SEMINAR NR. 13, REZOLVĂRI
EDCO, AIA

Serii Fourier. Dezvoltarea în serie Fourier a unei funcţii reale cu valori reale

Preliminarii pentru noţiunea de serie Fourier ataşată unui semnal - vezi Curs.
Definiţia 2. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ periodică, cu $T > 0$ perioada principală, a.î. $f \in \mathcal{R}([\alpha, \alpha + T]), \forall \alpha \in \mathbb{R}$ şi pentru care se cunoaşte legea de asociere pe $[\alpha, \alpha + T]$, adică

$f(t) = ..., \forall t \in [\alpha, \alpha + T]$

Se numeşte *serie Fourier* sau *serie trigonometrică* ataşată lui f pe $[\alpha, \alpha + T]$ (pe $\mathbb{R}$) seria

$$\boxed{\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)\right)}, \forall t \in [\alpha, \alpha + T], \text{ chiar } t \in \mathbb{R}, \tag{1}$$

unde numărul $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$ se numeşte *pulsaţie* iar numerele

$$\boxed{\begin{cases} a_0 = \dfrac{2}{T} \displaystyle\int_{\alpha}^{\alpha+T} f(t)\, dt; \\ a_n = \dfrac{2}{T} \displaystyle\int_{\alpha}^{\alpha+T} f(t) \cos(n\omega t)\, dt, \forall n \in \mathbb{N}^*; \\ b_n = \dfrac{2}{T} \displaystyle\int_{\alpha}^{\alpha+T} f(t) \sin(n\omega t)\, dt, \forall n \in \mathbb{N}^*; \end{cases}}$$

se numesc *coeficienţii Fourier* ai funcţiei f.

$$F_n(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \left(a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t)\right), \forall t \in [\alpha, \alpha + T], \text{ chiar } t \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}^*$$

se numesc *polinoame Fourier* sau *polinoame trigonometrice.*
Observaţia 1. Dacă, în definiţia anterioară, $\alpha = -l, T = 2l > 0$ şi $f \in \mathcal{R}([-l, l])$, atunci *seria Fourier* sau *seria trigonometrică* ataşată lui f pe $[-l, l]$ (pe $\mathbb{R}$) devine

$$\boxed{\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\frac{n\pi t}{l} + b_n \sin\frac{n\pi t}{l}\right)}, \forall t \in [-l, l], \text{ chiar } t \in \mathbb{R}, \tag{2}$$

unde numărul $\omega = \dfrac{\pi}{l}$ este *pulsaţia* iar numerele

$$\boxed{\begin{cases} a_0 = \dfrac{1}{l} \displaystyle\int_{-l}^{l} f(t)\, dt; \\ a_n = \dfrac{1}{l} \displaystyle\int_{-l}^{l} f(t) \cos\frac{n\pi t}{l} dt, \forall n \in \mathbb{N}^*; \\ b_n = \dfrac{1}{l} \displaystyle\int_{-l}^{l} f(t) \sin\frac{n\pi t}{l} dt, \forall n \in \mathbb{N}^*; \end{cases}}$$

sunt *coeficienţii Fourier* ai funcţiei f.
Observaţia 2. Se impun următoarele întrebări:

•Seria Fourier (1) este punctual, uniform convergentă? Pe ce interval?

•Pe intervalul de convergenţă suma seriei $s(t)$ coincide cu $f(t)$?

Definiţia 3. Se spune că funcţia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ satisface *condiţia Dirichlet* pe $[a, b]$ dacă

(i) f este mărginită pe $[a, b]$ şi are un număr finit de puncte de discontinuitate de prima speţă pe $[a, b]$ (în punctele de discontinuitate are limite laterale diferite, dar finite);

(ii) intervalul $[a,b]$ poate fi descompus într-un număr finit de intervale pe care f este monotonă.

Teorema 1. (**Dirichlet**) Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcţie periodică, cu perioada principală $T > 0$, ce satisface condiţia Dirichlet pe $[\alpha, \alpha + T], \alpha \in \mathbb{R}$. Atunci seria Fourier (1) ataşată lui f este punctual convergentă pe $[\alpha, \alpha + T]$ (chiar pe $\mathbb{R}$) şi suma ei este

$$s(t) = \begin{cases} f(t), & \text{dacă } t \text{ e punct de continuitate pentru } f \\ \dfrac{f(t-0)+f(t+0)}{2}, & \text{dacă } t \text{ e punct de discontinuitate pentru } f. \end{cases}.$$

Observaţia 3. Se reaminteşte că:

•dacă f este impară şi integrabilă Riemann pe intervalul simetric $[-l,l] \Rightarrow \displaystyle\int_{-l}^{l} f(t)\,dt = 0$;

•dacă f este pară şi integrabilă Riemann pe intervalul simetric $[-l,l] \Rightarrow \displaystyle\int_{-l}^{l} f(t)\,dt = 2\int_{0}^{l} f(t)\,dt$.

Consecinţa 1. (*dezvoltarea unei funcţii în serie Fourier pe interval simetric*) Dacă $f : [-l,l] \to \mathbb{R}$ este o funcţie netedă pe porţiuni, atunci seria Fourier ataşată lui f

$$\boxed{\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi t}{l} + b_n \sin \frac{n\pi t}{l} \right)}, \forall t \in [-l,l], \tag{3}$$

unde $$\boxed{\begin{cases} a_0 = \dfrac{1}{l}\displaystyle\int_{-l}^{l} f(t)\,dt; \\ a_n = \dfrac{1}{l}\displaystyle\int_{-l}^{l} f(t)\cos\frac{n\pi t}{l}dt, \forall n \in \mathbb{N}^*; \\ b_n = \dfrac{1}{l}\displaystyle\int_{-l}^{l} f(t)\sin\frac{n\pi t}{l}dt, \forall n \in \mathbb{N}^*; \end{cases}}$$

este convergentă în $\forall t \in [-l,l]$ (chiar pe $\mathbb{R}$) şi suma ei este

$$\boxed{s(t) = \begin{cases} \dfrac{f(t-0)+f(t+0)}{2}, & \text{dacă } t \in \,]-l,l[\\ \dfrac{f(\pm l-0)+f(\pm l+0)}{2}, & \text{dacă } t = -l \text{ sau } t = l \end{cases}.}$$

Mai mult, dacă f este *pară pe* $[-l,l]$ (adică $f(-t) = f(t), \forall t \in [-l,l]$), atunci

$$\begin{cases} a_0 = \dfrac{2}{l}\displaystyle\int_{0}^{l} f(t)\,dt \\ a_n = \dfrac{2}{l}\displaystyle\int_{0}^{l} f(t)\cos\frac{n\pi t}{l}dt, \forall n \in \mathbb{N}^* \\ b_n = 0, \forall n \in \mathbb{N}^*, \end{cases}$$

iar dacă f este *impară pe* $[-l,l]$ (adică $f(-t) = -f(t), \forall t \in [-l,l]$), atunci

$$\boxed{\begin{cases} a_0 = 0 \\ a_n = 0, \forall n \in \mathbb{N}^* \\ b_n = \dfrac{2}{l}\displaystyle\int_{0}^{l} f(t)\sin\frac{n\pi t}{l}dt, \forall n \in \mathbb{N}^*. \end{cases}}$$

Consecinţa 2. (*dezvoltarea unei funcţii în serie de cosinusuri*) Dacă $f : [0,l] \to \mathbb{R}$ este o funcţie netedă pe porţiuni, atunci seria de cosinusuri ataşată lui f

$$\boxed{\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi t}{l}, \forall t \in [0,l],} \tag{4}$$

unde $\boxed{\begin{cases} a_0 = \dfrac{2}{l}\displaystyle\int_0^l f(t)\,dt \\ a_n = \dfrac{2}{l}\displaystyle\int_0^l f(t)\cos\dfrac{n\pi t}{l}dt, \forall n \in \mathbb{N}^*, \end{cases}}$

este convergentă în $\forall t \in [0,l]$ şi suma ei este

$$\boxed{s(t) = \begin{cases} \dfrac{f(t-0)+f(t+0)}{2}, & \text{dacă } t \in \left]0,l\right[\\ f(0+0), & \text{dacă } t = 0 \\ f(l-0), & \text{dacă } t = l. \end{cases}.}$$

(prin extindere, seria obţinută ar corespunde pentru prelungirea lui f prin paritate la $[-l,l]$, apoi prin periodicitate la $\mathbb{R}$; de menţionat că

$$f_p : \left]-l,l\right] \to \mathbb{R}, f_p(t) = \begin{cases} f(-t), & \text{dacă } t \in \left]-l,0\right[\\ f(t), & \text{dacă } t \in [0,l] \end{cases}$$

este funcţia pară pe intervalul simetric $\left]-l,l\right[$, utilizată ulterior pentru prelungirea prin periodicitate).

Consecinţa 3. (*dezvoltarea unei funcţii în serie de sinusuri*) Dacă $f : [0,l] \to \mathbb{R}$ este o funcţie netedă pe porţiuni, atunci seria de sinusuri ataşată lui f

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi t}{l}, \forall t \in [0,l],} \tag{5}$$

unde $\boxed{\left\{ b_n = \dfrac{2}{l}\displaystyle\int_0^l f(t)\sin\dfrac{n\pi t}{l}dt, \forall n \in \mathbb{N}^*, \right.}$

este convergentă în $\forall t \in [0,l]$ şi suma ei este

$$\boxed{s(t) = \begin{cases} \dfrac{f(t-0)+f(t+0)}{2}, & \text{dacă } t \in \left]0,l\right[\\ 0, & \text{dacă } t = 0 \text{ sau } t = l \end{cases}.}$$

(prin extindere, seria obţinută ar corespunde pentru prelungirea lui f prin imparitate la $[-l,l]$, apoi prin periodicitate la $\mathbb{R}$; de menţionat că

$$f_i : \left]-l,l\right] \to \mathbb{R}, f_i(t) = \begin{cases} -f(-t), & \text{dacă } t \in \left]-l,0\right[\\ f(t), & \text{dacă } t \in [0,l] \end{cases}$$

este funcţia impară pe intervalul simetric $\left]-l,l\right[$, utilizată ulterior pentru prelungirea prin periodicitate).

Exerciţiul 1. Să se studieze dacă următoarele funcţii satisfac condiţiile teoremei lui Dirichlet şi, dacă da, să dezvolte în *serie Fourier* funcţiile prelungite prin periodicitate:

a) $f : [-\pi,\pi] \to \mathbb{R}, f(t) = \begin{cases} t, & \text{dacă } -\pi < t < \pi \\ 0, & \text{dacă } t = -\pi \text{ şi } t = \pi \end{cases};$

b) $f : [-l,l] \to \mathbb{R}, f(t) = \begin{cases} t, & \text{dacă } -l < t < l \\ 0, & \text{dacă } t = -l \text{ şi } t = l \end{cases}, l > 0;$

c) $f : [-\pi,\pi] \to \mathbb{R}, f(t) = |t|$; **d)** $f : [-l,l] \to \mathbb{R}, f(t) = t^2, l > 0$;

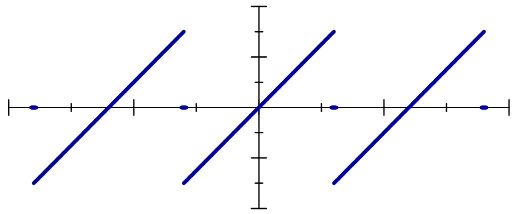
○**e)** $f : [-\pi,\pi] \to \mathbb{R}, f(t) = \arcsin(\sin t)$;

a) $f : [-\pi,\pi] \to \mathbb{R}, f(t) = \begin{cases} t, & \text{dacă } -\pi < t < \pi \\ 0, & \text{dacă } t = -\pi \text{ şi } t = \pi \end{cases};$

Rezolvare: a) A se vedea Curs.

b) $f : [-l,l] \to \mathbb{R}, f(t) = \begin{cases} t, & \text{dacă } -l < t < l \\ 0, & \text{dacă } t = -l \text{ şi } t = l \end{cases}, l > 0.$

Rezolvare: Se reprezintă grafic f pe $[-l,l]$, apoi se prelungeşte prin periodicitate la $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.



Din grafic se observă că f este impară pe $[-l,l]$ (pe $[-l,l]$, G_f este simetric faţă de O).

etapa 1. Se ataşează lui f seria ei Fourier (trigonometrică) :

$$\boxed{[\alpha,\alpha+T]=[-l,l]} \Rightarrow \begin{cases} \boxed{T=2l}\text{-perioada} \\ \alpha=-l \\ \omega=\frac{2\pi}{2l} \Rightarrow \boxed{\omega=\frac{\pi}{l}} \text{ pulsaţia} \end{cases}$$

Se determină coeficienţii Fourier:

$$\boxed{a_0=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(t)\,dt} \Rightarrow a_0=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} \underbrace{t}_{\text{impară}}\,dt \overset{\text{impară pe }[-l,l]}{=} 0.$$

$$\boxed{a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(t)\cos\left(\frac{n\pi t}{l}\right)dt, \forall n\in\mathbb{N}^*} \Rightarrow a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} \underbrace{t}_{\text{impară}}\cdot\underbrace{\cos\left(\frac{n\pi t}{l}\right)}_{\text{pară}}dt \overset{\text{impară pe }[-l,l]}{=} 0, \forall n\in\mathbb{N}^*.$$

$$\boxed{b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(t)\sin\left(\frac{n\pi t}{l}\right)dt, \forall n\in\mathbb{N}^*} \Rightarrow b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} \underbrace{t}_{\text{impară}}\cdot\underbrace{\sin\left(\frac{n\pi t}{l}\right)}_{\text{impară}}dt \overset{\text{pară pe }[-l,l]}{=} \frac{2}{l}\int_{0}^{l} t\cdot\sin\left(\frac{n\pi t}{l}\right)dt=$$

$$=\frac{2}{l}\int_0^l t\cdot\left(\frac{\cos\left(\frac{n\pi t}{l}\right)}{\frac{-n\pi}{l}}\right)'dt=\frac{2}{l}\left(t\cdot\frac{\cos\left(\frac{n\pi t}{l}\right)}{\frac{-n\pi}{l}}\Bigg|_{t=0}^{t=l}-\int_0^l 1\cdot\frac{\cos\left(\frac{n\pi t}{l}\right)}{\frac{-n\pi}{l}}dt\right)=$$

$$=\frac{2}{l}\left(\left(l\cdot\frac{\cos(n\pi)}{\frac{-n\pi}{l}}-0\cdot\frac{\cos 0}{\frac{-n\pi}{l}}\right)+\frac{l}{n\pi}\,\frac{\sin\left(\frac{n\pi t}{l}\right)}{\frac{n\pi}{l}}\Bigg|_{t=0}^{t=l}\right)=$$

$$=\frac{2}{l}\left(\frac{l^2}{-n\pi}\cdot\cos(n\pi)+\frac{l}{n\pi}\frac{\sin(n\pi)-\sin(0)}{\frac{n\pi}{l}}\right)=\frac{2}{l}\left(\frac{l^2}{-n\pi}\cdot(-1)^n+\frac{l}{n\pi}\frac{0-0}{\frac{n\pi}{l}}\right)=\frac{2l}{n\pi}(-1)^{n+1},$$
$\forall n\in\mathbb{N}^*$.

S-a folosit $\boxed{\begin{array}{l}\cos(n\pi)=(-1)^n, \forall n\in\mathbb{N}^*.\\ \sin(n\pi)=0, \forall n\in\mathbb{N}^*.\end{array}}$

Atunci seria Fourier ataşată lui f este

$\frac{0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(0\cdot\cos\left(\frac{n\pi t}{l}\right)+\frac{2l}{n\pi}(-1)^{n+1}\cdot\sin\left(\frac{n\pi t}{l}\right)\right), \forall t\in[-l,l]$, chiar $t\in\mathbb{R}$, adică

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2l}{n\pi}(-1)^{n+1}\cdot\sin\left(\frac{n\pi t}{l}\right), \forall t\in[-l,l], \text{ chiar } t\in\mathbb{R}. \qquad (*_1)$$

etapa 2. Se studiază dacă şi pe ce mulţime suma seriei $(*_1)$ coincide cu f.

Din grafic se observă că f verifică ipotezele Teoremei Dirichlet$\Rightarrow$ suma seriei $(*_1)$ este

$$s(t)=\begin{cases} f(t), & \text{dacă } t\in\bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}}\left]-l+2kl,l+2kl\right[\\ \dfrac{0+0}{2}, & \text{dacă } t=-l+2kl \text{ sau } t=l+2kl, k\in\mathbb{Z}\end{cases}.$$

Deoarece pe $]-l,l[$ se observă că f nu are puncte de discontinuitate, se scrie chiar

$$t=\frac{2l}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\cdot\sin\left(\frac{n\pi t}{l}\right), \forall t\in\left]-l,l\right[. \qquad (*_2)$$

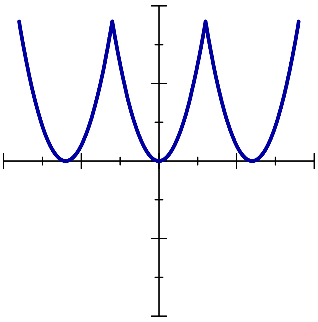
etapa 3. A se observa posibile particularizări, precum $t=\frac{l}{2\pi}\in\left]-l,l\right[$ în curs.

Comentariu: A se observa reprezentările grafice ale "polinoamelor" Fourier, în curs, pentru $l=\pi$.

c) A se vedea Curs.

d) $f:[-l,l]\to\mathbb{R}, f(t)=t^2, l>0;$

Rezolvare: Se reprezintă grafic f pe $[-l,l]$, apoi se prelungeşte prin periodicitate la $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$.



Din grafic se observă că f este pară pe $[-l,l]$ (pe $[-l,l]$, G_f este simetric faţă de Oy).

etapa 1. Se ataşează lui f seria ei Fourier (trigonometrică) :

$$\boxed{[\alpha,\alpha+T]=[-l,l]}\Rightarrow\begin{cases}\boxed{T=2l}\text{-perioada}\\ \alpha=-l\\ \omega=\frac{2\pi}{2l}\Rightarrow\boxed{\omega=\frac{\pi}{l}}\text{ pulsaţia}\end{cases}$$

Se determină coeficienţii Fourier:

$$\boxed{a_0=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(t)\,dt}\Rightarrow a_0=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}\underbrace{t^2}_{\text{pară}}dt\overset{\text{pară pe }[-l,l]}{=}\frac{1}{l}\cdot 2\int_0^l t^2dt=\frac{2}{l}\left.\frac{t^3}{3}\right|_{t=0}^{t=l}=\frac{2l^2}{3}.$$

$$\boxed{a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(t)\cos\left(\frac{n\pi t}{l}\right)dt,\forall n\in\mathbb{N}^*}\Rightarrow a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}\underbrace{t^2}_{\text{pară}}\cdot\underbrace{\cos\left(\frac{n\pi t}{l}\right)}_{\text{pară}}dt\overset{\text{pară pe }[-l,l]}{=}$$

$$=\frac{1}{l}\cdot 2\int_0^l t^2\cos\left(\frac{n\pi t}{l}\right)dt=\frac{2}{l}\int_0^l t^2\cdot\left(\frac{\sin\left(\frac{n\pi t}{l}\right)}{\frac{n\pi}{l}}\right)'dt=$$

$$=\frac{2}{l}\left(\left.t^2\cdot\frac{\sin\left(\frac{n\pi t}{l}\right)}{\frac{n\pi}{l}}\right|_{t=0}^{t=l}-\int_0^l 2t\cdot\frac{\sin\left(\frac{n\pi t}{l}\right)}{\frac{n\pi}{l}}dt\right)=$$

$$=\frac{2}{l}\left(\left(l^2\cdot\frac{\sin(n\pi)}{\frac{n\pi}{l}}-0^2\cdot\frac{\sin(0)}{\frac{n\pi}{l}}\right)-2\cdot\frac{l}{n\pi}\int_0^l t\cdot\left(\frac{\cos\left(\frac{n\pi t}{l}\right)}{\frac{-n\pi}{l}}\right)'dt\right)=$$

$$= \frac{-4}{n\pi}\left(t \cdot \frac{\cos\left(\frac{n\pi t}{l}\right)}{\frac{-n\pi}{l}} \Bigg|_{t=0}^{t=l} - \int_0^l 1 \cdot \frac{\cos\left(\frac{n\pi t}{l}\right)}{\frac{-n\pi}{l}} dt \right) =$$

$$= \frac{-4}{n\pi}\left(\left(l \cdot \frac{\cos(n\pi)}{\frac{-n\pi}{l}} - 0\frac{\cos(0)}{\frac{-n\pi}{l}} \right) - \frac{l}{-n\pi} \frac{\sin\left(\frac{n\pi t}{l}\right)}{\frac{n\pi}{l}} \Bigg|_{t=0}^{t=l} \right) =$$

$$= \frac{4l}{n^2\pi^2}\left(l \cdot (-1)^n - \frac{\sin(n\pi) - \sin 0}{\frac{n\pi}{l}} \right) = \frac{4l^2}{n^2\pi^2}(-1)^n, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

$$\boxed{b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(t)\sin\left(\frac{n\pi t}{l}\right) dt, \forall n \in \mathbb{N}^*} \Rightarrow b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} \underbrace{t^2}_{\text{pară}} \cdot \underbrace{\sin\left(\frac{n\pi t}{l}\right)}_{\text{impară}} dt \overset{\text{impară pe } [-l,l]}{=} 0, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Atunci seria Fourier ataşată lui f este

$\frac{l^2}{3} + \sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4l^2}{n^2\pi^2}(-1)^n \cdot \cos\left(\frac{n\pi t}{l}\right) + 0 \cdot \sin\left(\frac{n\pi t}{l}\right) \right), \forall t \in [-l, l]$, chiar $t \in \mathbb{R}$, adică

$$\frac{l^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4l^2}{n^2\pi^2}(-1)^n \cos\left(\frac{n\pi t}{l}\right), \forall t \in [-l, l], \text{ chiar } t \in \mathbb{R}. \qquad (*_1)$$

<u>etapa 2.</u> Se studiază dacă şi pe ce mulţime suma seriei $(*_1)$ coincide cu f.

Din grafic se observă că f verifică ipotezele Teoremei Dirichlet. Cum f este continuă pe $\mathbb{R}$ $\Rightarrow$suma seriei $(*_1)$ este

$s(t) = f(t), \forall t \in [-\pi, \pi]$, chiar $t \in \mathbb{R}$.

Deoarece pe $\mathbb{R}$ se observă că f nu are puncte de discontinuitate, se scrie chiar

$$t^2 = \frac{l^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4l^2}{n^2\pi^2}(-1)^n \cos\left(\frac{n\pi t}{l}\right), \forall t \in \mathbb{R}. \qquad (*_2)$$

<u>etapa 3.</u> În particular, pentru $l = \pi$, din $(*_2)$ se obţine

$$\boxed{t^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}\cos(nt), \forall t \in \mathbb{R}.} \qquad (*_3)$$

Pentru <u>$t = 0$</u>, din $(*_3)$ se obţine suma seriei armonice alternante generalizate cu $\widetilde{\alpha} = 2$:

$$0^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}\cos(0) \Leftrightarrow 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}\cos(0) = \frac{-\pi^2}{3} \Leftrightarrow$$

$$\boxed{\frac{\pi^2}{12} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}} \text{ sau } \boxed{\frac{\pi^2}{12} = \frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + ... + \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} + ...}$$

Pentru <u>$t = \pi$</u>, din $(*_3)$ se obţine suma seriei armonice generalizate cu $\widetilde{\alpha} = 2$:

$$\pi^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}\cos(n\pi) \Leftrightarrow 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}(-1)^n = \frac{2\pi^2}{3} \Leftrightarrow$$

$$\boxed{\frac{\pi^2}{6} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}} \text{ sau } \boxed{\frac{\pi^2}{6} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + ... + \frac{1}{n^2} + ...}$$

Comentariu: Se reprezintă grafic pe $[-l, l]$, chiar pe $\mathbb{R}$

$f(t) = t^2$-albastru

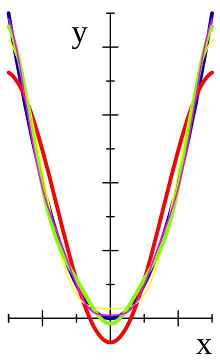
$F_1(t) = \frac{\pi^2}{3} - \frac{4}{1}\cos t$-roşu

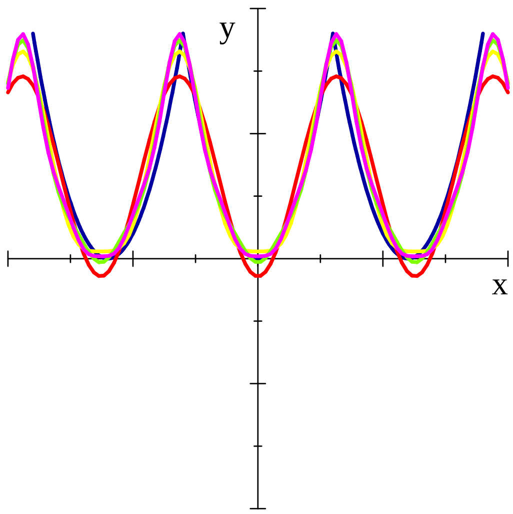
$F_2(t) = \frac{\pi^2}{3} - \frac{4}{1}\cos t + \frac{4}{4}\cos(2t)$-galben

$F_3(t) = \frac{\pi^2}{3} - \frac{4}{1}\cos t + \frac{4}{4}\cos(2t) - \frac{4}{9}\cos(3t)$-verde

$F_4(t) = \frac{\pi^2}{3} - \frac{4}{1}\cos t + \frac{4}{4}\cos(2t) - \frac{4}{9}\cos(3t) + \frac{4}{16}\cos(4t)$-magenta

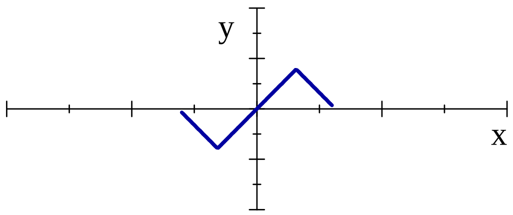
şi se observă aproximarea din ce în ce mai bună a funcţiei cu polinoame Fourier.





○**e)** $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}, f(t) = \arcsin(\sin t)$;

Rezolvare: Se reprezintă grafic f pe $[-\pi, \pi]$, apoi se prelungeşte prin periodicitate la $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.



Din grafic se observă că f este <u>impară</u> pe $[-\pi, \pi]$ (pe $[-\pi, \pi]$, <u>G_f este simetric faţă de O</u>).

<u>etapa 1.</u> Se ataşează lui f seria ei Fourier (trigonometrică) :

$$\boxed{[\alpha, \alpha + T] = [-\pi, \pi]} \Rightarrow \begin{cases} \boxed{T = 2\pi}\text{-perioada} \\ \alpha = -\pi \\ \omega = \frac{2\pi}{2\pi} \Rightarrow \boxed{\omega = 1} \text{ pulsaţia} \end{cases}$$

Se determină coeficienţii Fourier:

$$\boxed{a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,dt} \Rightarrow a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{\arcsin(\sin t)}_{\text{impară}} dt = 0.$$

$$\boxed{a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(nt)\,dt, \forall n \in \mathbb{N}^*} \Rightarrow a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{\arcsin(\sin t)}_{\text{impară}} \cdot \underbrace{\cos(nt)}_{\text{pară}} dt \overset{\text{impară pe } [-\pi,\pi]}{=} 0, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

$$\boxed{b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(nt)\,dt, \forall n \in \mathbb{N}^*} \Rightarrow b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{\arcsin(\sin t)}_{\text{impară}} \cdot \underbrace{\sin(nt)}_{\text{impară}} dt \overset{\text{pară pe } [-\pi,\pi]}{=}$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \arcsin(\sin t) \cdot \sin(nt)\,dt = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \arcsin(\sin t) \cdot \left(\frac{\cos(nt)}{-n}\right)' dt =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(\arcsin(\sin t)\cdot\frac{\cos(nt)}{-n}\bigg|_{t=0}^{t=\pi} - \int_0^{\pi}\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 t}}\cos t\cdot\frac{\cos(nt)}{-n}dt\right) =$$
$$= \frac{2}{\pi}\left(\left(\arcsin(\sin\pi)\cdot\frac{\cos(n\pi)}{-n} - \arcsin(\sin 0)\cdot\frac{\cos(0)}{-n}\right) - \int_0^{\pi}\frac{\cos t}{|\cos t|}\cdot\frac{\cos(nt)}{-n}dt\right) =$$
$$= \frac{2}{n\pi}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(nt)\,dt - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\cos(nt)\,dt\right) = \frac{2}{n\pi}\left(\frac{\sin(nt)}{n}\bigg|_{t=0}^{t=\frac{\pi}{2}} - \frac{\sin(nt)}{n}\bigg|_{t=\frac{\pi}{2}}^{t=\pi}\right) =$$
$$= \frac{2}{n\pi}\left(\frac{\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)}{n} - \frac{\sin(0)}{n} - \frac{\sin(n\pi)}{n} + \frac{\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)}{n}\right) =$$
$$= \frac{4}{n^2\pi}\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right), \forall n\in\mathbb{N}^*.$$

Atunci seria Fourier ataşată lui f este

$$0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(0\cdot\cos(nt) + \frac{4}{n^2\pi}\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)\cdot\sin(nt)\right), \forall t\in[-\pi,\pi], \text{ chiar } t\in\mathbb{R}, \text{ adică}$$
$$\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)\cdot\sin(nt), \forall t\in[-\pi,\pi], \text{ chiar } t\in\mathbb{R}. \qquad (*_1)$$

etapa 2. Se studiază dacă şi pe ce mulţime suma seriei $(*_1)$ coincide cu f.

Din grafic se observă că f verifică ipotezele Teoremei Dirichlet (precizăm că f este derivabilă pe $[-\pi,\pi]\setminus\left\{\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right\}$). Cum f este continuă pe $\mathbb{R}$ $\Rightarrow$suma seriei $(*_1)$ este

$$s(t) = f(t), \forall t\in[-\pi,\pi], \text{ chiar } t\in\mathbb{R}.$$

Deoarece pe $\mathbb{R}$ se observă că f nu are puncte de discontinuitate, se scrie chiar

$$\boxed{\arcsin(\sin t) = \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)\cdot\sin(nt), \forall t\in[-\pi,\pi], \text{chiar } t\in\mathbb{R}.} \qquad (*_2)$$

Se foloseşte $\boxed{\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) = \begin{cases} 0, & n = 2\widetilde{n}, \widetilde{n}\in\mathbb{N}^* \\ (-1)^{\widetilde{n}}, & n = 2\widetilde{n}+1, \widetilde{n}\in\mathbb{N}\end{cases}}\Rightarrow$

$$\arcsin(\sin t) = \frac{4}{\pi}\sum_{\widetilde{n}=0}^{\infty}\frac{1}{(2\widetilde{n}+1)^2}(-1)^{\widetilde{n}}\cdot\sin((2\widetilde{n}+1)t), \forall t\in[-\pi,\pi], \text{ chiar } t\in\mathbb{R},$$

sau, renotând $\widetilde{n}$ cu n, se obţine

$$\arcsin(\sin t) = \frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}\cdot\sin((2n+1)t), \forall t\in[-\pi,\pi], \text{ chiar } t\in\mathbb{R}.$$

Comentariu: Se reprezintă grafic pe $[-\pi,\pi]$, chiar pe $\mathbb{R}$

$f(t) = \arcsin(\sin t)$-albastru

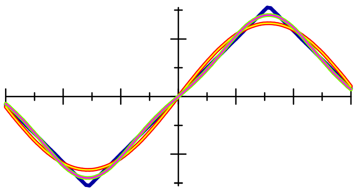
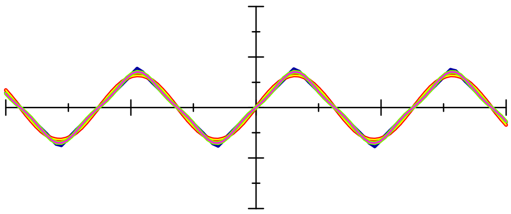
$F_1(t) = \frac{4}{\pi}\sin t$-roşu

$F_2(t) = \frac{4}{\pi}\sin t + 0$-galben subţire

$F_3(t) = \frac{4}{\pi}\sin t + 0 + \frac{4}{\pi}\cdot\frac{-1}{3^2}\sin 3t$-verde

$F_4(t) = \frac{4}{\pi}\sin t + 0 + \frac{4}{\pi}\cdot\frac{-1}{3^2}\sin 3t + 0$-magenta subţire

şi se observă aproximarea din ce în ce mai bună a funcţiei cu "polinoame" Fourier.

Exerciţiul 2. Să se studieze dacă următoarele funcţii satisfac condiţiile teoremei lui Dirichlet şi, dacă da, să dezvolte în *serie Fourier* funcţiile prelungite prin periodicitate :

a) $f:]-\pi,\pi] \to \mathbb{R}, f(t) = \pi - t$;

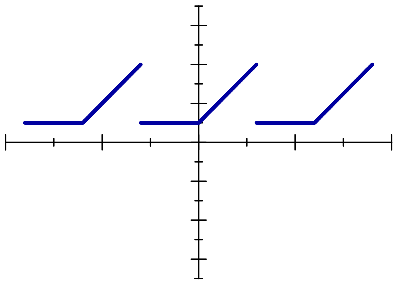
b) $f:]-\pi,\pi] \to \mathbb{R}, f(t) = \begin{cases} 1, & \text{dacă } t \in]-\pi,0[\\ t+1, & \text{dacă } t \in [0,\pi] \end{cases}$;**c)** $f:]-\pi,\pi] \to \mathbb{R}, f(t) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } t \in]-\pi,0[\\ t, & \text{dacă } t \in [0,\pi] \end{cases}$;

d) $f:]-\pi,\pi] \to \mathbb{R}, f(t) = \begin{cases} \pi - t, & \text{dacă } t \in]-\pi,0[\\ \pi, & \text{dacă } t \in [0,\pi] \end{cases}$;**e)** $f:]-1,1] \to \mathbb{R}, f(t) = \begin{cases} 1, & \text{dacă } t \in]-1,0[\\ e^t, & \text{dacă } t \in [0,1] \end{cases}$.

Rezolvare: a) A se vedea Curs.

b) $f:]-\pi,\pi] \to \mathbb{R}, f(t) = \begin{cases} 1, & \text{dacă } t \in]-\pi,0[\\ t+1, & \text{dacă } t \in [0,\pi] \end{cases}$;

Se reprezintă grafic f pe $]-\pi,\pi]$, apoi se prelungeşte prin periodicitate la $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.



Din grafic se observă că f NU este nici pară, nici impară pe $]-\pi,\pi[$.

<u>etapa 1.</u> Se ataşează lui f seria ei Fourier (trigonometrică) :

$$\boxed{[\alpha,\alpha+T] = [-\pi,\pi]} \Rightarrow \begin{cases} \boxed{T = 2\pi}\text{-perioada} \\ \alpha = -\pi \\ \omega = \frac{2\pi}{2\pi} \Rightarrow \boxed{\omega = 1} \text{ pulsaţia} \end{cases}$$

Se determină coeficienţii Fourier:

$$\boxed{a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,dt} \Rightarrow a_0 = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} 1dt + \int_0^{\pi} (t+1)\,dt\right) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left((t)\Big|_{t=-\pi}^{t=0} + \left(\tfrac{t^2}{2} + t\right)\Big|_{t=0}^{t=\pi}\right) = \frac{1}{\pi}\left(\pi + \tfrac{\pi^2}{2} + \pi\right) = 2 + \tfrac{\pi}{2}.$$

$$\boxed{a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(nt)\,dt, \forall n \in \mathbb{N}^*} \Rightarrow a_n = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} 1\cos(nt)\,dtdt + \int_0^{\pi} (t+1)\cdot\cos(nt)\,dtdt\right) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\frac{\sin(nt)}{n}\Bigg|_{t=-\pi}^{t=0} + \int_0^{\pi} (t+1)\cdot\left(\frac{\sin(nt)}{n}\right)' dt\right) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\left.\frac{\sin(nt)}{n}\right|_{t=-\pi}^{t=0} + (t+1)\cdot \left.\frac{\sin(nt)}{n}\right|_{t=0}^{t=\pi} - \int_0^{\pi} 1\cdot \frac{\sin(nt)}{n}dt \right) =$$
$$= \frac{1}{\pi}\left(\frac{\sin 0 - \sin(-n\pi)}{n} + (\pi+1)\cdot \frac{\sin(n\pi)}{n} - 1\frac{\sin 0}{n} - \left.\frac{\cos(nt)}{n\cdot(-n)}\right|_{t=0}^{t=\pi} \right) =$$
$$= \frac{1}{\pi}\left(0 - \frac{\cos(n\pi)}{n\cdot(-n)} + \frac{\cos 0}{n\cdot(-n)} \right) = \frac{1}{\pi}\left(\frac{(-1)^n-1}{n^2}\right) = \frac{(-1)^n-1}{n^2\pi}, \forall n\in\mathbb{N}^*$$
$$\boxed{b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(nt)\,dt, \forall n\in\mathbb{N}^*} \Rightarrow b_n = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} 1\sin(nt)\,dtdt + \int_0^{\pi}(t+1)\cdot\sin(nt)\,dtdt\right) =$$
$$= \frac{1}{\pi}\left(\left.\frac{\cos(nt)}{-n}\right|_{t=-\pi}^{t=0} + \int_0^{\pi}(t+1)\cdot\left(\frac{\cos(nt)}{-n}\right)' dt \right) =$$
$$= \frac{1}{\pi}\left(\left.\frac{\cos(nt)}{-n}\right|_{t=-\pi}^{t=0} + (t+1)\cdot \left.\frac{\cos(nt)}{-n}\right|_{t=0}^{t=\pi} - \int_0^{\pi} 1\cdot\frac{\cos(nt)}{-n}dt \right) =$$
$$= \frac{1}{\pi}\left(\frac{\cos 0 - \cos(-n\pi)}{-n} + (\pi+1)\cdot\frac{\cos(n\pi)}{-n} - 1\cdot\frac{\cos 0}{-n} - \left.\frac{\sin(nt)}{n\cdot(-n)}\right|_{t=0}^{t=\pi} \right) =$$
$$= \frac{1}{\pi}\left(\pi\cdot\frac{(-1)^n}{-n} - \frac{\sin(n\pi)-\sin 0}{n\cdot(-n)} \right) = \frac{(-1)^n}{-n}, \forall n\in\mathbb{N}^*$$

Atunci seria Fourier ataşată lui f este

$$\frac{1}{2}\left(2+\tfrac{\pi}{2}\right) + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n-1}{n^2\pi}\cdot\cos(nt) + \frac{(-1)^{n+1}}{n}\cdot\sin(nt)\right), \forall t\in\,]-\pi,\pi]\,, \text{ chiar } t\in\mathbb{R} \qquad (*_1)$$

etapa 2. Se studiază dacă şi pe ce mulţime suma seriei $(*_1)$ coincide cu f.

Din grafic se observă că f verifică ipotezele Teoremei Dirichlet$\Rightarrow$ suma seriei $(*_1)$ este

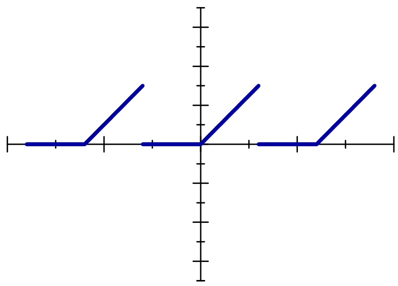
$$s(t) = \begin{cases} f(t), & \text{dacă } t\in\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\,]-\pi+2k\pi,\pi+2k\pi[\\ \dfrac{1+\pi+1}{2}, & \text{dacă } t=-\pi+2k\pi \text{ sau } t=\pi+2k\pi, k\in\mathbb{Z} \end{cases}.$$

Deoarece pe $]-\pi,\pi[$ se observă că f nu are puncte de discontinuitate, se scrie chiar

$$f(t) = 1+\tfrac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n-1}{n^2\pi}\cdot\cos(nt) + \frac{(-1)^{n+1}}{n}\cdot\sin(nt)\right), \forall t\in\,]-\pi,\pi[\,. \qquad (*_2)$$

c) Fie $f:\,]-\pi,\pi]\to\mathbb{R}, f(t) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } t\in\,]-\pi,0[\\ t, & \text{dacă } t\in[0,\pi] \end{cases};$

Se reprezintă grafic f pe $]-\pi,\pi]\,$, apoi se prelungeşte prin periodicitate la $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$.



Din grafic se observă că f NU este nici pară, nici impară pe $]-\pi,\pi[\,$.

etapa 1. Se ataşează lui f seria ei Fourier (trigonometrică) :

$$\boxed{[\alpha, \alpha+T]=[-\pi,\pi]} \Rightarrow \begin{cases} \boxed{T=2\pi}\text{-perioada} \\ \alpha=-\pi \\ \omega=\frac{2\pi}{2\pi} \Rightarrow \boxed{\omega=1} \text{ pulsaţia} \end{cases}$$

Se determină coeficienţii Fourier:

$$\boxed{a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,dt} \Rightarrow a_0=\frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} 0dt+\int_0^{\pi} tdt\right)=\frac{1}{\pi}\left(0+\left.\tfrac{t^2}{2}\right|_{t=0}^{t=\pi}\right)=\frac{1}{\pi}\left(\tfrac{\pi^2}{2}\right)=\tfrac{\pi}{2}.$$

$$\boxed{a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(nt)\,dt, \forall n\in\mathbb{N}^*} \Rightarrow a_n=\frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} 0\cos(nt)\,dt+\int_0^{\pi} t\cdot\cos(nt)\,dt\right)=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(0+\int_0^{\pi} t\cdot\left(\frac{\sin(nt)}{n}\right)' dt\right)=\frac{1}{\pi}\left(t\cdot\left.\frac{\sin(nt)}{n}\right|_{t=0}^{t=\pi}-\int_0^{\pi} 1\cdot\frac{\sin(nt)}{n}dt\right)=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(\pi\cdot\frac{\sin(n\pi)}{n}-0-\left.\frac{\cos(nt)}{n\cdot(-n)}\right|_{t=0}^{t=\pi}\right)=\frac{1}{\pi}\left(0-\frac{\cos(n\pi)}{n\cdot(-n)}+\frac{\cos 0}{n\cdot(-n)}\right)=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(\frac{(-1)^n-1}{n^2}\right)=\frac{(-1)^n-1}{n^2\pi}, \forall n\in\mathbb{N}^*$$

$$\boxed{b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(nt)\,dt, \forall n\in\mathbb{N}^*} \Rightarrow b_n=\frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} 0\sin(nt)\,dt+\int_0^{\pi} t\cdot\sin(nt)\,dt\right)=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(0+\int_0^{\pi} t\cdot\left(\frac{\cos(nt)}{-n}\right)' dt\right)=\frac{1}{\pi}\left(t\cdot\left.\frac{\cos(nt)}{-n}\right|_{t=0}^{t=\pi}-\int_0^{\pi} 1\cdot\frac{\cos(nt)}{-n}dt\right)=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(\pi\cdot\frac{\cos(n\pi)}{-n}-0\cdot\frac{\cos 0}{-n}-\left.\frac{\sin(nt)}{n\cdot(-n)}\right|_{t=0}^{t=\pi}\right)=\frac{1}{\pi}\left(\pi\cdot\frac{(-1)^n}{-n}-\frac{\sin(n\pi)-\sin 0}{n\cdot(-n)}\right)=\frac{(-1)^n}{-n},$$

$\forall n\in\mathbb{N}^*$

Atunci seria Fourier ataşată lui f este

$$\tfrac{\pi}{4}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n-1}{n^2\pi}\cdot\cos(nt)+\frac{(-1)^{n+1}}{n}\cdot\sin(nt)\right), \forall t\in\,]-\pi,\pi], \text{ chiar } t\in\mathbb{R} \qquad (*_1)$$

etapa 2. Se studiază dacă şi pe ce mulţime suma seriei $(*_1)$ coincide cu f.

Din grafic se observă că f verifică ipotezele Teoremei Dirichlet$\Rightarrow$ suma seriei $(*_1)$ este

$$s(t)=\begin{cases} f(t), & \text{dacă } t\in\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\,]-\pi+2k\pi,\pi+2k\pi[\\ \dfrac{0+\pi}{2}, & \text{dacă } t=-\pi+2k\pi \text{ sau } t=\pi+2k\pi, k\in\mathbb{Z} \end{cases}.$$

Deoarece pe $]-\pi,\pi[$ se observă că f nu are puncte de discontinuitate, se scrie chiar

$$f(t)=\tfrac{\pi}{4}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n-1}{n^2\pi}\cdot\cos(nt)+\frac{(-1)^{n+1}}{n}\cdot\sin(nt)\right), \forall t\in\,]-\pi,\pi[. \qquad (*_2)$$

Exerciţiul 3. Să se studieze dacă următoarele funcţii satisfac condiţiile teoremei lui Dirichlet şi, dacă da, să dezvolte în *serie Fourier* funcţiile prelungite prin periodicitate :

a) $f:[-\pi,\pi]\to\mathbb{R}, f(t)=\begin{cases} -1, & \text{dacă } -\pi<t<0 \\ 0, & \text{dacă } t=-\pi \text{ sau } t=0 \text{ sau } t=\pi \\ 1, & \text{dacă } 0<t<\pi \end{cases}$;

b) $f:[-\pi,\pi]\to\mathbb{R}, f(t)=\begin{cases} -a, & \text{dacă } -\pi\le t<\frac{-\pi}{2} \\ a, & \text{dacă } \frac{-\pi}{2}\le t\le\frac{\pi}{2} \\ -a, & \text{dacă } \frac{\pi}{2}<t\le\pi \end{cases}$, unde $a>0$;

c) $f:[-\pi,\pi]\to\mathbb{R}, f(t)=\begin{cases} -\frac{2a}{\pi}(t+\pi), & \text{dacă } -\pi\le t<\frac{-\pi}{2} \\ \frac{2a}{\pi}t, & \text{dacă } \frac{-\pi}{2}\le t\le\frac{\pi}{2} \\ \frac{2a}{\pi}(\pi-t), & \text{dacă } \frac{\pi}{2}<t\le\pi \end{cases}$, unde $a>0$;

În particular, $f:[-\pi,\pi]\to\mathbb{R}, f(t)=\begin{cases} -t-\pi, & \text{dacă } -\pi\le t<\frac{-\pi}{2} \\ t, & \text{dacă } \frac{-\pi}{2}\le t\le\frac{\pi}{2} \\ -t+\pi, & \text{dacă } \frac{\pi}{2}<t\le\pi \end{cases}$.

d) $f:[-\pi,\pi]\to\mathbb{R}, f(t)=\begin{cases} 1, & \text{dacă } -\pi\le t<-\pi+a \\ 0, & \text{dacă } -\pi+a\le t<0 \\ 1, & \text{dacă } 0\le t<a \\ 0, & \text{dacă } a\le t\le\pi \end{cases}$, unde $a\in\,]0,\pi[$;

e) $f:[-\pi,\pi]\to\mathbb{R}, f(t)=\begin{cases} 0, & \text{dacă } -\pi\le t<0 \\ 1, & \text{dacă } 0\le t\le\pi \end{cases}$;

Analog $f:[-1,1]\to\mathbb{R}, f(t)=\begin{cases} 0, & \text{dacă } -1\le t<0 \\ 1, & \text{dacă } 0\le t\le 1 \end{cases}$;

(provine din $\eta:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, \eta(t)=\begin{cases} 0, & \text{dacă } t<0 \\ 1, & \text{dacă } 0\le t \end{cases}$, *funcţia treaptă unitate a lui Heaviside*).

f) $f:[-\pi,\pi]\to\mathbb{R}, f(t)=A\cdot(\eta(t)-\eta(t-\pi))+(\eta(t+\pi)-\eta(t))$, unde $A>0$ şi

$\eta:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, \eta(t)=\begin{cases} 0, & \text{dacă } t<0 \\ 1, & \text{dacă } 0\le t \end{cases}$.

g) $f:[-\pi,\pi]\to\mathbb{R}, f(t)=|t|\cdot(\eta(t+\pi)-\eta(t-\pi))$, unde $\eta:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, \eta(t)=\begin{cases} 0, & \text{dacă } t<0 \\ 1, & \text{dacă } 0\le t \end{cases}$.

h) $d_\pi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, d_\pi(t)=\begin{cases} 1, & \text{dacă } -\pi\le t\le\pi \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}$;

(provine din semnalul rectangular $d_A:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, *fereastra dreptunghiulară* centrată în origine de lăţime $2A$, $A>0$ sau *poarta temporală* cu $\tau=\pi$).

i) $f:[-l,l]\to\mathbb{R}, f(t)=\begin{cases} c_1, & \text{dacă } -l\le t\le 0 \\ c_2, & \text{dacă } 0<t\le l \end{cases}$, unde $c_1\in\mathbb{R}$, $c_2\in\mathbb{R}$;

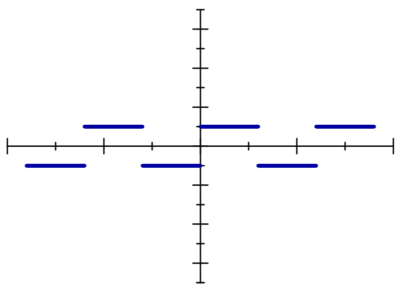
j) $f:[-\pi,\pi]\to\mathbb{R}, f(t)=\sin at$, unde $a\in\mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$;**k)** $f:[-\pi,\pi]\to\mathbb{R}, f(t)=\operatorname{sh} at$, unde $a\in\mathbb{R}$;

l) $f:[-\pi,\pi]\to\mathbb{R}, f(t)=|\cos t|$.

Rezolvare:

a) $f:[-\pi,\pi]\to\mathbb{R}, f(t)=\begin{cases} -1, & \text{dacă } -\pi<t<0 \\ 0, & \text{dacă } t=-\pi \text{ sau } t=0 \text{ sau } t=\pi \\ 1, & \text{dacă } 0<t<\pi \end{cases}$;

Se reprezintă grafic f pe $[-\pi,\pi]$, apoi se prelungeşte prin periodicitate la $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$.



Din grafic se observă că f este impară pe $[-\pi,\pi]$.

etapa 1. Se ataşează lui f seria ei Fourier (trigonometrică) :

$$\boxed{[\alpha,\alpha+T]=[-\pi,\pi]}\Rightarrow\begin{cases}\boxed{T=2\pi}\text{-perioada}\\ \alpha=-\pi\\ \omega=\frac{2\pi}{2\pi}\Rightarrow\boxed{\omega=1}\text{ pulsaţia}\end{cases}$$

Se determină coeficienţii Fourier:

$$\boxed{a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\,dt}\Rightarrow a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\underbrace{f(t)}_{\text{impară}}dt=0.$$

$$\boxed{a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\cos(nt)\,dt,\forall n\in\mathbb{N}^*}\Rightarrow a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\underbrace{f(t)}_{\text{impară}}\cdot\underbrace{\cos(nt)}_{\text{pară}}dt\overset{\text{impară pe }[-\pi,\pi]}{=}0,\forall n\in\mathbb{N}^*$$

$$\boxed{b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\sin(nt)\,dt,\forall n\in\mathbb{N}^*}\Rightarrow b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\underbrace{f(t)}_{\text{impară}}\cdot\underbrace{\sin(nt)}_{\text{impară}}dt\overset{\text{pară pe }[-\pi,\pi]}{=}\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}1\cdot\sin(nt)\,dt=$$

$$=\frac{2}{\pi}\left(\left.\frac{-\cos(nt)}{n}\right|_{t=0}^{t=\pi}\right)=\frac{-2}{n\pi}(\cos(n\pi)-\cos 0)=\frac{-2}{n\pi}((-1)^n-1)=\frac{2}{n\pi}(1-(-1)^n),$$

$\forall n\in\mathbb{N}^*$.

Atunci seria Fourier ataşată lui f este

$\frac{0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(0\cdot\cos(nt)+\frac{2}{n\pi}(1-(-1)^n)\cdot\sin(nt)\right),\forall t\in[-\pi,\pi]$, chiar $t\in\mathbb{R}$, adică

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n\pi}(1-(-1)^n)\cdot\sin(nt),\forall t\in[-\pi,\pi]$, chiar $t\in\mathbb{R}$. $(*_1)$

etapa 2. Se studiază dacă şi pe ce mulţime suma seriei $(*_1)$ coincide cu f.

Din grafic se observă că f verifică ipotezele Teoremei Dirichlet$\Rightarrow$ suma seriei $(*_1)$ este

$$s(t)=\begin{cases}f(t), & \text{dacă } t\in\bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}}]-\pi+2k\pi,0+2k\pi[\cup\bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}}]0+2k\pi,\pi+2k\pi[\\ 0, & \text{dacă } t=-\pi+2k\pi \text{ sau } t=\pi+2k\pi \text{ sau } t=0+2k\pi, k\in\mathbb{Z}\end{cases}.$$

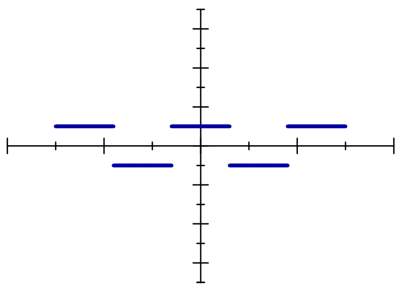
Deoarece pe $]-\pi,\pi[$ se observă că f are ca puncte de discontinuitate doar $t=0$, suma seriei este chiar

$f(t)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n\pi}(1-(-1)^n)\cdot\sin(nt),\forall t\in]-\pi,\pi[$. $(*_2)$

b) $f:[-\pi,\pi]\to\mathbb{R}, f(t)=\begin{cases}-a, & \text{dacă } -\pi\le t<\frac{-\pi}{2}\\ a, & \text{dacă } \frac{-\pi}{2}\le t\le\frac{\pi}{2}\\ -a, & \text{dacă } \frac{\pi}{2}<t\le\pi\end{cases}$,

unde $a>0$;

Se reprezintă grafic f pe $[-\pi,\pi]$, apoi se prelungeşte prin periodicitate la $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$.



Din grafic se observă că f este pară pe $[-\pi,\pi]$.

etapa 1. Se ataşează lui f seria ei Fourier (trigonometrică) :

$$\boxed{[\alpha, \alpha + T] = [-\pi, \pi]} \Rightarrow \begin{cases} \boxed{T = 2\pi}\text{-perioada} \\ \alpha = -\pi \\ \omega = \frac{2\pi}{2\pi} \Rightarrow \boxed{\omega = 1} \text{ pulsaţia} \end{cases}$$

Se determină coeficienţii Fourier:

$$\boxed{a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,dt} \Rightarrow a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{f(t)}_{\text{pară}}dt = \frac{1}{\pi}\cdot 2\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} a dt + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (-a)\,dt\right) =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(at\Big|_{t=0}^{t=\frac{\pi}{2}} - at\Big|_{t=\frac{\pi}{2}}^{t=\pi}\right) = 0.$$

$$\boxed{a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(nt)\,dt, \forall n \in \mathbb{N}^*} \Rightarrow a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{f(t)}_{\text{pară}} \cdot \underbrace{\cos(nt)}_{\text{pară}}dt \overset{\text{pară pe } [-\pi,\pi]}{=}$$

$$= \frac{1}{\pi}\cdot 2\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} a\cos(nt)\,dt + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (-a)\cos(nt)\,dt\right) = \frac{2}{\pi}\left(\frac{a\sin(nt)}{n}\Bigg|_{t=0}^{t=\frac{\pi}{2}} - \frac{a\sin(nt)}{n}\Bigg|_{t=\frac{\pi}{2}}^{t=\pi}\right) =$$

$$= \frac{2a}{n\pi}\left(\frac{a\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right) - a\sin(n0)}{n} - \frac{a\sin(n\pi) - a\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)}{n}\right) = \frac{4a}{n\pi}\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right), \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

$$\boxed{b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(nt)\,dt, \forall n \in \mathbb{N}^*} \Rightarrow b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{f(t)}_{\text{pară}} \cdot \underbrace{\sin(nt)}_{\text{impară}}dt \overset{\text{impară pe } [-\pi,\pi]}{=} 0, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Atunci seria Fourier ataşată lui f este

$0 + \sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4a}{n\pi}\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)\cdot\cos(nt) + 0\cdot\sin(nt)\right), \forall t \in [-\pi, \pi]$, chiar $t \in \mathbb{R}$, adică

$$\frac{4a}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)\cdot\cos(nt), \forall t \in [-\pi, \pi], \text{ chiar } t \in \mathbb{R}. \qquad (*_1)$$

etapa 2. Se studiază dacă şi pe ce mulţime suma seriei $(*_1)$ coincide cu f.

Din grafic se observă că f verifică ipotezele Teoremei Dirichlet.

Deoarece pe $]-\pi, \pi[$ se observă că f are ca puncte de discontinuitate $t = \frac{-\pi}{2}$ şi $t = \frac{\pi}{2}$, seria anterioară are suma chiar

$$s(t) = \begin{cases} -a, & \text{dacă } -\pi < t < \frac{-\pi}{2} \\ a, & \text{dacă } \frac{-\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2} \\ -a, & \text{dacă } \frac{\pi}{2} < t < \pi \\ 0, & \text{dacă } t = \frac{-\pi}{2} \text{ sau } t = \frac{\pi}{2} \end{cases} \qquad (*_2)$$

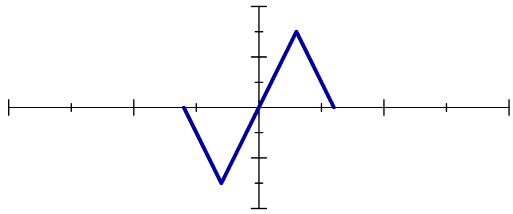
$$s(t) = \frac{4a}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)\cdot\cos(nt), \forall t \in \left]-\pi, \pi\right[.$$

Deoarece $\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) = \begin{cases} 0, & n = 2\widetilde{n}, \widetilde{n} \in \mathbb{N}^* \\ (-1)^{\widetilde{n}}, & n = 2\widetilde{n}+1, \widetilde{n} \in \mathbb{N} \end{cases} \overset{\text{renotăm } \widetilde{n} \text{ cu } n}{\Rightarrow}$

$$s(t) = \frac{4a}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}\cdot\cos((2n+1)t), \forall t \in \left]-\pi, \pi\right[.$$

c) $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}, f(t) = \begin{cases} -\frac{2a}{\pi}(t+\pi), & \text{dacă } -\pi \le t < \frac{-\pi}{2} \\ \frac{2a}{\pi}t, & \text{dacă } \frac{-\pi}{2} \le t \le \frac{\pi}{2} \\ \frac{2a}{\pi}(\pi - t), & \text{dacă } \frac{\pi}{2} < t \le \pi \end{cases}$;

Se reprezintă grafic f pe $[-\pi, \pi]$, apoi se prelungeşte prin periodicitate la $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.



Din grafic se observă că f este impară pe $[-\pi,\pi]$.

etapa 1. Se ataşează lui f seria ei Fourier (trigonometrică) :

$$\boxed{[\alpha,\alpha+T]=[-\pi,\pi]}\Rightarrow\begin{cases}\boxed{T=2\pi}\text{-perioada}\\ \alpha=-\pi\\ \omega=\frac{2\pi}{2\pi}\Rightarrow\boxed{\omega=1}\text{ pulsaţia}\end{cases}$$

Se determină coeficienţii Fourier:

$$\boxed{a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\,dt}\Rightarrow a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\underbrace{f(t)}_{\text{impară}}\,dt=0.$$

$$\boxed{a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\cos(nt)\,dt,\forall n\in\mathbb{N}^*}\Rightarrow a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\underbrace{f(t)}_{\text{impară}}\cdot\underbrace{\cos(nt)}_{\text{pară}}dt\overset{\text{impară pe }[-\pi,\pi]}{=}0,\forall n\in\mathbb{N}^*$$

$$\boxed{b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\sin(nt)\,dt,\forall n\in\mathbb{N}^*}\Rightarrow b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\underbrace{f(t)}_{\text{impară}}\cdot\underbrace{\sin(nt)}_{\text{impară}}dt\overset{\text{pară pe }[-\pi,\pi]}{=}\ldots$$

$$=\frac{8a}{n^2\pi^2}\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right),\forall n\in\mathbb{N}^*.$$

Atunci seria Fourier ataşată lui f este

$\frac{0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(0\cdot\cos(nt)+\frac{8a}{n^2\pi^2}\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)\cdot\sin(nt)\right),\forall t\in[-\pi,\pi]$, chiar $t\in\mathbb{R}$, adică

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{8a}{n^2\pi^2}\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)\cdot\sin(nt),\forall t\in[-\pi,\pi]$, chiar $t\in\mathbb{R}$. $(*_1)$

etapa 2. Se studiază dacă suma seriei $(*_1)$ coincide cu f.

Din grafic se observă că f verifică ipotezele Teoremei Dirichlet. Deoarece f nu are puncte de discontinuitate pe $\mathbb{R}$ suma seriei $(*_1)$ este

$s(t)=f(t),\forall t\in\mathbb{R}\Rightarrow$

$f(t)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{8a}{n^2\pi^2}\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)\cdot\sin(nt),\forall t\in\mathbb{R}.$

Folosim $\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)=\begin{cases}0, & n=2\widetilde{n},\widetilde{n}\in\mathbb{N}^*\\ (-1)^{\widetilde{n}}, & n=2\widetilde{n}+1,\widetilde{n}\in\mathbb{N}\end{cases}\overset{\text{renotăm }\widetilde{n}\text{ cu }n}{\Rightarrow}$

$f(t)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{8a(-1)^n}{(2n+1)^2\pi^2}\cdot\sin(nt),\forall t\in\mathbb{R}.$ $(*_2)$

Exerciţiul 4. Să se studieze dacă următoarele funcţii satisfac condiţiile Consecinţei 2 şi, dacă da, să dezvolte în *serie de cosinusuri* funcţiile:

a) $f:[0,\pi]\to\mathbb{R},f(t)=\begin{cases}1, & \text{dacă } 0\le t\le a\\ 0, & \text{dacă } a<t\le\pi\end{cases}$, unde $a\in\left]0,\pi\right[$;

b) $f:[0,\pi]\to\mathbb{R},f(t)=\begin{cases}1-\frac{1}{2a}t, & \text{dacă } 0\le t\le 2a\\ 0, & \text{dacă } 2a<t\le\pi\end{cases}$, unde $a\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$;

c) $f:[0,\pi]\to\mathbb{R}, f(t)=\begin{cases}\frac{\pi}{2\sqrt{3}}, & \text{dacă } 0\le t<\frac{\pi}{3}\\ \frac{\pi}{4\sqrt{3}}, & \text{dacă } t=\frac{\pi}{3}\\ 0, & \text{dacă } \frac{\pi}{3}<t<\frac{2\pi}{3}\\ \frac{-\pi}{4\sqrt{3}}, & \text{dacă } t=\frac{2\pi}{3}\\ \frac{-\pi}{2\sqrt{3}}, & \text{dacă } \frac{2\pi}{3}<t\le\pi\end{cases}$;

d) $f:[0,l]\to\mathbb{R}, f(t)=l-t$; **e)** $f:[0,\pi]\to\mathbb{R}, f(t)=e^t$;

Rezolvare: a) A se vedea Curs.

b) Fie

$$f:[0,\pi]\to\mathbb{R}, f(t)=\begin{cases}1-\frac{1}{2a}t, & \text{dacă } 0\le t\le 2a\\ 0, & \text{dacă } 2a<t\le\pi\end{cases}, \text{ unde } a\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right];$$

Se observă că f este netedă pe porţiuni pe $[0,\pi]$.

etapa 1. Se ataşează lui f seria ei de cosinusuri. Se determină coeficienţii:

$$\boxed{a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(t)\,dt}\Rightarrow a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(t)\,dt=\frac{2}{\pi}\left(\int_0^{2a}\left(1-\tfrac{1}{2a}t\right)dt+\int_{2a}^\pi 0dt\right)=$$

$$=\frac{2}{\pi}\left(\left(t-\tfrac{1}{2a}\tfrac{t^2}{2}\right)\Big|_{t=0}^{t=2a}-c|_{t=2a}^{t=\pi}\right)=\frac{2a}{\pi}.$$

$$\boxed{a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(t)\cos(nt)\,dt,\forall n\in\mathbb{N}^*}\Rightarrow a_n=\frac{2}{\pi}\int_{-\pi}^\pi f(t)\cdot\cos(nt)\,dt=$$

$$=\frac{2}{\pi}\left(\int_0^{2a}\left(1-\tfrac{1}{2a}t\right)\cos(nt)\,dt+\int_{2a}^\pi 0\cos(nt)\,dt\right)=\frac{2}{\pi}\left(\int_0^{2a}\left(1-\tfrac{1}{2a}t\right)\left(\frac{\sin(nt)}{n}\right)'dt-c|_{t=2a}^{t=\pi}\right)=$$

$$=\frac{2}{\pi}\left(\left(1-\tfrac{1}{2a}t\right)\frac{\sin(nt)}{n}\Big|_{t=0}^{t=2a}-\int_0^{2a}\left(-\tfrac{1}{2a}\right)\frac{\sin(nt)}{n}dt\right)=$$

$$=\frac{2}{\pi}\left(0\cdot\frac{\sin(nt)}{n}-1\cdot\frac{\sin(n0)}{n}-\left(-\tfrac{1}{2a}\right)\frac{-\cos(nt)}{n^2}\Big|_{t=0}^{t=2a}\right)=$$

$$=\frac{2}{\pi}\cdot\tfrac{1}{2a}\frac{-\cos(2na)+\cos(n0)}{n^2}=\frac{1}{\pi a n^2}\cdot(1-\cos(2na)),\forall n\in\mathbb{N}^*.$$

Atunci seria de cosinusuri ataşată lui f este

$$\frac{a}{\pi}+\sum_{n=1}^\infty\left(\frac{1-\cos(2na)}{\pi a n^2}\cdot\cos(nt)\right),\forall t\in[0,\pi], \text{ adică}$$

$$\frac{2a}{\pi}\left(\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^\infty\left(\frac{\sin(na)}{na}\right)^2\cdot\cos(nt)\right),\forall t\in[0,\pi], \qquad (*_1)$$

etapa 2. Se studiază dacă suma seriei $(*_1)$ coincide cu f.

Conform Consecinţei 2 suma seriei $(*_1)$ este:

$$s(t)=f(t) \qquad (*_2)$$

Seria $(*_1)$ poate fi considerată ca fiind, prin extindere, seria funcţiei prelungită prin paritate la $[-\pi,\pi]$, apoi prin periodicitate la $\mathbb{R}$.

e) Fie

$f:[0,\pi]\to\mathbb{R}, f(t)=e^t$;

Se observă că f este netedă pe porţiuni pe $[0,\pi]$.

etapa 1. Se ataşează lui f seria ei de cosinusuri. Se determină coeficienţii:

$$\boxed{a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(t)\,dt}\Rightarrow a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(t)\,dt=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi e^t dt=\frac{2}{\pi}\left[e^t|_{t=0}^{t=\pi}\right]=\frac{2}{\pi}\left(e^\pi-e^0\right).$$

$\boxed{a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\cos(nt)\,dt, \forall n \in \mathbb{N}^*} \Rightarrow a_n = \frac{2}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cdot\cos(nt)\,dt =$

$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} e^t\cos(nt)\,dt = \frac{2}{\pi}\cdot\left.\frac{e^t\cos(nt)+ne^t\sin(nt)}{n^2+1}\right|_{t=0}^{t=\pi} =$

$= \frac{2}{\pi}\left(\frac{e^{\pi}\cos(n\pi)+ne^{\pi}\sin(n\pi)}{n^2+1} - \frac{e^0\cos 0+ne^0\sin 0}{n^2+1}\right) =$

$= \frac{2}{\pi}\left(\frac{e^{\pi}\cdot(-1)^n+0}{n^2+1} - \frac{1+0}{n^2+1}\right) = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{e^{\pi}\cdot(-1)^n-1}{n^2+1}, \forall n \in \mathbb{N}^*.$

Atunci seria de cosinusuri ataşată lui f este

$$\frac{1}{\pi}(e^{\pi}-1) + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{\pi}\cdot\frac{e^{\pi}\cdot(-1)^n-1}{n^2+1}\cdot\cos(nt)\right), \forall t \in [0,\pi] \qquad (*_1)$$

etapa 2. Se studiază dacă suma seriei $(*_1)$ coincide cu f.

Conform Consecinţei 2 suma seriei $(*_1)$ este:

$$s(t) = f(t) \qquad (*_2)$$

Seria $(*_1)$ poate fi considerată ca fiind, prin extindere, seria funcţiei prelungită prin paritate la $[-\pi,\pi]$, apoi prin periodicitate la $\mathbb{R}$.

Exerciţiul 5. Să se studieze dacă următoarele funcţii satisfac condiţiile Consecinţei 3 şi, dacă da, să dezvolte în *serie de sinusuri* funcţiile :

a) $f : [0,\pi] \to \mathbb{R}, f(t) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } 0 \le t \le a \\ 1, & \text{dacă } a < t \le \pi \end{cases}$, unde $a \in]0,\pi[$;

b) $f : [0,\pi] \to \mathbb{R}, f(t) = \begin{cases} t, & \text{dacă } 0 \le t \le \frac{\pi}{2} \\ 0, & \text{dacă } \frac{\pi}{2} < t \le \pi \end{cases}$;**c)** $f : [0,\pi] \to \mathbb{R}, f(t) = \begin{cases} \frac{\pi t}{2\sqrt{3}}, & \text{dacă } 0 \le t \le \frac{\pi}{3} \\ \frac{\pi^2}{6\sqrt{3}}, & \text{dacă } \frac{\pi}{3} < t < \frac{2\pi}{3} \\ \frac{\pi(\pi-t)}{2\sqrt{3}}, & \text{dacă } \frac{2\pi}{3} \le t \le \pi \end{cases}$;

d) $f : [0,l] \to \mathbb{R}, f(t) = l - t$; **e)** $f : [0,\pi] \to \mathbb{R}, f(t) = \cos(at)$, unde $a \in \mathbb{R}$.

Rezolvare: a) A se vedea Curs.

b) Fie $f : [0,\pi] \to \mathbb{R}, f(t) = \begin{cases} t, & \text{dacă } 0 \le t \le \frac{\pi}{2} \\ 0, & \text{dacă } \frac{\pi}{2} < t \le \pi \end{cases}$.

Se observă că f este netedă pe porţiuni pe $[0,\pi]$.

etapa 1. Se ataşează lui f seria ei de sinusuri. Se determină coeficienţii:

$\boxed{b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\sin(nt)\,dt, \forall n \in \mathbb{N}^*} \Rightarrow b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\cdot\sin(nt)\,dt =$

$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} t\cdot\sin(nt)\,dt = ..$

Se calculează:

$\int t\cdot\sin(nt)\,dt \overset{\text{formal}}{=} \frac{\sin(nt)-nt\cos(nt)}{n^2}.$

Atunci,

$b_n = \frac{2}{\pi}\left.\frac{\sin(nt)-nt\cos(nt)}{n^2}\right|_{t=0}^{t=\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{\pi}\left(\frac{\sin\frac{n\pi}{2}-\frac{n\pi}{2}\cos\frac{n\pi}{2}}{n^2} - \frac{\sin 0 - n\cdot 0\cdot\cos 0}{n^2}\right) =$

$= \frac{2}{\pi n^2}\left(\sin\frac{n\pi}{2} - \frac{n\pi}{2}\cos\frac{n\pi}{2}\right), \forall n \in \mathbb{N}^*.$

Atunci seria de sinusuri ataşată lui f este

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{\pi n^2}\left(\sin\frac{n\pi}{2} - \frac{n\pi}{2}\cos\frac{n\pi}{2}\right)\cdot\sin(nt)\right), \forall t \in [0,\pi], \qquad (*_1)$$

etapa 2. Se studiază dacă suma seriei $(*_1)$ coincide cu f.

Conform Consecinţei 2 suma seriei $(*_1)$ este:

$$s(t)=\begin{cases} t, & \text{dacă } 0\le t<\frac{\pi}{2}\\ \frac{\pi}{4}, & \text{dacă } t=\frac{\pi}{2}\\ 0, & \text{dacă } \frac{\pi}{2}<t\le\pi\end{cases} \qquad (*_2)$$

Seria $(*_1)$ poate fi considerată ca fiind, prin extindere, seria funcţiei prelungită prin imparitate la $[-\pi,\pi]$, apoi prin periodicitate la $\mathbb{R}$.

e) Fie

$f:[0,\pi]\to\mathbb{R}, f(t)=\cos(at)$, unde $a\in\mathbb{R}$;

Se observă că f este netedă pe $[0,\pi]$.

etapa 1. Se ataşează lui f seria ei de sinusuri. Se determină coeficienţii:

$$\boxed{b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(t)\sin(nt)\,dt,\forall n\in\mathbb{N}^*}\Rightarrow b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(t)\cdot\sin(nt)\,dt=$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi \cos(at)\cdot\sin(nt)\,dt=..$$

Se calculează:

$$\int\cos(at)\cdot\sin(nt)\,dt\overset{\text{formal}}{=}\frac{(a-n)\cos((a+n)t)-(a+n)\cos((a-n)t)}{2(n^2-a^2)}$$

sau

$$\int\cos(at)\cdot\sin(nt)\,dt\overset{\text{formal}}{=}\frac{-n\cos(at)\cos(nt)-a\sin(at)\sin(nt)}{n^2-a^2}.$$

Pentru $n=a\Rightarrow\int\cos(nt)\cdot\sin(nt)\,dt=\dfrac{1-\cos 2nt}{4n}$.

Pentru $n=-a\Rightarrow\int\cos(-nt)\cdot\sin(nt)\,dt=\dfrac{1-\cos 2nt}{4n}$.

Atunci,

•dacă $a\in\mathbb{Z}$,

-pentru $n\neq\pm a\Longrightarrow$

$$b_n=\frac{2}{\pi}\left.\frac{-n\cos(at)\cos(nt)-a\sin(at)\sin(nt)}{n^2-a^2}\right|_{t=0}^{t=\pi}=$$

$$=\frac{2}{\pi}\left(\frac{-n(-1)^{n+a}-a\cdot 0}{n^2-a^2}-\frac{-n\cdot 1-a\cdot 0}{n^2-a^2}\right)=$$

$$=\frac{2n}{\pi(n^2-a^2)}\left(1-(-1)^{n+a}\right),\forall n\in\mathbb{N}^*\setminus\{\pm a\}.$$

-pentru $n\neq\pm a\Longrightarrow$

$$b_n=\frac{2}{\pi}\left.\frac{1-\cos 2nt}{4n}\right|_{t=0}^{t=\pi}=0.$$

Atunci seria de sinusuri ataşată lui f este

$$\sum_{\substack{n=1\\ n\neq|a|}}^{\infty}\left(\frac{2n\left(1-(-1)^{n+a}\right)}{\pi(n^2-a^2)}\cdot\sin(nt)\right),\forall t\in[0,\pi], \qquad (*_1)$$

•dacă $a\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}\Longrightarrow$

$$b_n=\frac{2}{\pi}\left.\frac{-n\cos(at)\cos(nt)-a\sin(at)\sin(nt)}{n^2-a^2}\right|_{t=0}^{t=\pi}=$$

$$=\frac{2}{\pi}\left(\frac{-n\cos(a\pi)(-1)^n-a\sin(a\pi)\cdot 0}{n^2-a^2}-\frac{-n\cos(at)\cdot 1-a\cdot 0\cdot 0}{n^2-a^2}\right)=$$

$$=\frac{2n}{\pi(n^2-a^2)}\left(1-(-1)^n\cos(a\pi)\right),\forall n\in\mathbb{N}^*.$$

Atunci seria de sinusuri ataşată lui f este

$$\sum_{\substack{n=1\\ n\neq|a|}}^{\infty}\left(\frac{2n\left(1-(-1)^n\cos\left(a\pi\right)\right)}{\pi\left(n^2-a^2\right)}\cdot\sin\left(nt\right)\right),\forall t\in[0,\pi]\,, \tag{$*_1$}$$

etapa 2. Se studiază dacă suma seriei $(*_1)$ coincide cu f.

Conform Consecinţei 2 suma seriei $(*_1)$ este, în ambele cazuri:

$$s\left(t\right)=\begin{cases}\cos\left(at\right), & \text{dacă } 0<t<\pi\\ 0, & \text{dacă } t=0 \text{ sau } t=\pi\end{cases} \tag{$*_2$}$$

Seria $(*_1)$ poate fi considerată ca fiind, prin extindere, seria funcţiei prelungită prin imparitate la $[-\pi,\pi]$, apoi prin periodicitate la $\mathbb{R}$.

Exemplul 6. Să se studieze dacă următoarele funcţii satisfac condiţiile Consecinţelor 2 şi 3 şi, dacă da, să dezvolte în *serie de cosinusuri, respectiv de sinusuri* funcţiile:

a) $f:[0,2]\to\mathbb{R}, f\left(t\right)=\begin{cases}t, & \text{dacă } 0\le t\le 1\\ 2-t, & \text{dacă } 1<t\le 2\end{cases}$;

b) $f:[0,\pi]\to\mathbb{R}, f\left(t\right)=\begin{cases}\dfrac{2}{\pi}t, & \text{dacă } 0\le t\le \frac{\pi}{2}\\ \dfrac{2}{\pi}\left(\pi-t\right), & \text{dacă } \frac{\pi}{2}<t\le\pi\end{cases}$:

c) $f:[0,\pi]\to\mathbb{R}, f\left(t\right)=1.$

Rezolvare. a) A se vedea curs.

b) Fie $f:[0,\pi]\to\mathbb{R}, f\left(t\right)=\begin{cases}\dfrac{2}{\pi}t, & \text{dacă } 0\le t\le \frac{\pi}{2}\\ \dfrac{2}{\pi}\left(\pi-t\right), & \text{dacă } \frac{\pi}{2}<t\le\pi\end{cases}$.

Se observă că f este netedă pe porţiuni pe $[0,\pi]$, cu

$[0,l]=[0,\pi]\Rightarrow\begin{cases}T=2\pi\text{-perioada}\\ \omega=\frac{2\pi}{2\pi}\Rightarrow\omega=1 \text{ pulsaţia}\end{cases}$

Se continuă analog ca în curs.