t}\eta(t), \\ CI : x(0) = -1, x'(0) = 1; \end{cases}$

Ecuaţia $(*_{EN})$ este o ecuaţie diferenţială de ordin 2, liniară, cu coeficienţii constanţi $a_1 = -5$, $a_2 = 6$, neomogenă cu termenul liber $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(t) = e^{t}\eta(t)$.

Metoda clasică. Pentru $t \geq 0$, variabilă independentă din domeniul de definiţie al soluţiei, se poate determina $x(t; c_1, c_2)$, soluţia generală pentru ecuaţia $(*_{EN})$ ca anterior, etapele $1, 2, 3$. Apoi se impune asupra soluţiei generale CI şi se determină acea soluţie particulară a $(*_{EN})$ ce verifică (CI). Altă metodă de rezolvare este

Metoda transformatei Laplace. Se observă că ecuaţia $(*_{EN})$ este o ecuaţie diferenţială de ordin 2, liniară, cu coeficienţii constanţi, neomogenă cu termenul liber $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(t) = e^{t}\eta(t)$, care este funcţie original. Se dau CI în $t_0 = 0$. Se caută direct $x(t) =?$ unica soluţie a problemei Cauchy $(*_{EN}) + CI$. Atunci $x \in \mathcal{O}$ şi se notează

$X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\}(s).$

•se aplică ecuaţiei $(*_{EN})$ transformata Laplace$\Rightarrow$

$\mathcal{L}\{x''(t) - 5x'(t) + 6x(t)\}(s) = \mathcal{L}\left\{e^{t}\cdot\eta(t)\right\}(s)$

•se utilizează Teorema 1(de liniaritate) $\Rightarrow$

$\mathcal{L}\{x''(t)\}(s) - 5\mathcal{L}\{x'(t)\}(s) + 6\mathcal{L}\{x(t)\}(s) = \mathcal{L}\left\{e^{t}\cdot\eta(t)\right\}(s).$

Din tabel $\Rightarrow \mathcal{L}\left\{e^{t}\cdot\eta(t)\right\}(s) = \dfrac{1}{s-1}.$

Se utilizeazăTeorema 6 (de derivare a originalului) $\Rightarrow$

$$\begin{array}{rl} 6 & \cdot|\mathcal{L}\{x(t)\}(s) = X(s) \\ -5 & \cdot|\mathcal{L}\{x'(t)\}(s) = sX(s) - (x(0_+)) \\ 1 & \cdot|\mathcal{L}\{x''(t)\}(s) = s^2X(s) - (sx(0_+) + x'(0_+)) \\ \hline +| & \dfrac{1}{s-1} = \left(6 - 5s + s^2\right)X(s) - (-5+s)\underbrace{x(0_+)}_{-1} - \underbrace{x'(0_+)}_{1}, \forall s \in D. \end{array}$$

Se aplică $CI \Rightarrow$

$\dfrac{1}{s-1} = \left(6 - 5s + s^2\right)X(s) - 5 + s - 1, \forall s \in D.$

S-a obţinut o ecuaţie funcţională algebrică având ca necunoscută funcţia imagine $X(s)$; se rezolvă.

$$X(s) = \frac{\left(\dfrac{1}{s-1}\right) + (6-s)}{6 - 5s + s^2} = \frac{1 + 6s - 6 - s^2 + s}{(s-1)(s-2)(s-3)} = \frac{-s^2 + 7s - 5}{(s-1)(s-2)(s-3)}.$$

•se determină originalul $x(t)$ corespunzător funcţiei imagine $X(s)$ găsite.

<u>modul 1.</u> Se descompune X în fracţii simple (din tabel) $\Rightarrow$

$X(s) = \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{s-1} - 5\dfrac{1}{s-2} + \dfrac{7}{2}\dfrac{1}{s-3}.$

$\overset{\text{tabel}}{\Rightarrow} X(s) = \dfrac{1}{2}\mathcal{L}\left\{e^{t}\cdot\eta(t)\right\}(s) - 5\mathcal{L}\left\{e^{2t}\cdot\eta(t)\right\}(s) + \dfrac{7}{2}\mathcal{L}\left\{e^{3t}\cdot\eta(t)\right\}(s) =$

$\overset{T1,\text{lin}}{=} \mathcal{L}\left\{\dfrac{1}{2}e^{t}\cdot\eta(t) - 5e^{2t}\cdot\eta(t) + \dfrac{7}{2}e^{3t}\cdot\eta(t)\right\}(s)$

$\Rightarrow x(t) = \left(\dfrac{1}{2}e^{t} - 5e^{2t} + \dfrac{7}{2}e^{3t}\right)\cdot\eta(t)$ sau $x(t) = \dfrac{1}{2}e^{t} - 5e^{2t} + \dfrac{7}{2}e^{3t}, t \geq 0.$

○**h)** $\begin{cases} x''(t)+x(t)=\dfrac{1}{\cos t}\eta(t)\,, t\neq(2k+1)\dfrac{\pi}{2}, k\in\mathbb{Z} \\ CI: x(0)=0, x'(0)=2; \end{cases}$

Ecuaţia $(*_{EN})$ este o ecuaţie diferenţială de ordin 2, liniară, cu coeficienţii constanţi $a_1=0$, $a_2=1$, neomogenă cu termenul liber $f:\mathbb{I}\to\mathbb{R}, f(t)=\dfrac{1}{\cos t}\eta(t)$. $\mathbb{I}$ este un interval din $[0,+\infty[$ ce nu conţine $(2k+1)\dfrac{\pi}{2}, k\in\mathbb{Z}$.

<u>Metoda clasică</u>. Pentru $t\in\mathbb{I}$, variabilă independentă din domeniul de definiţie al soluţiei, se poate determina $x(t;c_1,c_2)$, soluţia generală pentru ecuaţia $(*_{EN})$ ca anterior, etapele $1,2,3$. Apoi se impune asupra soluţiei generale CI şi se determină acea soluţie particulară a $(*_{EN})$ ce verifică (CI). Altă metodă de rezolvare este

<u>Metoda transformatei Laplace</u>. Se observă că ecuaţia $(*_{EN})$ este o ecuaţie diferenţială de ordin 2, liniară, cu coeficienţii constanţi, neomogenă cu termenul liber $f:\mathbb{I}\to\mathbb{R}, f(t)=\dfrac{1}{\cos t}\eta(t)$, care este funcţie original (verifică (i), (ii), (iii)). Se dau CI în $t_0=0$. Se caută direct $x(t)=?$ unica soluţie a problemei Cauchy $(*_{EN})+CI$. Atunci $x\in\mathcal{O}$ şi se notează

$$X(s)=\mathcal{L}\{x(t)\}(s)\,.$$

•se aplică ecuaţiei $(*_{EN})$ transformata Laplace$\Rightarrow$

$$\mathcal{L}\{x''(t)+x(t)\}(s)=\mathcal{L}\left\{\frac{1}{\cos t}\cdot\eta(t)\right\}(s)$$

•se utilizează Teorema 1(de liniaritate) $\Rightarrow$

$$\mathcal{L}\{x''(t)\}(s)+\mathcal{L}\{x(t)\}(s)=\mathcal{L}\left\{\frac{1}{\cos t}\cdot\eta(t)\right\}(s)\,.$$

Se utilizeazăTeorema 6 (de derivare a originalului) $\Rightarrow$

$$\begin{array}{rl} 1 & \cdot|\mathcal{L}\{x(t)\}(s)=X(s) \\ 0 & \cdot|\mathcal{L}\{x'(t)\}(s)=sX(s)-(x(0_+)) \\ 1 & \cdot|\mathcal{L}\{x''(t)\}(s)=s^2X(s)-(sx(0_+)+x'(0_+)) \\ \mp| & \mathcal{L}\left\{\dfrac{1}{\cos t}\cdot\eta(t)\right\}(s)=\left(1+s^2\right)X(s)-s\underbrace{x(0_+)}_{0}-\underbrace{x'(0_+)}_{2}, \forall s\in D. \end{array}$$

$$\left|\begin{array}{ccccc} 1 & -2 & 3 & 7 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 8 & -11 \\ 2 & 0 & 3 & 2 & 6 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 4 & 3 \end{array}\right|$$

Se aplică $CI\Rightarrow$

$$\mathcal{L}\left\{\frac{1}{\cos t}\cdot\eta(t)\right\}(s)=\left(1+s^2\right)X(s)-2, \forall s\in D.$$

S-a obţinut o ecuaţie funcţională algebrică având ca necunoscută funcţia imagine $X(s)$; se rezolvă.

$$X(s)=2\frac{1}{s^2+1}+\frac{1}{s^2+1}\mathcal{L}\left\{\frac{1}{\cos t}\cdot\eta(t)\right\}(s)\,.$$

$\mathcal{L}\left\{\dfrac{1}{\cos t}\cdot\eta(t)\right\}(s)$ este dificil de exprimat cu funcţii elementare.

•se determină originalul $x(t)$ corespunzător funcţiei imagine $X(s)$ găsite.

<u>modul $1-2$.</u> Se descompune F în fracţii simple şi se foloseşte şi Teorema 10, Borel$\Rightarrow$

$$X(s) = \underbrace{2\frac{1}{s^2+1}}_{X_1(s)} + \underbrace{\frac{1}{s^2+1}\mathcal{L}\left\{\frac{1}{\cos t}\cdot\eta(t)\right\}(s)}_{X_2(s)}$$

$$X_2(s) = \frac{1}{s^2+1}\mathcal{L}\left\{\frac{1}{\cos t}\cdot\eta(t)\right\}(s) = \mathcal{L}\{\sin t\cdot\eta(t)\}(s)\,\mathcal{L}\left\{\frac{1}{\cos t}\cdot\eta(t)\right\}(s) =$$
$$\overset{T10,\text{ Borel}}{=} \mathcal{L}\left\{\int_0^t \frac{1}{\cos\tau}\cdot\sin(t-\tau)\,d\tau\right\}(s) = \mathcal{L}\left\{\int_0^t \frac{\sin t\cos\tau - \sin\tau\cos t}{\cos\tau}d\tau\right\}(s)$$
$$= \mathcal{L}\left\{\int_0^t\left(\sin t - \cos t\frac{\sin\tau}{\cos\tau}\right)d\tau\right\}(s) = \mathcal{L}\left\{\left[(\sin t)\,\tau + (\cos t)\ln|\cos\tau|\right]\Big|_{\tau=0}^{\tau=t}\right\}(s)$$
$$= \mathcal{L}\{(\sin t)\,t + (\cos t)\ln|\cos t|\}(s).\ \text{Atunci}$$
$$X(s) = 2\mathcal{L}\{(\sin t)\cdot\eta(t)\}(s) + \mathcal{L}\{[(\sin t)\,t + (\cos t)\ln|\cos t|]\cdot\eta(t)\}(s)$$
$$\overset{T1,\text{lin}}{=} \mathcal{L}\{(2\sin t + t\sin t + (\cos t)\ln|\cos t|)\cdot\eta(t)\}(s)$$

$\Rightarrow f(t) = (2\sin t + t\sin t + (\cos t)\ln|\cos t|)\cdot\eta(t)$ sau $f(t) = 2\sin t + t\sin t + (\cos t)\ln|\cos t|,\ t \geq 0$.

Exerciţiul 15. Utilizând transformata Laplace să se rezolve următoarele probleme Cauchy cu sisteme diferenţiale:

a) $\begin{cases} \begin{cases} x' = y + z \\ y' = z + x \\ z' = x + y \end{cases} \\ CI: x(0) = -1, y(0) = 1, z(0) = 0; \end{cases}$
b) $\begin{cases} \begin{cases} x' + x - 3y = 0 \\ y' - x - y = e^t \end{cases} \\ CI: x(0) = 0, y(0) = 0; \end{cases}$

c) $\begin{cases} \begin{cases} x' - 2x - 4y = (\cos t)\cdot\eta(t) \\ y' + x + 2y = (\sin t)\cdot\eta(t) \end{cases} \\ CI: x(0) = 0, y(0) = 0; \end{cases}$
d) $\begin{cases} \begin{cases} x' = x - 2y + \eta(t) \\ y' = -3x \end{cases} \\ CI: x(0) = 0, y(0) = 1; \end{cases}$

e) $\begin{cases} \begin{cases} x' = -2x - y + (\sin t)\cdot\eta(t) \\ y' = 4x + 2y + (\cos t)\cdot\eta(t) \end{cases} \\ CI: x(0) = 0, y(0) = 1; \end{cases}$
f) $\begin{cases} \begin{cases} x' = y - 5(\cos t)\cdot\eta(t) \\ y' = 2x + y + (\sin 2t)\cdot\eta(t) \end{cases} \\ CI: x(0) = 0, y(0) = -1; \end{cases}$

g) $\begin{cases} \begin{cases} x' = y + (2e^t)\cdot\eta(t) \\ y' = x + (t^2)\cdot\eta(t) \end{cases} \\ CI: x(0) = -1, y(0) = 2; \end{cases}$
h) $\begin{cases} \begin{cases} x' = y + (2e^t)\cdot\eta(t) \\ y' = x + (t^2)\cdot\eta(t) \end{cases} \\ CI: x(0) = 4, y(0) = -2; \end{cases}$

i) $\begin{cases} \begin{cases} x' = 2x - y + (2te^t)\cdot\eta(t) \\ y' = x + (2e^t)\cdot\eta(t) \end{cases} \\ CI: x(0) = 4, y(0) = -6; \end{cases}$
j) $\begin{cases} \begin{cases} x' = 3x + 2y + (4e^{5t})\cdot\eta(t) \\ y' = x + 2y \end{cases} \\ CI: x(0) = -1, y(0) = 2; \end{cases}$

k) $\begin{cases} \begin{cases} x' = x + 2y + (16te^t)\cdot\eta(t) \\ y' = 2x - 2y + (2t^2e^t)\cdot\eta(t) \end{cases} \\ CI: x(0) = 1, y(0) = -1; \end{cases}$
l) $\begin{cases} \begin{cases} x' = x - y + (2\sin t)\cdot\eta(t) \\ y' = 4x + y + (-3t\cos t)\cdot\eta(t) \end{cases} \\ CI: x(0) = 2, y(0) = 0; \end{cases}$

m) $\begin{cases} \begin{cases} x' = x - y + (2\sin t)\cdot\eta(t) \\ y' = 4x + y + (-3t\cos t)\cdot\eta(t) \end{cases} \\ CI: x(0) = 2, y(0) = 4; \end{cases}$
n) $\begin{cases} \begin{cases} x' = x + 2y + (16te^t)\cdot\eta(t) \\ y' = 2x - 2y + (2t^2e^t)\cdot\eta(t) \end{cases} \\ CI: x(0) = 0, y(0) = 2; \end{cases}$

○**o)** $\begin{cases} \begin{cases} x'' + x' + x + y'' + 2y' + y = 1 \\ x'' + 2x' + 2y' + 2y = 2t \end{cases} \\ CI: x(0) = 0, x'(0) = 2, y(0) = 1, y'(0) = -2; \end{cases}$

○**p)** $\begin{cases} \begin{cases} x'' - x + y + z = 0 \\ x + y'' - y + z = 0 \\ x + y + z'' - z = 0 \end{cases} \\ CI : x(0) = 1, y(0) = 0, z(0) = 0 \\ \quad x'(0) = 0, y'(0) = 0, z'(0) = 0; \end{cases}$ ○**q)** $\begin{cases} \begin{cases} x' - y' - 2x + 2y = (\sin t) \cdot \eta(t) \\ x'' + 2y' + x = 0 \end{cases} \\ CI : x(0) = x'(0) = y(0) = 0; \end{cases}$

○**r)** $\begin{cases} \begin{cases} x' - x + 2y = 0 \\ x'' + 2y' = (2t - \cos 2t)\eta(t) \end{cases} \\ CI : x(0) = 0, x'(0) = 2, y(0) = -1; \end{cases}$ ○**s)** $\begin{cases} \begin{cases} x'' = 3y - 3x + 3z \\ y'' = x - y \\ z'' = -z \end{cases} \\ CI : x(0) = 0, y(0) = 0, z(0) = 1 \\ \quad x'(0) = 0, y'(0) = -1, z'(0) = 0; \end{cases}$

Rezolvare. a) A se vedea Curs; **b)** A se vedea Curs.

c) Se scrie $\begin{cases} (*_{SN}) \begin{cases} x'(t) = 2x(t) + 4y(t) + (\cos t) \cdot \eta(t) \\ y'(t) = -x(t) - 2y(t) + (\sin t) \cdot \eta(t) \end{cases} \\ CI : x(0) = 0, y(0) = 0; \end{cases}$

Sistemul $(*_{SN})$ este un sistem de ecuaţii diferenţiale de ordin 1, liniar, cu coeficienţii constanţi daţi de matricea $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$, neomogen cu termenul liber $\underline{\mathbf{b}}(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$, $\forall t \geq 0$.

<u>**Metoda clasică**</u>. Pentru $t \geq 0$, variabilă independentă din domeniul de definiţie al soluţiei, se poate determina $\begin{pmatrix} x(t; c_1, c_2) \\ y(t; c_1, c_2) \end{pmatrix}$, soluţia generală pentru sistemul $(*_{SN})$ ca anterior. Apoi se impune asupra soluţiei generale CI şi se determină acea soluţie particulară a $(*_{SN})$ ce verifică (CI). Altă metodă de rezolvare este

<u>**Metoda transformatei Laplace**</u>. Se observă că sistemul $(*_{SN})$ este un sistem de ecuaţii diferenţiale de ordin 1, liniar, cu coeficienţii constanţi, neomogen. Se dau CI în $t_0 = 0$. Se caută direct $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} =?$ unica soluţie a problemei Cauchy $(*_{SN}) + CI$. Atunci $x, y \in \mathcal{O}$ şi se notează

$X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\}(s)$.
$Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}(s)$.

•se aplică fiecărei ecuaţii a sistemului $(*_{SN})$ transformata Laplace⇒

$$\begin{cases} \mathcal{L}\{x'(t)\}(s) = \mathcal{L}\{2x(t) + 4y(t) + (\cos t) \cdot \eta(t)\}(s) \\ \mathcal{L}\{y'(t)\}(s) = \mathcal{L}\{-x(t) - 2y(t) + (\sin t) \cdot \eta(t)\}(s) \end{cases}$$

•se utilizează Teorema 1(de liniaritate) ⇒

$$\begin{cases} \mathcal{L}\{x'(t)\}(s) = 2\mathcal{L}\{x(t)\}(s) + 4\mathcal{L}\{y(t)\}(s) + \mathcal{L}\{(\cos t) \cdot \eta(t)\}(s) \\ \mathcal{L}\{y'(t)\}(s) = -\mathcal{L}\{x(t)\}(s) - 2\mathcal{L}\{y(t)\}(s) + \mathcal{L}\{(\sin t) \cdot \eta(t)\}(s) \end{cases}$$

Se utilizează Teorema 6 (de derivare a originalului). Se aplică CI, tabelul⇒

$$\begin{cases} sX(s) - \underbrace{x(0_+)}_{0} = 2X(s) + 4Y(s) + \dfrac{s}{s^2+1} \\ sY(s) - \underbrace{y(0_+)}_{0} = -X(s) - 2Y(s) + \dfrac{1}{s^2+1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} (s-2)X(s) - 4Y(s) = \dfrac{s}{s^2+1} \\ X(s) + (s+2)Y(s) = \dfrac{1}{s^2+1} \end{cases}$$

S-a obţinut un sistem funcţional algebric având ca necunoscute funcţiile imagine $X(s), Y(s)$; se rezolvă (rezolvare de tip Cramer, deoarece problema Cauchy are soluţie unică). Se calculează

$$\Delta(s) = \begin{vmatrix} s-2 & -4 \\ 1 & s+2 \end{vmatrix} = s^2 \neq 0, \forall s \in D.$$

$$\Delta_1(s) = \begin{vmatrix} \dfrac{s}{s^2+1} & -4 \\ \dfrac{1}{s^2+1} & s+2 \end{vmatrix} = \frac{s^2+2s+4}{s^2+1}, \forall s \in D.$$

$$\Delta_2(s) = \begin{vmatrix} s-2 & \dfrac{s}{s^2+1} \\ 1 & \dfrac{1}{s^2+1} \end{vmatrix} = -2\frac{1}{s^2+1}, \forall s \in D.$$

$$\text{Atunci} \begin{cases} X(s) = \dfrac{\Delta_1(s)}{\Delta(s)} = \dfrac{s^2+2s+4}{s^2(s^2+1)} \\ Y(s) = \dfrac{\Delta_2(s)}{\Delta(s)} = -2\dfrac{1}{s^2(s^2+1)} \end{cases}$$

•se determină originalele $x(t), y(t)$ corespunzătoare funcţiilor imagine $X(s), Y(s)$ găsite.

Se descompun funcţiile imagine $X(s), Y(s)$ în fracţii simple

$$\begin{cases} X(s) = 2\dfrac{1}{s} + 4\dfrac{1}{s^2} - 2\dfrac{s}{s^2+1} - 3\dfrac{1}{s^2+1} \\ Y(s) = -2\dfrac{1}{s^2} + 2\dfrac{1}{s^2+1} \end{cases}$$

Din tabel⇒

$$\begin{cases} x(t) = (2+4t-2\cos t - 3\sin t)\cdot \eta(t) \\ y(t) = (-2t+2\sin t)\cdot \eta(t) \end{cases} \quad \text{sau} \begin{cases} x(t) = 2+4t-2\cos t - 3\sin t \\ y(t) = -2t+2\sin t \end{cases}, \forall t \geq 0.$$

d) $$\begin{cases} (*_{SN}) \begin{cases} x' = x - 2y + \eta(t) \\ y' = -3x \end{cases} \\ CI: x(0) = 0, y(0) = 1; \end{cases}$$

Sistemul $(*_{SN})$ este un sistem de ecuaţii diferenţiale de ordin 1, liniar, cu coeficienţii constanţi daţi de matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$, neomogen cu termenul liber $B(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \forall t \geq 0.$

<u>**Metoda clasică**.</u> Pentru $t \geq 0$, variabilă independentă din domeniul de definiţie al soluţiei, se poate determina $\begin{pmatrix} x(t; c_1, c_2) \\ y(t; c_1, c_2) \end{pmatrix}$, soluţia generală pentru sistemul $(*_{SN})$ ca anterior. Apoi se impune asupra soluţiei generale CI şi se determină acea soluţie particulară a $(*_{SN})$ ce verifică (CI).

Altă metodă de rezolvare este

<u>**Metoda transformatei Laplace**.</u> Se observă că sistemul $(*_{SN})$ este un sistem de ecuaţii diferenţiale de ordin 1, liniar, cu coeficienţii constanţi, neomogen. Se dau CI în $t_0 = 0$. Se caută direct $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ =? unica soluţie a problemei Cauchy $(*_{SN}) + CI$. Atunci $x, y \in \mathcal{O}$ şi se notează

$$X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\}(s).$$
$$Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}(s).$$

•se aplică fiecărei ecuaţii a sistemului $(*_{SN})$ transformata Laplace⇒

$$\begin{cases} \mathcal{L}\{x'(t)\}(s) = \mathcal{L}\{x(t) - 2y(t) + \eta(t)\}(s) \\ \mathcal{L}\{y'(t)\}(s) = \mathcal{L}\{-3x(t)\}(s) \end{cases}$$

•se utilizează Teorema 1(de liniaritate) ⇒

$$\begin{cases} \mathcal{L}\{x'(t)\}(s) = 2\mathcal{L}\{x(t)\}(s) - 2\mathcal{L}\{y(t)\}(s) + \mathcal{L}\{\eta(t)\}(s) \\ \mathcal{L}\{y'(t)\}(s) = -3\mathcal{L}\{x(t)\}(s) \end{cases}$$

Se utilizează Teorema 6 (de derivare a originalului). Se aplică CI, tabelul⇒

$$\begin{cases} sX(s) - \underbrace{x(0_+)}_{0} = X(s) - 2Y(s) + \dfrac{1}{s} \\ sY(s) - \underbrace{y(0_+)}_{1} = -3X(s) \end{cases}$$

$$\begin{cases} (s-1)X(s)+2Y(s)=\dfrac{1}{s} \\ 3X(s)+sY(s)=1 \end{cases}$$

Se calculează

$\Delta(s)=\begin{vmatrix} s-1 & 2 \\ 3 & s \end{vmatrix} = s^2-s-6=(s-3)(s+2)\neq 0, \forall s\in D.$

$\Delta_1(s)=\begin{vmatrix} \dfrac{1}{s} & 2 \\ 1 & s \end{vmatrix} = -1, \forall s\in D.$

$\Delta_2(s)=\begin{vmatrix} s-1 & \dfrac{1}{s} \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = s-1-\dfrac{3}{s}=\dfrac{s^2-s-3}{s}, \forall s\in D.$

S-a obţinut un sistem funcţional algebric având ca necunoscute funcţiile imagine $X(s), Y(s)$; se rezolvă.

Atunci $\begin{cases} X(s)=\dfrac{\Delta_1(s)}{\Delta(s)}=\dfrac{-1}{(s-3)(s+2)} \\ Y(s)=\dfrac{\Delta_2(s)}{\Delta(s)}=\dfrac{s^2-s-3}{s(s-3)(s+2)} \end{cases}$

•se determină originalele $x(t), y(t)$ corespunzătoare funcţiilor imagine $X(s), Y(s)$ găsite.

Se descompun funcţiile imagine $X(s), Y(s)$ în fracţii simple

$$\begin{cases} X(s)=\dfrac{1}{5(s+2)}-\dfrac{1}{5(s-3)} \\ Y(s)=\dfrac{1}{2s}+\dfrac{3}{10(s+2)}+\dfrac{1}{5(s-3)} \end{cases}$$

Din tabel$\Rightarrow$

$\begin{cases} x(t)=\left(\dfrac{1}{5}e^{-2t}-\dfrac{1}{5}e^{3t}\right)\cdot\eta(t) \\ y(t)=\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{10}e^{-2t}+\dfrac{1}{5}e^{3t}\right)\cdot\eta(t) \end{cases}$ sau $\begin{cases} x(t)=\dfrac{1}{5}e^{-2t}-\dfrac{1}{5}e^{3t} \\ y(t)=\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{10}e^{-2t}+\dfrac{1}{5}e^{3t} \end{cases}, \forall t\geq 0.$

e) Se scrie $\begin{cases} (*_{SN})\begin{cases} x'(t)=-2x(t)-y(t)+(\sin t)\cdot\eta(t) \\ y'(t)=4x(t)+2y(t)+(\cos t)\cdot\eta(t) \end{cases} \\ CI: x(0)=0, y(0)=1; \end{cases}$

Sistemul $(*_{SN})$ este un sistem de ecuaţii diferenţiale de ordin 1, liniar, cu coeficienţii constanţi daţi de matricea $A=\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$, neomogen cu termenul liber $\underline{\mathbf{b}}(t)=\begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix}, \forall t\geq 0.$

<u>**Metoda clasică**</u>. Pentru $t\geq 0$, variabilă independentă din domeniul de definiţie al soluţiei, se poate determina $\begin{pmatrix} x(t;c_1,c_2) \\ y(t;c_1,c_2) \end{pmatrix}$, soluţia generală pentru sistemul $(*_{SN})$ ca anterior. Apoi se impune asupra soluţiei generale CI şi se determină acea soluţie particulară a $(*_{SN})$ ce verifică (CI).

Altă metodă de rezolvare este

<u>**Metoda transformatei Laplace**</u>. Se observă că sistemul $(*_{SN})$ este un sistem de ecuaţii diferenţiale de ordin 1, liniar, cu coeficienţii constanţi, neomogen. Se dau CI în $t_0=0$. Se caută direct $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ =? unica soluţie a problemei Cauchy $(*_{SN})+CI$. Atunci $x,y\in\mathcal{O}$ şi se notează

$X(s)=\mathcal{L}\{x(t)\}(s).$

$Y(s)=\mathcal{L}\{y(t)\}(s).$

•se aplică fiecărei ecuaţii a sistemului $(*_{SN})$ transformata Laplace$\Rightarrow$

$$\begin{cases} \mathcal{L}\{x'(t)\}(s)=\mathcal{L}\{-2x(t)-y(t)+(\sin t)\cdot\eta(t)\}(s) \\ \mathcal{L}\{y'(t)\}(s)=\mathcal{L}\{4x(t)+2y(t)+(\cos t)\cdot\eta(t)\}(s) \end{cases}$$

•se utilizează Teorema 1(de liniaritate) $\Rightarrow$

$$\begin{cases} \mathcal{L}\{x'(t)\}(s) = -2\mathcal{L}\{x(t)\}(s) - \mathcal{L}\{y(t)\}(s) + \mathcal{L}\{(\sin t)\cdot\eta(t)\}(s) \\ \mathcal{L}\{y'(t)\}(s) = 4\mathcal{L}\{x(t)\}(s) + 2\mathcal{L}\{y(t)\}(s) + \mathcal{L}\{(\cos t)\cdot\eta(t)\}(s) \end{cases}$$

Se utilizează Teorema 6 (de derivare a originalului). Se aplică CI, tabelul$\Rightarrow$

$$\begin{cases} sX(s) - \underbrace{x(0_+)}_{0} = -2X(s) - Y(s) + \dfrac{1}{s^2+1} \\ sY(s) - \underbrace{y(0_+)}_{1} = 4X(s) + 2Y(s) + \dfrac{s}{s^2+1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} (s+2)X(s) + Y(s) = \dfrac{1}{s^2+1} \\ -4X(s) + (s-2)Y(s) = \dfrac{s}{s^2+1} + 1 \end{cases}$$

S-a obţinut un sistem funcţional algebric având ca necunoscute funcţiile imagine $X(s), Y(s), Z(s)$; se rezolvă (rezolvare de tip Cramer, deoarece problema Cauchy are soluţie unică). Se calculează:

$$\Delta(s) = \begin{vmatrix} s+2 & 1 \\ -4 & s-2 \end{vmatrix} = s^2 \neq 0, \forall s \in D.$$

$$\Delta_1(s) = \begin{vmatrix} \dfrac{1}{s^2+1} & 1 \\ \dfrac{s}{s^2+1}+1 & s-2 \end{vmatrix} = -\frac{s^2+3}{s^2+1}, \forall s \in D.$$

$$\Delta_2(s) = \begin{vmatrix} s+2 & \dfrac{1}{s^2+1} \\ -4 & \dfrac{s}{s^2+1}+1 \end{vmatrix} = \frac{s^3+3s^2+3s+6}{s^2+1}, \forall s \in D.$$

$$\text{Atunci}\begin{cases} X(s) = \dfrac{\Delta_1(s)}{\Delta(s)} = -\dfrac{s^2+3}{s^2(s^2+1)} \\ Y(s) = \dfrac{\Delta_2(s)}{\Delta(s)} = \dfrac{s^3+3s^2+3s+6}{s^2(s^2+1)} \end{cases}$$

•se determină originalele $x(t), y(t)$ corespunzătoare funcţiilor imagine $X(s), Y(s)$ găsite.

Se descompun funcţiile imagine $X(s), Y(s)$ în fracţii simple din tabel:

$$\begin{cases} X(s) = -3\dfrac{1}{s^2} + 2\dfrac{1}{s^2+1} \\ Y(s) = 3\dfrac{1}{s} + 6\dfrac{1}{s^2} - 2\dfrac{s}{s^2+1} - 3\dfrac{1}{s^2+1} \end{cases}$$

Din tabel$\Rightarrow$

$$\begin{cases} x(t) = (-3t + 2\sin t)\cdot\eta(t) \\ y(t) = (3 + 6t - 2\cos t - 3\sin t)\cdot\eta(t) \end{cases} \text{sau} \begin{cases} x(t) = -3t + 2\sin t \\ y(t) = (3 + 6t - 2\cos t - 3\sin t) \end{cases}, \forall t \geq 0.$$

$\bigcirc$**o)** $$\begin{cases} (*_{SN})\begin{cases} x'' + x' + x + y'' + 2y' + y = 1 \\ x'' + 2x' + 2y' + 2y = 2t \end{cases} \\ CI: x(0) = 0, x'(0) = 2, y(0) = 1, y'(0) = -2; \end{cases}$$

Metoda transformatei Laplace. Observăm că sistemul $(*_{SN})$ este un sistem de ecuaţii diferenţiale de ordin 2, liniar, cu coeficienţii constanţi, neomogen. Se dau CI în $t_0 = 0$. Se caută direct $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ =? unica soluţie a problemei Cauchy $(*_{SN}) + CI$. Atunci $x, y \in \mathcal{O}$ şi se notează

$$X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\}(s).$$
$$Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}(s).$$

•se aplică fiecărei ecuaţii a sistemului $(*_{SN})$ transformata Laplace$\Rightarrow$

$$\begin{cases} \mathcal{L}\{x''(t) + x'(t) + x(t) + y''(t) + 2y'(t) + y(t)\}(s) = \mathcal{L}\{1\cdot\eta(t)\}(s) \\ \mathcal{L}\{x''(t) + 2x'(t) + 2y'(t) + 2y(t)\}(s) = \mathcal{L}\{2t\cdot\eta(t)\}(s) \end{cases}$$

•se utilizează Teorema 1(de liniaritate) ⇒

$$\begin{cases} \mathcal{L}\{x''(t)\}(s)+\mathcal{L}\{x'(t)\}(s)+\mathcal{L}\{x(t)\}(s)+\mathcal{L}\{y''(t)\}(s)+ \\ \qquad +2\mathcal{L}\{y'(t)\}(s)+\mathcal{L}\{y(t)\}(s)=\mathcal{L}\{1\cdot\eta(t)\}(s) \\ \mathcal{L}\{x''(t)\}(s)+2\mathcal{L}\{x'(t)\}(s)+2\mathcal{L}\{y'(t)\}(s)+2\mathcal{L}\{y(t)\}(s)= \\ \qquad =\mathcal{L}\{2t\cdot\eta(t)\}(s) \end{cases}$$

Se utilizează Teorema 6 (de derivare a originalului). Se aplică CI, tabelul⇒

$$\begin{cases} \left(s^2X(s)-\left(s\underbrace{x(0_+)}_{0}+\underbrace{x'(0_+)}_{2}\right)\right)+\left(sX(s)-\underbrace{x(0_+)}_{0}\right)+X(s)+ \\ \quad +\left(s^2Y(s)-\left(s\underbrace{y(0_+)}_{1}+\underbrace{y'(0_+)}_{-2}\right)\right)+2\left(sY(s)-\underbrace{y(0_+)}_{1}\right)+Y(s)=\frac{1}{s} \\ \left(s^2X(s)-\left(s\underbrace{x(0_+)}_{0}+\underbrace{x'(0_+)}_{2}\right)\right)+2\left(sX(s)-\underbrace{x(0_+)}_{0}\right)+ \\ \quad +2\left(sY(s)-\underbrace{y(0_+)}_{1}\right)+2Y(s)=2\frac{1}{s^2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left(s^2+s+1\right)X(s)+\left(s^2+2s+1\right)Y(s)=\frac{1}{s}+2+s \\ \left(s^2+2s\right)X(s)+(2s+2)Y(s)=2\frac{1}{s^2}+4 \end{cases}$$

S-a obţinut un sistem funcţional algebric având ca necunoscute funcţiile imagine $X(s), Y(s)$; se rezolvă (rezolvare de tip Cramer, deoarece problema Cauchy are soluţie unică). Se calculează:

$$\Delta(s)=\begin{vmatrix} s^2+s+1 & s^2+2s+1 \\ s^2+2s & 2s+2 \end{vmatrix}=2+2s-s^2-2s^3-s^4=$$
$$=-\left(s^2-1\right)\left(s^2+2s+2\right)\neq 0, \forall s\in D.$$

$$\Delta_1(s)=\begin{vmatrix} \frac{1}{s}+2+s & s^2+2s+1 \\ 2\frac{1}{s^2}+4 & 2s+2 \end{vmatrix}=\frac{1}{s^2}\left(-2-2s-2s^3-2s^4\right)=$$
$$=\frac{-2}{s^2}(s+1)^2\left(s^2-s+1\right), \forall s\in D.$$

$$\Delta_2(s)=\begin{vmatrix} s^2+s+1 & \frac{1}{s}+2+s \\ s^2+2s & 2\frac{1}{s^2}+4 \end{vmatrix}=\frac{1}{s^2}\left(2+2s+4s^2-s^3-s^5\right), \forall s\in D.$$

$$\text{Atunci}\begin{cases} X(s)=\dfrac{\Delta_1(s)}{\Delta(s)}=\dfrac{\frac{-2}{s^2}(s+1)^2\left(s^2-s+1\right)}{-\left(s^2-1\right)\left(s^2+2s+2\right)} \\ Y(s)=\dfrac{\Delta_2(s)}{\Delta(s)}=\dfrac{\frac{1}{s^2}\left(2+2s+4s^2-s^3-s^5\right)}{-\left(s^2-1\right)\left(s^2+2s+2\right)} \end{cases}$$

•se determină originalele $x(t), y(t)$ corespunzătoare funcţiilor imagine $X(s), Y(s)$ găsite.

Se descompun funcţiile imagine $X(s), Y(s)$ în fracţii simple din tabel

$$\begin{cases} X(s)=-\frac{4}{5}\frac{1}{s-1}-\frac{1}{s^2}+\frac{1}{5}\frac{-4s+3}{s^2+2s+2} \\ Y(s)=-\frac{3}{5}\frac{1}{s-1}+\frac{1}{s^2}+3\frac{1}{s+1}+\frac{1}{5}\frac{-7s-11}{s^2+2s+2} \end{cases}$$

Din tabel⇒

$$\frac{s+1}{(s+1)^2+1^2} = \mathcal{L}\left\{\left(e^{-t}\cos t\right)\cdot\eta(t)\right\}(s) \text{ şi } \frac{1}{(s+1)^2+1^2} = \mathcal{L}\left\{\left(e^{-t}\sin t\right)\cdot\eta(t)\right\}(s)$$

$$\begin{cases} x(t) = \left(-\frac{4}{5}e^{t} - t^2 - \frac{4}{5}e^{-t}\cos t + \frac{7}{5}e^{-t}\sin t\right)\cdot\eta(t) \\ y(t) = \left(-\frac{3}{5}e^{t} + t^2 + 3e^{-t} - \frac{7}{5}e^{-t}\cos t - \frac{4}{5}e^{-t}\sin t\right)\cdot\eta(t) \end{cases}$$

sau $\begin{cases} x(t) = -\frac{4}{5}e^{t} - t^2 - \frac{4}{5}e^{-t}\cos t + \frac{7}{5}e^{-t}\sin t \\ y(t) = -\frac{3}{5}e^{t} + t^2 + 3e^{-t} - \frac{7}{5}e^{-t}\cos t - \frac{4}{5}e^{-t}\sin t \end{cases}, \forall t \geq 0.$

○**p)** Fie $\begin{cases} (*_{SO}) \begin{cases} x'' - x + y + z = 0 \\ x + y'' - y + z = 0 \\ x + y + z'' - z = 0 \end{cases} \\ CI : x(0) = 1, y(0) = 0, z(0) = 0 \\ x'(0) = 0, y'(0) = 0, z'(0) = 0; \end{cases}$

<u>**Metoda transformatei Laplace**</u>. Sistemul $(*_{SO})$ este un sistem de ecuaţii diferenţiale de ordin 2, liniar, cu coeficienţii constanţi, omogen. Se dau CI în $t_0 = 0$. Se caută direct $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} =?$ unica soluţie a problemei Cauchy $(*_{SO}) + CI$. Atunci $x, y, z \in \mathcal{O}$ şi se notează

$X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\}(s).$

$Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}(s).$

$Z(s) = \mathcal{L}\{z(t)\}(s).$

•se aplică fiecărei ecuaţii a sistemului $(*_{SO})$ transformata Laplace⇒

$$\begin{cases} \mathcal{L}\{x''(t) - x(t) + y(t) + z(t)\}(s) = \mathcal{L}\{0\}(s) \\ \mathcal{L}\{x(t) + y''(t) - y(t) + z(t)\}(s) = \mathcal{L}\{0\}(s) \\ \mathcal{L}\{x(t) + y(t) + z''(t) - z(t)\}(s) = \mathcal{L}\{0\}(s) \end{cases}$$

•se utilizează Teorema 1(de liniaritate) ⇒

$$\begin{cases} \mathcal{L}\{x''(t)\}(s) - \mathcal{L}\{x(t)\}(s) + \mathcal{L}\{y(t)\}(s) + \mathcal{L}\{z(t)\}(s) = 0 \\ \mathcal{L}\{x(t)\}(s) + \mathcal{L}\{y''(t)\}(s) - \mathcal{L}\{y(t)\}(s) + \mathcal{L}\{z(t)\}(s) = 0 \\ \mathcal{L}\{x(t)\}(s) + \mathcal{L}\{y(t)\}(s) + \mathcal{L}\{z''(t)\}(s) - \mathcal{L}\{z(t)\}(s) = 0 \end{cases}$$

Se utilizează Teorema 6 (de derivare a originalului). Se aplică CI ⇒

$$\begin{cases} s^2X(s) - \left(s\underbrace{x(0_+)}_{1} + \underbrace{x'(0_+)}_{0}\right) - X(s) + Y(s) + Z(s) = 0 \\ X(s) + s^2Y(s) - \left(s\underbrace{y(0_+)}_{0} + \underbrace{y'(0_+)}_{0}\right) - Y(s) + Z(s) = 0 \\ X(s) + Y(s) + s^2Z(s) - \left(s\underbrace{z(0_+)}_{0} + \underbrace{z'(0_+)}_{0}\right) - Z(s) = 0 \end{cases}$$

<u>modul 1.</u> $\begin{cases} \left(s^2-1\right)X(s) + Y(s) + Z(s) = s \\ X(s) + \left(s^2-1\right)Y(s) + Z(s) = 0 \\ X(s) + Y(s) + \left(s^2-1\right)Z(s) = 0 \end{cases}$

S-a obţinut un sistem funcţional algebric având ca necunoscute funcţiile imagine $X(s), Y(s), Z(s)$; se rezolvă (rezolvare de tip Cramer, deoarece problema Cauchy are soluţie unică). Se calculează:

$$\Delta(s)=\begin{vmatrix} s^2-1 & 1 & 1\\ 1 & s^2-1 & 1\\ 1 & 1 & s^2-1\end{vmatrix}=s^6-3s^4+4=s^4\left(s^2+1\right)-4\left(s^4-1\right)=$$
$$=\left(s^2+1\right)\left(s^2-2\right)^2\neq 0,\forall s\in D.$$
$$\Delta_1(s)=\begin{vmatrix} s & 1 & 1\\ 0 & s^2-1 & 1\\ 0 & 1 & s^2-1\end{vmatrix}=s^5-2s^3=s^3\left(s^2-2\right),\forall s\in D.$$
$$\Delta_2(s)=\begin{vmatrix} s^2-1 & s & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & 0 & s^2-1\end{vmatrix}=2s-s^3=-s\left(s^2-2\right),\forall s\in D.$$
$$\Delta_3(s)=\begin{vmatrix} s^2-1 & 1 & s\\ 1 & s^2-1 & 0\\ 1 & 1 & 0\end{vmatrix}=2s-s^3=-s\left(s^2-2\right),\forall s\in D.$$
$$\text{Atunci}\begin{cases} X(s)=\dfrac{\Delta_1(s)}{\Delta(s)}=\dfrac{s^3}{(s^2+1)(s^2-2)^2}\\ Y(s)=\dfrac{\Delta_2(s)}{\Delta(s)}=\dfrac{-s}{(s^2+1)(s^2-2)}\\ Z(s)=\dfrac{\Delta_3(s)}{\Delta(s)}=\dfrac{-s}{(s^2+1)(s^2-2)}\end{cases}$$

<u>modul 2.</u>(numai pentru acest exerciţiu) $\begin{cases}\left(s^2-1\right)X(s)+Y(s)+Z(s)=s\\ X(s)+\left(s^2-1\right)Y(s)+Z(s)=0\\ X(s)+Y(s)+\left(s^2-1\right)Z(s)=0\end{cases}$

Se notează cu $S(s)=X(s)+Y(s)+Z(s),\forall s\in D$. Atunci, adunând ecuaţiile sistemului anterior$\Rightarrow$

$\left(s^2+1\right)\cdot S(s)=s,\forall s\in D\Rightarrow S(s)=\dfrac{s}{s^2+1},\forall s\in D$. Atunci

$$\begin{cases}\left(s^2-2\right)X(s)=s-\dfrac{s}{s^2+1}\\ \left(s^2-2\right)Y(s)=0-\dfrac{s}{s^2+1}\\ \left(s^2-2\right)Z(s)=0-\dfrac{s}{s^2+1}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases} X(s)=\dfrac{s}{s^2-2}-\dfrac{s}{s^2-2}\cdot\dfrac{1}{s^2+1}\\ Y(s)=-\dfrac{s}{s^2-2}\cdot\dfrac{1}{s^2+1}\\ Z(s)=-\dfrac{s}{s^2-2}\cdot\dfrac{1}{s^2+1}\end{cases},\forall s\in D.$$

•se determină originalele $x(t),y(t),z(t)$ corespunzătoare funcţiilor imagine $X(s),Y(s),Z(s)$ găsite.

Se determină întâi originalul $f(t)$ corespunzător imaginii

$F(s)=\dfrac{s}{s^2-2}\cdot\dfrac{1}{s^2+1}$.

<u>modul 1.1.</u> Se descompune F în fracţii simple $\Rightarrow$

$F(s)=\dfrac{1}{3}\dfrac{s}{s^2-2}-\dfrac{1}{3}\dfrac{s}{s^2+1}$

$\overset{\text{tabel}}{\Rightarrow} F(s)=\dfrac{1}{3}\mathcal{L}\left\{\operatorname{ch}\left(\sqrt{2}t\right)\cdot\eta(t)\right\}(s)-\dfrac{1}{3}\mathcal{L}\left\{(\cos t)\cdot\eta(t)\right\}(s)$

$\overset{T1,\text{lin}}{=}\mathcal{L}\left\{\dfrac{1}{3}\operatorname{ch}\left(\sqrt{2}t\right)\cdot\eta(t)-\dfrac{1}{3}(\cos t)\cdot\eta(t)\right\}(s)$

$\Rightarrow f(t)=\left(\dfrac{1}{3}\operatorname{ch}\left(\sqrt{2}t\right)-\dfrac{1}{3}(\cos t)\right)\cdot\eta(t)$ sau $f(t)=\dfrac{1}{3}\operatorname{ch}\left(\sqrt{2}t\right)-\dfrac{1}{3}(\cos t),t\geq 0.$

<u>modul 1.2.</u> Se foloseşte $T10$, Borel-este mai greoi. Atunci$\Rightarrow$

$$\begin{cases} x(t) = \operatorname{ch}\left(\sqrt{2}t\right)\cdot\eta(t) - \dfrac{1}{3}\operatorname{ch}\left(\sqrt{2}t\right)\cdot\eta(t) + \dfrac{1}{3}(\cos t)\cdot\eta(t) \\ y(t) = -\dfrac{1}{3}\operatorname{ch}\left(\sqrt{2}t\right)\cdot\eta(t) + \dfrac{1}{3}(\cos t)\cdot\eta(t) \\ z(t) = -\dfrac{1}{3}\operatorname{ch}\left(\sqrt{2}t\right)\cdot\eta(t) + \dfrac{1}{3}(\cos t)\cdot\eta(t) \end{cases} \quad \text{sau}$$

$$\begin{cases} x(t) = -\dfrac{2}{3}\operatorname{ch}\left(\sqrt{2}t\right) + \dfrac{1}{3}\cos t \\ y(t) = -\dfrac{1}{3}\operatorname{ch}\left(\sqrt{2}t\right) + \dfrac{1}{3}\cos t \\ z(t) = -\dfrac{1}{3}\operatorname{ch}\left(\sqrt{2}t\right) + \dfrac{1}{3}\cos t \end{cases}, \forall t \geq 0.$$

○7.2.2. Rezolvarea de ecuaţii şi sisteme de ecuaţii diferenţiale liniare având coeficienţi variabili, omogene sau neomogene cand se dau condiţii iniţiale în $t_0 = 0$-...

7.2.3. Rezolvarea de ecuaţii integrale şi integro-diferenţiale

Regulă. În anumite ipoteze asupra ecuaţiilor din titlu, acestea admit o soluţie unică, ce poate fi presupusă drept funcţie original. Atunci

•se aplică ecuaţiei transformata Laplace;

•se utilizează Teorema 1(de liniaritate), Teorema 10(Borel), Teorema 6(de derivare a originalului), CI-pentru ecuaţii integro-diferenţiale− şi tabelul; se obţine o ecuaţie funcţională, având ca necunoscută o funcţie imagine; se rezolvă;

•se determină originalul corespunzător imaginii găsite.

Observaţie. Utilizând metoda legată de transformata Laplace se obţine pentru ecuaţiile din titlu soluţiile definite doar pe $[0, +\infty[$.

Exerciţiul 16. Să se rezolve următoarele ecuaţii integrale :

a) $\displaystyle\int_0^t \cos(t-\tau)\,x(\tau)\,d\tau = \operatorname{sh} t, t \geq 0;$

b) $\displaystyle\int_0^t \operatorname{ch}(t-\tau)\,x(\tau)\,d\tau = t^n, t \geq 0$, unde $n \in \mathbb{N}^*$;

c) $\displaystyle\int_0^t (\sin(t-\tau))\,x(\tau)\,d\tau = \sin^2 t, \forall t \geq 0.$

Rezolvare. a) A se vedea Curs.

b) Fie

$$(*_I)\ \int_0^t \operatorname{ch}(t-\tau)\,x(\tau)\,d\tau = t^n, t \geq 0, \text{ unde } n \in \mathbb{N}^*$$

Ecuaţia $(*_I)$ este o ecuaţie integrală, deoarece funcţia necunoscută $x(t)$ apare sub operatorul de integrare. Se caută $x(t) =?, t \geq 0$ soluţia ecuaţiei $(*_I)$.

Metoda transformatei Laplace. Se presupune $x \in \mathcal{O}$ şi se notează $X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\}(s)$.

•se aplică ecuaţiei $(*_I)$ transformata Laplace⇒

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t x(\tau)\operatorname{ch}(t-\tau)\,d\tau\right\}(s) = \mathcal{L}\{t^n\cdot\eta(t)\}(s)$$

•Din tabel ⇒ $\mathcal{L}\{t^n\cdot\eta(t)\}(s) = \dfrac{n!}{s^{n+1}}$.

Se utilizează Teorema 10, Borel:
$\widetilde{f}(t) = x(t), t \geq 0 \Rightarrow \widetilde{F}(s) = X(s)$.
$\widetilde{g}(t) = \operatorname{ch} t, t \geq 0 \overset{\text{tabel}}{\Rightarrow} \widetilde{G}(s) = \dfrac{s}{s^2-1}$.
Atunci
$X(s) \cdot \dfrac{s}{s^2-1} = \dfrac{n!}{s^{n+1}} \Rightarrow X(s) = \dfrac{n!\left(s^2-1\right)}{s^{n+2}}$.
•se determină originalul $x(t)$ corespunzător funcţiei imagine $X(s)$ găsite. Se descompune X în fracţii simple (din tabel) $\Rightarrow$
$X(s) = n\dfrac{(n-1)!}{s^n} - \dfrac{1}{n+1}\dfrac{(n+1)!}{s^{n+2}}$
$\overset{\text{tabel}}{\Rightarrow} X(s) = n\mathcal{L}\left\{t^{n-1}\cdot\eta(t)\right\}(s) - \dfrac{1}{n+1}\mathcal{L}\left\{t^{n+1}\cdot\eta(t)\right\}(s) \overset{T1,\text{lin}}{=} \mathcal{L}\left\{nt^{n-1}\cdot\eta(t) - \dfrac{1}{n+1}t^{n+1}\cdot\eta(t)\right\}(s)$
$\Rightarrow x(t) = \left(nt^{n-1} - \dfrac{1}{n+1}t^{n+1}\right)\cdot\eta(t)$ sau $x(t) = nt^{n-1} - \dfrac{1}{n+1}t^{n+1}, t \geq 0$.

c) Fie
$(*_I) \displaystyle\int_0^t (\sin(t-\tau))\, x(\tau)\, d\tau = \sin^2 t, \forall t \geq 0.$
Ecuaţia $(*_I)$ este o ecuaţie integrală, deoarece funcţia necunoscută $x(t)$ apare sub operatorul de integrare. Se caută $x(t) = ?, t \geq 0$ soluţia ecuaţiei $(*_I)$.
Metoda transformatei Laplace. Se presupune $x \in \mathcal{O}$ şi se notează $X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\}(s)$.
•se aplică ecuaţiei $(*_I)$ transformata Laplace$\Rightarrow$
$\mathcal{L}\left\{\displaystyle\int_0^t (\sin(t-\tau))\, x(\tau)\, d\tau\right\}(s) = \mathcal{L}\left\{\dfrac{1-\cos 2t}{2}\cdot\eta(t)\right\}(s)$
•se utilizează Teorema 1(de liniaritate) $\Rightarrow$
$\mathcal{L}\left\{\displaystyle\int_0^t (\sin(t-\tau))\, x(\tau)\, d\tau\right\}(s) = \dfrac{1}{2}\mathcal{L}\{\eta(t)\}(s) - \dfrac{1}{2}\mathcal{L}\{\cos 2t\cdot\eta(t)\}(s)$.
Din tabel $\Rightarrow \mathcal{L}\{\eta(t)\}(s) = \dfrac{1}{s}; \mathcal{L}\{\cos 2t\cdot\eta(t)\}(s) = \dfrac{s}{s^2+2^2}$
Se utilizează Teorema 10, Borel:
$\widetilde{f}(t) = x(t), t \geq 0 \Rightarrow \widetilde{F}(s) = X(s)$.
$\widetilde{g}(t) = \sin t, t \geq 0 \overset{\text{tabel}}{\Rightarrow} \widetilde{G}(s) = \dfrac{1}{s^2+1^2}$
Atunci
$\dfrac{1}{s^2+1^2}\cdot X(s) = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{s} - \dfrac{s}{s^2+2^2}\right) \Rightarrow X(s) = \dfrac{2\left(s^2+1\right)}{s\left(s^2+4\right)} = \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{s} + \dfrac{3}{2}\dfrac{s}{s^2+4}$.
.
•se determină originalul $x(t)$ corespunzător funcţiei imagine $X(s)$ găsite
$\overset{\text{tabel}}{\Rightarrow} X(s) = \mathcal{L}\left\{\left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{2}\cos 2t\right)\cdot\eta(t)\right\}(s) \Rightarrow x(t) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{2}\cos 2t, t \geq 0.$

Exerciţiul 17. Să se rezolve următoarele ecuaţii integrale :

a) $x(t) + 2\omega\displaystyle\int_0^t \cos\omega(t-\tau)\, x(\tau)\, d\tau = b\sin\omega t, \forall t \geq 0$, unde $b, \omega \in \mathbb{R}$;

b) $x(t) - \displaystyle\int_0^t e^{-(t-\tau)} x(\tau)\, d\tau = \cos 3t, \forall t \geq 0$;

Răspuns. $x(t) = \cos 3t + \dfrac{1}{3}\sin 3t, \forall t \geq 0.$

c) $x(t) + 6\int_0^t (\operatorname{ch} 4(t-\tau))\, x(\tau)\, d\tau = e^{-4t}, \forall t \geq 0;$

Răspuns. $x(t) = \frac{6}{5}e^{-8t} - \frac{1}{5}e^{2t}, \forall t \geq 0.$

d) $x(t) = t - \int_0^t (t-\tau)\, x(\tau)\, d\tau, \forall t \geq 0.$

Rezolvare. a) A se vedea Curs.

d) Fie

$$(*_I)\, x(t) = t - \int_0^t (t-\tau)\, x(\tau)\, d\tau, \forall t \geq 0.$$

Ecuaţia $(*_I)$ este o ecuaţie integrală, deoarece funcţia necunoscută $x(t)$ apare sub operatorul de integrare. Se caută $x(t) = ?, t \geq 0$ soluţia ecuaţiei $(*_I)$.

Metoda transformatei Laplace. Se presupune $x \in \mathcal{O}$ şi se notează $X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\}(s)$.

•se aplică ecuaţiei $(*_I)$ transformata Laplace$\Rightarrow$

$$\mathcal{L}\{x(t)\}(s) = \mathcal{L}\left\{t - \int_0^t (t-\tau)\, x(\tau)\, d\tau\right\}(s)$$

•se utilizează Teorema 1(de liniaritate) $\Rightarrow$

$$\mathcal{L}\{x(t)\}(s) = \mathcal{L}\{t \cdot \eta(t)\}(s) - \mathcal{L}\left\{\int_0^t (t-\tau)\, x(\tau)\, d\tau\right\}(s).$$

Din tabel $\Rightarrow \mathcal{L}\{t \cdot \eta(t)\}(s) = \frac{1}{s^2}.$

Se utilizează Teorema 10, Borel:

$\widetilde{f}(t) = x(t), t \geq 0 \Rightarrow \widetilde{F}(s) = X(s).$

$\widetilde{g}(t) = t, t \geq 0 \overset{\text{tabel}}{\Rightarrow} \widetilde{G}(s) = \frac{1}{s^2}$

Atunci

$$X(s) = \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^2}X(s) \Rightarrow X(s) = \frac{1}{s^2+1^2}.$$

•se determină originalul $x(t)$ corespunzător funcţiei imagine $X(s)$ găsite

$\overset{\text{tabel}}{\Rightarrow} X(s) = \mathcal{L}\{\sin t \cdot \eta(t)\}(s) \Rightarrow x(t) = \sin t, t \geq 0.$

Exerciţiul 18. Să se rezolve următoarele ecuaţii integrale :

a) $x(t) - \int_0^t x(t-\tau)\, x(\tau)\, d\tau = e^t - te^t, \forall t \geq 0;$

Rezolvare. a) Fie

$$(*_I)\, x(t) - \int_0^t x(t-\tau)\, x(\tau)\, d\tau = e^t - te^t, \forall t \geq 0$$

Ecuaţia $(*_I)$ este o ecuaţie integrală, deoarece funcţia necunoscută $x(t)$ apare sub operatorul de integrare. Se caută $x(t) = ?, t \geq 0$ soluţia ecuaţiei $(*_I)$.

Metoda transformatei Laplace. Se presupune $x \in \mathcal{O}$ şi se notează $X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\}(s)$.

•se aplică ecuaţiei $(*_I)$ transformata Laplace$\Rightarrow$

$$\mathcal{L}\left\{x(t) - \int_0^t x(t-\tau)\, x(\tau)\, d\tau\right\}(s) = \mathcal{L}\left\{\left(e^t - te^t\right) \cdot \eta(t)\right\}(s)$$

•se utilizează Teorema 1(de liniaritate) $\Rightarrow$

$$\mathcal{L}\{x(t)\}(s) - \mathcal{L}\left\{\int_0^t x(\tau)\, x(t-\tau)\, d\tau\right\}(s) = \mathcal{L}\left\{\left(e^t\right) \cdot \eta(t)\right\}(s) - \mathcal{L}\left\{te^t \cdot \eta(t)\right\}(s).$$

Din tabel $\Rightarrow \mathcal{L}\left\{e^t \cdot \eta(t)\right\}(s) = \frac{1}{s-1}; \mathcal{L}\left\{te^t \cdot \eta(t)\right\}(s) = \frac{1}{(s-1)^2}.$

Se utilizează Teorema 10, Borel:
$\widetilde{f}(t) = x(t), t \geq 0 \Rightarrow \widetilde{F}(s) = X(s)$.
$\widetilde{g}(t) = x(t), t \geq 0 \overset{\text{tabel}}{\Rightarrow} \widetilde{G}(s) = X(s)$
Atunci
$$X(s) - X(s) \cdot X(s) = \frac{1}{s-1} - \frac{1}{(s-1)^2} \Rightarrow X^2(s) - X(s) + \frac{s-2}{(s-1)^2} = 0.$$
$$\Delta(s) = 1 - 4\frac{s-2}{(s-1)^2} = \frac{(s-3)^2}{(s-1)^2}$$
$$X_1(s) = \frac{1 - \frac{s-3}{s-1}}{2} = \frac{1}{s-1} \text{ şi } X_2(s) = \frac{1 + \frac{s-3}{s-1}}{2} = \frac{s-2}{s-1} = 1 - \frac{1}{s-1}.$$
•se determină originalele $x(t)$ corespunzătoare funcţiilor imagine $X(s)$ găsite
$$\overset{\text{tabel}}{\Rightarrow} \begin{cases} x_1(t) = e^t, t \geq 0 \\ x_2(t) = \delta(t) - e^t, t \geq 0. \end{cases}$$

Exerciţiul 19. Să se rezolve următoarele probleme Cauchy ataşate unor ecuaţii integro-diferenţiale:

a) $\begin{cases} R \cdot i(t) + L \cdot i'(t) + \dfrac{1}{C}\displaystyle\int_0^t i(\tau)\, d\tau = u(t), \forall t \geq 0 \\ CI : i(0) = 0; \end{cases}$

în ipotezele unui circuit RLC din Curs.

b) $\begin{cases} x(t) + x'(t) - 2\displaystyle\int_0^t x(\tau)\sin(t-\tau)\, d\tau = \cos t + \operatorname{ch} t, \forall t \geq 0 \\ CI : x(0) = 1; \end{cases}$

c) $\begin{cases} x'(t) = \displaystyle\int_0^t x(\tau)\cos(t-\tau)\, d\tau, \forall t \geq 0 \\ CI : x(0) = 1; \end{cases}$

Rezolvare. a) A se vedea Curs.

b) Fie $\begin{cases} (*_{ID})\, x(t) + x'(t) - 2\displaystyle\int_0^t x(\tau)\sin(t-\tau)\, d\tau = \cos t + \operatorname{ch} t, \forall t \geq 0 \\ CI : x(0) = 1; \end{cases}$

Ecuaţia $(*_{ID})$ este o ecuaţie integro-diferenţială, deoarece funcţia necunoscută $x(t)$ apare şi sub operatorul de integrare şi sub operatorul de derivare. Se caută $x(t) = ?, t \geq 0$ soluţia problemei $(*_{ID}) + CI$.

Metoda transformatei Laplace. Se presupune $x \in \mathcal{O}$ şi se notează $X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\}(s)$.

•se aplică ecuaţiei $(*_{ID})$ transformata Laplace$\Rightarrow$
$$\mathcal{L}\left\{x(t) + x'(t) - 2\int_0^t x(\tau)\sin(t-\tau)\, d\tau\right\}(s) = \mathcal{L}\{(\cos t + \operatorname{ch} t) \cdot \eta(t)\}(s)$$
•se utilizează Teorema 1(de liniaritate) $\Rightarrow$
$$\mathcal{L}\{x(t)\}(s) + \mathcal{L}\{x'(t)\}(s) - 2\mathcal{L}\left\{\int_0^t x(\tau)\sin(t-\tau)\, d\tau\right\}(s) = \mathcal{L}\{(\cos t) \cdot \eta(t)\}(s) + \mathcal{L}\{(\operatorname{ch} t) \cdot \eta(t)\}(s).$$
Din tabel $\Rightarrow \mathcal{L}\{(\cos t) \cdot \eta(t)\}(s) = \dfrac{s}{s^2+1}; \mathcal{L}\{(\operatorname{ch} t) \cdot \eta(t)\}(s) = \dfrac{s}{s^2-1}$.
Se utilizează Teorema 10, Borel:
$\widetilde{f}(t) = x(t), t \geq 0 \Rightarrow \widetilde{F}(s) = X(s)$.
$\widetilde{g}(t) = \sin t, t \geq 0 \overset{\text{tabel}}{\Rightarrow} \widetilde{G}(s) = \dfrac{1}{s^2+1}$.
Se utilizeazăTeorema 6 (de derivare a originalului) $\Rightarrow$
$$\mathcal{L}\{x'(t)\}(s) = sX(s) - \underbrace{x(0_+)}_{1}$$

Atunci
$X(s)+sX(s)-1-2X(s)\dfrac{1}{s^2+1}=\dfrac{s}{s^2+1}+\dfrac{s}{s^2-1}\Rightarrow$
$\left(1+s-\dfrac{2}{s^2+1}\right)X(s)=\dfrac{s}{s^2+1}+\dfrac{s}{s^2-1}+1\Rightarrow X(s)=\dfrac{s}{s^2-1}.$
•se determină originalul $x(t)$ corespunzător funcţiei imagine $X(s)$ găsite$\Rightarrow$
$\Rightarrow x(t)=(\operatorname{ch}t)\cdot\eta(t)$ sau $x(t)=\operatorname{ch}t, t\geq 0.$

c) Fie $\begin{cases}(*_{ID})\, x'(t)-\displaystyle\int_0^t x(\tau)\cos(t-\tau)\,d\tau=0, \forall t\geq 0\\ CI: x(0)=1;\end{cases}$

Ecuaţia $(*_{ID})$ este o ecuaţie integro-diferenţială, deoarece funcţia necunoscută $x(t)$ apare şi sub operatorul de integrare şi sub operatorul de derivare. Se caută $x(t)=?, t\geq 0$ soluţia problemei $(*_{ID})+CI.$

Metoda transformatei Laplace. Se presupune $x\in\mathcal{O}$ şi se notează $X(s)=\mathcal{L}\{x(t)\}(s).$
•se aplică ecuaţiei $(*_{ID})$ transformata Laplace$\Rightarrow$
$\mathcal{L}\left\{x'(t)-\displaystyle\int_0^t x(\tau)\cos(t-\tau)\,d\tau\right\}(s)=\mathcal{L}\{0\}(s)$
•se utilizează Teorema 1(de liniaritate) $\Rightarrow$
$\mathcal{L}\{x'(t)\}(s)-\mathcal{L}\left\{\displaystyle\int_0^t x(\tau)\cos(t-\tau)\,d\tau\right\}(s)=0.$
Se utilizează Teorema 10, Borel:
$\widetilde{f}(t)=x(t), t\geq 0\Rightarrow\widetilde{F}(s)=X(s).$
$\widetilde{g}(t)=\cos t, t\geq 0\overset{\text{tabel}}{\Rightarrow}\widetilde{G}(s)=\dfrac{s}{s^2+1}.$
Se utilizeazăTeorema 6 (de derivare a originalului) $\Rightarrow$
$\mathcal{L}\{x'(t)\}(s)=sX(s)-\underbrace{x(0_+)}_{1}.$
Atunci
$sX(s)-1-X(s)\dfrac{s}{s^2+1}=0\Rightarrow\left(s-\dfrac{s}{s^2+1}\right)X(s)=1\Rightarrow$
$X(s)=\dfrac{s^2+1}{s^3}=\dfrac{1}{s}+\dfrac{1}{s^3}.$
•se determină originalul $x(t)$ corespunzător funcţiei imagine $X(s)$ găsite$\Rightarrow$
$\Rightarrow x(t)=\left(1+\frac{1}{2}t^2\right)\cdot\eta(t)$ sau $x(t)=1+\frac{1}{2}t^2, t\geq 0.$

○7.2.4. Calculul unor integrale improprii (cu parametri sau fără) cu operatorul Laplace-...

○7.2.5. Calculul unor sume de serii cu operatorul Laplace-...