SEMINAR NR. 14, REZOLVĂRI
EDCO, AIA

9. TRANSFORMATA FOURIER

Definiţia 1. a) O funcţie $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (sau $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$) se numeşte *funcţie absolut integrabilă pe* $\mathbb{R}$ sau *funcţie din* $L^1(\mathbb{R})$ dacă $\exists \int_{\mathbb{R}} |g(t)|\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |g(t)|\, dt < +\infty$.
Definiţia 2. Fie $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (sau $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$), $g \in L^1(\mathbb{R})$. Funcţia

$$\boxed{G : \mathbb{R} \to \mathbb{C}, G(\omega) = \int_{\mathbb{R}} g(t)\, e^{-\mathrm{j}\,\omega t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\, e^{-\mathrm{j}\,\omega t} dt}$$

se numeşte *transformata Fourier a funcţiei* g sau *imaginea funcţiei* g *prin transformata Fourier* (sau *funcţie de densitate spectrală, spectru în frecvenţă, funcţie de distribuţie a frecvenţelor* cu notaţia $\widehat{g}(\omega)$) Se notează

$$\boxed{G(\omega) = \mathcal{F}\{g(t)\}(\omega)} \text{ sau } \boxed{G(\omega) = \widehat{g}(\omega)\,.}$$

Funcţiile

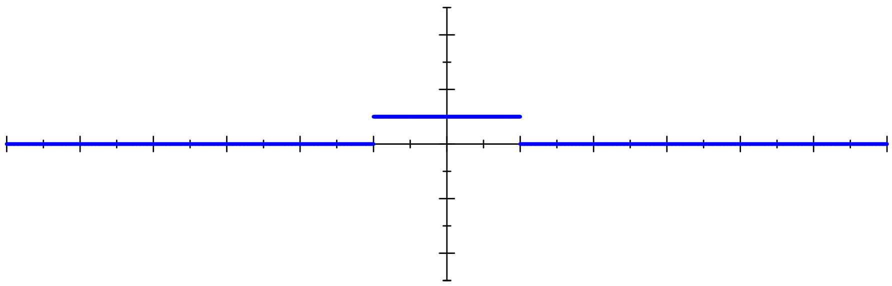
$$\boxed{G_c(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) \cos(\omega t)\, dt = \operatorname{Re} G(\omega) \text{ şi } G_s(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) \sin(\omega t)\, dt = -\operatorname{Im} G(\omega)}$$

se numesc *transformatele Fourier ale funcţiei* g *prin* cos, respectiv *prin* sin.
Teorema 1. (teorema fundamentală a transformatei Fourier) Dacă $g \in L^1(\mathbb{R})$ atunci integrala improprie pe interval nemărginit din Definiţie, cu parametrul $\omega \in \mathbb{R}$, este absolut convergentă şi uniform convergentă pe $\mathbb{R}$, adică transformata Fourier G este bine definită. Mai mult, este continuă şi mărginită pe $\mathbb{R}$, cu $\lim\limits_{|\omega| \to \infty} G(\omega) = 0$.
Operatorul $\mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}) \to \mathcal{C}^0(\mathbb{R}; \mathbb{C})$ se numeşte *operatorul Fourier (transformarea Fourier).*
Observaţii. A se vedea Curs.

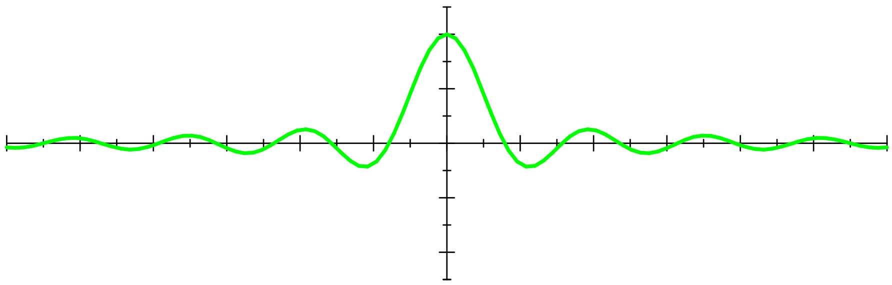
Exerciţiul 1. Utilizând definiţia, să se determine transformata Fourier pentru

a) $g_\tau : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, g_\tau(t) = \begin{cases} 1, & \text{dacă } |t| \le \tau \\ 0, & \text{dacă } |t| > \tau, \end{cases}$,unde $\tau > 0$ este dat. A se vedea Curs.

(*semnalul rectangular, poarta temporală, fereastra dreptunghiulară*)



Se obţine $G : \mathbb{R} \to \mathbb{C}, G(\omega) = 2\tau \cdot \dfrac{\sin(\omega\tau)}{\omega\tau}$, cu reprezentarea



Deoarece semnalul rectangular g este un semnal real şi par (grafic simetric faţă de axa verticală), atunci spectrul G este real şi par.

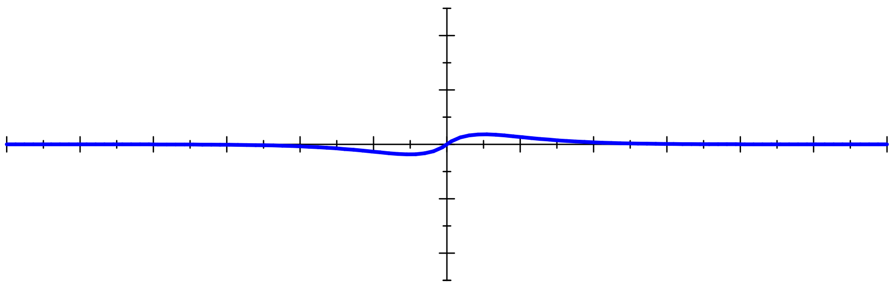
Comentariu: Se arată în Curs că

- dacă $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, g\in L^1(\mathbb{R})$ este un semnal real aleator, atunci partea reală a spectrului $\operatorname{Re}G(\omega)$ şi modulul spectrului $A(\omega)=|G(\omega)|$ sunt funcţii pare, iar partea imaginară a spectrului $\operatorname{Im}G(\omega)$ şi faza spectrului $\Phi(\omega)=\arg G(\omega)$ sunt funcţii impare;

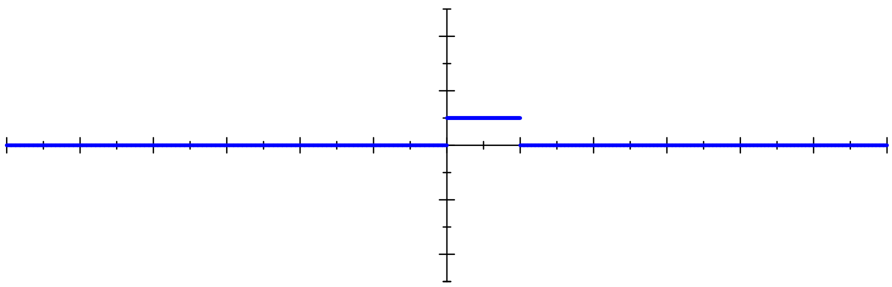
- dacă $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, g\in L^1(\mathbb{R})$ este un semnal real şi par, atunci spectrul $G(\omega)$ este real şi par, unde $\operatorname{Re}G(\omega)=G_c(\omega)$

- dacă $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, g\in L^1(\mathbb{R})$ este un semnal real şi impar, atunci spectrul $G(\omega)$ este pur imaginar şi $\operatorname{Im}G(\omega)$ este impar, unde $-\operatorname{Im}G(\omega)=G_s(\omega)$.

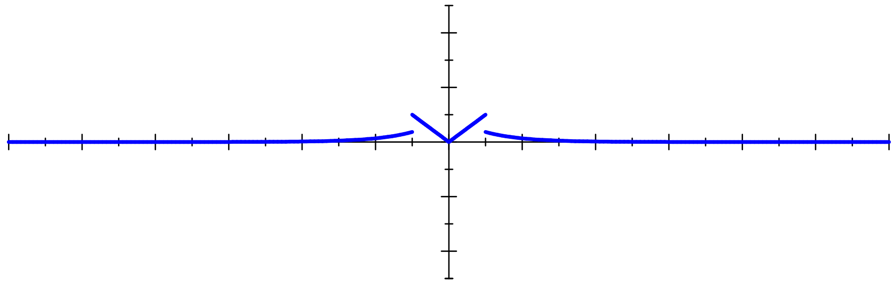
b) $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, g(t)=te^{-|t|}$;-temă.



c) $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, g(t)=\begin{cases}1, & \text{dacă } t\in[0,2]\\ 0, & \text{dacă } t\in\,]-\infty,0[\,\cup\,]2,\infty[\end{cases}$



d) $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, g(t)=\begin{cases}|t|, & \text{dacă } |t|\le 1\\ e^{-|t|}, & \text{dacă } |t|>1\end{cases}$



Rezolvare. c) Fie

$$g:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\, g(t)=\begin{cases}1, & \text{dacă } t\in[0,2]\\ 0, & \text{dacă } t\in\,]-\infty,0[\,\cup\,]2,\infty[\end{cases}$$

•Se observă că $g\in L^1(\mathbb{R})$, deoarece

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|g(t)|\,dt=\int_{-\infty}^{0}|0|\,dt+\int_0^2|1|\,dt+\int_2^{+\infty}|0|\,dt=2<+\infty.$$

•Se calculează

$$G(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}g(t)\,e^{-\mathrm{j}\,\omega t}dt=\int_{-\infty}^{0}0e^{-\mathrm{j}\,\omega t}dt+\int_0^2 1e^{-\mathrm{j}\,\omega t}dt+\int_2^{+\infty}0e^{-\mathrm{j}\,\omega t}dt \overset{t\text{ este variabilă}}{\underset{\text{de integrare}}{=}}$$

$$=0+\left.\frac{e^{-\mathrm{j}\,\omega t}}{-\mathrm{j}\,\omega}\right|_{t=0}^{t=2}+0=\frac{e^{-\mathrm{j}\,\omega 2}-e^{-\mathrm{j}\,\omega 0}}{-\mathrm{j}\,\omega}=\frac{\mathrm{j}}{\omega}\left(\cos(-2\omega)+\mathrm{j}\sin(-2\omega)-1\right)=$$

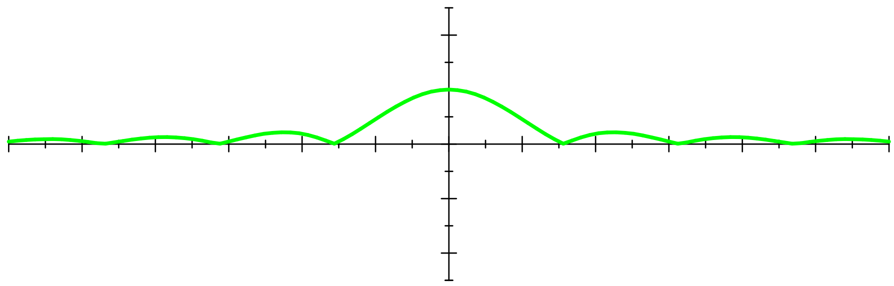
$$=\frac{1}{\omega}\left(\sin(2\omega)-\mathrm{j}\left(1-\cos(2\omega)\right)\right)=\frac{1}{\omega}\sin(2\omega)+\mathrm{j}\,\frac{-1}{\omega}\left(1-\cos(2\omega)\right).$$

Deci $G:\mathbb{R}\to\mathbb{C},\, G(\omega)=\frac{1}{\omega}\sin(2\omega)+\mathrm{j}\,\frac{-1}{\omega}\left(1-\cos(2\omega)\right)$.

Se scrie şi că $\mathcal{F}\{g(t)\}(\omega)=\frac{1}{\omega}\sin(2\omega)+\mathrm{j}\,\frac{-1}{\omega}\left(1-\cos(2\omega)\right)$.

Mai mult, pentru această transformată, care are ca valoare o un număr complex, amplitudinea în frecvenţă este

$$A(\omega)=|G(\omega)|=\sqrt{\left(\frac{1}{\omega}\sin(2\omega)\right)^2+\left(\frac{-1}{\omega}\left(1-\cos(2\omega)\right)\right)^2}=2\left|\frac{\sin\omega}{\omega}\right| \text{ cu reprezentarea:}$$



Se observă că partea reală şi modulul spectrului G sunt funcţii pare, iar partea imaginară şi faza spectrului sunt funcţii impare.

d) Fie $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\, g(t)=\begin{cases}|t|, & \text{dacă } t\in[-1,1]\\ e^{-|t|}, & \text{dacă } t\in\,]-\infty,-1[\,\cup\,]1,+\infty[\end{cases}=\begin{cases}e^t, & \text{dacă } t\in\,]-\infty,-1[\\ -t, & \text{dacă } t\in[-1,0]\\ t, & \text{dacă } t\in[0,1]\\ e^{-t}, & \text{dacă } t\in\,]1,+\infty[\end{cases}$.

•Se observă că $g\in L^1(\mathbb{R})$, deoarece

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|g(t)|\,dt=\int_{-\infty}^{-1}\left|e^t\right|dt+\int_{-1}^{0}|-t|\,dt+\int_0^1|t|\,dt+\int_1^{+\infty}\left|e^{-t}\right|dt=2e^{-1}+1<+\infty.$$

•Se calculează

$$G(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\, e^{-\mathrm{j}\,\omega t} dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{-1} e^{t} \cdot e^{-\mathrm{j}\,\omega t} dt + \int_{-1}^{0} (-t)\, e^{-\mathrm{j}\,\omega t} dt + \int_{0}^{1} t e^{-\mathrm{j}\,\omega t} dt + \int_{1}^{+\infty} e^{-t} \cdot e^{-\mathrm{j}\,\omega t} dt \overset{t \text{ este variabilă}}{\underset{\text{de integrare, derivare}}{=}}$$

$$= \int_{-\infty}^{-1} e^{(1-\mathrm{j}\,\omega)t} dt + \int_{-1}^{0} (-t) \left(\frac{e^{-\mathrm{j}\,\omega t}}{-\mathrm{j}\,\omega} \right)' dt + \int_{0}^{1} t \left(\frac{e^{-\mathrm{j}\,\omega t}}{-\mathrm{j}\,\omega} \right)' dt + \int_{1}^{+\infty} e^{(-1-\mathrm{j}\,\omega)t} dt \overset{t \text{ este variabilă}}{\underset{\text{de integrare}}{=}}$$

$$= \left. \frac{e^{(1-\mathrm{j}\,\omega)t}}{1-\mathrm{j}\,\omega} \right|_{t\to-\infty}^{t=-1} + (-t) \left. \frac{e^{-\mathrm{j}\,\omega t}}{-\mathrm{j}\,\omega} \right|_{t=-1}^{t=0} - \int_{-1}^{0} (-1) \frac{e^{-\mathrm{j}\,\omega t}}{-\mathrm{j}\,\omega} dt + t \left. \frac{e^{-\mathrm{j}\,\omega t}}{-\mathrm{j}\,\omega} \right|_{t=0}^{t=1} - \int_{0}^{1} \frac{e^{-\mathrm{j}\,\omega t}}{-\mathrm{j}\,\omega} dt + \left. \frac{e^{(-1-\mathrm{j}\,\omega)t}}{-1-\mathrm{j}\,\omega} \right|_{t=1}^{t=+\infty} =$$

$$= \frac{e^{(1-\mathrm{j}\,\omega)(-1)}}{1-\mathrm{j}\,\omega} - 0 + 0 - (+1) \frac{e^{-\mathrm{j}\,\omega(-1)}}{-\mathrm{j}\,\omega} + \left. \frac{e^{-\mathrm{j}\,\omega t}}{(-\mathrm{j}\,\omega)(-\mathrm{j}\,\omega)} \right|_{t=-1}^{t=0} + 1 \frac{e^{-\mathrm{j}\,\omega 1}}{-\mathrm{j}\,\omega} - 0 -$$

$$- \left. \frac{e^{-\mathrm{j}\,\omega t}}{(-\mathrm{j}\,\omega)(-\mathrm{j}\,\omega)} \right|_{t=0}^{t=1} + 0 - \frac{e^{(-1-\mathrm{j}\,\omega)1}}{-1-\mathrm{j}\,\omega} =$$

$$= \frac{e^{-1+\mathrm{j}\,\omega}}{1-\mathrm{j}\,\omega} - \frac{e^{-1-\mathrm{j}\,\omega}}{-1-\mathrm{j}\,\omega} - \frac{e^{\mathrm{j}\,\omega}}{-\mathrm{j}\,\omega} + \frac{e^{-\mathrm{j}\,\omega 1}}{-\mathrm{j}\,\omega} + \frac{1}{(-\mathrm{j}\,\omega)(-\mathrm{j}\,\omega)} - \frac{e^{-\mathrm{j}\,\omega(-1)}}{(-\mathrm{j}\,\omega)(-\mathrm{j}\,\omega)} -$$

$$- \frac{e^{-\mathrm{j}\,\omega 1}}{(-\mathrm{j}\,\omega)(-\mathrm{j}\,\omega)} + \frac{1}{(-\mathrm{j}\,\omega)(-\mathrm{j}\,\omega)} =$$

$$= \frac{e^{-1+\mathrm{j}\,\omega}}{1-\mathrm{j}\,\omega} + \frac{e^{-1-\mathrm{j}\,\omega}}{1+\mathrm{j}\,\omega} + \frac{e^{\mathrm{j}\,\omega}}{\mathrm{j}\,\omega} - \frac{e^{-\mathrm{j}\,\omega}}{\mathrm{j}\,\omega} - \frac{2}{\omega^2} - \frac{e^{\mathrm{j}\,\omega}}{(\mathrm{j}\,\omega)^2} - \frac{e^{-\mathrm{j}\,\omega}}{(\mathrm{j}\,\omega)^2} =$$

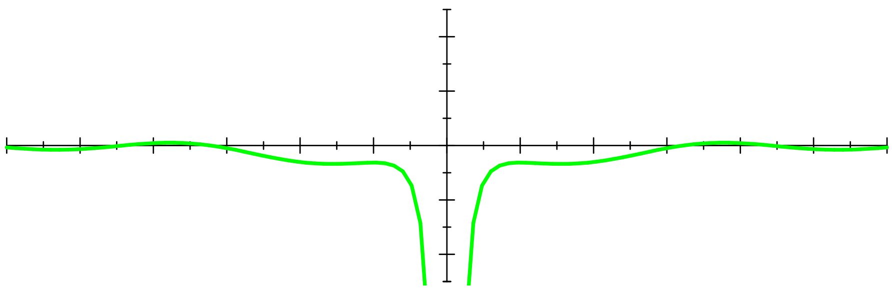
$$= \frac{e^{-1+\mathrm{j}\,\omega}(1+\mathrm{j}\,\omega) + e^{-1-\mathrm{j}\,\omega}(1-\mathrm{j}\,\omega)}{1+\omega^2} + \frac{2}{\omega} \frac{e^{\mathrm{j}\,\omega} - e^{-\mathrm{j}\,\omega}}{2\mathrm{j}} - \frac{2}{\omega^2} + \frac{2}{\omega^2} \frac{e^{\mathrm{j}\,\omega} + e^{-\mathrm{j}\,\omega}}{2} =$$

$$= \frac{2e^{-1}}{1+\omega^2} \left(\frac{e^{\mathrm{j}\,\omega} + e^{-\mathrm{j}\,\omega}}{2} - \omega \frac{e^{\mathrm{j}\,\omega} - e^{-\mathrm{j}\,\omega}}{2\mathrm{j}} \right) + \frac{2}{\omega} \frac{e^{\mathrm{j}\,\omega} - e^{-\mathrm{j}\,\omega}}{2\mathrm{j}} - \frac{2}{\omega^2} + \frac{2}{\omega^2} \frac{e^{\mathrm{j}\,\omega} + e^{-\mathrm{j}\,\omega}}{2} =$$

$$= \frac{2e^{-1}}{1+\omega^2} (\cos\omega - \omega \sin\omega) + \frac{2}{\omega} \sin\omega - \frac{2}{\omega^2} + \frac{2}{\omega^2} \cos\omega.$$

Deci $G : \mathbb{R} \to \mathbb{C}, G(\omega) = \dfrac{2e^{-1}}{1+\omega^2} (\cos\omega - \omega\sin\omega) + \dfrac{2}{\omega^2} (\cos\omega + \omega\sin\omega - 2)$ sau

$$\mathcal{F}\{g(t)\}(\omega) = \frac{2e^{-1}}{1+\omega^2} (\cos\omega - \omega\sin\omega) + \frac{2}{\omega^2} (\cos\omega + \omega\sin\omega - 2).$$



Deoarece $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, g \in L^1(\mathbb{R})$ este un semnal real şi par, atunci spectrul G este real şi par şi $G_c(\omega) = \mathrm{Re}(G(\omega))$.

De menţionat o teoremă de la calculul de integrale reale cu reziduuri, de la Matematici Speciale, rescrisă:

○**T 1**. (la MS) Fie $\mathcal{I} = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(t)}{Q(t)} e^{-\mathrm{j}\,\omega t} dt$, $a = -\omega > 0$, unde

$P, Q \in \mathbb{R}[t]$, $\text{grad}\, Q \geq \text{grad}\, P + 1$, $Q(t) \neq 0, \forall t \in \mathbb{R}$. Atunci:

$$\mathcal{I} = 2\pi\,\mathrm{j} \sum_{k=1}^{n} \text{rez}\, f(z_k), \text{ unde } f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} e^{-\mathrm{j}\,\omega z}, \text{ iar } z_k \text{ sunt acei poli cu } \operatorname{Im} z_k > 0.$$

Exerciţiul 2. Utilizând definiţia sau T1, să se determine transformata Fourier pentru

a) $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, g(t) = e^{-a|t|}$, unde $a > 0$ (*semnalul simetric exponenţial căzător,* cu $a = \omega_0$);

b) $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, g(t) = e^{-a^2t^2}$, unde $a > 0$ (*semnalul Gaussian*);

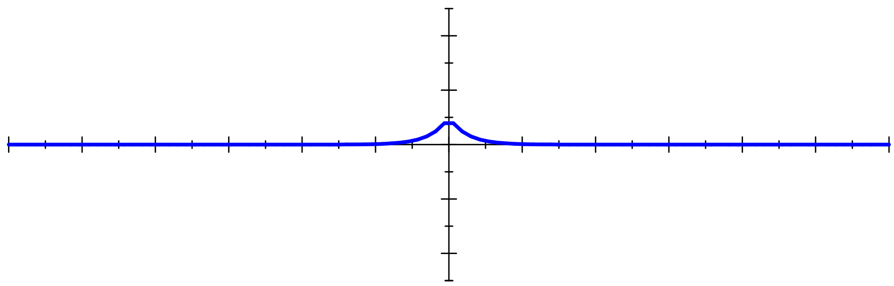
c) $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, g(t) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } t < 0 \\ e^{-t}, & \text{dacă } t \geq 0, \end{cases}$; **d)** $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, g(t) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } t < 0 \\ e^{-3t}, & \text{dacă } t \geq 0, \end{cases}$

şi, în general, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, g(t) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } t < 0 \\ e^{-at}, & \text{dacă } t \geq 0, \end{cases}$ unde $a > 0$ (interpretat ca produs între exponenţială şi treapta unitate, *semnalul exponenţial căzător,* cu $a = \omega_0$).

○**e)** (la MS) Utilizând definiţia sau T1, să se determine transformata Fourier prin cos pentru:

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, g(t) = \frac{1}{(t^2+1)^2}.$$

Rezolvare. a) Fie $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, g(t) = \begin{cases} e^{at}, & \text{dacă } t < 0, \\ 1, & \text{dacă } t = 0, \\ e^{-at}, & \text{dacă } t > 0. \end{cases}$



•Se observă că $g \in L^1(\mathbb{R})$, deoarece

$$\int_{-\infty}^{\infty} |g(t)|\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a|t|} dt \overset{(C)}{=} \int_{-\infty}^{0} e^{-a(-t)} dt + \int_{0}^{+\infty} e^{-at} dt \underset{\text{de integrare}}{\overset{t \text{ este variabilă}}{=}} \left.\frac{e^{at}}{a}\right|_{t\to-\infty}^{t=0} + \left.\frac{e^{-at}}{-a}\right|_{t=0}^{t\to+\infty} =$$

$$= \left(\frac{e^{a\cdot 0}}{a} - \lim_{t\to-\infty} \frac{e^{at}}{a}\right) + \left(\lim_{t\to+\infty} \frac{e^{-at}}{-a} - \frac{e^{-a\cdot 0}}{-a}\right) \overset{a>0}{=} \left(\frac{1}{a} - 0\right) + \left(0 - \frac{1}{-a}\right) = \frac{2}{a} < +\infty.$$

•Se calculează

$$G(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)\, e^{-\mathrm{j}\,\omega t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a|t|} e^{-\mathrm{j}\,\omega t} dt \overset{(C)}{=} \int_{-\infty}^{0} e^{-a(-t)} e^{-\mathrm{j}\,\omega t} dt + \int_{0}^{+\infty} e^{-at} e^{-\mathrm{j}\,\omega t} dt =$$

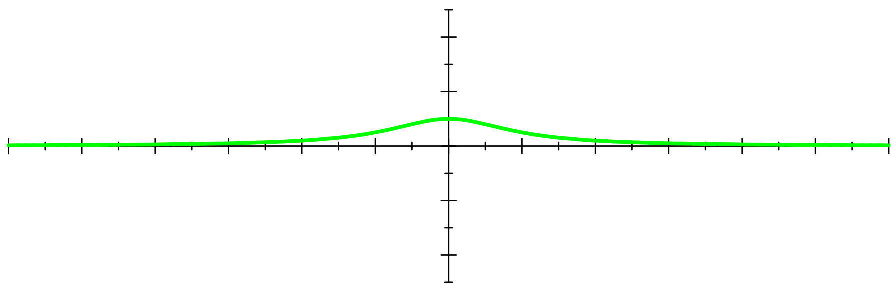
$$= \int_{-\infty}^{0} e^{(a-\mathrm{j}\,\omega)t} dt + \int_{0}^{+\infty} e^{(-a-\mathrm{j}\,\omega)t} dt \underset{\text{de integrare}}{\overset{t \text{ este variabilă}}{=}} \left.\frac{e^{(a-\mathrm{j}\,\omega)t}}{(a-\mathrm{j}\,\omega)}\right|_{t\to-\infty}^{t=0} + \left.\frac{e^{(-a-\mathrm{j}\,\omega)t}}{(-a-\mathrm{j}\,\omega)}\right|_{t=0}^{t\to+\infty} =$$

$$= \left.\frac{e^{at}\left(\cos(\omega t) + \mathrm{j}\sin(\omega t)\right)}{(a-\mathrm{j}\,\omega)}\right|_{t\to-\infty}^{t=0} + \left.\frac{e^{-at}\left(\cos(-\omega t) + \mathrm{j}\sin(-\omega t)\right)}{(-a-\mathrm{j}\,\omega)}\right|_{t=0}^{t\to+\infty} =$$

$$= \frac{e^{(a-\mathrm{j}\,\omega)0}}{(a-\mathrm{j}\,\omega)} - \lim_{t\to-\infty} \frac{e^{at}\left(\cos(\omega t) + \mathrm{j}\sin(\omega t)\right)}{(a-\mathrm{j}\,\omega)} + \lim_{t\to+\infty} \frac{e^{-at}\left(\cos(-\omega t) + \mathrm{j}\sin(-\omega t)\right)}{(-a-\mathrm{j}\,\omega)} - \frac{e^{(-a-\mathrm{j}\,\omega)0}}{(-a-\mathrm{j}\,\omega)} =$$

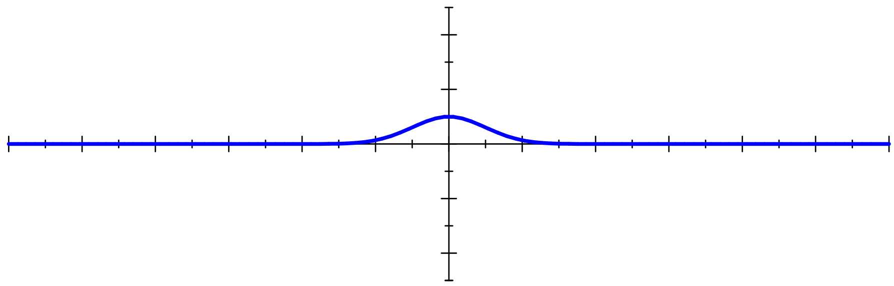
$$= \frac{1}{(a-\mathrm{j}\,\omega)} - 0 + 0 - \frac{1}{(-a-\mathrm{j}\,\omega)} = \frac{a+\mathrm{j}\,\omega + a - \mathrm{j}\,\omega}{(a-\mathrm{j}\,\omega)(a+\mathrm{j}\,\omega)} = \frac{2a}{a^2+\omega^2}.$$

Deci $G : \mathbb{R} \to \mathbb{C}, G(\omega) = \dfrac{2a}{a^2+\omega^2}$ sau $\boxed{\mathcal{F}\{g(t)\}(\omega) = \mathcal{F}\left\{e^{-a|t|}\right\}(\omega) = \dfrac{2a}{a^2+\omega^2}.}$



Deoarece $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, g \in L^1(\mathbb{R})$ este un semnal real şi par, atunci spectrul G este real şi par şi $G_c(\omega) = \mathrm{Re}(G(\omega))$.

b) Fie $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, g(t) = e^{-a^2t^2}, a > 0$.



•Se studiază dacă $g \in L^1(\mathbb{R})$, adică

$$\int_{-\infty}^{\infty} |g(t)|\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a^2t^2} dt < +\infty, \ (C), \text{ deoarece}$$

$\boxed{\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\ (C)}$ (*integrala Euler-Poisson-Laplace*)

Mai mult, se face schimbarea de variabilă de integrare (este integrală improprie convergentă, folosind criterii).

$$\begin{cases} at = s \,|\ \text{diferenţiem} \\ adt = ds \\ \text{capete pentru } a > 0\text{: } \begin{cases} t \to -\infty \Rightarrow s \to -\infty \\ t \to +\infty \Rightarrow s \to +\infty \end{cases} \end{cases}$$

şi se obţine

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a^2t^2} dt = \frac{1}{a}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-s^2} ds = \frac{1}{a} \cdot 2 \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2} = \frac{\sqrt{\pi}}{a} < +\infty.$$

•Se calculează

$$G(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\, e^{-\mathrm{j}\,\omega t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a^2t^2} e^{-\mathrm{j}\,\omega t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a^2\left(t^2 + 2t \cdot \frac{\mathrm{j}\,\omega}{2a^2} + \left(\frac{\mathrm{j}\,\omega}{2a^2}\right)^2\right)} \cdot e^{+a^2 \cdot \left(\frac{\mathrm{j}\,\omega}{2a^2}\right)^2} dt =$$

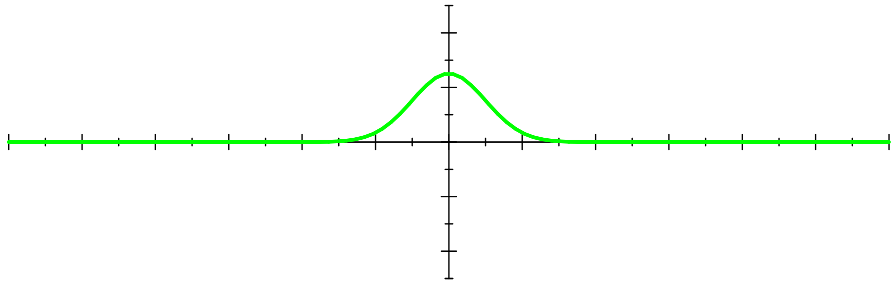
$$\underset{\text{de integrare}}{\overset{t \text{ este variabilă}}{=}} e^{+a^2 \cdot \left(\frac{\mathrm{j}\,\omega}{2a^2}\right)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a^2\left(t + \frac{\mathrm{j}\,\omega}{2a^2}\right)^2} dt \overset{(C)}{=} ?$$

Se face formal schimbarea de variabilă de integrare (este integrală improprie convergentă, ca transformată Fourier), în $\mathbb{C}$, integrala complexă pe o dreaptă paralelă cu axa orizontală fiind cu aceeaşi valoare ca integrala reală

$$\begin{cases} t + \frac{\mathrm{j}\,\omega}{2a^2} = u \,\Big|\ \text{diferenţiem} \\ dt = du \\ \text{capete: } \begin{cases} t \to -\infty \Rightarrow u \to -\infty + \frac{\mathrm{j}\,\omega}{2a^2} \\ t \to +\infty \Rightarrow u \to +\infty + \frac{\mathrm{j}\,\omega}{2a^2} \end{cases} \end{cases}$$

$$G(\omega) = e^{a^2 \cdot \left(\frac{\mathrm{j}\,\omega}{2a^2}\right)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a^2u^2} du \overset{\text{integrala calculată}}{=} e^{\frac{-\omega^2}{4a^2}} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{a}.$$

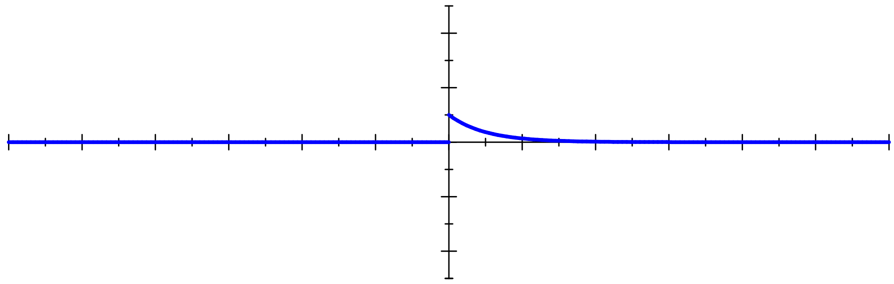
Deci $G : \mathbb{R} \to \mathbb{C}, G(\omega) = \frac{\sqrt{\pi}}{a} \cdot e^{\frac{-\omega^2}{4a^2}}$ sau $\boxed{\mathcal{F}\{g(t)\}(\omega) = \mathcal{F}\left\{e^{-a^2t^2}\right\}(\omega) = \frac{\sqrt{\pi}}{a} \cdot e^{\frac{-\omega^2}{4a^2}}.}$



Deoarece $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, g \in L^1(\mathbb{R})$ este un semnal real şi par, atunci spectrul G este real şi par şi $G_c(\omega) = \mathrm{Re}(G(\omega))$.

Comentariu: Spectrul unui semnal gaussian este tot gaussian. De menţionat că, pentru $a = \frac{1}{\sqrt{2}}$, semnalul $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, g(t) = e^{-\frac{1}{2}t^2}$ este un vector propriu pentru operatorul F, deoarece $\mathcal{F}\{g(t)\}(\omega) = \mathcal{F}\left\{e^{-\frac{1}{2}t^2}\right\}(\omega) = \sqrt{2\pi} \cdot e^{\frac{-\omega^2}{2}}$.

c) Fie $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(t) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } t < 0 \\ e^{-t}, & \text{dacă } t \geq 0, \end{cases}$.



•Se observă că $g \in L^1(\mathbb{R})$, deoarece

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |g(t)|\, dt \overset{(C)}{=} \int_{-\infty}^{0} 0dt + \int_{0}^{+\infty} e^{-t} dt = 0 + \left.\frac{e^{-t}}{-1}\right|_{t=0}^{t\to+\infty} = \lim_{t\to+\infty} \frac{e^{-t}}{-1} - \frac{e^{-0}}{-1} = 0 + 1 = 1 < +\infty.$$

•Se calculează

$$G(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\, e^{-\mathrm{j}\,\omega t} dt \overset{(C)}{=} \int_{-\infty}^{0} 0dt + \int_{0}^{+\infty} e^{-t} e^{-\mathrm{j}\,\omega t} dt = 0 + \int_{0}^{+\infty} e^{(-1-\mathrm{j}\,\omega)t} dt \underset{\text{de integrare}}{\overset{t \text{ este variabilă}}{=}}$$

$$= \left.\frac{e^{(-1-\mathrm{j}\,\omega)t}}{(-1-\mathrm{j}\,\omega)}\right|_{t=0}^{t\to+\infty} = \left.\frac{e^{-t}(\cos(-\omega t) + \mathrm{j}\sin(-\omega t))}{(-1-\mathrm{j}\,\omega)}\right|_{t=0}^{t\to+\infty} =$$

$$= \lim_{t\to+\infty} \frac{e^{-t}(\cos(-\omega t) + \mathrm{j}\sin(-\omega t))}{(-1-\mathrm{j}\,\omega)} - \frac{e^{(-1-\mathrm{j}\,\omega)0}}{(-1-\mathrm{j}\,\omega)} = 0 - \frac{1}{(-1-\mathrm{j}\,\omega)} = \frac{1}{\mathrm{j}\,\omega + 1} = \frac{1-\mathrm{j}\,\omega}{1^2+\omega^2} =$$

$$= \frac{1}{1^2+\omega^2} + \mathrm{j}\,\frac{-\omega}{1^2+\omega^2}.$$

Deci $G : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $G(\omega) = \frac{1-\mathrm{j}\,\omega}{1^2+\omega^2}$ sau $\boxed{\mathcal{F}\{g(t)\}(\omega) = \frac{1-\mathrm{j}\,\omega}{1^2+\omega^2}.}$

Se observă că partea reală şi modulul spectrului G sunt funcţii pare, iar partea imaginară şi faza spectrului sunt funcţii impare.

Comentariu: Se observă că $g(t) = e^{-t} \cdot \eta(t)$ şi că este şi original Laplace. Mai mult, se observă şi corespondenţa dintre

$\mathcal{L}\left\{e^{-t} \cdot \eta(t)\right\}(s) = \dfrac{1}{s+1}, \operatorname{Re} s > -1$ şi $\mathcal{F}\{g(t)\}(\omega) = \dfrac{1}{\mathrm{j}\,\omega + 1}$.

d) Fie $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, g(t) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } t < 0 \\ e^{-3t}, & \text{dacă } t \geq 0 \end{cases}$.

Analog cu c), se obţine şi că

$G : \mathbb{R} \to \mathbb{C}, G(\omega) = \dfrac{3 - \mathrm{j}\,\omega}{3^2 + \omega^2}$ sau $\boxed{\mathcal{F}\{g(t)\}(\omega) = \dfrac{3 - \mathrm{j}\,\omega}{3^2 + \omega^2}.}$.

Analog cu c), se obţine şi că

$G : \mathbb{R} \to \mathbb{C}, G(\omega) = \dfrac{a - \mathrm{j}\,\omega}{a^2 + \omega^2}$ sau $\boxed{\mathcal{F}\{g(t)\}(\omega) = \dfrac{a - \mathrm{j}\,\omega}{a^2 + \omega^2}.}$.

Se observă că partea reală şi modulul spectrului sunt funcţii pare, iar partea imaginară şi faza spectrului sunt funcţii impare.

○**e)** A se vedea Curs.

Teoremele de liniaritate, a spectrului semnalului conjugat, a spectrului semnalului simetric, a scalării variabilei timp, a întârzierii în timp, a întârzierii în frecvenţă -A se vedea Curs.

Teoremele de continuitate a operatorului Fourier, a spectrului semnalului derivat, de derivare a spectrului unui semnal, a spectrului semnalului integrat, de integrare a spectrului unui semnal -A se vedea Curs.

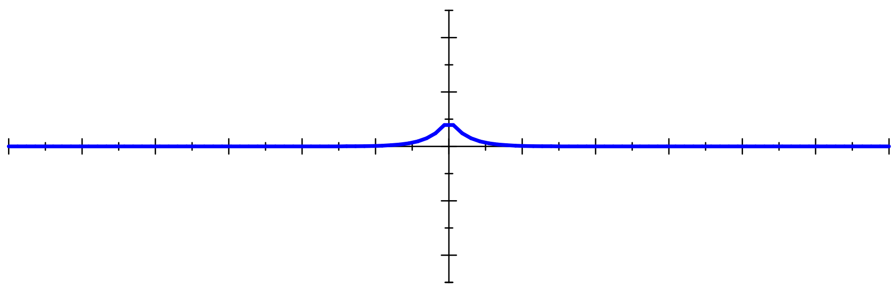
Definiţia 4. Fie $g, h \in L^1(\mathbb{R})$. Se numeşte *produs de convoluţie a funcţiilor din* $L^1(\mathbb{R})$ g *şi* h, funcţia $g * h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (sau $g * h : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$), definită prin

$$\boxed{(g * h)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(\tau)\, h(t - \tau)\, d\tau}$$

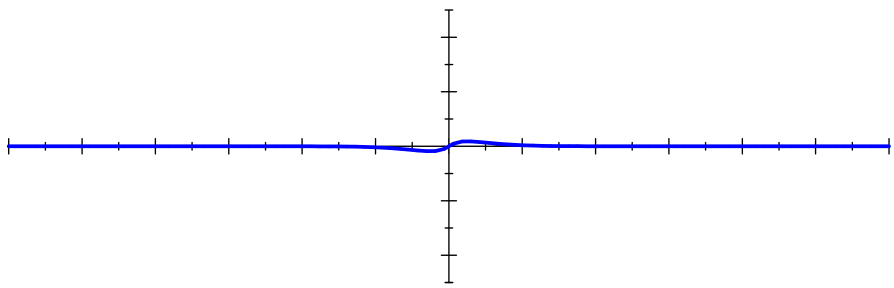
Teoremele spectrului de convoluţie a două semnale, a autocorelaţiei unui semnal-A se vedea Curs.

Exerciţiul 3. Utilizând Teorema de derivare a spectrului, să se determine $\mathcal{F}\left\{-\mathrm{j}\,t \cdot e^{-a|t|}\right\}(\omega)$, unde $a > 0$.

Rezolvare. Fie funcţia $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, g(t) = e^{-a|t|}$, unde $a > 0$;



•În exerciţiul 2 s-a arătat că $g \in L^1(\mathbb{R})$. Analog se arată că $tg \in L^1(\mathbb{R})$,



deoarece

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |tg(t)|\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |t|\,e^{-a|t|}dt = 2\int_{0}^{+\infty} te^{-at}dt \overset{t \text{ este variabilă}}{\underset{\text{de integrare}}{=}} 2\left(-\frac{te^{-at}}{a} - \frac{e^{-at}}{a^2}\right)\Bigg|_{t=0}^{t\to+\infty} =$$

$$= 2\left(\lim_{t\to+\infty}\left(-\frac{te^{-at}}{a} - \frac{e^{-at}}{a^2}\right) - \left(-0 - \frac{1}{a^2}\right)\right) \overset{a\geq 0}{=} 2\left(0 + \frac{1}{a^2}\right) = \frac{2}{a^2} < +\infty.$$

•În exerciţiul 2 s-a arătat că

$$\mathcal{F}\{g(t)\}(\omega) = \mathcal{F}\left\{e^{-a|t|}\right\}(\omega) = \frac{2a}{a^2+\omega^2}.$$

•Conform Teoremei de derivare⇒

$$\mathcal{F}\{-\mathrm{j}\,t\cdot g(t)\}(\omega) = \mathcal{F}\left\{-\mathrm{j}\,t\cdot e^{-a|t|}\right\}(\omega) = \frac{d}{d\omega}\mathcal{F}\{g(t)\}(\omega) = \frac{d}{d\omega}\left(\frac{2a}{a^2+\omega^2}\right) = \frac{-2a\cdot 2\omega}{(a^2+\omega^2)^2}.$$

$$\boxed{\mathcal{F}\left\{-\mathrm{j}\,t\cdot e^{-a|t|}\right\}(\omega) = \frac{-4a\cdot\omega}{(a^2+\omega^2)^2}.}$$

Comentariu: De menţionat că determinarea transformatei precedente se putea face şi direct, cu definiţia.

○**Observaţia 7**. Rezolvarea Exerciţiului $2, b)$ se putea face folosind Teoremele de liniaritate şi de derivare.

Se observă că funcţia $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, g(t) = e^{-a^2t^2}, a\neq 0$, verifică ecuaţia diferenţială

$(*)\; g'(t) + 2a^2t\cdot g(t) = 0, \forall t\in\mathbb{R}.$

(deoarece $-2a^2t\cdot e^{-a^2t^2} + 2a^2t\cdot e^{-a^2t^2} = 0, \forall t\in\mathbb{R}.$)

Deoarece $g\in L^1(\mathbb{R})$ şi $tg\in L^1(\mathbb{R})$ se poate aplica ecuaţiei $(*)$ transformata Fourier şi se obţine

$$\mathcal{F}\left\{g'(t) + 2a^2t\cdot g(t)\right\}(\omega) = \mathcal{F}\{0\}(\omega), \forall\omega\in\mathbb{R}.$$

Se aplică Teorema de liniaritate⇒

$$\mathcal{F}\{g'(t)\}(\omega) + 2a^2\cdot\mathcal{F}\{tg(t)\}(\omega) = \mathcal{F}\{0\}(\omega), \forall\omega\in\mathbb{R} \Rightarrow$$

$$\mathrm{j}\,\omega\cdot\mathcal{F}\{g(t)\}(\omega) + 2a^2\cdot\frac{1}{-\mathrm{j}}\frac{d}{d\omega}\mathcal{F}\{g(t)\}(\omega) = 0, \forall\omega\in\mathbb{R}.$$

Se notează $G(\omega) = \mathcal{F}\{g(t)\}(\omega)$ şi $G'(\omega) = \dfrac{d}{d\omega}\mathcal{F}\{g(t)\}(\omega)$ şi se obţine că:

$$\mathrm{j}\,\omega\cdot G(\omega) + 2a^2\cdot\frac{1}{-\mathrm{j}}G'(\omega) = 0, \forall\omega\in\mathbb{R} \Rightarrow$$

$$G = 0 \text{ soluţie singulară şi } \frac{G'(\omega)}{G(\omega)} = \frac{-\omega}{2a^2}, \forall\omega\in\mathbb{R}\,\Bigg|\int(\cdot)\,d\omega \Rightarrow \int\frac{G'(\omega)}{G(\omega)}d\omega = \int\frac{-\omega}{2a^2}d\omega$$

Atunci toate soluţiile sunt $G(\omega) = c\cdot e^{\frac{-\omega^2}{4a^2}}, \forall\omega\in\mathbb{R}.$

Cum $F(0) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\underbrace{e^{-\mathrm{j}\,t0}}_{1}dt \overset{\text{Ex. 2,c)}}{=} \frac{\sqrt{\pi}}{a} \Rightarrow c\cdot e^{\frac{-0^2}{4a^2}} = \frac{\sqrt{\pi}}{a} \Rightarrow c = \frac{\sqrt{\pi}}{a}.$

Deci $F(\omega) = \dfrac{\sqrt{\pi}}{a}\cdot e^{\frac{-\omega^2}{4a^2}}, \forall\omega\in\mathbb{R}$ sau $\boxed{\mathcal{F}\{f(t)\}(\omega) = \mathcal{F}\left\{e^{-a^2t^2}\right\}(\omega) = \dfrac{\sqrt{\pi}}{a}\cdot e^{\frac{-\omega^2}{4a^2}}.}$

Exerciţiul 5. Utilizând Teorema spectrului produsului de convoluţie, să se determine $\mathcal{F}\{g*h\}(\omega)$, unde

$$g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, g(t)=\begin{cases}0, & \text{dacă } t<0\\ e^{-t}, & \text{dacă } t\geq 0,\end{cases} \text{ şi } h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, h(t)=e^{-t^2}.$$

Rezolvare. A se vedea Curs.

Teorema 15 (inversarea transformatei Fourier). Fie $g\in L^1(\mathbb{R})$ a.î. $G\in L^1(\mathbb{R})$. Atunci are loc *formula de inversare a transformatei Fourier*:

$$\boxed{g(t)=\mathcal{F}^{-1}\{G(\omega)\}(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}G(\omega)\cdot e^{\mathrm{j}\,t\omega}d\omega, \forall t\in\mathbb{R}}$$

Comentariu. Dacă $\mathcal{F}\{g(t)\}(\omega)=\mathcal{F}\{h(t)\}(\omega)$, atunci

$g(t)=h(t)$, a.p.t. $t\in\mathbb{R}$.

Egalitatea "aproape peste tot" înseamnă că are loc cu excepţia unei mulţimi de măsură Lebesgue nulă.

Exerciţiul 6. Să se rezolve ecuaţia integrală

$$(*)\int_{-\infty}^{+\infty}f(\omega)\,e^{\mathrm{j}\,t\omega}d\omega=e^{-a|t|}, t\in\mathbb{R}, \text{ unde } a>0 \text{ este dat.}$$

Rezolvare. Se înmulţeşte $(*)$ cu $\frac{1}{2\pi}\Rightarrow\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(\omega)\,e^{\mathrm{j}\,t\omega}d\omega=\underbrace{\frac{1}{2\pi}e^{-a|t|}}_{g(t)}, t\in\mathbb{R}.$

Atunci $f=G$ va fi, din Teorema de inversare, transformata Fourier corespunzătoare pentru g.

•Se observă că $g\in L^1(\mathbb{R})$, deoarece

$$\int_{-\infty}^{\infty}|g(t)|\,dt=\int_{-\infty}^{+\infty}\tfrac{1}{2\pi}e^{-a|t|}dt\overset{\text{ex. 2}}{=}\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{2}{a}<+\infty.$$

•Se calculează

$$G(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}g(t)\,e^{-\mathrm{j}\,\omega t}dt=\int_{-\infty}^{\infty}\tfrac{1}{2\pi}e^{-a|t|}e^{-\mathrm{j}\,\omega t}dt\overset{\text{ex. 2}}{=}\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{2a}{a^2+\omega^2}.$$

•Se observă că $G\in L^1(\mathbb{R})$, deoarece

$$\int_{\mathbb{R}}|G(\omega)|\,d\omega=\int_{-\infty}^{+\infty}\left|\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{2a}{a^2+\omega^2}\right|d\omega\underset{\text{de integrare, }(C)}{\overset{\omega\text{ este variabilă}}{=}}\frac{1}{2\pi}\cdot 2a\cdot\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{\omega}{a}\Big|_{\omega\to-\infty}^{\omega\to+\infty}=$$

$$\overset{a\geq 0}{=}2\left(\frac{\pi}{2}-\frac{-\pi}{2}\right)=2\pi<+\infty.$$

•Conform Teoremei de inversare $\overset{\text{a.p.t.}}{\Rightarrow}$ $f=G$.

Deci $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(\omega)=\dfrac{1}{2\pi}\cdot\dfrac{2a}{a^2+\omega^2}.$

De menţionat o teoremă de la calculul de integrale reale cu reziduuri, de la Matematici Speciale, rescrisă:

○**T 1′**. (la MS) Fie $\mathcal{I}=\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{P(\omega)}{Q(\omega)}e^{\mathrm{j}\,t\omega}d\omega$, $a=t>0$, unde

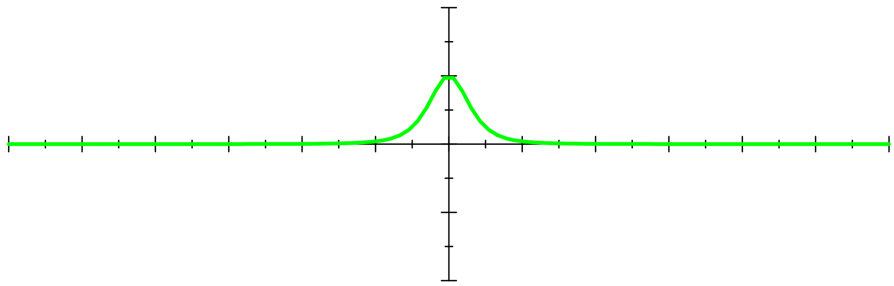
$P,Q\in\mathbb{R}[\omega]$, $\operatorname{grad}Q\geq\operatorname{grad}P+1, Q(\omega)\neq 0,\forall\omega\in\mathbb{R}$. Atunci:

$$\mathcal{I}=2\pi\,\mathrm{j}\sum_{k=1}^{n}\operatorname{rez}f(z_k), \text{ unde } f(z)=\frac{P(z)}{Q(z)}e^{\mathrm{j}\,tz}, \text{ iar } z_k \text{ sunt acei poli cu } \operatorname{Im}z_k>0.$$

○**Exerciţiul 7**. (la MS) Fie $G:\mathbb{R}\to\mathbb{C}, G(\omega)=\dfrac{1}{(1+\omega^2)^2}.$

Să se determine, dacă există, $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ corespunzătoare, ca inversă prin transformata Fourier.

Rezolvare. Fie $G:\mathbb{R}\to\mathbb{C}, G(\omega)=\dfrac{1}{(1+\omega^2)^2}$



•Se observă că $G\in L^1(\mathbb{R})$, deoarece

$$\int_{\mathbb{R}}|G(\omega)|\,d\omega=\int_{-\infty}^{+\infty}\left|\frac{1}{(1+\omega^2)^2}\right|d\omega=\left(\frac{-\pi+2\omega-\pi\omega^2}{4(\omega^2+1)}+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\omega\right)\Bigg|_{\omega\to-\infty}^{\omega\to\infty}=\tfrac{\pi}{2}<+\infty.$$

SAU

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{1}{(1+\omega^2)^2}\le\dfrac{1}{1+\omega^2},\forall\omega\in\mathbb{R}\\ \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{1+\omega^2}d\omega=\pi-(C)\end{array}\right\}\overset{\text{Criteriul comparaţiei}}{\Rightarrow}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(1+\omega^2)^2}d\omega-(C).$$

•Se observă, conform Teoremei de inversare, că

$$g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, g(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(1+\omega^2)^2}e^{\mathrm{j}\,t\omega}d\omega.$$

Aici, în T1', $P(\omega)=1;Q(\omega)=\left(1+\omega^2\right)^2;\operatorname{grad}Q\ge\operatorname{grad}P+1,Q(\omega)\neq0,\forall\omega\in\mathbb{R}.$

Fie $f(z)=\dfrac{1}{(1+z^2)^2}e^{\mathrm{j}\,tz}.$

$\left(1+z^2\right)^2=0\Rightarrow z=\pm\mathrm{j}$ sunt poli de ordin 2 pentru f, cu $\operatorname{Im}(+\mathrm{j})>0.$

Se calculează, pentru $t>0$,

$$g(t)=\frac{1}{2\pi}\mathcal{I}\overset{T1'}{=}\frac{1}{2\pi}2\pi\,\mathrm{j}\operatorname{rez}f(\mathrm{j})\underset{\text{conform 2·}}{\overset{0+\mathrm{j}\text{ e pol de ordin 2}}{=}}$$

$$=\frac{1}{2\pi}2\pi\,\mathrm{j}\frac{1}{(2-1)!}\lim_{z\to0+\mathrm{j}}\left(\left((z-\mathrm{j})^2\frac{1}{(z-\mathrm{j})^2(z+\mathrm{j})^2}e^{\mathrm{j}\,tz}\right)^{(2-1)_z}\right)=\mathrm{j}\lim_{z\to0+\mathrm{j}}\left(\left(\frac{e^{\mathrm{j}\,tz}}{(z+\mathrm{j})^2}\right)'_z\right)=$$

$$=\mathrm{j}\lim_{z\to0+\mathrm{j}}\frac{e^{\mathrm{j}\,tz}\cdot\mathrm{j}\,t(z+\mathrm{j})^2-e^{\mathrm{j}\,tz}\cdot2(z+\mathrm{j})}{(z+\mathrm{j})^4}=\mathrm{j}\lim_{z\to0+\mathrm{j}}\frac{e^{\mathrm{j}\,tz}\cdot(\mathrm{j}\,t(z+\mathrm{j})-2)}{(z+\mathrm{j})^3}=$$

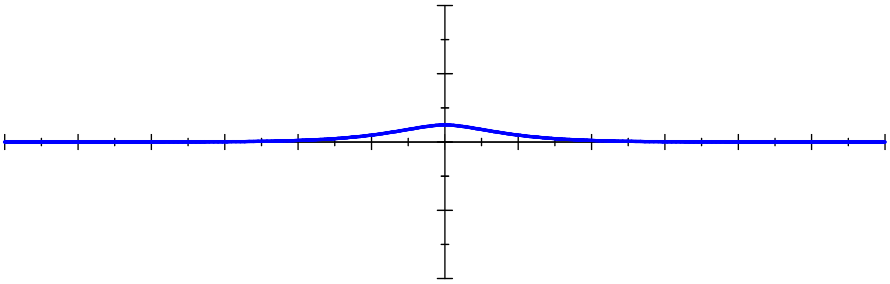
$$=\mathrm{j}\frac{e^{\mathrm{j}\,t\,\mathrm{j}}\cdot(\mathrm{j}\,t(\mathrm{j}+\mathrm{j})-2)}{(\mathrm{j}+\mathrm{j})^3}=\mathrm{j}\frac{e^{-t}\cdot(-2t-2)}{2\,\mathrm{j}\cdot(-4)}=\frac{e^{-t}\cdot(t+1)}{4},t>0.$$

Conform Observaţiei 9.1.5, pentru $t<0$,

$$g(t)\underset{G\text{ pară şi reală}}{\overset{\text{Observaţia 9.1.5}}{=}}g(-t)\overset{t\le0}{=}\frac{e^{t}\cdot(-t+1)}{4},t<0.$$

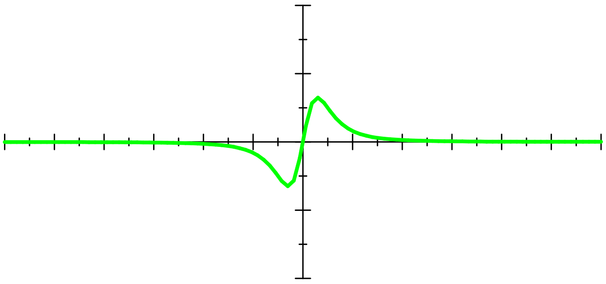
În plus, $g(0)=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(1+\omega^2)^2}d\omega=\tfrac{1}{4}.$

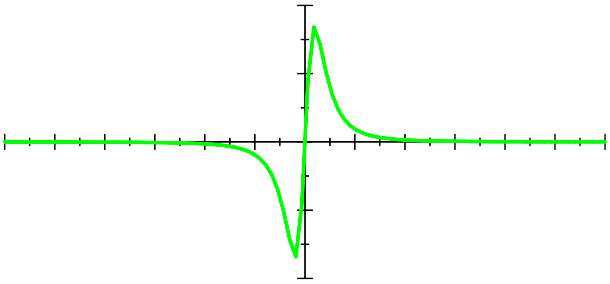
$$\text{Deci } g(t)=\begin{cases}\dfrac{e^{t}\cdot(-t+1)}{4}, & t<0\\ \frac{1}{4}, & t=0\\ \dfrac{e^{-t}\cdot(t+1)}{4}, & t>0\end{cases}$$



○**Exerciţiul 8**. (la MS) Să se rezolve ecuaţia integrală
$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\, e^{-\mathrm{j}\,\omega t} dt = \frac{\mathrm{j}\,\omega}{(1+\omega^2)^2}, \omega \in \mathbb{R}.$$
Rezolvare. A se vedea Curs.

○**Exerciţiul 9**. (la MS) Să se rezolve ecuaţia integrală
$$(*) \int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\, e^{-\mathrm{j}\,\omega t} dt = \frac{\omega}{\mathrm{j}\,(\omega^2+a^2)(\omega^2+b^2)}, \omega \in \mathbb{R}, \text{ unde } a>0 \text{ şi } b>0 \text{ sunt date.}$$
Caz particular: $(*) \int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\, e^{-\mathrm{j}\,yt} dt = \dfrac{y}{\mathrm{j}\,(y^2+1)(y^2+4)}, y \in \mathbb{R}$-temă.
Rezolvare. Se determină $g =?$ funcţia necunoscută.
Se notează $G : \mathbb{R} \to \mathbb{C}, G(\omega) = \dfrac{\omega}{\mathrm{j}\,(\omega^2+a^2)(\omega^2+b^2)} = \mathrm{j}\,\dfrac{-\omega}{(\omega^2+a^2)(\omega^2+b^2)}$, cu reprezentare pentru $a = b$, respectiv $a \neq b$ a $-\operatorname{Im} G$





•Se observă că $G \in L^1(\mathbb{R})$, deoarece, prin calcul direct (sau cu un crit. de comp.)
$$\int_{\mathbb{R}} |G(\omega)|\, d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{\omega}{\mathrm{j}\,(\omega^2+a^2)(\omega^2+b^2)} \right| d\omega \underset{\text{de integrare, }(C)}{\overset{\omega \text{ este variabilă}}{=}} 2\int_0^{+\infty} \frac{\omega}{(\omega^2+a^2)(\omega^2+b^2)} d\omega =?$$
dacă $a = b, a > 0, b > 0 :$
$$= 2\int_0^{+\infty} \frac{\omega}{(\omega^2+a^2)^2} d\omega = 2\,\frac{1}{-2}\,\frac{1}{\omega^2+a^2}\Bigg|_{\omega=0}^{\omega\to+\infty} = \frac{1}{a^2} < +\infty.$$
dacă $a \neq b, a > 0, b > 0 :$
$$= \frac{1}{b^2-a^2}\int_0^{+\infty} \left(\frac{2\omega}{\omega^2+a^2} - \frac{2\omega}{\omega^2+b^2} \right) d\omega = \frac{1}{b^2-a^2} \left(\ln\left(\omega^2+a^2\right) - \ln\left(\omega^2+b^2\right) \right)\Big|_{t=0}^{t\to+\infty} =$$
$$= \frac{1}{b^2-a^2} \left(\ln \frac{\omega^2+a^2}{\omega^2+b^2} \right)\Bigg|_{t=0}^{t\to+\infty} = 0 - \frac{1}{b^2-a^2} \ln \frac{a^2}{b^2} < +\infty.$$
•Se observă, conform Teoremei de liniaritate şi Teoremei 4, că
$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}, g(t) = \frac{1}{\mathrm{j}\cdot 2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\omega}{(\omega^2+a^2)(\omega^2+b^2)} e^{\mathrm{j}\,t\omega} d\omega = \frac{1}{\mathrm{j}\cdot 2\pi}\mathcal{I}.$$
Aici $P(\omega) = \omega; Q(\omega) = \left(\omega^2+a^2\right)\left(\omega^2+b^2\right);\operatorname{grad} Q \geq \operatorname{grad} P + 1, Q(\omega) \neq 0, \forall \omega \in \mathbb{R}.$

Fie $f(z)=\dfrac{z}{(z^2+a^2)(z^2+b^2)}e^{\mathrm{j}\,tz}$.

$\left(z^2+a^2\right)\left(z^2+b^2\right)=0 \Rightarrow z=\pm a\,\mathrm{j}, z=\pm b\,\mathrm{j}$ sunt poli

de ordin 2 pentru f, cu $\mathrm{Im}\,(+a\,\mathrm{j})>0$, dacă $a=b, a>0, b>0$.

de ordin 1 pentru f, cu $\mathrm{Im}\,(+a\,\mathrm{j})>0, \mathrm{Im}\,(+b\,\mathrm{j})>0$ dacă $a\neq b, a>0, b>0$.

Atunci, conform Teoremei de liniaritate şi Teoremei 4 de inversare,

•<u>caz $a=b, a>0, b>0$</u>: $g(t)=\dfrac{1}{\mathrm{j}\cdot 2\pi}\mathcal{I}\overset{T1'}{=}\dfrac{1}{\mathrm{j}\cdot 2\pi}2\pi\,\mathrm{j}\,\mathrm{rez}\,f(a\,\mathrm{j})\underset{\text{conform } 2^{\cdot}}{\overset{0+a\,\mathrm{j}\ \text{e pol de ordin 2}}{=}}$

$$=\frac{1}{\mathrm{j}\cdot 2\pi}2\pi\,\mathrm{j}\,\frac{1}{(2-1)!}\lim_{z\to 0+a\,\mathrm{j}}\left(\left((z-a\,\mathrm{j})^2\frac{z}{(z-a\,\mathrm{j})^2(z+a\,\mathrm{j})^2}e^{\mathrm{j}\,tz}\right)^{(2-1)_z}\right)=$$

$$=\lim_{z\to 0+a\,\mathrm{j}}\left(\left(\frac{ze^{\mathrm{j}\,tz}}{(z+a\,\mathrm{j})^2}\right)^{\prime_z}\right)=\lim_{z\to 0+a\,\mathrm{j}}\frac{\left(e^{\mathrm{j}\,tz}+ze^{\mathrm{j}\,tz}\cdot\mathrm{j}\,t\right)(z+a\,\mathrm{j})^2-ze^{\mathrm{j}\,tz}\cdot 2(z+a\,\mathrm{j})}{(z+a\,\mathrm{j})^4}=$$

$$=\lim_{z\to 0+a\,\mathrm{j}}\frac{e^{\mathrm{j}\,tz}\cdot((1+z\,\mathrm{j}\,t)(z+a\,\mathrm{j})-2z)}{(z+a\,\mathrm{j})^3}=\frac{e^{\mathrm{j}\,ta\,\mathrm{j}}\cdot((1+a\,\mathrm{j}\cdot\mathrm{j}\,t)(a\,\mathrm{j}+a\,\mathrm{j})-2a\,\mathrm{j})}{(a\,\mathrm{j}+a\,\mathrm{j})^3}=$$

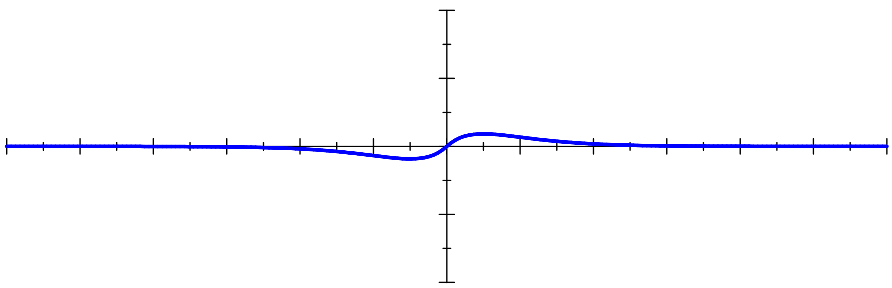
$$=\frac{e^{-at}\cdot(-at)\,2a\,\mathrm{j}}{2a\,\mathrm{j}\cdot(-4a^2)}=\frac{e^{-at}\cdot t}{4a},\ t>0.$$

Conform Observaţiei 9.1.5, pentru $t<0$,

$$g(t)\underset{G\text{ impară şi pur imaginară}}{\overset{\text{Observaţia 9.1.5}}{=}}-g(-t)\overset{t\leq 0}{=}-\frac{e^{at}\cdot(-t)}{4a}, t<0.$$

În plus, $g(0)=\dfrac{\mathrm{j}}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\omega}{(\omega^2+a^2)(\omega^2+a^2)}d\omega=0$.

$$\text{Deci } g(t)=\begin{cases}-\dfrac{e^{at}\cdot(-t)}{4a}, & t<0\\ 0, & t=0\\ \dfrac{e^{-at}\cdot t}{4a}, & t>0\end{cases}$$



•<u>caz $a\neq b, a>0, b>0$</u>:

Se calculează, pentru $t>0$,

$g(t)=\dfrac{1}{\mathrm{j}\cdot 2\pi}\mathcal{I}\overset{T1'}{=}\dfrac{1}{\mathrm{j}\cdot 2\pi}2\pi\,\mathrm{j}\,(\mathrm{rez}\,f(a\,\mathrm{j})+\mathrm{rez}\,f(b\,\mathrm{j}))\underset{\text{conform } 2^{\cdot}}{\overset{0+a\,\mathrm{j},0+b\,\mathrm{j}\ \text{sunt poli de ordin 1}}{=}}$

$$=\frac{1}{\mathrm{j}\cdot 2\pi}2\pi\,\mathrm{j}\left(\lim_{z\to 0+a\,\mathrm{j}}(z-a\,\mathrm{j})\frac{ze^{\mathrm{j}\,tz}}{(z-a\,\mathrm{j})(z+a\,\mathrm{j})(z^2+b^2)}+\lim_{z\to 0+b\,\mathrm{j}}(z-b\,\mathrm{j})\frac{ze^{\mathrm{j}\,tz}}{(z-b\,\mathrm{j})(z+b\,\mathrm{j})(z^2+a^2)}\right)=$$

$$=\frac{a\,\mathrm{j}}{(a\,\mathrm{j}+a\,\mathrm{j})\left((a\,\mathrm{j})^2+b^2\right)}e^{\mathrm{j}\,ta\,\mathrm{j}}+\frac{b\,\mathrm{j}}{(b\,\mathrm{j}+b\,\mathrm{j})\left((b\,\mathrm{j})^2+a^2\right)}e^{\mathrm{j}\,tb\,\mathrm{j}}=$$

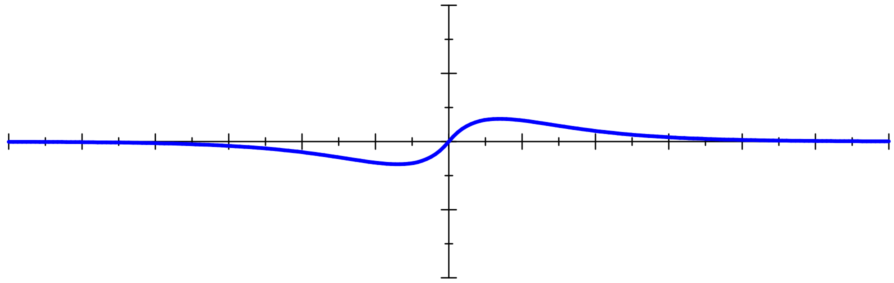
$$=\frac{1}{2(-a^2+b^2)}e^{-ta}+\frac{1}{2(-b^2+a^2)}e^{-tb}=\frac{1}{2(b^2-a^2)}\left(e^{-ta}-e^{-tb}\right), t>0.$$

Deci $g:\mathbb{R}\to\mathbb{C}, g(t)=\dfrac{1}{2(b^2-a^2)}\left(e^{-at}-e^{-bt}\right)$.

Conform Observaţiei 9.1.5, pentru $t<0$,
$g(t) \underset{G \text{ impară şi pur imaginară}}{\overset{\text{Observaţia 9.1.5}}{=}} -g(-t) \overset{t\le 0}{=} -\dfrac{1}{2(b^2-a^2)}\left(e^{at}-e^{bt}\right), t<0.$

În plus, $g(0)=\dfrac{\mathrm{j}}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\omega}{(\omega^2+a^2)(\omega^2+b^2)}d\omega=0.$

Deci $g(t)=\begin{cases} -\dfrac{1}{2(b^2-a^2)}\left(e^{at}-e^{bt}\right), & t<0\\ 0, & t=0\\ \dfrac{1}{2(b^2-a^2)}\left(e^{-at}-e^{-bt}\right), & t>0\end{cases}$



Exerciţiul 10. Să se rezolve ecuaţia integrală

a) $(*)\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}G(y)e^{\mathrm{j}ty}dy=f(t), t\in\mathbb{R}$, unde $f(t)=\begin{cases}2\pi\sin t, & \text{dacă } 0<t<2\pi\\ \dfrac{\pi}{4}, & \text{dacă } t=0, t=2\pi\\ 0, & \text{în rest}\end{cases}$.

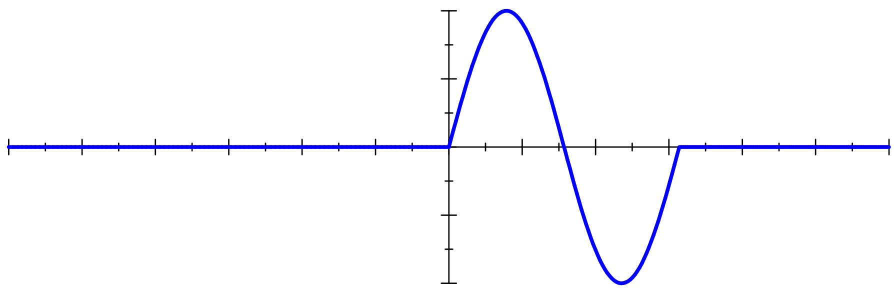
b) $(*)\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}G(y)e^{\mathrm{j}ty}dy=e^{1-|t|}, t\in\mathbb{R}$.-temă

Rezolvare. a) Se determină $g=?$ funcţia necunoscută.

Se înmulţeşte $(*)$ cu $\frac{1}{2\pi}\Rightarrow\frac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}G(y)e^{\mathrm{j}ty}dy=\underbrace{\frac{1}{2\pi}f(t)}_{g(t)}, t\in\mathbb{R}$

Atunci G va fi, din Teorema de inversare, transformata Fourier corespunzătoare pentru $\frac{1}{2\pi}f=g$.

Fie $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, g(t)=\frac{1}{2\pi}f(t)=\begin{cases}\sin t, & \text{dacă } 0<t<2\pi\\ \dfrac{1}{8}, & \text{dacă } t=0, t=2\pi\\ 0, & \text{în rest}\end{cases}$



•Se observă că $g\in L^1(\mathbb{R})$, deoarece
$\displaystyle\int_{\mathbb{R}}|g(t)|\,dt=0+\int_0^{\pi}\sin t dt+\int_{\pi}^{2\pi}(-\sin t)\,dt+0 \underset{\text{de integrare}}{\overset{t \text{ este variabilă}}{=}} (-\cos t)\big|_{t=0}^{t=\pi}+(\cos t)\big|_{t=\pi}^{t=2\pi}=4<+\infty.$

•Se calculează

$$G(y) = \int_{\mathbb{R}} h(t)\, e^{-\mathrm{j}\, yt} dt = 0 + \int_0^{2\pi} (\sin t) \cdot e^{-\mathrm{j}\, yt} dt + 0 \overset{(C)}{=} \int_0^{2\pi} (\sin t) \cdot e^{-\mathrm{j}\, yt} dt \underset{\text{de integrare}}{\overset{t \text{ este variabilă}}{=}}$$

$$= \int_0^{2\pi} e^{-\mathrm{j}\, yt} \cdot \frac{d}{dt}(-\cos t)\, dt = e^{-\mathrm{j}\, yt} \cdot (-\cos t)\Big|_{t=0}^{t=2\pi} - \int_0^{2\pi} e^{-\mathrm{j}\, yt} \cdot (-\mathrm{j}\, y) \cdot (-\cos t)\, dt =$$

$$= e^{-\mathrm{j}\, y 2\pi} \cdot (-\cos 2\pi) - e^{-\mathrm{j}\, y 0} \cdot (-\cos 0) - \mathrm{j}\, y \int_0^{2\pi} e^{-\mathrm{j}\, yt} \cdot \cos t dt =$$

$$= e^{-\mathrm{j}\, y 2\pi} \cdot (-1) - 1 \cdot (-1) - \mathrm{j}\, y \int_0^{2\pi} e^{-\mathrm{j}\, yt} \cdot \frac{d}{dt}(\sin t)\, dt =$$

$$= 1 - e^{-\mathrm{j}\, y 2\pi} - \mathrm{j}\, y \left(e^{-\mathrm{j}\, yt} \cdot (\sin t)\Big|_{t=0}^{t=2\pi} - \int_0^{2\pi} e^{-\mathrm{j}\, yt} \cdot (-\mathrm{j}\, y) \cdot (\sin t)\, dt \right) =$$

$$= 1 - e^{-\mathrm{j}\, y 2\pi} - \mathrm{j}\, y \left(0 - 0 - (-\mathrm{j}\, y) \int_0^{2\pi} e^{-\mathrm{j}\, yt} \cdot \sin t dt \right) =$$

$$= 1 - e^{-\mathrm{j}\, y 2\pi} + y^2 G(y) \Rightarrow$$

$$(**)\; G(y) - y^2 G(y) = 1 - e^{-\mathrm{j}\, y 2\pi}.$$

Pentru $y \neq \pm 1 \overset{(**)}{\Rightarrow} G(y) = \dfrac{1 - e^{-\mathrm{j}\, y 2\pi}}{1 - y^2}$.

Pentru $y = \pm 1 \overset{(**)}{\Rightarrow} 0 = 1 - e^{-j(\pm 1)2\pi}$- adevărat.

•Se poate arăta că $G \in L^1(\mathbb{R})$.

•Conform Teoremei de inversare $\overset{\text{a.p.t.}}{\Rightarrow}$

$$G : \mathbb{R} \to \mathbb{C}, G(y) = \begin{cases} \dfrac{1 - e^{-\mathrm{j}\, y 2\pi}}{1 - y^2}, & \text{dacă } y \neq \pm 1 \\ \text{un număr complex}, & \text{dacă } y = 1 \\ \text{un număr complex}, & \text{dacă } y = -1 \end{cases}.$$