SEMINAR NR. 1, REZOLVĂRI
EDCO, AIA

ECUAŢII DIFERENŢIALE

ECUAŢII DIFERENŢIALE: introducere, definiţii, exemple, istoric, modele matematice

Definiţia 1. Se numeşte *ecuaţie diferenţială scalară* o relaţie de dependenţă funcţională între variabilele independente, funcţia necunoscută cu valori reale şi derivatele sale ordinare (parţiale) până la un anumit ordin. Dacă funcţia necunoscută depinde de o singură variabilă independentă, dependenţa funcţională se numeşte *ecuaţie diferenţială ordinară*, iar dacă funcţia necunoscută depinde de mai multe variabile independente, dependenţa funcţională se numeşte *ecuaţie cu derivate parţiale*. Ordinul maxim de derivare al funcţiei necunoscute care este efectiv implicat în ecuaţie se numeşte *ordinul* ecuaţiei diferenţiale.

Pentru definiţiile noţiunilor de *soluţie*, *soluţie generală* (*integrală generală*), *curbe integrale*, *problemă Cauchy*, a se vedea Curs.

Exerciţiul 1. Să se arate că, pentru fiecare $c \in \mathbb{R}$, funcţia
$x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x(t) = ct + \sqrt{1 + c^2}$ este soluţie a ecuaţiei diferenţiale ordinare
$x(t) - tx'(t) = \sqrt{1 + (x'(t))^2}, t \in \mathbb{R}.$

Rezolvare. A se vedea Curs.

1. ECUAŢII DIFERENŢIALE REZOLVABILE PRIN CUADRATURI

1.1. Exemple

Exerciţiul 2. Să se rezolve ecuaţia diferenţială
$x'(t) = t^{2020}, t \in \mathbb{R}.$

Rezolvare. A se vedea Curs.

Exerciţiul 3. Se dă ecuaţia diferenţială
$x'(t) = x(t), t \in \mathbb{R}.$

a) Să se determine soluţiile ecuaţiei;
b) Să se reprezinte grafic soluţiile;
c) Să se adauge o condiţie care să asigure existenţa/ unicitatea soluţiei.

Rezolvare. A se vedea Curs.

Observaţia 2. Domeniul de definiţie a unei soluţii, $\mathbb{I}_x$, depinde de constanta c (pentru fiecare c se obţine o soluţie cu un anumit domeniu de definiţie şi o anumită lege de asociere). La Exerciţiul 3, toate soluţiile date de $(**)$ au acelaşi domeniu, $\mathbb{I}_x = \mathbb{R}$.

Convenţie. a) Pentru $x : \mathbb{I} \to \mathbb{R}$ derivabilă pe $\mathbb{I}$ se reaminteşte notaţia

$$\boxed{x'(t) = \frac{dx}{dt}(t), \forall t \in \mathbb{I}.}$$

Având în vedere relaţia ce dă diferenţiala pentru funcţia x,

$$\boxed{dx(t) = x'(t)\, dt, \forall t \in \mathbb{I},}$$

se face convenţia ca, acolo unde este util în calcul, să se folosească

$$\boxed{\frac{dx}{dt}(t) = \frac{dx(t)}{dt}, \forall t \in \mathbb{I}.}$$

b) În ecuaţiile diferenţiale pentru care soluţia se caută sub forma $x(t)$, sau $t(x)$, sau o relaţie de dependenţa algebrico-funcţională între t şi x (fără operatorii de derivare sau integrare), în expresia ecuaţiei poate apărea

x în loc de $x(t)$,

dx în loc de $dx(t)$,

$\frac{dx}{dt}$ în loc de $\frac{dx}{dt}(t)$ sau $\frac{dx(t)}{dt}$ sau $x'(t)$.

○**Exerciţiul 4**. Să se reprezinte grafic soluţiile (curbele integrale) ecuaţiei diferenţiale ordinare

a) $\frac{dx}{dt} = \frac{x+t}{|x+t|}, t \in \mathbb{I}$;**b)** $\frac{dx}{dt} = \frac{|xt|}{xt}, t \in \mathbb{I}$;**c)** $\frac{dx}{dt} = \frac{x-t}{|x-t|}, t \in \mathbb{I}$.

Rezolvare. a) Fie $(*)\ \frac{dx}{dt} = \frac{x+t}{|x+t|}, t \in \mathbb{I}$.

Pentru $t \in \mathbb{I}_x \subseteq \mathbb{I}$, variabilă independentă din domeniul de definiţie al soluţiei, se caută $x = x(t)$ funcţie necunoscută, soluţie pentru ecuaţia $(*)$. Din Convenţie:

$$(*) \Rightarrow x'(t) = \begin{cases} 1 & \text{dacă } x(t)+t > 0 \\ -1 & \text{dacă } x(t)+t < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(t) = t + c_1, & \text{dacă } t + c_1 + t > 0, c_1 \in \mathbb{R} \\ x(t) = -t + c_2, & \text{dacă } -t + c_2 + t < 0, c_2 \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

se obţin două familii de soluţii pentru ecuaţia $(*)$, şi anume,

•pentru fiecare $c_1 \in \mathbb{R}, x : \mathbb{I}_x^1 \to \mathbb{R}, x(t) = t + c_1$,

•pentru fiecare $c_2 \in \mathbb{R}, c_2 < 0, x : \mathbb{I}_x^2 \to \mathbb{R}, x(t) = -t + c_2$.

De precizat că, pentru prima familie de soluţii, domeniul de definiţie a soluţiei, $\mathbb{I}_x^1$, depinde de constanta c_1 (pentru fiecare c_1 se obţine o soluţie cu un anumit domeniu de definiţie şi o anumită lege de asociere). Pentru fiecare $c_1 \in \mathbb{R}$,

$\mathbb{I}_x^1 = \{t \in \mathbb{R}; t + c_1 + t > 0\} = \left]\frac{-c_1}{2}, +\infty\right[$-interval. De exemplu,

•pentru $c_1 = -1$, $x : \left]\frac{1}{2}, +\infty\right[\to \mathbb{R}, x(t) = t - 1$,

•pentru $c_1 = 0$, $x :]0, +\infty[\to \mathbb{R}, x(t) = t$,

•pentru $c_1 = 1$, $x : \left]-\frac{1}{2}, +\infty\right[\to \mathbb{R}, x(t) = t + 1$.

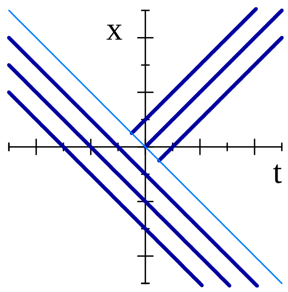
Pentru a doua familie de soluţii toate soluţiile au acelaşi domeniu

$\mathbb{I}_x^2 = \mathbb{R}$. De exemplu,

•pentru $c_2 = -1$, $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x(t) = -t - 1$.

Se obţine următoarea reprezentare grafică a curbelor integrale pentru

$c_1 = 0, c_1 = 1, c_1 = -1, c_2 = -1, c_2 = -2, c_2 = -3$.



b) Fie $(*)\ \frac{dx}{dt} = \frac{|xt|}{xt}, t \in \mathbb{I}$.

Pentru $t \in \mathbb{I}_x \subseteq \mathbb{I}$, variabilă independentă din domeniul de definiţie al soluţiei, se caută $x(t) =?$, x funcţie necunoscută, soluţie pentru ecuaţia $(*)$.

Din Convenţie:

$$(*) \Rightarrow x'(t) = \begin{cases} 1, & \text{dacă } x(t)\cdot t > 0 \\ -1, & \text{dacă } x(t)\cdot t < 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(t) = t + c_1, & \text{dacă } (t+c_1)\,t > 0, c_1 \in \mathbb{R} \\ x(t) = -t + c_2, & \text{dacă } (-t+c_2)\,t < 0, c_2 \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

se obţin două familii de soluţii pentru ecuaţia $(*)$, şi anume,

•pentru fiecare $c_1 \in \mathbb{R}, x : \mathbb{I}_x^1 \to \mathbb{R}, x(t) = t + c_1$,

•pentru fiecare $c_2 \in \mathbb{R}, x : \mathbb{I}_x^2 \to \mathbb{R}, x(t) = -t + c_2$.

De precizat că, pentru prima familie de soluţii, domeniul de definiţie a soluţiei, $\mathbb{I}_x^1$, depinde de constanta c_1 (pentru fiecare c_1 se obţine o soluţie cu un anumit domeniu de definiţie şi o anumită lege de asociere). De exemplu,

•pentru $c_1 = -1$, $x :]-\infty, 0[\cup]1, +\infty[\to \mathbb{R}, x(t) = t - 1$,

•pentru $c_1 = 0$, $x :]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[\to \mathbb{R}, x(t) = t$,

•pentru $c_1 = 1$, $x :]-\infty, -1[\cup]0, +\infty[\to \mathbb{R}, x(t) = t + 1$,

Şi pentru a doua familie de soluţii, domeniul de definiţie a soluţiei, $\mathbb{I}_x^2$, depinde de constanta c_2 (pentru fiecare c_2 se obţine o soluţie cu un anumit domeniu de definiţie şi o anumită lege de asociere). De exemplu,

•pentru $c_2 = -1$, $x :]-\infty, -1[\cup]0, +\infty[\to \mathbb{R}, x(t) = -t - 1$,

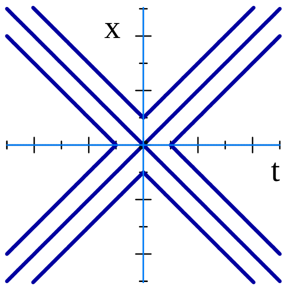
•pentru $c_2 = 0$, $x :]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[\to \mathbb{R}, x(t) = -t$,

•pentru $c_2 = 1$, $x :]-\infty, 0[\cup]1, +\infty[\to \mathbb{R}, x(t) = -t + 1$.

De fapt, soluţiile sunt definite pe un interval inclus în $\mathbb{I}_x$.

Se obţine următoarea reprezentare grafică a curbelor integrale pentru

$c_1 = 0, c_1 = 1, c_1 = -1, c_2 = 0, c_2 = 1, c_2 = -1$.



c) Fie $(*)\ \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{x-t}{|x-t|}, t \in \mathbb{I}$.

Pentru $t \in \mathbb{I}_x \subseteq \mathbb{I}$, variabilă independentă din domeniul de definiţie al soluţiei, se caută $x(t) = ?$, x funcţie necunoscută, soluţie pentru ecuaţia $(*)$. Din Convenţie:

$$(*) \Rightarrow x'(t) = \begin{cases} 1, & \text{dacă } x(t) - t > 0 \\ -1, & \text{dacă } x(t) - t < 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(t) = t + c_1, & \text{dacă } t + c_1 - t > 0, c_1 \in \mathbb{R} \\ x(t) = -t + c_2, & \text{dacă } -t + c_2 - t < 0, c_2 \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

se obţin doua familii de soluţii pentru ecuaţia $(*)$, şi anume,

•pentru fiecare $c_1 \in \mathbb{R}$, $c_1 > 0$, $x : \mathbb{I}_x^1 \to \mathbb{R}, x(t) = t + c_1$,

•pentru fiecare $c_2 \in \mathbb{R}$, $x : \mathbb{I}_x^2 \to \mathbb{R}, x(t) = -t + c_2$.

De precizat că, pentru a prima familie de soluţii toate soluţiile au acelaşi domeniu $\mathbb{I}_x^1 = \mathbb{R}$. Pentru a doua familie de soluţii, domeniul de definiţie a soluţiei, $\mathbb{I}_x^2$, depinde de constanta c_2 (pentru fiecare c_2 se obţine o soluţie cu un anumit domeniu de definiţie şi o anumită lege de asociere). De exemplu,

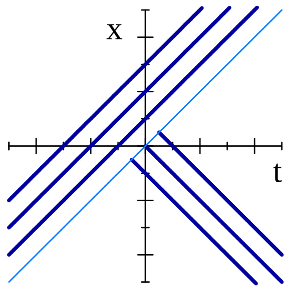
•pentru $c_2 = -1$, $x : \left]-\frac{1}{2}, +\infty\right[\to \mathbb{R}, x(t) = -t - 1$,

•pentru $c_2 = 0$, $x :]0, +\infty[\to \mathbb{R}, x(t) = -t$,

•pentru $c_2 = 1$, $x : \left]\frac{1}{2}, +\infty\right[\to \mathbb{R}, x(t) = -t + 1$.

Se obţine următoarea reprezentare grafică a curbelor integrale pentru.

$c_1 = 1, c_1 = 2, c_1 = 3, c_2 = 0, c_2 = 1, c_2 = -1$.



1.2. Ecuaţii diferenţiale cu variabile separabile

Forma generală a unei ecuaţii diferenţiale cu variabile separabile:

$\boxed{x'(t) = f(t)\,g(x(t))}$ sau (1)

$\boxed{\dfrac{dx}{dt} = f(t)\,g(x)}$ (1′)

unde $f : \mathbb{I} \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g : \mathbb{J} \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sunt două funcţii continue cu $g(z) \neq 0$, $\forall z \in \mathbb{J}$.

Rezolvare. Pentru $t \in \mathbb{I}_x \subseteq \mathbb{I}$, variabilă independentă din domeniul de definiţie a soluţiei, se caută $x = x(t)$ funcţie necunoscută de clasă $\mathcal{C}^1$, soluţie pentru ecuaţiile (1) sau (1′).

mod detaliat. Utilizând ipotezele,

$$(1) \Rightarrow \frac{x'(t)}{g(x(t))} = f(t), \forall t \in \mathbb{I}_x \Rightarrow \int \frac{x'(t)}{g(x(t))}dt = \int f(t)\,dt, \forall t \in \mathbb{I}_x \Rightarrow$$
$$x(t) = G^{-1}\left(\int f(t)\,dt + c\right), \forall t \in \mathbb{I}_x, c \in \mathbb{I}_c \subseteq \mathbb{R}.$$

Ultima relaţie reprezintă soluţia generală a ecuaţiilor (1) sau (1′) sub formă explicită. Domeniul de definiţie a soluţiei, $\mathbb{I}_x$, depinde de constanta c (pentru fiecare c se obţine o soluţie cu un anumit domeniu de definiţie şi o anumită lege de asociere).

mod prescurtat. Subînţelegând argumentele,

$$(1') \Rightarrow \frac{dx}{g(x)} = f(t)\,dt, \forall t \in \mathbb{I}_x \Big| \int_{EVS} \Rightarrow \int \frac{1}{g(x)}dx = \int f(t)\,dt, \forall t \in \mathbb{I}_x \Rightarrow$$
$$x(t) = G^{-1}\left(\int f(t)\,dt + c\right), \forall t \in \mathbb{I}_x, c \in \mathbb{I}_c \subseteq \mathbb{R}.$$

Exerciţiul 5. Să se determine soluţiile generale ale următoarelor ecuaţii diferenţiale cu variabile separabile:

a) $tx'(t) = x^3(t) + x(t), t \in \mathbb{I}$; **b)** $tdx(t) - x(t)\,dt = x^2(t)\,dt, t \in \mathbb{I}$;

c) $\sqrt{1+t^2}\dfrac{dx}{dt}(t) - \sin x(t) = 0, t \in \mathbb{I}$; **d)** $x'(t)\operatorname{tg} t - x(t) = 0, t \in \mathbb{I}$;

e) $t^2(x(t)+1)\,dt + \left(t^3 - 1\right)(x(t) - 1)\,dx(t) = 0, t \in \mathbb{I}$;

f) $3x^2(t)\,x'(t) = t\left(x^3(t) - 1\right), t \in \mathbb{I}$; **g)** $x' = \sqrt{\dfrac{1+x-x^2}{1+t+t^2}}, t \in \mathbb{I}$;

h) $\dfrac{3x+2}{t+1}x' = \dfrac{x^2+4}{\sqrt{t^2+2t+13}}, t \in \mathbb{I}$; **i)** $x(t)\,x'(t) = -2t\sec x(t), t \in \mathbb{I}$;

j) $x'(t) = \dfrac{\cos x(t) - \sin x(t) - 1}{\cos t - \sin t - 1}, t \in \mathbb{I}$; **k)** $x' + \cos(t+2x) = \cos(t-2x), t \in \mathbb{I}$;

l) $x' \cdot \cos^2 t \cdot \cos x = -\operatorname{tg} t \cdot \sin^2 x, t \in \mathbb{I}$;

m) $x'\left(t^2+1\right) = x^2t^2, t \in \mathbb{I}$; **n)** $xdt + \cos t \ln x dx = 0, t \in \mathbb{I}$;

o) $x'\left(t^2+1\right) = xt(x+1), t \in \mathbb{I}$; **p)** $txdt + (t+1)\,dx = 0, t \in \mathbb{I}$;

q) $\sqrt{x^2+1} = tx \cdot x', t \in \mathbb{I}$; **r)** $\left(t^2-1\right)x' + 2tx^2 = 0, t \in \mathbb{I}$;
s) $x' - tx^2 = 2tx, t \in \mathbb{I}$; **t)** $x' = 10^{x+t}, t \in \mathbb{I}$.
Rezolvare. a) A se vedea Curs.
b) Fie $(*)\; tdx\,(t) - x\,(t)\,dt = x^2\,(t)\,dt, t \in \mathbb{I}$.
Pentru $t \in \mathbb{I}_x \subseteq \mathbb{I}$, variabilă independentă din domeniul de definiţie al soluţiei, se caută $x = x\,(t)$ funcţie necunoscută, soluţie pentru ecuaţia $(*)$.
•Se observă că

$x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x\,(t) = 0,$

$x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x\,(t) = -1$ sunt soluţii singulare pentru ecuaţia $(*)$.

•Se caută şi alte soluţii decât cele singulare.
mod detaliat. Folosind Convenţia, se obţine

$$(*) \Rightarrow \frac{x'\,(t)}{x\,(t)+x^2\,(t)} = \frac{1}{t}, \forall t \in \mathbb{I}_x \text{ a.î. } (t \neq 0 \text{ şi } x\,(t) \neq 0, x\,(t) \neq -1) \Big| \int (\cdot)\,dt \Rightarrow$$

$$\int \frac{x'\,(t)}{x\,(t)+x^2\,(t)}dt = \int \frac{1}{t}dt, \forall t \in \mathbb{I}_x \text{ a.î. } (t \neq 0 \text{ şi } x\,(t) \neq 0, x\,(t) \neq -1) \Rightarrow$$

$$\int \left(\frac{x'\,(t)}{x\,(t)} - \frac{x'\,(t)}{x\,(t)+1}\right)dt = \int \frac{1}{t}dt, \forall t \in \mathbb{I}_x \text{ a.î. } (t \neq 0 \text{ şi } x\,(t) \neq 0, x\,(t) \neq -1) \Rightarrow$$

$$\ln|x\,(t)| - \ln|x\,(t)+1| = \ln|t| + \ln k, \forall t \in \mathbb{I}_x \text{ a.î. } (t \neq 0 \text{ şi } x\,(t) \neq 0, x\,(t) \neq -1) \text{ şi } k > 0 \Rightarrow$$

$$\frac{|x\,(t)|}{|x\,(t)+1|} = k\,|t|, \forall t \in \mathbb{I}_x \text{ a.î. } (t \neq 0 \text{ şi } x\,(t) \neq 0, x\,(t) \neq -1) \text{ şi } k > 0 \Rightarrow$$

$$(**)\; \frac{x\,(t)}{x\,(t)+1} = ct, \forall t \in \mathbb{I}_x \text{ a.î. } (t \neq 0 \text{ şi } x\,(t) \neq 0, x\,(t) \neq -1) \text{ şi } c \in \mathbb{R}^*.$$

Ultima relaţie reprezintă soluţia generală a ecuaţiei $(*)$ sub formă implicită. Soluţia generală a ecuaţiei $(*)$ este dată, sub formă explicită, pentru fiecare $c \in \mathbb{R}^*$, de

$$x : \mathbb{I}_x \to \mathbb{R}, x\,(t) = \frac{ct}{1-ct}, \forall t \in \mathbb{I}_x,$$

unde domeniul de definiţie a soluţiei, $\mathbb{I}_x$, depinde de constanta c. Pentru fiecare $c \in \mathbb{R}^*$,

$$\mathbb{I}_x \subseteq \left\{t \in \mathbb{R}; 1-ct \neq 0, t \neq 0 \text{ şi } \frac{ct}{1-ct} \neq 0, \frac{ct}{1-ct} \neq -1\right\}.$$

mod prescurtat. Folosind Convenţia, se obţine

$$(*) \Rightarrow \frac{dx}{x+x^2} = \frac{1}{t}dt, \forall t \in \mathbb{I}_x \text{ a.î. } (t \neq 0 \text{ şi } x\,(t) \neq 0, x\,(t) \neq -1) \Big| \int_{EVS} \Rightarrow$$

$$\int \frac{dx}{x+x^2} = \int \frac{1}{t}dt, \forall t \in \mathbb{I}_x \text{ a.î. } (t \neq 0 \text{ şi } x\,(t) \neq 0, x\,(t) \neq -1) \Rightarrow$$

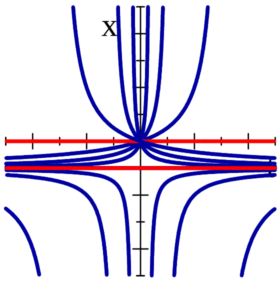
$$\int \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right)dx = \int \frac{1}{t}dt, \forall t \in \mathbb{I}_x \text{ a.î. } (t \neq 0 \text{ şi } x\,(t) \neq 0, x\,(t) \neq -1) \Rightarrow$$

$$\ln|x| - \ln|x+1| = \ln|t| + \ln k, \forall t \in \mathbb{I}_x \text{ a.î. } (t \neq 0 \text{ şi } x\,(t) \neq 0, x\,(t) \neq -1) \text{ şi } k > 0 \Rightarrow$$

$$\frac{|x|}{|x+1|} = k\,|t|, \forall t \in \mathbb{I}_x \text{ a.î. } (t \neq 0 \text{ şi } x\,(t) \neq 0, x\,(t) \neq -1) \text{ şi } k > 0 \Rightarrow$$

$$\boxed{(**)\; \frac{x}{x+1} = ct, \forall t \in \mathbb{I}_x \text{ a.î. } (t \neq 0 \text{ şi } x\,(t) \neq 0, x\,(t) \neq -1) \text{ şi } c \in \mathbb{R}^*.}$$

Ultima relaţie reprezintă soluţia generală a ecuaţiei $(*)$ sub formă implicită.



c) Fie $(*)$ $\sqrt{1+t^2}\dfrac{dx}{dt}(t) - \sin x(t) = 0, t \in \mathbb{I}.$

Pentru $t \in \mathbb{I}_x \subseteq \mathbb{I}$, variabilă independentă din domeniul de definiţie al soluţiei, se caută $x = x(t)$ funcţie necunoscută, soluţie pentru ecuaţia $(*)$.

•Se observă că, pentru fiecare $l \in \mathbb{Z}$,

$x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x(t) = l\pi$ sunt soluţii singulare pentru ecuaţia $(*)$.

•Se caută şi alte soluţii decât cele singulare.

mod detaliat. Folosind Convenţia, se obţine

$$(*) \Rightarrow \frac{x'(t)}{\sin x(t)} = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}, \forall t \in \mathbb{I}_x \text{ a.î. } x(t) \notin \{l\pi; l \in \mathbb{Z}\} \Big| \int (\cdot)\, dt \Rightarrow$$

$$\int \frac{x'(t)}{\sin x(t)} dt = \int \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} dt, \forall t \in \mathbb{I}_x \text{ a.î. } x(t) \notin \{l\pi; l \in \mathbb{Z}\} \Rightarrow$$

$$\ln \left| \operatorname{tg} \frac{x(t)}{2} \right| = \ln\left(t + \sqrt{1+t^2}\right) + \ln k, \forall t \in \mathbb{I}_x \text{ a.î. } x(t) \notin \{l\pi; l \in \mathbb{Z}\} \text{ şi } k > 0 \Rightarrow$$

$$\left| \operatorname{tg} \frac{x(t)}{2} \right| = k\left(t + \sqrt{1+t^2}\right), \forall t \in \mathbb{I}_x \text{ a.î. } x(t) \notin \{l\pi; l \in \mathbb{Z}\} \text{ şi } k > 0 \Rightarrow$$

$$(**)\ \operatorname{tg} \frac{x(t)}{2} = c\left(t + \sqrt{1+t^2}\right), \forall t \in \mathbb{I}_x \text{ a.î. } x(t) \notin \{l\pi; l \in \mathbb{Z}\} \text{ şi } c \in \mathbb{R}^*.$$

Ultima relaţie reprezintă soluţia generală a ecuaţiei $(*)$ sub formă implicită. Soluţia generală a ecuaţiei $(*)$ este dată, sub formă explicită, pentru fiecare $c \in \mathbb{R}^*$, de

$$x : \mathbb{I}_x \to \mathbb{R}, x(t) = 2 \operatorname{arctg}\left(c\left(t + \sqrt{1+t^2}\right)\right), \forall t \in \mathbb{I}_x,$$

unde domeniul de definiţie a soluţiei, $\mathbb{I}_x$, depinde de constanta c. Pentru fiecare $c \in \mathbb{R}^*$,

$$\mathbb{I}_x \subseteq \left\{t \in \mathbb{R}; \sin\left(2 \operatorname{arctg}\left(c\left(t + \sqrt{1+t^2}\right)\right)\right) \neq 0\right\}.$$

mod prescurtat. Folosind Convenţia, se obţine

$$(*) \Rightarrow \frac{x'(t)}{\sin x(t)} = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}, \forall t \in \mathbb{I}_x \text{ a.î. } x(t) \notin \{l\pi; l \in \mathbb{Z}\} \Big| \int_{EVS} \Rightarrow$$

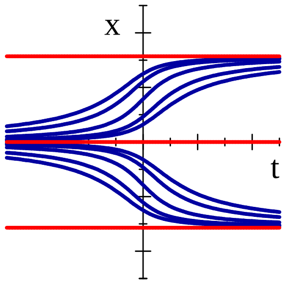
$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} dt, \forall t \in \mathbb{I}_x \text{ a.î. } x(t) \notin \{l\pi; l \in \mathbb{Z}\} \Rightarrow$$

$$\ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| = \ln\left(t + \sqrt{1+t^2}\right) + \ln k, \forall t \in \mathbb{I}_x \text{ a.î. } x(t) \notin \{l\pi; l \in \mathbb{Z}\} \text{ şi } k > 0 \Rightarrow$$

$$\left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| = k\left(t + \sqrt{1+t^2}\right), \forall t \in \mathbb{I}_x \text{ a.î. } x(t) \notin \{l\pi; l \in \mathbb{Z}\} \text{ şi } k > 0 \Rightarrow$$

$$\boxed{(**)\ \operatorname{tg} \frac{x}{2} = c\left(t + \sqrt{1+t^2}\right), \forall t \in \mathbb{I}_x \text{ a.î. } x(t) \notin \{l\pi; l \in \mathbb{Z}\} \text{ şi } c \in \mathbb{R}^*.}$$

Ultima relaţie reprezintă soluţia generală a ecuaţiei $(*)$ sub formă implicită.



d) Fie $(*)$ $x'(t)\operatorname{tg} t - x(t) = 0, t \in \mathbb{I}$.
Pentru $t \in \mathbb{I}_x \subseteq \mathbb{I}$, variabilă independentă din domeniul de definiţie al soluţiei, se caută $x = x(t)$ funcţie necunoscută, soluţie pentru ecuaţia $(*)$.
•Se observă că
$x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x(t) = 0$ este soluţie singulară pentru ecuaţia $(*)$.
•Se caută şi alte soluţii decât cea singulară.

$$(*) \Rightarrow \frac{x'(t)}{x(t)} = \frac{1}{\operatorname{tg} t}, \forall t \in \mathbb{I}_x \text{ a.î. } \left(t \notin \left\{\tfrac{l\pi}{2}; l \in \mathbb{Z}\right\} \text{ şi } x(t) \neq 0\right) \Big| \int (\cdot)\, dt \Rightarrow$$

$$\int \frac{x'(t)}{x(t)} dt = \int \frac{1}{\operatorname{tg} t} dt, \forall t \in \mathbb{I}_x \text{ a.î. } \left(t \notin \left\{\tfrac{l\pi}{2}; l \in \mathbb{Z}\right\} \text{ şi } x(t) \neq 0\right) \Rightarrow$$

$$\ln|x(t)| = -\ln|\sin t| + \ln k, \forall t \in \mathbb{I}_x \text{ a.î. } \left(t \notin \left\{\tfrac{l\pi}{2}; l \in \mathbb{Z}\right\}, x(t) \neq 0\right) \text{ şi } k \in \mathbb{R}_+^* \Rightarrow$$

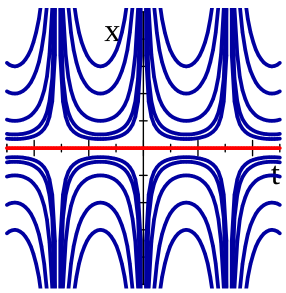
$$|x(t)| = \frac{k}{|\sin t|}, \forall t \in \mathbb{I}_x \text{ a.î. } \left(t \notin \left\{\tfrac{l\pi}{2}; l \in \mathbb{Z}\right\} \text{ şi } x(t) \neq 0\right) \text{ şi } k \in \mathbb{R}_+^* \Rightarrow$$

$$(**)\ x(t) = \frac{c}{\sin t}, \forall t \in \mathbb{I}_x \text{ a.î. } \left(t \notin \left\{\tfrac{l\pi}{2}; l \in \mathbb{Z}\right\} \text{ şi } x(t) \neq 0\right) \text{ şi } c \in \mathbb{R}^*.$$

Soluţia generală a ecuaţiei $(*)$ este dată, sub formă explicită, pentru fiecare $c \in \mathbb{R}^*$, de

$$x : \mathbb{I}_x \to \mathbb{R}, x(t) = \frac{c}{\sin t}, \forall t \in \mathbb{I}_x,$$

unde domeniul de definiţie a soluţiei, $\mathbb{I}_x$,este un interval care nu conţine nici un $t = \frac{l\pi}{2}$, $l \in \mathbb{Z}$.

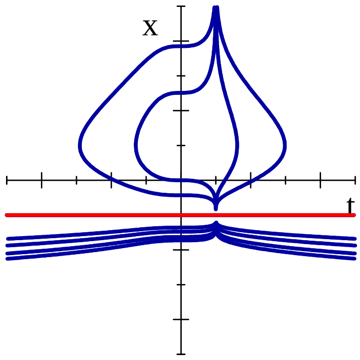


e) Fie $(*)$ $t^2(x(t)+1)\,dt + \left(t^3-1\right)(x(t)-1)\,dx(t) = 0, t \in \mathbb{I}$.
Pentru $t \in \mathbb{I}_x \subseteq \mathbb{I}$, variabilă independentă din domeniul de definiţie al soluţiei, se caută $x = x(t)$ funcţie necunoscută, soluţie pentru ecuaţia $(*)$.
•Se observă că
$x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x(t) = -1$ este soluţie singulară pentru ecuaţia $(*)$.
•Se caută şi alte soluţii decât cea singulară. Folosind Convenţia, se obţine

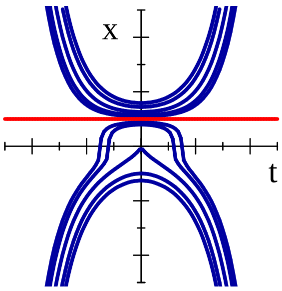
$$(*) \Rightarrow \frac{(x(t)-1)\,x'(t)}{x(t)+1} = \frac{-t^2}{t^3-1}, \forall t \in \mathbb{I}_x \text{ a.î. } (t \neq 1 \text{ şi } x(t) \neq -1) \Big| \int (\cdot)\, dt \Rightarrow$$

$$\int \frac{(x(t)-1)\,x'(t)}{x(t)+1} dt = \int \frac{-t^2}{t^3-1} dt, \forall t \in \mathbb{I}_x \text{ a.î. } (t \neq 1 \text{ şi } x(t) \neq -1) \Rightarrow$$

$\int \left(x'(t) - \frac{2x'(t)}{x(t)+1} \right) dt = \int \frac{-t^2}{t^3-1} dt, \forall t \in \mathbb{I}_x$ a.î. ($t \neq 1$ şi $x(t) \neq -1$) $\Rightarrow$
$x(t) - 2\ln|x(t)+1| = -\frac{1}{3}\ln\left|t^3-1\right| + \ln k, \forall t \in \mathbb{I}_x$ a.î. ($t \neq 1, x(t) \neq -1$) şi $k \in \mathbb{R}_+^* \Rightarrow$
$\frac{e^{x(t)}}{|x(t)+1|^2} = \frac{k}{\sqrt[3]{|t^3-1|}}, \forall t \in \mathbb{I}_x$ a.î. ($t \neq 1$ şi $x(t) \neq -1$) şi $k \in \mathbb{R}_+^* \Rightarrow$
$(**)\ \frac{e^{x(t)}}{(x(t)+1)^2} = \frac{c}{\sqrt[3]{|t^3-1|}}, \forall t \in \mathbb{I}_x$ a.î. ($t \neq 1$ şi $x(t) \neq -1$) şi $c \in \mathbb{R}_+^*$.
Ultima relaţie reprezintă soluţia generală a ecuaţiei $(*)$ sub formă implicită. Local, s-ar putea explicita $x : \mathbb{I}_x \to \mathbb{R}$,unde domeniul de definiţie a soluţiei, $\mathbb{I}_x$, depinde de constanta c (pentru fiecare c se obţine o soluţie cu un anumit domeniu de definiţie şi o anumită lege de asociere).



f) Fie $(*)\ 3x^2(t)x'(t) = t\left(x^3(t)-1\right), t \in \mathbb{I}$.
Pentru $t \in \mathbb{I}_x \subseteq \mathbb{I}$, variabilă independentă din domeniul de definiţie al soluţiei, se caută $x = x(t)$ funcţie necunoscută, soluţie pentru ecuaţia $(*)$.
•Se observă că
$x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x(t) = 1$ este soluţie singulară pentru ecuaţia $(*)$.
•Se caută şi alte soluţii decât cea singulară.
$(*) \Rightarrow \frac{3x^2(t)x'(t)}{x^3(t)-1} = t, \forall t \in \mathbb{I}_x$ a.î. $x(t) \neq 1 \Big| \int (\cdot)\, dt \Rightarrow$
$\int \frac{3x^2(t)x'(t)}{x^3(t)-1} dt = \int t dt, \forall t \in \mathbb{I}_x$ a.î. $x(t) \neq 1 \Rightarrow$
$\ln\left|x^3(t)-1\right| = \frac{t^2}{2} + \ln k, \forall t \in \mathbb{I}_x$ a.î. $x(t) \neq 1$ şi $k \in \mathbb{R}_+^* \Rightarrow$
$\left|x^3(t)-1\right| = ke^{\frac{t^2}{2}}, \forall t \in \mathbb{I}_x$ a.î. $x(t) \neq 1$ şi $k \in \mathbb{R}_+^* \Rightarrow$
$(**)\ x^3(t) - 1 = ce^{\frac{t^2}{2}}, \forall t \in \mathbb{I}_x$ a.î. $x(t) \neq 1$ şi $c \in \mathbb{R}^*$.
Ultima relaţie reprezintă soluţia generală a ecuaţiei $(*)$ sub formă implicită. Soluţia generală a ecuaţiei $(*)$ este dată, sub formă explicită, pentru fiecare $c \in \mathbb{R}^*$, de
$x : \mathbb{I}_x \to \mathbb{R}, x(t) = \sqrt[3]{ce^{\frac{t^2}{2}} + 1}, \forall t \in \mathbb{I}_x$,
unde domeniul de definiţie a soluţiei, $\mathbb{I}_x$, depinde de constanta c. Pentru fiecare $c \in \mathbb{R}^*$,
$\mathbb{I}_x \subseteq \left\{ t \in \mathbb{R};\ \sqrt[3]{ce^{\frac{t^2}{2}} + 1} \neq 1 \right\}$.



g) Fie $(*)$ $x' = \sqrt{\dfrac{1+x-x^2}{1+t+t^2}}, t \in \mathbb{I}$.

Pentru $t \in \mathbb{I}_x \subseteq \mathbb{I}$, variabilă independentă din domeniul de definiţie al soluţiei, se caută $x = x(t)$ funcţie necunoscută, soluţie pentru ecuaţia $(*)$.

•Se observă că

$x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x(t) = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$,

$x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x(t) = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ sunt soluţii singulare pentru ecuaţia $(*)$.

•Se caută şi alte soluţii decât cele singulare. Folosind Convenţiile 1 şi 2 se obţine

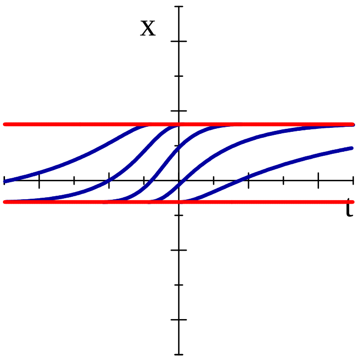
$$(*) \Rightarrow \frac{x'(t)}{\sqrt{1+x(t)-x^2(t)}} = \frac{1}{\sqrt{1+t+t^2}},$$

pentru $\forall t \in \mathbb{I}_x$ a.î. $x(t) \notin \left\{\frac{1+\sqrt{5}}{2}, \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right\}$, $1+x(t)-x^2(t) > 0$ şi $.| \int (\cdot)\, dt \Rightarrow$

$$\int \frac{x'(t)}{\sqrt{\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2 - \left(x(t)-\frac{1}{2}\right)^2}} dt = \int \frac{1}{\sqrt{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}} dt \Rightarrow$$

$$(**) \ \arcsin \frac{2x(t)-1}{\sqrt{5}} = \ln\left|t+\tfrac{1}{2}+\sqrt{1+t+t^2}\right| + c,$$

pentru $\forall t \in \mathbb{I}_x$ a.î. $x(t) \notin \left\{\frac{1+\sqrt{5}}{2}, \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right\}$ şi $c \in \mathbb{R}$. Ultima relaţie reprezintă soluţia generală a ecuaţiei $(*)$ sub formă implicită. Local, s-ar putea explicita $x : \mathbb{I}_x \to \mathbb{R}$,unde domeniul de definiţie a soluţiei, $\mathbb{I}_x$, depinde de constanta c (pentru fiecare c se obţine o soluţie cu un anumit domeniu de definiţie şi o anumită lege de asociere).



h) Fie $(*)$ $\dfrac{3x+2}{t+1}x' = \dfrac{x^2+4}{\sqrt{t^2+2t+13}}, t \in \mathbb{I}$;

Pentru $t \in \mathbb{I}_x \subseteq \mathbb{I}$, variabilă independentă din domeniul de definiţie al soluţiei, se caută $x = x(t)$ funcţie necunoscută, soluţie pentru ecuaţia $(*)$. se caută soluţii pentru ecuaţia $(*)$. Folosind Convenţiile 1 şi 2 se obţine

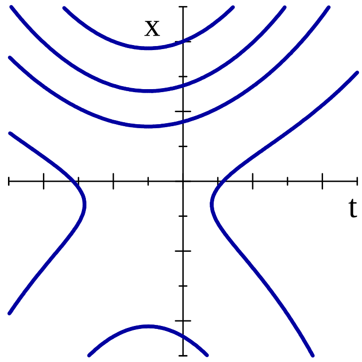
$(*) \Rightarrow \dfrac{(3x(t)+2)\,x'(t)}{x^2(t)+4} = \dfrac{t+1}{\sqrt{t^2+2t+13}}, \forall t \in \mathbb{I}_x$ a.î. $t \neq -1 \Big| \int(\cdot)\,dt \Rightarrow$

$\displaystyle\int \frac{(3x(t)+2)\,x'(t)}{x^2(t)+4}dt = \int \frac{t+1}{\sqrt{t^2+2t+13}}dt \Rightarrow$

$\displaystyle\int \left(\frac{3}{2}\frac{2x(t)\,x'(t)}{x^2(t)+4} + 2\frac{x'(t)}{x^2(t)+4}\right)dt = \int \tfrac{1}{2}\left(t^2+2t+13\right)^{\frac{-1}{2}}(2t+2)\,dt \Rightarrow$

$(**)\ \dfrac{3}{2}\ln\left|x^2(t)+4\right| + \operatorname{arctg}\dfrac{x(t)}{2} = \sqrt{t^2+2t+13}+c,$

pentru $\forall t \in \mathbb{I}_x$ a.î. $t \neq -1$ şi $c \in \mathbb{R}$. Ultima relaţie reprezintă soluţia generală a ecuaţiei $(*)$ sub formă implicită. Local, s-ar putea explicita $x : \mathbb{I}_x \to \mathbb{R}$,unde domeniul de definiţie a soluţiei, $\mathbb{I}_x$, depinde de constanta c (pentru fiecare c se obţine o soluţie cu un anumit domeniu de definiţie şi o anumită lege de asociere).



i) Fie

$(*)\ \ x(t)\,x'(t) = -2t\sec x(t)\,, t \in \mathbb{I}.$

Pentru $t \in \mathbb{I}_x \subseteq D$, variabilă independentă din domeniul de definiţie al soluţiei, se caută $x = x(t)$ funcţie necunoscută, soluţie pentru ecuaţia $(*)$.

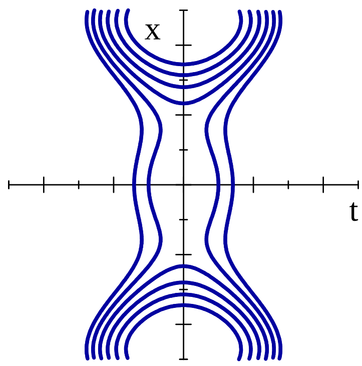
$(*) \Rightarrow \dfrac{x(t)\,x'(t)}{\sec x(t)} = -2t, \forall t \in \mathbb{I}_x$ a.î. $(t \neq 0$ şi $x(t) \neq 0) \Big| \int(\cdot)\,dt \Rightarrow$

$\displaystyle\int \frac{x(t)\,x'(t)}{\sec x(t)}dt = \int(-2t)\,dt, \forall t \in \mathbb{I}_x$ a.î. $(t \neq 0$ şi $x(t) \neq 0) \Rightarrow$

$\int x(t)(\cos x(t))\,x'(t)\,dt = \int(-2t)\,dtdt, \forall t \in \mathbb{I}_x$ a.î. $(t \neq 0$ şi $x(t) \neq 0) \Rightarrow$

$x(t)\sin x(t) + \cos x(t) = -t^2 + c, \forall t \in \mathbb{I}_x$ a.î. $(t \neq 0$ şi $x(t) \neq 0)$ şi $c \in \mathbb{R}$.

Ultima relaţie reprezintă soluţia generală a ecuaţiei $(*)$ sub formă implicită. Local, s-ar putea explicita $x : \mathbb{I}_x \to \mathbb{R}$,unde domeniul de definiţie a soluţiei, $\mathbb{I}_x$, depinde de constanta c (pentru fiecare c se obţine o soluţie cu un anumit domeniu de definiţie şi o anumită lege de asociere).



○**j)** Fie

$(*)\ \ x'(t)=\dfrac{\cos x(t)-\sin x(t)-1}{\cos t-\sin t-1},t\in\mathbb{I}$

Pentru $t\in\mathbb{I}_x\subseteq D$, variabilă independentă din domeniul de definiţie al soluţiei, se caută $x=x(t)$ funcţie necunoscută, soluţie pentru ecuaţia $(*)$.

Se rezolvă întâi ecuaţia trigonometrică

$\cos t-\sin t-1=0,$

adică se determină punctele din plan situate pe cercul trigonometric, $M(\cos t,\sin t)$. Se notează $u=\cos t$ şi $v=\sin t$. A rezolva ecuaţia trigonometrică anterioară revine la a rezolva sistemul

$\begin{cases} u-v-1=0\\ u^2+v^2=1.\end{cases}$

Se obţine $(u,v)=(1,0)$ sau $(u,v)=(0,-1)$, adică $(\cos t,\sin t)=(1,0)$ sau $(\cos t,\sin t)=(0,-1)$. Atunci $t\in\{0+2\pi l;l\in\mathbb{Z}\}\cup\left\{\frac{3\pi}{2}+2\pi m;m\in\mathbb{Z}\right\}$.

•Se observă că, pentru fiecare $n\in\mathbb{Z}$, $x:\mathbb{I}\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R},x(t)=2\pi n$,

şi pentru fiecare $p\in\mathbb{Z}$, $x:\mathbb{I}\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R},x(t)=\frac{3\pi}{2}+2\pi p$, sunt soluţii singulare pentru ecuaţia $(*)$. $\mathbb{I}\subseteq\mathbb{R}$ este un interval ce nu conţine $\{0+2\pi l;l\in\mathbb{Z}\}\cup\left\{\frac{3\pi}{2}+2\pi m;m\in\mathbb{Z}\right\}$.

•Se caută şi alte soluţii decât cea singulară.

$(*)\Rightarrow\dfrac{x'(t)}{\cos x(t)-\sin x(t)-1}=\dfrac{1}{\cos t-\sin t-1},$

pentru $\forall t\in\mathbb{I}_x$ a.î. $\left(t\notin\{0+2\pi l;l\in\mathbb{Z}\}\cup\left\{\frac{3\pi}{2}+2\pi m;m\in\mathbb{Z}\right\}\right.$ şi $x(t)\notin\{0+2\pi l;l\in\mathbb{Z}\}\cup\left.\left\{\frac{3\pi}{2}+2\pi m;m\in\mathbb{Z}\right\}\right).|\int(\cdot)\,dt\Rightarrow$

$$\int\frac{x'(t)}{\cos x(t)-\sin x(t)-1}dt=\int\frac{1}{\cos t-\sin t-1}dt.$$

Se notează

$$\mathcal{I}=\int\frac{1}{\cos y-\sin y-1}dy.$$

Făcând substituţia $\operatorname{tg}\frac{y}{2}=z$ pe intervalul corespunzător, se obţine

$$\int\frac{1}{\frac{1-z^2}{1+z^2}-\frac{2z}{1+z^2}-1}\cdot\frac{2}{1+z^2}dz=-\int\frac{1}{z(z+1)}dz\Rightarrow$$

$\mathcal{I}=\ln\left|\operatorname{tg}\frac{y}{2}+1\right|-\ln\left|\operatorname{tg}\frac{y}{2}\right|+c,y\in\mathbb{J},\ c\in\mathbb{R}.$

Atunci $(*)\Rightarrow$

$$\ln\left|\operatorname{ctg}\frac{x(t)}{2}+1\right|=\ln\left|\operatorname{ctg}\frac{t}{2}+1\right|+\ln k,$$

pentru $\forall t\in\mathbb{I}_x$ a.î. $\left(t\notin\{2\pi l;l\in\mathbb{Z}\}\cup\left\{\frac{3\pi}{2}+2\pi m;m\in\mathbb{Z}\right\}\right.$ şi $\left.x(t)\notin\{2\pi l;l\in\mathbb{Z}\}\cup\left\{\frac{3\pi}{2}+2\pi m;m\in\mathbb{Z}\right\}\right)$ şi $k\in\mathbb{R}_+^*\Rightarrow$

$$\left|\operatorname{ctg}\frac{x(t)}{2}+1\right|=k\left|\operatorname{ctg}\frac{t}{2}+1\right|,$$

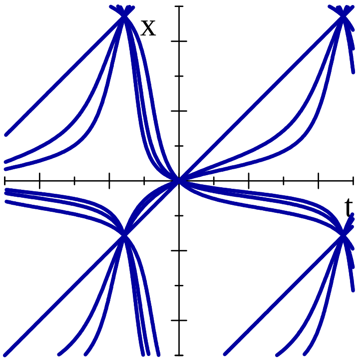
pentru$\forall t\in\mathbb{I}_x$ a.î. $\left(t\notin\{2\pi l;l\in\mathbb{Z}\}\cup\left\{\frac{3\pi}{2}+2\pi m;m\in\mathbb{Z}\right\}\right.$ şi $\left.x(t)\notin\{2\pi l;l\in\mathbb{Z}\}\cup\left\{\frac{3\pi}{2}+2\pi m;m\in\mathbb{Z}\right\}\right)$ şi $k\in\mathbb{R}_+^*\Rightarrow$

$$(**)\ \operatorname{ctg}\frac{x(t)}{2}+1=c\left(\operatorname{ctg}\frac{t}{2}+1\right),$$

pentru $\forall t\in\mathbb{I}_x$ a.î. $\left(t\notin\{0+2\pi l;l\in\mathbb{Z}\}\cup\left\{\frac{3\pi}{2}+2\pi m;m\in\mathbb{Z}\right\}\right.$ şi $x(t)\notin\{0+2\pi l;l\in\mathbb{Z}\}\cup\left.\left\{\frac{3\pi}{2}+2\pi m;m\in\mathbb{Z}\right\}\right)$ şi $c\in\mathbb{R}^*$. Ultima relaţie reprezintă soluţia generală a ecuaţiei $(*)$ sub formă implicită. Se poate afirma şi că soluţia generală a ecuaţiei $(*)$ este dată sub formă explicită, pentru fiecare $c\in\mathbb{R}^*$, de familia de funcţii

$$x:\mathbb{I}_x\to\mathbb{R},x(t)=2\operatorname{arcctg}\left(-1+c\left(\operatorname{ctg}\frac{t}{2}+1\right)\right),\forall t\in\mathbb{I}_x,$$

unde domeniul de definiţie a soluţiei, $\mathbb{I}_x$, depinde de constanta c (pentru fiecare c se obţine o soluţie cu un anumit domeniu de definiţie şi o anumită lege de asociere).



◯**k)** Fie

$(*)\ \ x' + \cos(t + 2x) = \cos(t - 2x), t \in \mathbb{I}$

Pentru $t \in \mathbb{I}_x \subseteq D$, variabilă independentă din domeniul de definiţie al soluţiei, se caută $x = x(t)$ funcţie necunoscută, soluţie pentru ecuaţia $(*)$. Se obţine că

$(*) \Leftrightarrow x' = 2 \sin t \sin 2x.$

•Se observă că, pentru fiecare $l \in \mathbb{Z}$,

$x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x(t) = \frac{\pi l}{2}$ este soluţie singulară pentru ecuaţia $(*)$.

•Se caută şi alte soluţii decât cea singulară. Folosind Convenţiile 1 şi 2, se obţine

$$(*) \Rightarrow \frac{x'(t)}{2 \sin(2x(t))} = \sin t, \forall t \in \mathbb{I}_x \text{ a.î. } x(t) \notin \left\{\tfrac{\pi l}{2}; l \in \mathbb{Z}\right\} \Big| \int (\cdot)\, dt \Rightarrow$$

$$\int \frac{2x'(t)}{\sin(2x(t))} dt = 4 \int \sin t dt \Rightarrow$$

$\ln |\mathrm{tg}(x(t))| = -4 \cos t + \ln k, \forall t \in \mathbb{I}_x$ a.î. $x(t) \notin \left\{\frac{\pi l}{2}; l \in \mathbb{Z}\right\}$ şi $k \in \mathbb{R}_+^* \Rightarrow$

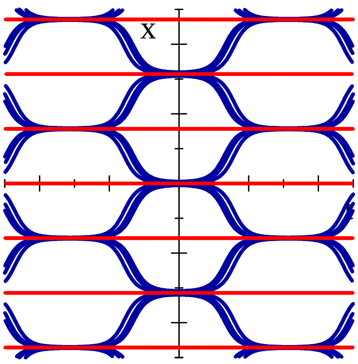
$|\mathrm{tg}(x(t))| = k e^{-4 \cos t}, \forall t \in \mathbb{I}_x$ a.î. $x(t) \notin \left\{\frac{\pi l}{2}; l \in \mathbb{Z}\right\}$ şi $k \in \mathbb{R}_+^* \Rightarrow$

$(**)\ \mathrm{tg}(x(t)) = c e^{-4 \cos t}, \forall t \in \mathbb{I}_x$ a.î. $x(t) \notin \left\{\frac{\pi l}{2}; l \in \mathbb{Z}\right\}$ şi $c \in \mathbb{R}^*$.

Ultima relaţie reprezintă soluţia generală a ecuaţiei $(*)$ sub formă implicită. Se poate afirma şi că soluţia generală a ecuaţiei $(*)$ este dată sub formă explicită, pentru fiecare $c \in \mathbb{R}^*$, de familia de funcţii

$x : \mathbb{I}_x \to \mathbb{R}, x(t) = \frac{1}{2} \arcsin\left(c e^{-4 \cos t}\right), \forall t \in \mathbb{I}_x,$

unde domeniul de definiţie a soluţiei, $\mathbb{I}_x$, depinde de constanta c (pentru fiecare c se obţine o soluţie cu un anumit domeniu de definiţie şi o anumită lege de asociere).



Exerciţiul 5. **r)** Un rezervor conţine la un moment dat $100l$ soluţie de sare, sarea dizolvată fiind $10kg$. În rezervor intră în fiecare minut $5l$ de apă şi, în acelaşi timp cu apa care intră, ies cu aceeaşi viteză $5l$ de soluţie. Presupunând că omogenizarea se produce instantaneu, aflaţi câtă sare se va afla în rezervor peste o oră.

Exerciţiul 5. **s)** Spaţiul unui local de $200m^3$ conţine 0.15% CO_2 şi este ventilat cu un debit de $20m^3$ de aer pe minut , conţinând $0,04\%$ CO_2. Peste cât timp dioxidul de carbon se diminuează de 3 ori?

1.3. Ecuaţii diferenţiale reductibile la ecuaţii cu variabile separabile; ecuaţii diferenţiale omogene şi reductibile la ecuaţii diferenţiale omogene

1.3.1. Forma generală:

$$\boxed{x'(t) = f(at + bx(t) + c)} \text{ sau} \tag{2}$$

$$\boxed{\frac{dx}{dt} = f(at + bx + c)} \tag{2'}$$

unde $f : \mathbb{I} \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este funcţie continuă, $a, b, c \in \mathbb{R}$, cu $a + bf(z) \neq 0$, $\forall z \in \mathbb{I}$.

Rezolvare. Pentru $t \in \mathbb{I}_x \subseteq \mathbb{I}$, variabilă independentă din domeniul de definiţie al soluţiei, se caută $x(t) =?$, x funcţie necunoscută, soluţie pentru ecuaţiile (2) sau (2′). Se face schimbarea de funcţie necunoscută

$$\begin{cases} y(t) = at + bx(t) + c, \forall t \in \mathbb{I}_x \left| \frac{d}{dt}(\cdot) \right. \\ y'(t) = a + bx'(t). \end{cases} \tag{3}$$

Se înlocuieşte x şi x' din (3) în (2) sau (2′), se obţine o ecuaţie cu variabile separabile în necunoscuta $y(t)$, se rezolvă şi se revine la substituţie. Domeniul de definiţie a soluţiei, $\mathbb{I}_x$, depinde de constanta c (pentru fiecare c se obţine o soluţie cu un anumit domeniu de definiţie şi o anumită lege de asociere).

Exerciţiul 6.Făcând o schimbare de funcţie convenabilă, să se rezolve următoarele ecuaţii diferenţiale ordinare

a) $x'(t) = \cos(t - x(t) - 1), t \in \mathbb{I}$; **b)** $x'(t) = (t + x(t))^2, t \in \mathbb{I}$;
c) $x' = (8t + 2x + 1)^2, t \in \mathbb{I}$; **d)** $x' = \sin(t - x), t \in \mathbb{I}$; **e)** $x' = \cos(x - t), t \in \mathbb{I}$;
f) $x' \operatorname{ctg} t + x = 2, t \in \mathbb{I}$ şi $x(0) = 1$; **g)** $tx' + x = x^2, t \in \mathbb{I}$ şi $x(1) = 0.5$;
h) $(t + 2x)x' = 1, t \in \mathbb{I}$ şi $x(0) = -1$; **i)** $t^2x' - \cos 2x = 1, t \in \mathbb{I}$ şi $\lim\limits_{t \to +\infty} x(t) = \frac{9}{4}\pi$.

Rezolvare. a) A se vedea Curs.
b) Se determină soluţia generală a ecuaţiei

$(*)$ $x'(t) = (t + x(t))^2, t \in \mathbb{I}$

Pentru $t \in \mathbb{I}_x \subseteq D$, variabilă independentă din domeniul de definiţie al soluţiei, se caută $x(t) =?$, x funcţie necunoscută, soluţie pentru ecuaţia $(*)$.

Se face schimbarea de funcţie necunoscută

$$\begin{cases} y(t) = t + x(t), \forall t \in \mathbb{I}_x \left| \frac{d}{dt}(\cdot) \right. \\ y'(t) = 1 + x'(t). \end{cases}$$

Se înlocuieşte x şi x' în $(*)$, se obţine o ecuaţie cu variabile separabile în necunoscuta $y(t)$:

$$y'(t) - 1 = y^2(t), \forall t \in \mathbb{I}_x \Rightarrow$$

$$\frac{y'(t)}{1 + y^2(t)} = 1, \forall t \in \mathbb{I}_x \left| \int (\cdot)\, dt \Rightarrow \int \frac{y'(t)}{1 + y^2(t)} dt = \int dt \Rightarrow \right.$$

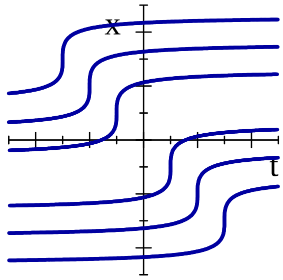
$$\operatorname{arctg} y(t) = t + c, \forall t \in \mathbb{I}_x \text{ şi } c \in \mathbb{R}.$$

Ultima relaţie reprezintă soluţia generală a ecuaţiei cu variabile separabile în necunoscuta $y(t)$ sub formă implicită. Se revine la substituţie şi se obţine

$(**)\ \operatorname{arctg}(t + x(t)) = t + c, \forall t \in \mathbb{I}_x$ şi $c \in \mathbb{R}$.
Ultima relaţie reprezintă soluţia generală a ecuaţiei $(*)$, în necunoscuta $x(t)$, sub formă implicită. Soluţia generală a ecuaţiei $(*)$ este dată, sub formă explicită, pentru fiecare $c \in \mathbb{R}$, de următoarea familie de funcţii

$x : \mathbb{I}_x \to \mathbb{R}, x(t) = -t + \operatorname{tg}(t + c)$,

unde domeniul de definiţie a soluţiei, $\mathbb{I}_x$, depinde de constanta c (pentru fiecare c se obţine o soluţie cu un anumit domeniu de definiţie şi o anumită lege de asociere) (se impune $\cos(t + c) \neq 0$).



c) Se determină soluţia generală a ecuaţiei

$(*)\ x' = (8t + 2x + 1)^2, t \in \mathbb{I}$

Pentru $t \in \mathbb{I}_x \subseteq D$, variabilă independentă din domeniul de definiţie al soluţiei, se caută $x(t) = ?$, x funcţie necunoscută, soluţie pentru ecuaţia $(*)$.

Se face schimbarea de funcţie necunoscută

$$\begin{cases} y(t) = 8t + 2x(t) + 1, \forall t \in \mathbb{I}_x | \frac{d}{dt}(\cdot) \\ y'(t) = 8 + 2x'(t). \end{cases}$$

Se înlocuieşte x şi x' în $(*)$, se obţine o ecuaţie cu variabile separabile în necunoscuta $y(t)$:

$$\frac{y'(t) - 8}{2} = y^2(t), \forall t \in \mathbb{I}_x \Leftrightarrow y'(t) = 8 + 2y^2(t)$$

•Se observă că nu are soluţii singulare.
•Se caută şi altfel soluţii decât cele singulare.

$$\frac{y'(t)}{4 + y^2(t)} = 2, \forall t \in \mathbb{I}_x \Big| \int (\cdot)\, dt \Rightarrow \int \frac{y'(t)}{4 + y^2(t)} dt = \int 2dt \Rightarrow$$

$$\tfrac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{y(t)}{2} = 2t + c, \forall t \in \mathbb{I}_x \text{ şi } c \in \mathbb{R}.$$

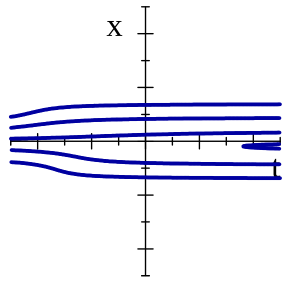
Ultima relaţie reprezintă soluţia generală a ecuaţiei cu variabile separabile în necunoscuta $y(t)$ sub formă implicită. Revenim la substituţie şi se obţine

$$(**)\ \tfrac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{8t + 2x(t) + 1}{2} = 2t + c, \forall t \in \mathbb{I}_x \text{ şi } c \in \mathbb{R}.$$

Ultima relaţie reprezintă soluţia generală a ecuaţiei $(*)$, în necunoscuta $x(t)$, sub formă implicită.Soluţia generală a ecuaţiei $(*)$ este dată, sub formă explicită, pentru fiecare $c \in \mathbb{R}$, de

$x : \mathbb{I}_x \to \mathbb{R}, x(t) = \frac{1}{2}(-8t - 1 + 2\operatorname{tg}(4t + 2c)), \forall t \in \mathbb{I}_x$,

unde domeniul de definiţie a soluţiei, $\mathbb{I}_x$, depinde de constanta c (pentru fiecare c se obţine o soluţie cu un anumit domeniu de definiţie şi o anumită lege de asociere).



d) Se determină soluţia generală a ecuaţiei

$(*)$ $x' = \sin(t-x), t \in \mathbb{I}.$

Pentru $t \in \mathbb{I}_x \subseteq D$, variabilă independentă din domeniul de definiţie al soluţiei, se caută $x(t) = ?$, x funcţie necunoscută, soluţie pentru ecuaţia $(*)$.

Se face schimbarea de funcţie necunoscută

$$\begin{cases} y(t) = t - x(t), \forall t \in \mathbb{I}_x | \frac{d}{dt}(\cdot) \\ y'(t) = 1 - x'(t). \end{cases}$$

Se înlocuieşte x şi x' în $(*)$, se obţine o ecuaţie cu variabile separabile în necunoscuta $y(t)$:

$1 - y'(t) = \sin y(t), \forall t \in \mathbb{I}_x.$

•Se observă că, pentru fiecare $l \in \mathbb{Z}$,

$y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, y(t) = \frac{3\pi}{2} + 2\pi l,$

este soluţie pentru ecuaţia cu variabile separabile în necunoscuta $y(t)$, numită soluţii singulară. Corespunzător, pentru fiecare $l \in \mathbb{Z}$,

$x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x(t) = t - \left(\frac{3\pi}{2} + 2\pi l\right),$

este soluţie pentru ecuaţia $(*)$, numită soluţii singulară.

•Se caută şi alte soluţii decât cele singulare.

$$\frac{y'(t)}{1+\sin y(t)} = 1, \forall t \in \mathbb{I}_x \text{ a.î. } y(t) \notin \left\{\tfrac{3\pi}{2} + 2\pi l; l \in \mathbb{Z}\right\} \Big| \int(\cdot)\, dt \Rightarrow$$

$$\int \frac{y'(t)}{1+\sin y(t)} dt = \int dt.$$

Se notează $\mathcal{I} = \displaystyle\int \frac{1}{1+\sin y} dy$. Făcând substituţia $\operatorname{tg} \frac{y}{2} = z$ pe intervalul corespunzător, se obţine

$$\mathcal{I} = \int \frac{1}{1+\frac{2z}{1+z^2}} \cdot \frac{2}{1+z^2} dz = \int \frac{2}{1+z^2+2z} dz = \int \frac{2}{(z+1)^2} dz \Rightarrow$$

$\mathcal{I} = -2(z+1)^{-1} + c, z \in \mathbb{J}, c \in \mathbb{R}.$

Atunci, ecuaţia devine:

$$-2\left(\operatorname{tg} \frac{y(t)}{2} + 1\right)^{-1} = t + c, \forall t \in \mathbb{I}_x \text{ a.î. } y(t) \notin \left\{\tfrac{3\pi}{2} + 2\pi l; l \in \mathbb{Z}\right\} \text{ şi } c \in \mathbb{R}.$$

Ultima relaţie reprezintă soluţia generală a ecuaţiei cu variabile separabile în necunoscuta $y(t)$ sub formă implicită. Se revine la substituţie şi se obţine

$$(**)\ -2\left(\operatorname{tg} \frac{t - x(t)}{2} + 1\right)^{-1} = t + c,$$

pentru $\forall t \in \mathbb{I}_x$ a.î. $x(t) \notin \left\{t - \left(\frac{3\pi}{2} + 2\pi l\right); l \in \mathbb{Z}\right\}$ şi $c \in \mathbb{R}$. Ultima relaţie reprezintă soluţia generală a ecuaţiei $(*)$, în necunoscuta $x(t)$, sub formă implicită.Soluţia generală a ecuaţiei $(*)$ este dată, sub formă explicită, pentru fiecare $c \in \mathbb{R}$, de

$$x : \mathbb{I}_x \to \mathbb{R}, x(t) = t + 2 \operatorname{arctg}\left(\frac{-2}{t+c} - 1\right), \forall t \in \mathbb{I}_x,$$

unde domeniul de definiţie a soluţiei, $\mathbb{I}_x$, depinde de constanta c (pentru fiecare c se obţine o soluţie cu un anumit domeniu de definiţie şi o anumită lege de asociere) (se impune $t+2\operatorname{arctg}\left(\frac{-2}{t+c}-1\right)\notin \left\{t-\left(\frac{3\pi}{2}+2\pi l\right);l\in\mathbb{Z}\right\}$).

1.3.2. Ecuaţii diferenţiale omogene
Forma generală:

$$\boxed{x'(t)=f\left(\frac{x(t)}{t}\right)} \text{ sau} \tag{4}$$

$$\boxed{\frac{dx}{dt}=f\left(\frac{x}{t}\right)} \tag{4'}$$

unde $f:\mathbb{I}\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ este funcţie continuă cu $f(z)\neq z$, $\forall z\in\mathbb{I}$.
Rezolvare. Pentru $t\in\mathbb{I}_x\subseteq\mathbb{I}$, variabilă independentă din domeniul de definiţie a soluţiei, se caută $x(t)=?$, x funcţie necunoscută, soluţie pentru ecuaţiile (4) sau (4′). Se face schimbarea de funcţie necunoscută $u(t)=\frac{x(t)}{t}$, adică

$$\begin{cases} x(t)=tu(t), \forall t\in\mathbb{I}_x \mid \frac{d}{dt}(\cdot) \\ x'(t)=1u(t)+tu'(t). \end{cases} \tag{5}$$

Se înlocuieşte x şi x' din (5) în (4) sau (4′), se obţine o ecuaţie cu variabile separabile în necunoscuta $u(t)$, se rezolvă şi se revine la substituţie. Domeniul de definiţie a soluţiei, $\mathbb{I}_x$, depinde de constanta c (pentru fiecare c se obţine o soluţie cu un anumit domeniu de definiţie şi o anumită lege de asociere).

Exerciţiul 7. Să se determine soluţiile generale ale următoarelor ecuaţii diferenţiale omogene
a) $tx'(t)=x(t)-te^{\frac{x(t)}{t}}, t\in\mathbb{I}$; **b)** $2t^2x'(t)=t^2+x^2(t), t\in\mathbb{I}$;
c) $\left(t-x(t)\cos\frac{x(t)}{t}\right)dt+t\cos\frac{x(t)}{t}dx(t)=0, t\in\mathbb{I}$;
d) $t\sin\frac{x(t)}{t}x'(t)+t=x(t)\sin\frac{x(t)}{t}, t\in\mathbb{I}$; **e)** $tx'-x=\frac{t}{\operatorname{arctg}\frac{x}{t}}, t\in\mathbb{I}$.
Rezolvare. a) A se vedea Curs.
b) Se determină soluţia generală a ecuaţiei

$$(*)\ 2t^2x'(t)=t^2+x^2(t), t\in\mathbb{I}.$$

Pentru $t\in\mathbb{I}_x\subseteq D$, variabilă independentă din domeniul de definiţie a soluţiei, se caută $x(t)=?$, x funcţie necunoscută, soluţie pentru ecuaţia $(*)$.

$$(*)\Rightarrow x'(t)=\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\left(\frac{x(t)}{t}\right)^2, \forall t\in\mathbb{I}_x \text{ a.î. } t\neq 0.$$

Este o ecuaţie diferenţială omogenă cu $f(z)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}z^2$. Se Se face schimbarea de funcţie necunoscută $u(t)=\frac{x(t)}{t}$, adică

$$\begin{cases} x(t)=tu(t), \forall t\in\mathbb{I}_x \mid \frac{d}{dt}(\cdot) \\ x'(t)=u(t)+tu'(t). \end{cases}$$

Se înlocuieşte x şi x' şi se obţine o ecuaţie cu variabile separabile în necunoscuta $u(t)$,

$$u(t)+tu'(t)=\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}u^2(t), \forall t\in\mathbb{I}_x \text{ a.î. } t\neq 0.$$

•Se observă că

$$u:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, u(t)=1,$$

este soluţie singulară pentru ecuaţia cu variabile separabile în necunoscuta $u(t)$. Corespunzător,

$$x:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, x(t)=t,$$

este soluţie singulară pentru ecuaţia $(*)$.
•Se caută şi alte soluţii decât cele singulare.

$\dfrac{u'(t)}{(u(t)-1)^2} = \frac{1}{2}\dfrac{1}{t}, \forall t \in \mathbb{I}_x$ a.î. $(t \neq 0$ şi $u(t) \neq 1)\Big| \int (\cdot)\, dt \Rightarrow \displaystyle\int \dfrac{u'(t)}{(u(t)-1)^2} dt = \int \frac{1}{2}\dfrac{1}{t} dt \Rightarrow$

$-(u(t)-1)^{-1} = \frac{1}{2}\ln|t| + c, \forall t \in \mathbb{I}_x$ a.î. $(t \neq 0$ şi $u(t) \neq 1)$ şi $c \in \mathbb{R}$.

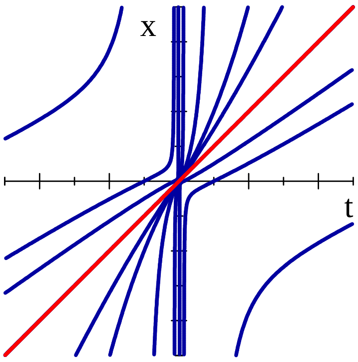
Ultima relaţie reprezintă soluţia generală a ecuaţiei cu variabile separabile în necunoscuta $u(t)$ sub formă implicită. Se revine la substituţie şi se obţine

$(**)\ -\left(\dfrac{x(t)}{t} - 1\right)^{-1} = \frac{1}{2}\ln|t| + c, \forall t \in \mathbb{I}_x$ a.î. $(t \neq 0$ şi $x(t) \neq t)$ şi $c \in \mathbb{R}$.

Ultima relaţie reprezintă soluţia generală a ecuaţiei $(*)$ sub formă implicită. Soluţia generală a ecuaţiei $(*)$ este dată, sub formă explicită, pentru fiecare $c \in \mathbb{R}$, de

$x : \mathbb{I}_x \to \mathbb{R}, x(t) = t\left(1 - \dfrac{1}{\frac{1}{2}\ln|t| + c}\right), \forall t \in \mathbb{I}_x,$

unde domeniul de definiţie a soluţiei, $\mathbb{I}_x$, depinde de constanta c (pentru fiecare c se obţine o soluţie cu un anumit domeniu de definiţie şi o anumită lege de asociere) (se impune $\frac{1}{2}\ln|t| + c \neq 0$ şi $t \neq 0$ şi $t\left(1 - \frac{1}{\frac{1}{2}\ln|t|+c}\right) \neq t$).



c) Se determină soluţia generală a ecuaţiei

$(*)\ \left(t - x\cos\dfrac{x(t)}{t}\right) dt + t\cos\dfrac{x(t)}{t} dx(t) = 0, t \in \mathbb{I}.$

Pentru $t \in \mathbb{I}_x \subseteq D$, variabilă independentă din domeniul de definiţie a soluţiei, se caută $x(t) =?$, x funcţie necunoscută, soluţie pentru ecuaţia $(*)$.

Folosind Convenţia, se observă că $(*) \Rightarrow$

$x'(t) = -\dfrac{1 - \frac{x(t)}{t}\cos\frac{x(t)}{t}}{\cos\frac{x(t)}{t}}, \forall t \in \mathbb{I}_x$ a.î. $(t \neq 0$ şi $\cos\frac{x(t)}{t} \neq 0)$.

Este o ecuaţie diferenţială omogenă cu $f(z) = -\frac{1-z\cos z}{\cos z}$. Se face schimbarea de funcţie necunoscută $u(t) = \frac{x(t)}{t}$, adică

$\begin{cases} x(t) = tu(t), \forall t \in \mathbb{I}_x | \frac{d}{dt}(\cdot) \\ x'(t) = u(t) + tu'(t). \end{cases}$

Se înlocuieşte x şi x' şi se obţine o ecuaţie cu variabile separabile în necunoscuta $u(t)$,

$u(t) + tu'(t) = -\dfrac{1 - u(t)\cos u(t)}{\cos u(t)}, \forall t \in \mathbb{I}_x$ a.î. $(t \neq 0$ şi $\cos\frac{x(t)}{t} \neq 0) \Rightarrow$

$\cos u(t)\, u'(t) = \dfrac{-1}{t}, \forall t \in \mathbb{I}_x$ a.î. $(t \neq 0$ şi $\cos\frac{x(t)}{t} \neq 0)\Big| \int (\cdot)\, dt \Rightarrow$

$\int \cos u(t)\, u'(t)\, dt = \int \frac{-1}{t} dt \Rightarrow$

$\sin u(t) = -\ln|t| + c, \forall t \in \mathbb{I}_x$ a.î. $(t \neq 0$ şi $\cos\frac{x(t)}{t} \neq 0)$ şi $c \in \mathbb{R}$.

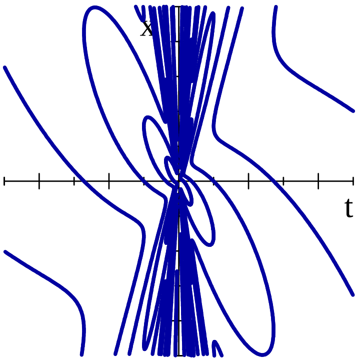
Ultima relaţie reprezintă soluţia generală a ecuaţiei cu variabile separabile în necunoscuta $u(t)$ sub formă implicită. Se revine la substituţie şi se obţine

$(**)\ \sin \dfrac{x(t)}{t} = -\ln|t| + c, \forall t \in \mathbb{I}_x$ a.î. $(t \neq 0$ şi $\cos \frac{x(t)}{t} \neq 0)$ şi $c \in \mathbb{R}$.

Ultima relaţie reprezintă soluţia generală a ecuaţiei $(*)$ sub formă implicită. Soluţia generală a ecuaţiei $(*)$ este dată, sub formă explicită, pentru fiecare $c \in \mathbb{R}$, de

$x : \mathbb{I}_x \to \mathbb{R}, x(t) = t \arcsin(-\ln|t| + c), \forall t \in \mathbb{I}_x,$

unde domeniul de definiţie a soluţiei, $\mathbb{I}_x$, depinde de constanta c (pentru fiecare c se obţine o soluţie cu un anumit domeniu de definiţie şi o anumită lege de asociere) (se impune $-\ln|t| + c \in [-1, 1]$ şi $t \neq 0$ şi $\cos \arcsin(-\ln|t| + c) \neq 0$).



d) Se determină soluţia generală a ecuaţiei

$(*)\ t \sin \dfrac{x(t)}{t} x'(t) + t = x(t) \sin \dfrac{x(t)}{t}, t \in \mathbb{I}.$

Pentru $t \in \mathbb{I}_x \subseteq D$, variabilă independentă din domeniul de definiţie a soluţiei, se caută $x(t) = ?$, x funcţie necunoscută, soluţie pentru ecuaţia $(*)$.

$(*) \Rightarrow x'(t) = \dfrac{-1 + \frac{x(t)}{t} \sin \frac{x(t)}{t}}{\sin \frac{x(t)}{t}}, \forall t \in \mathbb{I}_x$ a.î. $(t \neq 0$ şi $\sin \frac{x(t)}{t} \neq 0)$.

Este o ecuaţie diferenţială omogenă cu $f(z) = \frac{-1+z \sin z}{\sin z}$. Se face schimbarea de funcţie necunoscută $u(t) = \frac{x(t)}{t}$, adică

$$\begin{cases} x(t) = tu(t), \forall t \in \mathbb{I}_x \big| \frac{d}{dt}(\cdot) \\ x'(t) = u(t) + tu'(t). \end{cases}$$

Se înlocuieşte x şi x' şi se obţine o ecuaţie cu variabile separabile în necunoscuta $u(t)$,

$u(t) + tu'(t) = \dfrac{-1 + u(t) \sin u(t)}{\sin u(t)}, \forall t \in \mathbb{I}_x$ a.î. $(t \neq 0$ şi $\sin u(t) \neq 0) \Rightarrow$

$\sin u(t)\, u'(t) = \frac{-1}{t}, \forall t \in \mathbb{I}_x$ a.î. $(t \neq 0$ şi $\sin u(t) \neq 0) \big| \int (\cdot)\, dt \Rightarrow$

$\int \sin u(t)\, u'(t)\, dt = \int \frac{-1}{t} dt \Rightarrow$

$-\cos u(t) = -\ln|t| + c, \forall t \in \mathbb{I}_x$ a.î. $(t \neq 0$ şi $\sin u(t) \neq 0)$ şi $c \in \mathbb{R}$.

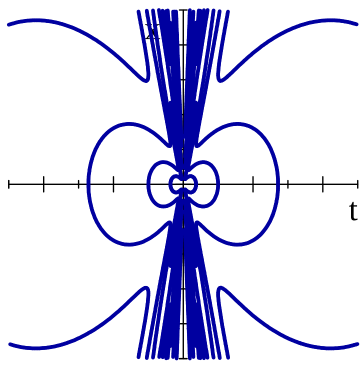
Ultima relaţie reprezintă soluţia generală a ecuaţiei cu variabile separabile în necunoscuta $u(t)$ sub formă implicită. Se revine la substituţie şi se obţine

$(**)\ -\cos \frac{x(t)}{t} = -\ln|t| + c, \forall t \in \mathbb{I}_x$ a.î. $(t \neq 0$ şi $\sin \frac{x(t)}{t} \neq 0)$ şi $c \in \mathbb{R}$.

Ultima relaţie reprezintă soluţia generală a ecuaţiei $(*)$ sub formă implicită. Soluţia generală a ecuaţiei $(*)$ este dată, sub formă explicită, pentru fiecare $c \in \mathbb{R}$, de

$x : \mathbb{I}_x \to \mathbb{R}, x(t) = t \arccos(\ln|t| - c), \forall t \in \mathbb{I}_x,$

unde domeniul de definiţie a soluţiei, $\mathbb{I}_x$, depinde de constanta c (pentru fiecare c se obţine o soluţie cu un anumit domeniu de definiţie şi o anumită lege de asociere) (se impune $\ln|t| - c \in [-1, 1]$ şi $t \neq 0$ şi $\sin \arccos(\ln|t| - c) \neq 0$).



e) Se determină soluţia generală a ecuaţiei

$(*)$ $tx' - x = \dfrac{t}{\operatorname{arctg}\frac{x}{t}}, t \in \mathbb{I}$

Pentru $t \in \mathbb{I}_x \subseteq D$, variabilă independentă din domeniul de definiţie a soluţiei, se caută $x(t) = ?$, x funcţie necunoscută, soluţie pentru ecuaţia $(*)$.

$(*) \Rightarrow x'(t) = \dfrac{x(t)}{t} - \dfrac{1}{\operatorname{arctg}\frac{x(t)}{t}}, \forall t \in \mathbb{I}_x$ a.î. $(t \neq 0$ şi $\operatorname{arctg}\frac{x(t)}{t} \neq 0)$.

Este o ecuaţie diferenţială omogenă cu $f(z) = z - \frac{1}{\operatorname{arctg} z}$. Se face schimbarea de funcţie necunoscută $u(t) = \frac{x(t)}{t}$, adică

$$\begin{cases} x(t) = tu(t), \forall t \in \mathbb{I}_x | \frac{d}{dt}(\cdot) \\ x'(t) = u(t) + tu'(t). \end{cases}$$

Se înlocuieşte x şi x' şi se obţine o ecuaţie cu variabile separabile în necunoscuta $u(t)$,

$u(t) + tu'(t) = u(t) - \dfrac{1}{\operatorname{arctg} u(t)}, \forall t \in \mathbb{I}_x$ a.î. $(t \neq 0$ şi $\operatorname{arctg}\frac{x(t)}{t} \neq 0) \Rightarrow$

$\operatorname{arctg} u(t)\, u'(t) = \frac{-1}{t}, \forall t \in \mathbb{I}_x$ a.î. $\left(t \neq 0 \text{ şi } \operatorname{arctg}\frac{x(t)}{t} \neq 0\right) \Big| \int (\cdot)\, dt \Rightarrow$

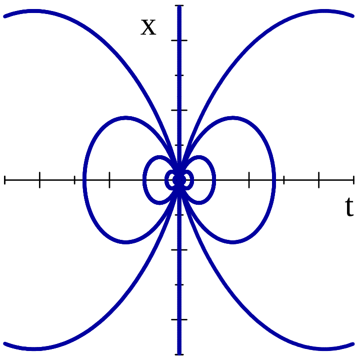
$\int \operatorname{arctg} u(t)\, u'(t)\, dt = \int \frac{-1}{t} dt \Rightarrow$

$u(t) \operatorname{arctg} u(t) - \frac{1}{2} \ln \left|1 + u^2(t)\right| = -\ln|t| + c,$

pentru $\forall t \in \mathbb{I}_x$ a.î. $(t \neq 0$ şi $\operatorname{arctg}\frac{x(t)}{t} \neq 0)$ şi $c \in \mathbb{R}$. Ultima relaţie reprezintă soluţia generală a ecuaţiei cu variabile separabile în necunoscuta $u(t)$ sub formă implicită. Se revine la substituţie şi se obţine

$$(**)\ \frac{x(t)}{t} \operatorname{arctg}\frac{x(t)}{t} - \frac{1}{2}\ln\left|1 + \left(\frac{x(t)}{t}\right)^2\right| = -\ln|t| + c,$$

pentru $\forall t \in \mathbb{I}_x$ a.î. $(t \neq 0$ şi $\operatorname{arctg}\frac{x(t)}{t} \neq 0)$ şi $c \in \mathbb{R}$. Ultima relaţie reprezintă soluţia generală a ecuaţiei $(*)$ sub formă implicită. Local, s-ar putea explicita $x : \mathbb{I}_x \to \mathbb{R}$,unde domeniul de definiţie a soluţiei, $\mathbb{I}_x$, depinde de constanta c (pentru fiecare c se obţine o soluţie cu un anumit domeniu de definiţie şi o anumită lege de asociere) (se impune $t \neq 0$ şi $\operatorname{arctg}\frac{x(t)}{t} \neq 0$).


x
t