SEMINAR NR. 2, REZOLVĂRI
EDCO, AIA

1.3.3. Ecuaţii diferenţiale reductibile la ecuaţii diferenţiale omogene sau direct la ecuaţii cu variabile separabile

Forma generală:

$$\boxed{x'(t) = f\left(\frac{a_1 t + b_1 x(t) + c_1}{a_2 t + b_2 x(t) + c_2}\right)} \text{ sau} \tag{6}$$

$$\boxed{\frac{dx}{dt} = f\left(\frac{a_1 t + b_1 x + c_1}{a_2 t + b_2 x + c_2}\right)} \tag{6'}$$

unde $f : \mathbb{I} \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este funcţie, $a_i, b_i, c_i \in \mathbb{R}$, $a_i^2 + b_i^2 + c_i^2 \neq 0$, $i \in \{1, 2\}$.

Rezolvare: Pentru $t \in \mathbb{I}_x \subseteq \mathbb{I}$, variabilă independentă din domeniul de definiţie a soluţiei, Se caută $x(t) = ?$, x funcţie necunoscută, soluţie pentru ecuaţiile (6) sau (6′). Se ataşează ecuaţiilor (6) sau (6′) sistemul algebric

$$\begin{cases} a_1 t + b_1 x + c_1 = 0 & \text{-ecuaţia unei drepte în } tOx \\ a_2 t + b_2 x + c_2 = 0 & \text{-ecuaţia unei drepte în } tOx \end{cases} \tag{7}$$

Se disting următoarele cazuri:

Cazul 0. Dacă sistemul (7) are $(c_1, c_2) = (0, 0)$ şi este compatibil unic determinat cu soluţia $(t_0, x_0) = (0, 0)$ (drepte ce se intersectează în O) atunci ecuaţia (6) devine, pt $t \neq 0$,

$$x'(t) = f\left(\frac{a_1 + b_1 \frac{x(t)}{t}}{a_2 + b_2 \frac{x(t)}{t}}\right)$$

adică o ecuaţie omogenă (4).

Cazul 1. Dacă sistemul (7) are $(c_1, c_2) \neq (0, 0)$ şi este compatibil unic determinat cu soluţia $(t_0, x_0) \neq (0, 0)$ (drepte ce se intersectează în $M_0 \neq O$) atunci se face substituţia

$$\begin{cases} s = t - t_0 \text{-schimbare de variabilă} \\ y = x - x_0 \text{-schimbare de funcţie necunoscută} \end{cases} \tag{8}$$

şi ecuaţia (6) devine, pt $s \neq 0$,

$$y'(s) = f\left(\frac{a_1 + b_1 \frac{y(s)}{s}}{a_2 + b_2 \frac{y(s)}{s}}\right)$$

adică o ecuaţie omogenă (4). Se rezolvă şi se revine la substituţie.

Cazul 2. Dacă sistemul (7) este compatibil nedeterminat (drepte confundate), atunci există $\lambda \neq 0$ astfel încât $(a_1, b_1, c_1) = \lambda (a_2, b_2, c_2)$ şi ecuaţia (6) sau (6′) se reduce la

$$x'(t) = f(\lambda), \forall t \in \mathbb{I}_x \text{ cu } a_2 t + b_2 x + c_2 \neq 0.$$

adică o ecuaţie cu variabile separabile (1).

Cazul 3. Dacă sistemul (7) este un sistem incompatibil (drepte paralele) atunci există $\lambda \neq 0$ astfel încât $(a_1, b_1) = \lambda (a_2, b_2)$ şi $(a_1, b_1, c_1) \neq \lambda (a_2, b_2, c_2)$. Se face schimbarea de funcţie necunoscută

$$\begin{cases} y(t) = a_1 t + b_1 x(t), \forall t \in \mathbb{I}_x | \frac{d}{dt}(\cdot) \\ y'(t) = a_1 + b_1 x'(t). \end{cases} \text{ sau } \begin{cases} y(t) = a_2 t + b_2 x(t), \forall t \in \mathbb{I}_x | \frac{d}{dt}(\cdot) \\ y'(t) = a_2 + b_2 x'(t). \end{cases}$$

Se înlocuieşte x şi x' în (6) sau (6′), se obţine o ecuaţie cu variabile separabile în necunoscuta $y(t)$, se rezolvă şi se revine la substituţie.

Domeniul de definiţie a soluţiei, $\mathbb{I}_x$, depinde de constanta c (pentru fiecare c se obţine o soluţie cu un anumit domeniu de definiţie şi o anumită lege de asociere).

Exerciţiul 8. Să se determine soluţiile generale ale următoarelor ecuaţii diferenţiale

a) $\frac{dx}{dt}(t) = \frac{-2t + 4x(t) - 6}{t + x(t) - 3}, t \in \mathbb{I}$; **b)** $x'(t) = \frac{x(t) + 3t - 2}{6x(t) + 18t - 12}, t \in \mathbb{I}$;

c) $\dfrac{dx}{dt} = -\dfrac{3t+3x-1}{t+x-1}, t \in \mathbb{I}$; **d)** $(t+2x(t))\,dt + x(t)\,dx(t) = 0, t \in \mathbb{I}$;
e) $(2t+2x(t)+1)\,dt + (t+2x(t)-1)\,dx(t) = 0, t \in \mathbb{I}$;
f) $(t-2x(t)-1)\,dt + (3t-6x(t)+2)\,dx(t) = 0, t \in \mathbb{I}$;
g) $(t+x(t)+2)\,dt + (2t+2x(t)-1)\,dx(t) = 0, t \in \mathbb{I}$.

Rezolvare: a) Se determină soluţia generală a ecuaţiei

$$(*)\ \frac{dx}{dt}(t) = \frac{-2t+4x(t)-6}{t+x(t)-3}, t \in \mathbb{I}.$$

Pentru $t \in \mathbb{I}_x \subseteq I$, variabilă independentă din domeniul de definiţie a soluţiei, se caută $x(t) = ?$, x funcţie necunoscută, soluţie pentru ecuaţia $(*)$.

Se ataşează ecuaţiei $(*)$ sistemul algebric $\begin{cases} -2t+4x-6=0 \\ t+x-3=0, \end{cases}$

cu soluţia $(t_0, x_0) = (1, 2) \neq (0, 0)$.

Se face substituţia

$$\begin{cases} s = t-1\text{-schimbare de variabilă} \\ y = x-2\text{-schimbare de funcţie necunoscută} \end{cases} \Bigg| \begin{cases} ds = dt \\ dy = dx \end{cases}$$

şi ecuaţia $(*)$ devine, ţinând cont de Convenţie şi de $\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{dy}{ds}$,

$$y'(s) = \frac{-2s+4y(s)}{s+y(s)}, \forall s \in \mathbb{J}_y \text{ a.î. } (y(s) \neq -s),$$

adică o ecuaţie omogenă

$$y'(s) = \frac{-2+4\frac{y(s)}{s}}{1+\frac{y(s)}{s}}, \forall s \in \mathbb{J}_y \text{ a.î. } (s \neq 0, y(s) \neq -s)$$

Se face schimbarea de funcţie necunoscută $u(s) = \frac{y(s)}{s}$, adică

$$\begin{cases} y(s) = su(s), \forall t \in \mathbb{I}_x | \frac{d}{ds}(\cdot) \\ y'(s) = u(s) + su'(s). \end{cases}$$

Se înlocuieşte y şi y' şi se obţine o ecuaţie cu variabile separabile în necunoscuta $u(s)$,

$$u(s) + su'(s) = \frac{-2+4u(s)}{1+u(s)}, \forall s \in \mathbb{J}_y \text{ a.î. } (s \neq 0, u(s) \neq -1).$$

•Se observă că

$$u : \mathbb{J} \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}, u(s) = 1 \text{ şi } u : \mathbb{J} \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}, u(s) = 2,$$

sunt soluţii pentru ecuaţia cu variabile separabile în necunoscuta $u(s)$, numite soluţii singulare. $\mathbb{J}$ este un interval ce nu conţine $s = 0$. Corespunzător,

$$y : \mathbb{J} \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}, y(s) = s \text{ şi } y : \mathbb{J} \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}, y(s) = 2s,$$

sunt soluţii pentru ecuaţia omogenă în necunoscuta $y(s)$, numite soluţii singulare. Mai mult

$$x : \mathbb{I} \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x(t) = t+1 \text{ şi } x : \mathbb{I} \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x(t) = 2t,$$

sunt soluţii pentru ecuaţia $(*)$, în necunoscuta $x(t)$, numite soluţii singulare. $\mathbb{I}$ este un interval ce nu conţine $t = 1$.

•Se caută şi alte soluţii decât cele singulare.

$$\frac{1+u(s)}{u^2(s)-3u(s)+2}u'(s) = \frac{-1}{s}, \forall s \in \mathbb{J}_u \text{ a.î. } (s \neq 0 \text{ şi } u(s) \notin \{-1, 1, 2\}) \Bigg| \int (\cdot)\,ds \Rightarrow$$

$$\int \left(\frac{-2u'(s)}{u(s)-1} + \frac{3u'(s)}{u(s)-2} \right) ds = \int \frac{-1}{s} ds, \forall s \in \mathbb{J}_u \text{ a.î. } (s \neq 0 \text{ şi } u(s) \notin \{-1, 1, 2\}) \Rightarrow$$

$-2\ln|u(s)-1| + 3\ln|u(s)-2| = -\ln|s| + \ln k, \forall s \in \mathbb{J}_u$ a.î. $(s \neq 0, u(s) \notin \{-1, 1, 2\})$ şi $k \in \mathbb{R}_+^* \Rightarrow$

$$\frac{|u(s)-2|^3}{|u(s)-1|^2} = \frac{k}{|s|}, \forall s \in \mathbb{J}_u \text{ a.î. } (s \neq 0, u(s) \notin \{-1, 1, 2\}) \text{ şi } k \in \mathbb{R}_+^*.$$

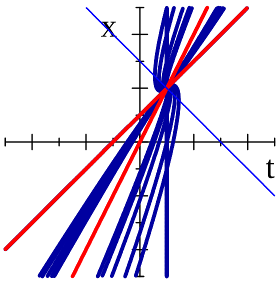
Ultima relaţie reprezintă soluţia generală a ecuaţiei cu variabile separabile în necunoscuta $u(s)$ sub formă implicită. Se revine la substituţie şi se obţine

$$\frac{\left|\frac{y(s)}{s}-2\right|^3}{\left|\frac{y(s)}{s}-1\right|^2}=\frac{k}{|s|}, \forall s\in\mathbb{J}_y \text{ a.î. } (s\neq 0 \text{ şi } y(s)\notin\{-s,s,2s\}) \text{ şi } k\in\mathbb{R}_+^*.$$

Ultima relaţie reprezintă soluţia generală a ecuaţiei omogene în necunoscuta $y(s)$ sub formă implicită. Se revine iar la substituţie şi obţinem

$$\frac{\left|\frac{x(t)-2}{t-1}-2\right|^3}{\left|\frac{x(t)-2}{t-1}-1\right|^2}=\frac{k}{|t-1|}, \forall t\in\mathbb{I}_x \text{ a.î. } (t\neq 1 \text{ şi } x(t)\notin\{-t+3,t+1,2t\}) \text{ şi } k\in\mathbb{R}_+^*.$$

Ultima relaţie reprezintă soluţia generală a ecuaţiei $(*)$ sub formă implicită. Local, s-ar putea explicita $x:\mathbb{I}_x\to\mathbb{R}$,unde domeniul de definiţie a soluţiei, $\mathbb{I}_x$, depinde de constanta c (pentru fiecare c se obţine o soluţie cu un anumit domeniu de definiţie şi o anumită lege de asociere).



b) Se determină soluţia generală a ecuaţiei

$$(*)\ \frac{dx}{dt}(t)=\frac{3t+x(t)-2}{18t+6x(t)-12}, t\in\mathbb{I}.$$

Pentru $t\in\mathbb{I}_x\subseteq D$, variabilă independentă din domeniul de definiţie a soluţiei, se caută $x(t)=?$, x funcţie necunoscută, soluţie pentru ecuaţia $(*)$.

Se ataşează ecuaţiei $(*)$ sistemul algebric $\begin{cases} 3t+x(t)-2=0 \\ 18t+6x(t)-12=0, \end{cases}$

care este compatibil nedeterminat. Ecuaţia $(*)$ devine

$$\frac{dx}{dt}(t)=\frac{1}{6}, \forall t\in\mathbb{I}_x \text{ a.î. } 18t+6x(t)-12\neq 0,$$

cu soluţia

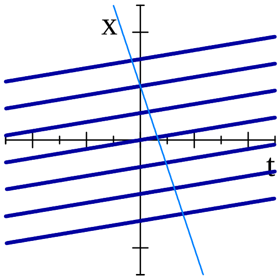
$$x(t)=\frac{1}{6}t+c, \forall t\in\mathbb{I}_x \text{ a.î. } 3t+x(t)-2\neq 0,$$

Adică, pentru fiecare $c\in\mathbb{R}$, soluţia este dată de

$$x:\mathbb{I}_x\to\mathbb{R}, x(t)=\frac{1}{6}t+c, \forall t\in\mathbb{I}_x \text{ a.î. } 3t+\frac{1}{6}t+c-2\neq -0,$$

unde domeniul de definiţie a soluţiei, $\mathbb{I}_x$, depinde de constanta c. Pentru fiecare $c\in\mathbb{R}$,

$$\mathbb{I}_x=\left\{t\in\mathbb{R}; \frac{19}{6}t+c-2\neq -0\right\}.$$



c) Se determină soluţia generală a ecuaţiei

$$(*)\, x'(t) = -\frac{3t+3x(t)-1}{t+x(t)-1}, t \in \mathbb{I}.$$

Pentru $t \in \mathbb{I}_x \subseteq D$, variabilă independentă din domeniul de definiţie a soluţiei, se caută $x(t) = ?$, x funcţie necunoscută, soluţie pentru ecuaţia $(*)$.

Se ataşează ecuaţiei $(*)$ sistemul algebric $\begin{cases} 3t+3x-1=0 \\ t+x-1=0, \end{cases}$

care este incompatibil. Se face schimbarea de funcţie necunoscută

$$\begin{cases} y(t) = t + x(t), \forall t \in \mathbb{I}_x | \frac{d}{dt}(\cdot) \\ y'(t) = 1 + x'(t). \end{cases}$$

Se înlocuieşte x şi x' şi se obţine o ecuaţie cu variabile separabile în necunoscuta $u(t)$,

$$-1 + y'(t) = -\frac{3y(t)-1}{y(t)-1}, \forall t \in \mathbb{I}_x \text{ a.î. } (t + x(t) - 1 \neq 0) \Rightarrow$$

$$y'(t) = \frac{-2y(t)}{y(t)-1}, \forall t \in \mathbb{I}_x \text{ a.î. } (t + x(t) - 1 \neq 0).$$

•Se observă că

$$y : \mathbb{I} \to \mathbb{R}, y(t) = 0,$$

este soluţie pentru ecuaţia cu variabile separabile în necunoscuta $y(t)$, numită soluţie singulară. Corespunzător,

$$x : \mathbb{I} \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x(t) = -t,$$

este soluţie pentru ecuaţia $(*)$ în necunoscuta $x(t)$, numită soluţie singulară.

•Se caută şi alte soluţii decât cele singulare.

$$\frac{y(t)-1}{y(t)} y'(t) = -2, \forall t \in \mathbb{I}_x \text{ a.î. } (y(t) - 1 \neq 0 \text{ şi } y(t) \neq 0) \left| \int (\cdot)\, dt \Rightarrow \right.$$

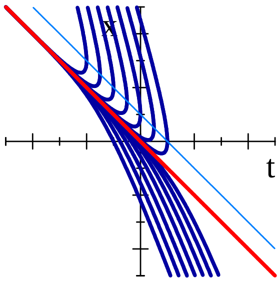
$$\int \frac{y(t)-1}{y(t)} y'(t)\, dt = \int -2dt \Rightarrow$$

$$y(t) - \ln|y(t)| = -2t + c, \forall t \in \mathbb{I}_x \text{ a.î. } (y(t) - 1 \neq 0 \text{ şi } y(t) \neq 0) \text{ şi } c \in \mathbb{R}.$$

Ultima relaţie reprezintă soluţia generală a ecuaţiei cu variabile separabile în necunoscuta $y(t)$ sub formă implicită. Se revine la substituţie şi se obţine

$$t + x(t) - \ln|t + x(t)| = -2t + c, \forall t \in \mathbb{I}_x \text{ a.î. } (t + x(t) - 1 \neq 0, t + x(t) \neq 0) \text{ şi } c \in \mathbb{R}.$$

Ultima relaţie reprezintă soluţia generală a ecuaţiei $(*)$ sub formă implicită. Local, s-ar putea explicita $x : \mathbb{I}_x \to \mathbb{R}$,unde domeniul de definiţie a soluţiei, $\mathbb{I}_x$, depinde de constanta c (pentru fiecare c se obţine o soluţie cu un anumit domeniu de definiţie şi o anumită lege de asociere).



d) Se determină soluţia generală a ecuaţiei

$(*)$ $(t+2x(t))\,dt + x(t)\,dx(t) = 0, t \in \mathbb{I}$.

Pentru $t \in \mathbb{I}_x \subseteq D$, variabilă independentă din domeniul de definiţie a soluţiei, se caută $x(t) = ?$, x funcţie necunoscută, soluţie pentru ecuaţia $(*)$.

$(*) \Rightarrow x'(t) = -\dfrac{1+2\frac{x(t)}{t}}{\frac{x(t)}{t}}, \forall t \in \mathbb{I}_x$ a.î. $(t \neq 0$ şi $\frac{x(t)}{t} \neq 0)$.

Este o ecuaţie diferenţială omogenă cu $f(z) = -\frac{1+2z}{z}$. Se face schimbarea de funcţie necunoscută $u(t) = \frac{x(t)}{t}$, adică

$$\begin{cases} x(t) = tu(t), \forall t \in \mathbb{I}_x \Big| \frac{d}{dt}(\cdot) \\ x'(t) = u(t) + tu'(t). \end{cases}$$

Se înlocuieşte x şi x' şi se obţine o ecuaţie cu variabile separabile în necunoscuta $u(t)$,

$u(t) + tu'(t) = -\frac{1+2u(t)}{u(t)}, \forall t \in \mathbb{I}_x$ a.î. $(t \neq 0$ şi $u(t) \neq 0) \Rightarrow$

•Se observă că

$u : \mathbb{I} \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}, u(t) = -1,$

este soluţie pentru ecuaţia cu variabile separabile în necunoscuta $u(t)$, numită soluţie singulară. $\mathbb{I}$ este un interval ce nu conţine $t = 0$. Corespunzător,

$x : \mathbb{I} \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x(t) = -t,$

este soluţie pentru ecuaţia $(*)$, numită soluţie singulară.

•Se caută şi alte soluţii decât cele singulare.

$$\frac{u(t)}{(u(t)+1)^2}u'(t) = \frac{-1}{t}, \forall t \in \mathbb{I}_x \text{ a.î. } (t \neq 0 \text{ şi } u(t) \neq 0) \Big| \int (\cdot)\, dt \Rightarrow$$

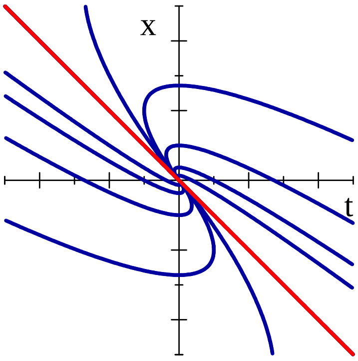
$$\int \left(\frac{1}{u(t)+1} - \frac{1}{(u(t)+1)^2} \right) u'(t)\, dt = \int \frac{-1}{t} dt \Rightarrow$$

$\ln|u(t)+1| - (u(t)+1)^{-1} = -\ln|t| + c, \forall t \in \mathbb{I}_x$ a.î. $(t \neq 0$ şi $u(t) \neq 0)$ şi $c \in \mathbb{R}$.

Ultima relaţie reprezintă soluţia generală a ecuaţiei cu variabile separabile în necunoscuta $u(t)$ sub formă implicită. Se revine la substituţie şi se obţine

$$(**)\ \ln\left|\frac{x(t)}{t} + 1\right| - \left(\frac{x(t)}{t} + 1\right)^{-1} = -\ln|t| + c,$$

pentru $\forall t \in \mathbb{I}_x$ a.î. $(t \neq 0$ şi $\frac{x(t)}{t} \neq 0)$ şi $c \in \mathbb{R}$. Ultima relaţie reprezintă soluţia generală a ecuaţiei $(*)$ sub formă implicită. Local, s-ar putea explicita $x : \mathbb{I}_x \to \mathbb{R}$,unde domeniul de definiţie a soluţiei, $\mathbb{I}_x$, depinde de constanta c (pentru fiecare c se obţine o soluţie cu un anumit domeniu de definiţie şi o anumită lege de asociere).



e) Se determină soluţia generală a ecuaţiei

$(*)$ $(2t + 2x(t) + 1)\, dt + (t + 2x(t) - 1)\, dx(t) = 0, t \in \mathbb{I}$

Pentru $t \in \mathbb{I}_x \subseteq D$, variabilă independentă din domeniul de definiţie a soluţiei, se caută $x(t) =?$, x funcţie necunoscută, soluţie pentru ecuaţia $(*)$.

$(*) \Rightarrow x'(t) = -\dfrac{2t + 2x(t) + 1}{t + 2x(t) - 1}, \forall t \in \mathbb{I}_x$ a.î. $t + 2x(t) - 1 \neq 0$.

Se ataşează ecuaţiei $(*)$ sistemul algebric $\begin{cases} 2t + 2x(t) + 1 = 0 \\ t + 2x(t) - 1 = 0, \end{cases}$

cu soluţia $(t_0, x_0) = \left(-2, \frac{3}{2}\right) \neq (0, 0)$. Se face substituţia

$\begin{cases} s = t - (-2) \text{-schimbare de variabilă} \\ y = x - \frac{3}{2} \text{-schimbare de funcţie necunoscută} \end{cases}$

şi ecuaţia $(*)$ devine

$y'(s) = -\dfrac{2s + 2y(s)}{s + 2y(s)}, \forall s \in J_y$ a.î. $s + 2y(s) \neq 0$,

adică o ecuaţie omogenă

$y'(s) = -\dfrac{2 + 2\frac{y(s)}{s}}{1 + 2\frac{y(s)}{s}}, \forall s \in J_y$ a.î. $(s \neq 0$ şi $s + 2y(s) \neq 0)$

Se face schimbarea de funcţie necunoscută $u(s) = \frac{y(s)}{s}$, adică

$\begin{cases} y(s) = su(s), \forall t \in \mathbb{I}_x | \frac{d}{ds}(\cdot) \\ y'(s) = u(s) + su'(s). \end{cases}$

Se înlocuieşte y şi y' şi se obţine o ecuaţie cu variabile separabile în necunoscuta $u(s)$,

$u(s) + su'(s) = -\dfrac{2 + 2u(s)}{1 + 2u(s)}, \forall s \in \mathbb{J}_y$ a.î. $(s \neq 0$ şi $u(s) \neq \frac{-1}{2}) \Rightarrow$

$\dfrac{1 + 2u(s)}{2u^2(s) + 3u(s) + 2} u'(s) = \dfrac{-1}{s}, \forall s \in \mathbb{J}_y$ a.î. $(s \neq 0$ şi $u(s) \neq \frac{-1}{2}) \Big| \int (\cdot)\, ds \Rightarrow$

$$\int \left(\frac{1}{2} \frac{4u(s) + 3}{2u^2(s) + 3u(s) + 2} - \frac{1}{2} \frac{1}{\left(u(s) + \frac{3}{4}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{7}}{4}\right)^2} \right) u'(s)\, ds = \int \frac{-1}{s} ds \Rightarrow$$

$$\tfrac{1}{2} \ln \left|2u^2(s) + 3u(s) + 2\right| - \tfrac{1}{2} \frac{1}{\frac{\sqrt{7}}{4}} \operatorname{arctg} \frac{u(s) + \frac{3}{4}}{\frac{\sqrt{7}}{4}} = -\ln|s| + c,$$

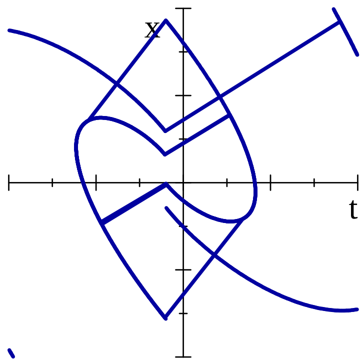
pentru $\forall s \in \mathbb{J}_y$ a.î. $(s \neq 0$ şi $u(s) \neq \frac{-1}{2})$şi $c \in \mathbb{R}$. Ultima relaţie reprezintă soluţia generală a ecuaţiei cu variabile separabile în necunoscuta $u(s)$ sub formă implicită. Se revine la substituţie şi se obţine

$$\ln\left|2\left(\frac{y(s)}{s}\right)^2+3\frac{y(s)}{s}+2\right|-\frac{4}{\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{4\frac{y(s)}{s}+3}{\sqrt{7}}=-2\ln|s|+2c,$$

pentru $\forall s\in\mathbb{J}_y$ a.î. ($s\neq 0$ şi $\frac{y(s)}{s}\neq\frac{-1}{2}$)şi $c\in\mathbb{R}$. Ultima relaţie reprezintă soluţia generală a ecuaţiei omogene în necunoscuta $y(s)$ sub formă implicită. Se revine iar la substituţie şi se obţine

$$\ln\left|2\left(\frac{x(t)-\frac{3}{2}}{t+2}\right)^2+3\frac{x(t)-\frac{3}{2}}{t+2}+2\right|-\frac{4}{\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{4\frac{x(t)-\frac{3}{2}}{t+2}+3}{\sqrt{7}}=-2\ln|t+2|+2c,$$

pentru $\forall s\in\mathbb{J}_y$ a.î. ($s\neq 0$ şi $t+2x(t)-1\neq 0$)şi $c\in\mathbb{R}$. Ultima relaţie reprezintă soluţia generală a ecuaţiei $(*)$ sub formă implicită. Local, s-ar putea explicita $x:\mathbb{I}_x\to\mathbb{R}$,unde domeniul de definiţie a soluţiei, $\mathbb{I}_x$, depinde de constanta c (pentru fiecare c se obţine o soluţie cu un anumit domeniu de definiţie şi o anumită lege de asociere).



f) Se determină soluţia generală a ecuaţiei

$(*)$ $(t-2x(t)-1)\,dt+(3t-6x(t)+2)\,dx(t)=0, t\in\mathbb{I}$.

Pentru $t\in\mathbb{I}_x\subseteq D$, variabilă independentă din domeniul de definiţie a soluţiei, se caută $x(t)=?$, x funcţie necunoscută, soluţie pentru ecuaţia $(*)$.

$$(*)\Rightarrow x'(t)=-\frac{t-2x(t)-1}{3t-6x(t)+2},\forall t\in\mathbb{I}_x \text{ a.î. } 3t-6x(t)+2\neq 0.$$

Se ataşează ecuaţiei $(*)$ sistemul algebric $\begin{cases} t-2x-1=0\\ 3t-6x+2=0,\end{cases}$

care este incompatibil. Se face schimbarea de funcţie necunoscută

$$\begin{cases} y(t)=t-2x(t),\forall t\in\mathbb{I}_x \Big| \frac{d}{dt}(\cdot)\\ y'(t)=1-2x'(t).\end{cases}$$

Se înlocuieşte x şi x' şi se obţine o ecuaţie cu variabile separabile în necunoscuta $y(t)$,

$$\frac{1-y'(t)}{2}=-\frac{y(t)-1}{3y(t)+2},\forall t\in\mathbb{I}_x \text{ a.î. } (3y(t)+2\neq 0)\Rightarrow$$

$$(3y(t)+2)\,y'(t)=-5y(t),\forall t\in\mathbb{I}_x \text{ a.î. } (3t-6x(t)+2\neq 0).$$

•Se observă că

$$y:\mathbb{I}\to\mathbb{R}, y(t)=0,$$

este soluţie pentru ecuaţia cu variabile separabile în necunoscuta $y(t)$, numită soluţie singulară. Corespunzător,

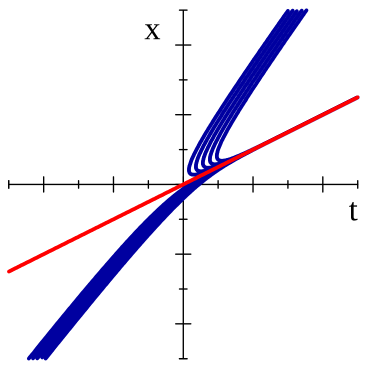
$$x:\mathbb{I}\to\mathbb{R}, x(t)=\frac{t}{2},$$

este soluţie pentru ecuaţia $(*)$ în necunoscuta $x(t)$, numită soluţie singulară.

•Se caută şi alte soluţii decât cele singulare.

$$\frac{3y(t)+2}{y(t)}y'(t)=-5,\forall t\in\mathbb{I}_x \text{ a.î. } (3y(t)+2\neq 0 \text{ şi } y(t)\neq 0)\ \Big|\ \int(\cdot)\,dt\Rightarrow$$

$\int \frac{3y(t)+2}{y(t)} y'(t)\,dt = \int -5dt \Rightarrow$
$3y(t) + 2\ln|y(t)| = -5t + c, \forall t \in \mathbb{I}_x$ a.î. $(3y(t) + 2 \neq 0$ şi $y(t) \neq 0)$ şi $c \in \mathbb{R}$.
Ultima relaţie reprezintă soluţia generală a ecuaţiei cu variabile separabile în necunoscuta $y(t)$ sub formă implicită. Se revine la substituţie şi se obţine
$3(t - 2x(t)) + 2\ln|t - 2x(t)| = -5t + c,$
pentru $\forall t \in \mathbb{I}_x$ a.î. $(3(t - 2x(t)) + 2 \neq 0$ şi $t - 2x(t) \neq 0)$ şi $c \in \mathbb{R}$. Ultima relaţie reprezintă soluţia generală a ecuaţiei $(*)$ sub formă implicită. Local, s-ar putea explicita $x : \mathbb{I}_x \to \mathbb{R}$,unde domeniul de definiţie a soluţiei, $\mathbb{I}_x$, depinde de constanta c (pentru fiecare c se obţine o soluţie cu un anumit domeniu de definiţie şi o anumită lege de asociere).



g) Analog cu f).

1.4. Ecuaţii diferenţiale cu diferenţială exactă şi reductibile la ecuaţii cu diferenţială exactă

1.4.1. Ecuaţii cu diferenţială exactă

Forma generală a unei ecuaţii cu diferenţială exactă:

$$\boxed{x'(t) = -\frac{P(t, x(t))}{Q(t, x(t))}} \text{ sau} \tag{11}$$

$$\boxed{\underbrace{P(t, x)\,dt + Q(t, x)\,dx}_{\omega(t,x)} = 0,} \tag{11'}$$

unde $P, Q : \mathbb{D} \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sunt două funcţii de clasa $\mathcal{C}^1$ pe $\mathbb{D}$ astfel încât să existe o funcţie $F : \mathbb{D} \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, de clasa $\mathcal{C}^2$ pe $\mathbb{D}$, cu $\omega = dF$, adică

$$\begin{cases} (12.1)\ \frac{\partial F}{\partial t}(t, x) = P(t, x), \forall (t, x) \in \mathbb{D}, \\ (12.2)\ \frac{\partial F}{\partial x}(t, x) = Q(t, x), \forall (t, x) \in \mathbb{D}. \end{cases}$$

(ecuaţia diferenţială $(11')$ este *cu diferenţială exactă* dacă forma diferenţială
$\omega(t, x) = P(t, x)\,dt + Q(t, x)\,dx$ este exactă)

Rezolvare: Se caută $x(t) =?$, sau $t(x) =?$, sau o relaţie de dependenţa algebrico-funcţională între t şi x (fără operatorii de derivare sau integrare), soluţie pentru ecuaţiile (11) sau $(11')$. Înlocuind (12.1) şi (12.2) în $(11')$, se obţine

$$\frac{\partial F}{\partial t}(t, x)\,dt + \frac{\partial F}{\partial x}(t, x)\,dx = 0, \forall (t, x) \in \mathbb{D} \Rightarrow dF(t, x) = 0, \forall (t, x) \in \mathbb{D} \Rightarrow$$

$$\boxed{F(t,x) = c, \forall (t,x) \in \mathbb{D}, c \in \mathbb{I}_c \subseteq \mathbb{R}.} \tag{13}$$

Ultima relaţie reprezintă soluţia generală a ecuaţiilor (11) sau (11′) sub formă implicită. Domeniul de definiţie a soluţiei, $\mathbb{D}$, depinde de constanta c (pentru fiecare c se obţine o soluţie cu un anumit domeniu de definiţie şi o anumită lege de dependenţă între t şi x). Local, s-ar putea explicita $x : \mathbb{I}_x \to \mathbb{R}$,unde domeniul de definiţie a soluţiei, $\mathbb{I}_x$, depinde de constanta c (pentru fiecare c se obţine o soluţie cu un anumit domeniu de definiţie şi o anumită lege de asociere).

Teoremă: În ipotezele anterioare, dacă $\mathbb{D}$ este domeniu simplu conex şi ω este formă închisă, adică

$$\boxed{\frac{\partial P}{\partial x}(t,x) = \frac{\partial Q}{\partial t}(t,x), \forall (t,x) \in \mathbb{D}.} \tag{14}$$

atunci ecuaţia diferenţială (11′) este cu diferenţială exactă pe $\mathbb{D}$.

Exerciţiul 9. Să se determine soluţiile generale ale următoarelor ecuaţii diferenţiale cu diferenţială exactă

a) $x'(t) = -\dfrac{2tx(t) - 2x^3(t)}{t^2 - 6tx^2(t)}, t \in \mathbb{I};$

b) $(\sin x + (1-x)\cos t)\,dt + ((1+t)\cos x - \sin t)\,dx = 0, t \in \mathbb{I};$

c) $\left(\dfrac{t}{\sqrt{t^2+x^2(t)}} + \dfrac{1}{t} + \dfrac{1}{x(t)}\right)dt + \left(\dfrac{x(t)}{\sqrt{t^2+x^2(t)}} + \dfrac{1}{x(t)} - \dfrac{t}{x^2(t)}\right)dx(t) = 0, t \in \mathbb{I}$;

d) $8tx(t) - 5x^2(t) + 2t(2t - 5x(t))\,x'(t) = 0, t \in \mathbb{I};$

e) $3t\left(t + 2x^2(t)\right)dt + 2x(t)\left(3t^2 + 2x^2(t)\right)dx(t) = 0, t \in \mathbb{I};$

f) $(t\cos x - x\sin x)\,dx + \sin x dt = 0, t \in \mathbb{I};$

g) $(t + \sin x)\,dt + (t\cos x + \sin x)\,dx = 0, t \in \mathbb{I};$

h) $\left(t + e^t \sin x\right)dt + \left(e^t \cos x + \sin x\right)dx = 0, t \in \mathbb{I};$

i) $\left(t^2 + \sin x\right)dt + (1 + t\cos x)\,dx = 0, t \in \mathbb{I};$

j) $xe^t dt + \left(x + e^t\right)dx = 0, t \in \mathbb{I}.$

Rezolvare: a) A se vedea Curs.

b) $(\sin x + (1-x)\cos t)\,dt + ((1+t)\cos x - \sin t)\,dx = 0, t \in \mathbb{I}.$

Rezolvare: Se determină soluţia generală a ecuaţiei

$(*)$ $(\sin x + (1-x)\cos t)\,dt + ((1+t)\cos x - \sin t)\,dx = 0, t \in \mathbb{I}.$

Pentru $t \in \mathbb{I}_x \subseteq \mathbb{I}$, variabilă independentă din domeniul de definiţie a soluţiei, se caută $x(t) = ?$, x funcţie necunoscută, soluţie pentru ecuaţia $(*)$. De fapt, se caută $x(t) = ?$, sau $t(x) = ?$, sau o relaţie de dependenţa algebrică între t şi x (fără operatorii de derivare sau integrare), soluţie pentru ecuaţia $(*)$.

Se notează cu $\mathbb{D}$ un domeniu simplu conex, $\mathbb{D} \subseteq \mathbb{R}^2$ şi

$$\begin{cases} P : \mathbb{D} \to \mathbb{R}, P(t,x) = \sin x + (1-x)\cos t \\ Q : \mathbb{D} \to \mathbb{R}, Q(t,x) = (1+t)\cos x - \sin t. \end{cases}$$

Etapa 1: Se studiază dacă ecuaţia $(*)$ este cu diferenţială exactă.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial P}{\partial x}(t,x) = \cos x - \cos t, \forall (t,x) \in \mathbb{D} \\ \dfrac{\partial Q}{\partial t}(t,x) = \cos x - \cos t, \forall (t,x) \in \mathbb{D}. \end{cases}$$

Atunci $\dfrac{\partial P}{\partial x}(t,x) - \dfrac{\partial Q}{\partial t}(t,x) = 0, \forall (t,x) \in \mathbb{D} \Rightarrow$ ecuaţia $(*)$ *poate fi* cu diferenţială exactă. Cum $\mathbb{D}$ este ales domeniu simplu conex$\Rightarrow$ ecuaţia $(*)$ este cu diferenţială exactă.

Etapa 2: Se determină acea funcţie (există conform Etapei 1) $F : \mathbb{D} \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, de clasa $\mathcal{C}^2$ pe $\mathbb{D}$, din a cărei diferenţială să provină ecuaţia, adică

$$\begin{cases} (12.1) & \dfrac{\partial F}{\partial t}(t,x) = \sin x + (1-x)\cos t, \forall (t,x) \in \mathbb{D}, \\ (12.2) & \dfrac{\partial F}{\partial x}(t,x) = (1+t)\cos x - \sin t, \forall (t,x) \in \mathbb{D}. \end{cases}$$

Sistemul anterior este un sistem de ecuaţii cu derivate parţiale în necunoscuta $F(t,x)$. Se rezolvă.

<u>modul 12.1.</u> $(12.1)| \int (\cdot)\, dt \Rightarrow$

$$\int \frac{\partial F}{\partial t}(t,x)\, dt \underset{\text{de integrare}}{\overset{t \text{ este var.}}{=}} \int (\sin x + (1-x)\cos t)\, dt + \varphi(x), \forall (t,x) \in \mathbb{D} \Rightarrow$$

$(\circ_1)\ F(t,x) = t\sin x + (1-x)\sin t + \varphi(x), \forall (t,x) \in \mathbb{D},$

unde $\varphi(x)$ este o funcţie necunoscută, constantă în raport cu variabila de integrare t. Se determină φ folosind şi (12.2). Se derivează ultima relaţie în raport cu $x \Rightarrow$

$$\frac{\partial F}{\partial x}(t,x) \underset{\text{de derivare}}{\overset{x \text{ este var.}}{=}} t\cos x - \sin t + \frac{d\varphi}{dx}(x), \forall (t,x) \in \mathbb{D}.$$

Se înlocuieşte $(12.2) \Rightarrow$

$$(1+t)\cos x - \sin t = t\cos x - \sin t + \frac{d\varphi}{dx}(x), \forall (t,x) \in \mathbb{D} \Rightarrow$$

$$\frac{d\varphi}{dx}(x) = \cos x \Rightarrow \varphi(x) = \sin x + c_1, c_1 \in \mathbb{R}.$$

Se înlocuieşte în expresia lui $F, (\circ_1) \Rightarrow$

$F(t,x) = t\sin x + (1-x)\sin t + \sin x + c_1, \forall (t,x) \in \mathbb{D}$, şi $c_1 \in \mathbb{R}$.

<u>modul 12.2.</u> $(12.2)| \int (\cdot)\, dx \Rightarrow$

$$\int \frac{\partial F}{\partial x}(t,x)\, dx \underset{\text{de integrare}}{\overset{x \text{ este var.}}{=}} \int ((1+t)\cos x - \sin t)\, dx + \psi(t), \forall (t,x) \in \mathbb{D} \Rightarrow$$

$(\circ_2)\ F(t,x) = (1+t)\sin x - x\sin t + \psi(t), \forall (t,x) \in \mathbb{D},$

unde $\psi(t)$ este o funcţie necunoscută, constantă în raport cu variabila de integrare x. Se determină ψ folosind şi (12.1). Se derivează ultima relaţie în raport cu $t \Rightarrow$

$$\frac{\partial F}{\partial t}(t,x) \underset{\text{de derivare}}{\overset{t \text{ este var.}}{=}} \sin x - x\cos t + \frac{d\psi}{dt}(t), \forall (t,x) \in \mathbb{D}.$$

Se înlocuieşte $(12.1) \Rightarrow$

$$\sin x + (1-x)\cos t = \sin x - x\cos t + \frac{d\psi}{dt}(t), \forall (t,x) \in \mathbb{D} \Rightarrow$$

$$\frac{d\psi}{dt}(t) = \cos t \Rightarrow \psi(t) = \sin t + c_2, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Se înlocuieşte în expresia lui $F, (\circ_2) \Rightarrow$

$F(t,x) = (1+t)\sin x - x\sin t + \sin t + c_2, \forall (t,x) \in \mathbb{D}$ şi $c_2 \in \mathbb{R}$

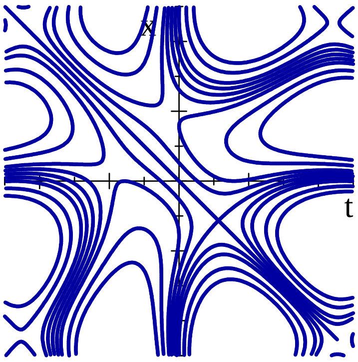
<u>Etapa 3:</u> Cu F determinată la Etapa 2, soluţia generală a ecuaţiei $(*)$ este data sub forma implicită de

$F(t,x) = c_3, c_3 \in \mathbb{R},$

adică, notând $c = c_3 - c_1$ sau $c = c_3 - c_2$, de

$(**)\ (1+t)\sin x + (1-x)\sin t = c, \forall (t,x) \in \mathbb{D}$ a.î. şi $c \in \mathbb{R}$.

Local, s-ar putea explicita $x : \mathbb{I}_x \to \mathbb{R}$,unde domeniul de definiţie a soluţiei, $\mathbb{I}_x$, depinde de constanta c (pentru fiecare c se obţine o soluţie cu un anumit domeniu de definiţie şi o anumită lege de asociere).



c) $\left(\frac{t}{\sqrt{t^2+x^2(t)}}+\frac{1}{t}+\frac{1}{x(t)}\right)dt+\left(\frac{x(t)}{\sqrt{t^2+x^2(t)}}+\frac{1}{x(t)}-\frac{t}{x^2(t)}\right)dx(t)=0, t\in\mathbb{I}$

Rezolvare: Se determină soluţia generală a ecuaţiei $(*)$ .Pentru $t\in\mathbb{I}_x\subseteq\mathbb{I}$, variabilă independentă din domeniul de definiţie a soluţiei, se caută $x(t)=?$, x funcţie necunoscută, soluţie pentru ecuaţia $(*)$. De fapt, se caută $x(t)=?$, sau $t(x)=?$, sau o relaţie de dependenţa algebrică între t şi x (fără operatorii de derivare sau integrare), soluţie pentru ecuaţia $(*)$.

Folosind Convenţiile 1 şi 2, se observă că $(*)\Rightarrow$
$\left(t\left(t^2+x^2\right)^{-\frac{1}{2}}+\frac{1}{t}+\frac{1}{x}\right)dt+\left(x\left(t^2+x^2\right)^{-\frac{1}{2}}+\frac{1}{x}-\frac{t}{x^2}\right)dx=0,$
pentru $\forall t\in\mathbb{I}$ a.î. $t^2+x^2\neq 0$ şi $t\neq 0$ şi $x\neq 0$. Se notează cu $\mathbb{D}$ un domeniu simplu conex, $\mathbb{D}\subset\left\{(t,x)\in\mathbb{R}^2;(t,x)\neq(0,0)\text{ şi } t\neq 0 \text{ şi } x\neq 0\right\}$ şi

$$\begin{cases} P:\mathbb{D}\to\mathbb{R}, P(t,x)=t\left(t^2+x^2\right)^{-\frac{1}{2}}+\frac{1}{t}+\frac{1}{x} \\ Q:\mathbb{D}\to\mathbb{R}, Q(t,x)=x\left(t^2+x^2\right)^{-\frac{1}{2}}+\frac{1}{x}-\frac{t}{x^2}. \end{cases}$$

Etapa 1: Se studiază dacă ecuaţia $(*)$ este cu diferenţială exactă.

$$\begin{cases} \frac{\partial P}{\partial x}(t,x)=t\left(-\frac{1}{2}\right)\left(t^2+x^2\right)^{-\frac{3}{2}}2x-x^{-2},\forall(t,x)\in\mathbb{D} \\ \frac{\partial Q}{\partial t}(t,x)=x\left(-\frac{1}{2}\right)\left(t^2+x^2\right)^{-\frac{3}{2}}2t-x^{-2},\forall(t,x)\in\mathbb{D}. \end{cases}$$

Atunci $\frac{\partial P}{\partial x}(t,x)-\frac{\partial Q}{\partial t}(t,x)=0,\forall(t,x)\in\mathbb{D}\Rightarrow$ ecuaţia $(*)$ *poate fi* cu diferenţială exactă. Cum $\mathbb{D}$ este ales domeniu simplu conex$\Rightarrow$ ecuaţia $(*)$ este cu diferenţială exactă.

Etapa 2: Se determină acea funcţie (există conform Etapei 1) $F:\mathbb{D}\subseteq\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, de clasa $\mathcal{C}^2$ pe $\mathbb{D}$, din a cărei diferenţială să provină ecuaţia, adică

$$\begin{cases} (12.1)\ \frac{\partial F}{\partial t}(t,x)=t\left(t^2+x^2\right)^{-\frac{1}{2}}+\frac{1}{t}+\frac{1}{x},\forall(t,x)\in\mathbb{D}, \\ (12.2)\ \frac{\partial F}{\partial x}(t,x)=x\left(t^2+x^2\right)^{-\frac{1}{2}}+\frac{1}{x}-\frac{t}{x^2},\forall(t,x)\in\mathbb{D}. \end{cases}$$

Sistemul anterior este un sistem de ecuaţii cu derivate parţiale în necunoscuta $F(t,x)$. Se rezolvă.

modul 12.1. $(12.1)|\int(\cdot)\,dt\Rightarrow$

$$\int\frac{\partial F}{\partial t}(t,x)\,dt=\int\left(t\left(t^2+x^2\right)^{-\frac{1}{2}}+\tfrac{1}{t}+\tfrac{1}{x}\right)dt\Rightarrow$$

$(\circ_1)\ F(t,x)=\left(t^2+x^2\right)^{\frac{1}{2}}+\ln|t|+x^{-1}t+\varphi(x),\forall(t,x)\in\mathbb{D},$

unde $\varphi(x)$ este o funcţie necunoscută, constantă în raport cu variabila de integrare t. Se determină φ folosind şi (12.2). Se derivează ultima relaţie în raport cu $x\Rightarrow$

$\frac{\partial F}{\partial x}(t,x) = x\left(t^2+x^2\right)^{-\frac{1}{2}} - tx^{-2} + \frac{d\varphi}{dx}(x), \forall (t,x) \in \mathbb{D}.$

Se înlocuieşte (12.2) $\Rightarrow$

$x\left(t^2+x^2\right)^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{x} - \frac{t}{x^2} = x\left(t^2+x^2\right)^{-\frac{1}{2}} - tx^{-2} + \frac{d\varphi}{dx}(x), \forall (t,x) \in \mathbb{D} \Rightarrow$

$\frac{d\varphi}{dx}(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow \varphi(x) = \ln|x| + c_1, c_1 \in \mathbb{R}.$

Se înlocuieşte în expresia lui $F, (\circ_1) \Rightarrow$

$F(t,x) = \left(t^2+x^2\right)^{\frac{1}{2}} + \ln|t| + x^{-1}t + \ln|x| + c_1, \forall (t,x) \in \mathbb{D}$, şi $c_1 \in \mathbb{R}$.

modul 12.2. $(12.2)|\int(\cdot)\,dx \Rightarrow$

$\int \frac{\partial F}{\partial x}(t,x)\,dx = \int \left(x\left(t^2+x^2\right)^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{x} - \frac{t}{x^2}\right)dx \Rightarrow$

$(\circ_2)\ F(t,x) = \left(t^2+x^2\right)^{\frac{1}{2}} + \ln|x| + tx^{-1} + \psi(t), \forall (t,x) \in \mathbb{D},$

unde $\psi(t)$ este o funcţie necunoscută, constantă în raport cu variabila de integrare t. Se determină ψ folosind şi (12.1). Se derivează ultima relaţie în raport cu $t \Rightarrow$

$\frac{\partial F}{\partial t}(t,x) = t\left(t^2+x^2\right)^{-\frac{1}{2}} + x^{-1} + \frac{d\psi}{dt}(t), \forall (t,x) \in \mathbb{D}.$

Se înlocuieşte (12.1) $\Rightarrow$

$t\left(t^2+x^2\right)^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{t} + \frac{1}{x} = t\left(t^2+x^2\right)^{-\frac{1}{2}} + x^{-1} + \frac{d\psi}{dt}(t), \forall (t,x) \in \mathbb{D} \Rightarrow$

$\frac{d\psi}{dt}(t) = \frac{1}{t} \Rightarrow \psi(t) = \ln|t| + c_2, c_2 \in \mathbb{R}.$

Se înlocuieşte în expresia lui $F, (\circ_2) \Rightarrow$

$F(t,x) = \left(t^2+x^2\right)^{\frac{1}{2}} + \ln|x| + tx^{-1} + \ln|t| + c_2, \forall (t,x) \in \mathbb{D}$ şi $c_2 \in \mathbb{R}$

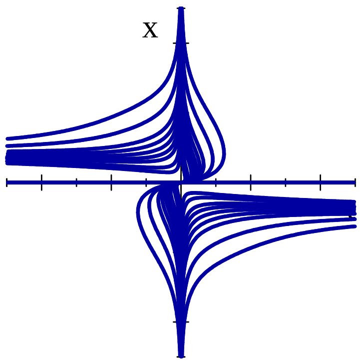
Etapa 3: Cu F determinată la Etapa 2, soluţia generală a ecuaţiei $(*)$ este data sub forma implicită de

$F(t,x) = c_3, c_3 \in \mathbb{R},$

adică, notând $c = c_3 - c_1$ sau $c = c_3 - c_2$, de

$(**)\ \left(t^2+x^2\right)^{\frac{1}{2}} + \ln|t| + \ln|x| + tx^{-1} = c, \forall (t,x) \in \mathbb{D}$ a.î. şi $c \in \mathbb{R}$.

Local, s-ar putea explicita $x : \mathbb{I}_x \to \mathbb{R}$,unde domeniul de definiţie a soluţiei, $\mathbb{I}_x$, depinde de constanta c (pentru fiecare c se obţine o soluţie cu un anumit domeniu de definiţie şi o anumită lege de asociere).



d), e), f), g), h), i), j) -analog cu c).

Observaţie: La Etapa 2 se apelează la modul 1 sau modul 2 în funcţie de simplitatea determinării integralelor ce apar in calcul. Există ecuaţii cu diferenţială exactă pentru care în Etapa 2, la unul din moduri, sau chiar la ambele, apar integrale nedefinite care există, dar nu sunt exprimabile cu funcţii elementare. Se evită o astfel de "rezolvare" a ecuaţiei. Dacă necunoscuta apare sub operatorul de integrare, nu s-a rezolvat ecuaţia, ci s-a transformat într-o ecuaţie integrală. Dacă în rezolvare se folosesc integrale definite şi dacă apare de calculat o integrala definită fără parametru, de exemplu $\int_0^1 e^{-t^2}dt$, atunci se apelează la metode numerice, implementabile pe calculator.

○1.4.2. Ecuaţii cu factor integrant

Forma generală a unei ecuaţii cu factor integrant: Este tot (11) sau (11′) unde $P, Q : \mathbb{D} \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sunt două funcţii de clasa $\mathcal{C}^1$ pe $\mathbb{D}$ astfel încât ecuaţiile (11) sau (11′) nu sunt cu diferenţială exactă (nu se verifică (14)), dar există o funcţie $\mu : \mathbb{D}_1 \subseteq \mathbb{D} \to \mathbb{R}$, numită *factor integrant*, astfel încât

μ să fie de clasă $\mathcal{C}^1$ pe $\mathbb{D}_1$,
$\mu(t,x) \neq 0$, $\forall (t,x) \in \mathbb{D}_1$ şi
$(11') \cdot \mu(t,x)$ sa fie ecuaţie cu diferenţială exactă pe $\mathbb{D}_1$.

Rezolvare: Se caută $x(t) =?$, sau $t(x) =?$, sau o relaţie de dependenţa algebrică între t şi x (fără operatorii de derivare sau integrare), soluţie pentru ecuaţiile (11) sau (11′).

a) Dacă

$Q(t,x) \neq 0$, $\forall (t,x) \in \mathbb{D}_1$ şi

$$\frac{1}{Q(t,x)}\left(\frac{\partial P}{\partial x}(t,x) - \frac{\partial Q}{\partial t}(t,x)\right) = f(t), \tag{15}$$

atunci se caută $\mu = \mu(t)$ factor integrant a.î.

$$\boxed{\frac{\mu'(t)}{\mu(t)} = f(t).} \tag{16}$$

b) Dacă

$P(t,x) \neq 0$, $\forall (t,x) \in \mathbb{D}_1$ şi

$$\frac{-1}{P(t,x)}\left(\frac{\partial P}{\partial x}(t,x) - \frac{\partial Q}{\partial t}(t,x)\right) = g(x), \tag{17}$$

atunci se caută $\mu = \mu(x)$ factor integrant a.î.

$$\boxed{\frac{\mu'(x)}{\mu(x)} = g(x).} \tag{18}$$

c) Există situaţii în care nu are loc nici a), nici b). În acest caz se poate căuta un factor integrant $\mu(t,x)$, de o anumită formă, apriori precizată, impunând ca $(11')\cdot\mu(t,x)$ sa fie ecuaţie cu diferenţială exactă pe $\mathbb{D}_1$.

Se rezolvă ecuaţia cu diferenţială exactă $(11') \cdot \mu(t,x)$, se obţine

$$\widetilde{F}(t,x) = c, \forall (t,x) \in \mathbb{D}_1, c \in \mathbb{I}_c \subseteq \mathbb{R}, \tag{19}$$

soluţie generală a ecuaţiei $(11') \cdot \mu(t,x)$, precum şi a ecuaţiilor (11) sau (11′), sub formă implicită, pe $\mathbb{D}_1 \subseteq \mathbb{D}$. Domeniul de definiţie a soluţiei, $\mathbb{D}_1$, depinde de constanta c (pentru fiecare c se obţine o soluţie cu un anumit domeniu de definiţie şi o anumită lege de dependenţă între t şi x). Local, s-ar putea explicita $x : \mathbb{I}_x \to \mathbb{R}$,unde domeniul de definiţie a soluţiei, $\mathbb{I}_x$, depinde de constanta c (pentru fiecare c se obţine o soluţie cu un anumit domeniu de definiţie şi o anumită lege de asociere).

○**Exerciţiul 10**. Să se determine soluţiile generale ale următoarelor ecuaţii diferenţiale reductibile la ecuaţii cu diferenţială exactă, prin metoda factorului integrant:

a) $\left(t^3 \sin x - 2x\right) dt + \left(t^4 \cos x + t\right) dx = 0, t \in \mathbb{I}$;
b) $\left(3t^2 + x\right) dt + t\left(1 + 2t^2 x + 2x^2\right) dx = 0, t \in \mathbb{I}$;
c) $2txx' - \left(t + x^2\right) = 0, t \in \mathbb{I}$;

d) $\left(1-t^2x(t)\right)dt+t^2\left(x(t)-t\right)dx(t)=0, t\in\mathbb{I}$;
e) $\left(t^2+x^2+2t\right)dt+2xdx=0, t\in\mathbb{I}$;
f) $\left(tx^2-x^3\right)dt+\left(1-tx^2\right)dx=0, t\in\mathbb{I}$;
g) $xdt-\left(t+x^2\right)dx=0, t\in\mathbb{I}$;
h) $2txdt+\left(3x^2-t^2+3\right)dx=0, t\in\mathbb{I}$.

Rezolvare: a) Se determină soluţia generală a ecuaţiei

$(*)$ $\left(t^3\sin x-2x\right)dt+\left(t^4\cos x+t\right)dx=0, t\in\mathbb{I}$.

Pentru $t\in\mathbb{I}_x\subseteq D$, variabilă independentă din domeniul de definiţie a soluţiei, se caută $x(t)=?$, x funcţie necunoscută, soluţie pentru ecuaţia $(*)$. De fapt, se caută $x(t)=?$, sau $t(x)=?$, sau o relaţie de dependenţă algebrică între t şi x (fără operatorii de derivare sau integrare), soluţie pentru ecuaţia $(*)$.

Se notează $\mathbb{D}$ domeniu simplu conex, $\mathbb{D}\subseteq\mathbb{R}^2$ şi

$$\begin{cases} P:\mathbb{D}\to\mathbb{R}, P(t,x)=t^3\sin x-2x \\ Q:\mathbb{D}\to\mathbb{R}, Q(t,x)=t^4\cos x+t. \end{cases}$$

Etapa 1: Se studiază dacă ecuaţia $(*)$ este cu diferenţială exactă. Se verifică condiţia (14).

$$\begin{cases} \dfrac{\partial P}{\partial x}(t,x)=t^3\cos x-2, \forall (t,x)\in\mathbb{D} \\ \dfrac{\partial Q}{\partial t}(t,x)=4t^3\cos x+1, \forall (t,x)\in\mathbb{D}. \end{cases}$$

Atunci

$$\frac{\partial P}{\partial x}(t,x)-\frac{\partial Q}{\partial t}(t,x)=-3\left(t^3\cos x+1\right), \forall (t,x)\in\mathbb{D},$$

adică nu se verifică (14), adică ecuaţia $(*)$ nu este cu diferenţială exactă.

Etapa 1_1: Se determină un factor integrant $\mu(t,x)$, dacă se găseşte sub una din formele de la Rezolvare a) sau b).

Fie $\mathbb{D}_1$ un domeniu simplu conex, $\mathbb{D}_1\subset\left\{(t,x)\in\mathbb{R}^2; t^4\cos x+t\neq 0\right\}\subset\mathbb{D}$. Cum

$$\frac{1}{Q(t,x)}\left(\frac{\partial P}{\partial x}(t,x)-\frac{\partial Q}{\partial t}(t,x)\right)=-\frac{3}{t}$$

depinde doar de t, nu şi de x, se caută $\mu=\mu(t)$ factor integrant a.î.

$$\frac{\mu'(t)}{\mu(t)}=-\frac{3}{t}, \forall t\in\mathbb{I}_x \text{ a.î. } t\neq 0 \,\Big|\, \int(\cdot)\,dt \Rightarrow$$

$$\ln|\mu(t)|=-3\ln|t|+\ln k, \forall t\in\mathbb{I}_x \text{ a.î. } t\neq 0 \text{ şi } k\in\mathbb{R}_+^* \Rightarrow$$

$$\mu(t)=\frac{c}{t^3}, \forall t\in\mathbb{I}_x \text{ a.î. } t\neq 0 \text{ şi } c\in\mathbb{R}^*.$$

Se alege un factor integrant, se alege $c=1\Rightarrow$

$$\mu(t)=\frac{1}{t^3}, \forall t\in\mathbb{I}_x \text{ a.î. } t\neq 0.$$

Se înmulţeşte ecuaţia $(*)$ cu $\mu(t)=\frac{1}{t^3}\Rightarrow$

$$(*_1)\ \left(\sin x-2\frac{x}{t^3}\right)dt+\left(t\cos x+\frac{1}{t^2}\right)dx=0, (t,x)\in\mathbb{D}_1.$$

Din algoritmul de determinare a lui $\mu(t)$, ecuaţia $(*_1)$ este cu diferenţială exactă, adică

$$\begin{cases} P_1:\mathbb{D}_1\to\mathbb{R}, P_1(t,x)=\sin x-2\dfrac{x}{t^3} \\ Q_1:\mathbb{D}_1\to\mathbb{R}, Q_1(t,x)=t\cos x+\dfrac{1}{t^2} \end{cases}$$

verifică (14).

Etapa 2_1: Se determină acea funcţie (există conform Etapei 1_1) $F_1:\mathbb{D}_1\subseteq\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, de clasa $\mathcal{C}^2$ pe $\mathbb{D}_1$, din a cărei diferenţială să provină ecuaţia $(*_1)$, adică

$$\begin{cases} (12.1) \ \dfrac{\partial F_1}{\partial t}(t,x) = \sin x - 2\dfrac{x}{t^3}, \forall (t,x) \in \mathbb{D}_1, \\ (12.2) \ \dfrac{\partial F_1}{\partial x}(t,x) = t\cos x + \dfrac{1}{t^2}, \forall (t,x) \in \mathbb{D}_1. \end{cases}$$

Sistemul anterior este un sistem de ecuaţii cu derivate parţiale în necunoscuta $F_1(t,x)$. Se rezolvă.

<u>modul 12.1.</u> $(12.1)| \int (\cdot)\, dt \Rightarrow$

$$\int \frac{\partial F_1}{\partial t}(t,x)\, dt = \int \left(\sin x - 2\frac{x}{t^3}\right) dt \Rightarrow$$

$$F_1(t,x) = t\sin x + xt^{-2} + \varphi_1(x), \forall (t,x) \in \mathbb{D}_1,$$

unde $\varphi_1(x)$ este o funcţie necunoscută, constantă în raport cu variabila de integrare t. Se determină φ_1 folosind şi (12.2). Se derivează ultima relaţie în raport cu $x \Rightarrow$

$$\frac{\partial F_1}{\partial x}(t,x) = t\cos x + t^{-2} + \frac{d\varphi_1}{dx}(x), \forall (t,x) \in \mathbb{D}_1.$$

Se înlocuieşte (12.2) $\Rightarrow$

$$t\cos x + \frac{1}{t^2} = t\cos x + t^{-2} + \frac{d\varphi_1}{dx}(x), \forall (t,x) \in \mathbb{D}_1 \Rightarrow$$

$$\frac{d\varphi_1}{dx}(x) = 0 \Rightarrow \varphi_1(x) = c_1, c_1 \in \mathbb{R}.$$

Se înlocuieşte în expresia lui $F_1 \Rightarrow$

$$F_1(t,x) = t\sin x + xt^{-2} + c_1, \forall (t,x) \in \mathbb{D}_1 \text{ şi } c_1 \in \mathbb{R}.$$

<u>modul 12.2.</u> $(12.2)| \int (\cdot)\, dx \Rightarrow$

$$\int \frac{\partial F_1}{\partial x}(t,x)\, dx = \int \left(t\cos x + \frac{1}{t^2}\right) dx \Rightarrow$$

$$F_1(t,x) = t\sin x + \frac{1}{t^2}x + \psi_1(t), \forall (t,x) \in \mathbb{D}_1,$$

unde $\psi_1(t)$ este o funcţie necunoscută, constantă în raport cu variabila de integrare x. Se determină ψ folosind şi (12.1). Se derivează ultima relaţie în raport cu $t \Rightarrow$

$$\frac{\partial F_1}{\partial t}(t,x) = \sin x - 2t^{-3}x + \frac{d\psi_1}{dt}(t), \forall (t,x) \in \mathbb{D}_1.$$

Se înlocuieşte (12.1) $\Rightarrow$

$$\sin x - 2\frac{x}{t^3} = \sin x - 2t^{-3}x + \frac{d\psi_1}{dt}(t), \forall (t,x) \in \mathbb{D}_1 \Rightarrow$$

$$\frac{d\psi_1}{dt}(t) = 0 \Rightarrow \psi_1(t) = c_2, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Se înlocuieşte în expresia lui $F_1 \Rightarrow$

$$F_1(t,x) = t\sin x + \frac{1}{t^2}x + c_2, \forall (t,x) \in \mathbb{D}_1 \text{ şi } c_2 \in \mathbb{R}.$$

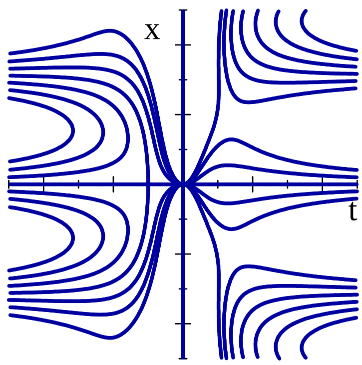
<u>Etapa 3_1:</u> Cu F_1 determinată la Etapa 2_1, se obţine că soluţia generala a ecuaţiei $(*_1)$ este data sub forma implicită de

$$F_1(t,x) = c_3, c_3 \in \mathbb{R},$$

adică, notând $c = c_3 - c_1$ sau $c = c_3 - c_2$, de

$$(**) \ t\sin x + \frac{1}{t^2}x = c, \forall (t,x) \in \mathbb{D}_1 \text{ şi } c \in \mathbb{R}.$$

Ultima relaţie dă şi soluţia ecuaţiei $(*)$ sub formă implicită pe $\mathbb{D}_1 \subset \mathbb{D}$. Local, s-ar putea explicita $x : \mathbb{I}_x \to \mathbb{R}$,unde domeniul de definiţie a soluţiei, $\mathbb{I}_x$, depinde de constanta c (pentru fiecare c se obţine o soluţie cu un anumit domeniu de definiţie şi o anumită lege de asociere).



b) Se determină soluţia generală a ecuaţiei

$(*)\ \left(3t^2+x\right)dt+t\left(1+2t^2x+2x^2\right)dx=0, t\in\mathbb{I}.$

Pentru $t\in\mathbb{I}_x\subseteq D$, variabilă independentă din domeniul de definiţie a soluţiei, se caută $x(t)=?$, x funcţie necunoscută, soluţie pentru ecuaţia $(*)$. De fapt, se caută $x(t)=?$, sau $t(x)=?$, sau o relaţie de dependenţa algebrică între t şi x (fără operatorii de derivare sau integrare), soluţie pentru ecuaţia $(*)$.

Se notează $\mathbb{D}$ domeniu simplu conex, $\mathbb{D}\subseteq\mathbb{R}^2$ şi

$$\begin{cases} P:\mathbb{D}\to\mathbb{R}, P(t,x)=3t^2+x \\ Q:\mathbb{D}\to\mathbb{R}, Q(t,x)=t\left(1+2t^2x+2x^2\right). \end{cases}$$

Etapa 1: Se studiază dacă ecuaţia $(*)$ este cu diferenţială exactă. Se verifică condiţia (14).

$$\begin{cases} \dfrac{\partial P}{\partial x}(t,x)=1, \forall (t,x)\in\mathbb{D} \\ \dfrac{\partial Q}{\partial t}(t,x)=1+6xt^2+2x^2, \forall (t,x)\in\mathbb{D}. \end{cases}$$

Atunci

$$\frac{\partial P}{\partial x}(t,x)-\frac{\partial Q}{\partial t}(t,x)=-2x\left(3t^2+x\right), \forall (t,x)\in\mathbb{D},$$

adică nu se verifică (14), adică ecuaţia $(*)$ nu este cu diferenţială exactă.

Etapa 1_2: Se determină un factor integrant $\mu(t,x)$, dacă se găseşte sub una din formele de la Rezolvare a) sau b).

Fie $\mathbb{D}_1$ un domeniu simplu conex, $\mathbb{D}_1\subset\left\{(t,x)\in\mathbb{R}^2; t\left(1+2t^2x+2x^2\right)\neq 0\right\}\subset\mathbb{D}$. Cum

$$\frac{1}{Q(t,x)}\left(\frac{\partial P}{\partial x}(t,x)-\frac{\partial Q}{\partial t}(t,x)\right)=\frac{-2x\left(3t^2+x\right)}{t\left(1+2t^2x+2x^2\right)}$$

nu depinde doar de t, ci şi de $x\Rightarrow$ nu se poate utiliza a).

Fie $\mathbb{D}_2$ un domeniu simplu conex, $\mathbb{D}_2\subset\left\{(t,x)\in\mathbb{R}^2; 3t^2+x\neq 0\right\}\subset\mathbb{D}$. Cum

$$\frac{-1}{P(t,x)}\left(\frac{\partial P}{\partial x}(t,x)-\frac{\partial Q}{\partial t}(t,x)\right)=2x$$

depinde doar de x, nu şi de $t\Rightarrow$ se caută $\mu=\mu(x)$ factor integrant a.î.

$$\frac{\mu'(x)}{\mu(x)}=2x, \forall x\in\mathbb{J}\subseteq\mathbb{R}\,\Big|\int(\cdot)\,dx\Rightarrow$$

$\ln|\mu(x)|=x^2+\ln k, \forall x\in\mathbb{J}\subseteq\mathbb{R}$ şi $k\in\mathbb{R}_+^*\Rightarrow$

$\mu(x)=ce^{x^2}, \forall x\in\mathbb{J}\subseteq\mathbb{R}$ şi $c\in\mathbb{R}^*$.

Se alege un factor integrant, se alege $c=1\Rightarrow$

$\mu(x)=e^{x^2}, \forall x\in\mathbb{J}\subseteq\mathbb{R}.$

Se înmulţeşte ecuaţia $(*)$ cu $\mu(x)=e^{x^2}\Rightarrow$

$(*_2)$ $e^{x^2}\left(3t^2+x\right)dt+e^{x^2}t\left(1+2t^2x+2x^2\right)dx=0,(t,x)\in\mathbb{D}_2.$

Din algoritmul de determinare a lui $\mu(x)$, ecuaţia $(*_2)$ este cu diferenţială exactă, adică

$$\begin{cases} P_2:\mathbb{D}_2\to\mathbb{R}, P_2(t,x)=e^{x^2}\left(3t^2+x\right) \\ Q_2:\mathbb{D}_2\to\mathbb{R}, Q_2(t,x)=e^{x^2}t\left(1+2t^2x+2x^2\right) \end{cases}$$

verifică (4).

<u>Etapa 2_2:</u> Se determină acea funcţie (există conform Etapei 1_2) $F_2:\mathbb{D}_2\subseteq\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, de clasa $\mathcal{C}^2$ pe $\mathbb{D}_2$, din a cărei diferenţială să provină ecuaţia $(*_2)$, adică

$$\begin{cases} (12.1)\ \dfrac{\partial F_1}{\partial t}(t,x)=e^{x^2}\left(3t^2+x\right),\forall(t,x)\in\mathbb{D}_2, \\ (12.2)\ \dfrac{\partial F_1}{\partial x}(t,x)=e^{x^2}t\left(1+2t^2x+2x^2\right),\forall(t,x)\in\mathbb{D}_2. \end{cases}$$

Sistemul anterior este un sistem de ecuaţii cu derivate parţiale în necunoscuta $F_2(t,x)$. Se rezolvă.

<u>modul 12.1.</u> $(12.1)|\int(\cdot)\,dt\Rightarrow$

$$\int\frac{\partial F_2}{\partial t}(t,x)\,dt=\int e^{x^2}\left(3t^2+x\right)dt\Rightarrow$$

$$F_2(t,x)=e^{x^2}\left(t^3+xt\right)+\varphi_2(x),\forall(t,x)\in\mathbb{D}_2,$$

unde $\varphi_2(x)$ este o funcţie necunoscută, constantă în raport cu variabila de integrare t. Se determină φ_2 folosind şi (12.2). Se derivează ultima relaţie în raport cu $x\Rightarrow$

$$\frac{\partial F_2}{\partial x}(t,x)=e^{x^2}2x\left(t^3+xt\right)+e^{x^2}t+\frac{d\varphi_2}{dx}(x),\forall(t,x)\in\mathbb{D}_2.$$

Se înlocuieşte (12.2) $\Rightarrow$

$$e^{x^2}t\left(1+2t^2x+2x^2\right)=e^{x^2}2x\left(t^3+xt\right)+e^{x^2}t+\frac{d\varphi_2}{dx}(x),\forall(t,x)\in\mathbb{D}_2\Rightarrow$$

$$\frac{d\varphi_2}{dx}(x)=0\Rightarrow\varphi_2(x)=c_1,c_1\in\mathbb{R}.$$

Se înlocuieşte în expresia lui $F_2\Rightarrow$

$$F_2(t,x)=e^{x^2}\left(t^3+xt\right)+c_1,\forall(t,x)\in\mathbb{D}_2 \text{ şi } c_1\in\mathbb{R}.$$

<u>modul 12.2.</u> $(12.2)|\int(\cdot)\,dx\Rightarrow$

$$\int\frac{\partial F_2}{\partial x}(t,x)\,dx=\int e^{x^2}t\left(1+2t^2x+2x^2\right)dx\Rightarrow$$

Se observă ca acest mod de determinare a lui F_2 nu se poate aplica deoarece $\int e^{x^2}dx$ nu poate fi exprimată cu funcţii elementare.

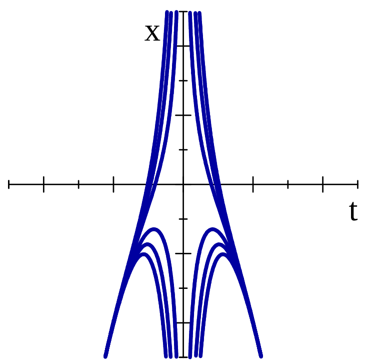
<u>Etapa 3_2:</u> Cu F_2 determinată la Etapa 2_2, se obţine că soluţia generală a ecuaţiei $(*_2)$ este dată sub forma implicită de

$$F_2(t,x)=c_3,c_3\in\mathbb{R},$$

adică, notând $c=c_3-c_1$, de

$$(**)\ e^{x^2}\left(t^3+xt\right)=c,\forall(t,x)\in\mathbb{D}_2 \text{ şi } c\in\mathbb{R}.$$

Ultima relaţie dă şi soluţia ecuaţiei $(*)$ sub formă implicită pe $\mathbb{D}_2\subset\mathbb{D}$. Local, s-ar putea explicita $x:\mathbb{I}_x\to\mathbb{R}$,unde domeniul de definiţie a soluţiei, $\mathbb{I}_x$, depinde de constanta c (pentru fiecare c se obţine o soluţie cu un anumit domeniu de definiţie şi o anumită lege de asociere).



c) Se determină soluţia generală a ecuaţiei

$(*)$ $2txx' - \left(t + x^2\right) = 0 = 0, t \in \mathbb{I}$.

Pentru $t \in \mathbb{I}_x \subseteq D$, variabilă independentă din domeniul de definiţie a soluţiei, se caută $x\,(t) =?$, x funcţie necunoscută, soluţie pentru ecuaţia $(*)$. De fapt, Se caută $x\,(t) =?$, sau $t\,(x) =?$, sau o relaţie de dependenţa algebrică între t şi x (fără operatorii de derivare sau integrare), soluţie pentru ecuaţia $(*)$.

Folosind Convenţiile 1 şi 2 din Seminarul 1, se observă că $(*) \Rightarrow$

$-(t + x^2)dt + 2txdx = 0.$

Se notează $\mathbb{D}$ domeniu simplu conex, $\mathbb{D} \subseteq \mathbb{R}^2$ şi

$$\begin{cases} P : \mathbb{D} \to \mathbb{R}, P\,(t, x) = -(t + x^2) \\ Q : \mathbb{D} \to \mathbb{R}, Q\,(t, x) = 2tx. \end{cases}$$

Etapa 1: Se studiază dacă ecuaţia $(*)$ este cu diferenţială exactă. Se verifică condiţia $(s4)$.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial P}{\partial x}\,(t, x) = -2x, \forall\,(t, x) \in \mathbb{D} \\ \dfrac{\partial Q}{\partial t}\,(t, x) = 2x, \forall\,(t, x) \in \mathbb{D}. \end{cases}$$

Atunci

$$\frac{\partial P}{\partial x}\,(t, x) - \frac{\partial Q}{\partial t}\,(t, x) = -4x, \forall\,(t, x) \in \mathbb{D},$$

adică nu se verifică (14), adică ecuaţia $(*)$ nu este cu diferenţială exactă.

Etapa 1_1: Se determină un factor integrant $\mu\,(t, x)$, dacă se găseşte sub una din formele de la Rezolvare a) sau b).

Fie $\mathbb{D}_1$ un domeniu simplu conex, $\mathbb{D}_1 \subset \left\{(t, x) \in \mathbb{R}^2; 2tx \neq 0\right\} \subset \mathbb{D}$. Cum

$$\frac{1}{Q\,(t, x)} \left(\frac{\partial P}{\partial x}\,(t, x) - \frac{\partial Q}{\partial t}\,(t, x)\right) = -\frac{2}{t}$$

depinde doar de t, nu şi de x, se caută $\mu = \mu\,(t)$ factor integrant a.î.

$$\frac{\mu'\,(t)}{\mu\,(t)} = -\frac{2}{t}, \forall t \in \mathbb{I}_x \text{ a.î. } t \neq 0 \left| \int (\cdot)\, dt \Rightarrow \right.$$

$\ln|\mu\,(t)| = -2\ln|t| + \ln k, \forall t \in \mathbb{I}_x$ a.î. $t \neq 0$ şi $k \in \mathbb{R}_+^* \Rightarrow$

$\mu\,(t) = \dfrac{c}{t^2}, \forall t \in \mathbb{I}_x$ a.î. $t \neq 0$ şi $c \in \mathbb{R}^*$.

Se alege un factor integrant, se alege $c = 1 \Rightarrow$

$\mu\,(t) = \dfrac{1}{t^2}, \forall t \in \mathbb{I}_x$ a.î. $t \neq 0$.

Se înmulţeşte ecuaţia $(*)$ cu $\mu\,(t) = \frac{1}{t^2} \Rightarrow$

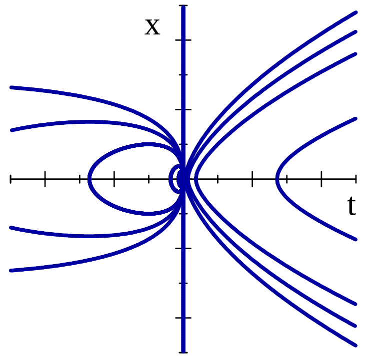
$$(*_1)\ \frac{-(t + x^2)}{t^2}dt + 2\frac{x}{t}dx = 0, (t, x) \in \mathbb{D}_1.$$

Din algoritmul de determinare a lui $\mu(t)$, ecuaţia $(*_1)$ este cu diferenţială exactă, adică
$$\begin{cases} P_1 : \mathbb{D}_1 \to \mathbb{R}, P_1(t,x) = -\frac{1}{t} - \frac{x^2}{t^2} \\ Q_1 : \mathbb{D}_1 \to \mathbb{R}, Q_1(t,x) = 2\frac{x}{t} \end{cases}$$
verifică (14).

Etapa 2_1: Se determină acea funcţie (există conform Etapei 1_1) $F_1 : \mathbb{D}_1 \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, de clasa $\mathcal{C}^2$ pe $\mathbb{D}_1$, din a cărei diferenţială să provină ecuaţia $(*_1)$, adică
$$\begin{cases} (12.1) \ \frac{\partial F_1}{\partial t}(t,x) = -\frac{1}{t} - \frac{x^2}{t^2}, \forall (t,x) \in \mathbb{D}_1, \\ (12.2) \ \frac{\partial F_1}{\partial x}(t,x) = 2\frac{x}{t}, \forall (t,x) \in \mathbb{D}_1. \end{cases}$$
Sistemul anterior este un sistem de ecuaţii cu derivate parţiale în necunoscuta $F_1(t,x)$. Se rezolvă.

modul 12.1. $(12.1)| \int (\cdot)\, dt \Rightarrow$
$$\int \frac{\partial F_1}{\partial t}(t,x)\, dt = \int \left(-\frac{1}{t} - \frac{x^2}{t^2}\right) dt \Rightarrow$$
$$F_1(t,x) = -\ln|t| + x^2 t^{-1} + \varphi_1(x), \forall (t,x) \in \mathbb{D}_1,$$
unde $\varphi_1(x)$ este o funcţie necunoscută, constantă în raport cu variabila de integrare t. Se determină φ_1 folosind şi (12.2). Se derivează ultima relaţie în raport cu $x \Rightarrow$
$$\frac{\partial F_1}{\partial x}(t,x) = 2xt^{-1} + \frac{d\varphi_1}{dx}(x), \forall (t,x) \in \mathbb{D}_1.$$
Se înlocuieşte (12.2) $\Rightarrow$
$$2\frac{x}{t} = 2xt^{-1} + \frac{d\varphi_1}{dx}(x), \forall (t,x) \in \mathbb{D}_1 \Rightarrow$$
$$\frac{d\varphi_1}{dx}(x) = 0 \Rightarrow \varphi_1(x) = c_1, c_1 \in \mathbb{R}.$$
Se înlocuieşte în expresia lui $F_1 \Rightarrow$
$$F_1(t,x) = -\ln|t| + x^2 t^{-1} + c_1, \forall (t,x) \in \mathbb{D}_1 \text{ şi } c_1 \in \mathbb{R}.$$
modul 2. $(12.2)| \int (\cdot)\, dx \Rightarrow$
$$\int \frac{\partial F_1}{\partial x}(t,x)\, dx = \int \left(2\frac{x}{t}\right) dx \Rightarrow$$
$$F_1(t,x) = t^{-1}x^2 + \psi_1(t), \forall (t,x) \in \mathbb{D}_1,$$
unde $\psi_1(t)$ este o funcţie necunoscută, constantă în raport cu variabila de integrare x. Se determină ψ_1 folosind şi (12.1). Se derivează ultima relaţie în raport cu $t \Rightarrow$
$$\frac{\partial F_1}{\partial t}(t,x) = -t^{-2}x^2 + \frac{d\psi_1}{dt}(t), \forall (t,x) \in \mathbb{D}_1.$$
Se înlocuieşte (2.1) $\Rightarrow$
$$-\frac{1}{t} - \frac{x^2}{t^2} = -t^{-2}x^2 + \frac{d\psi_1}{dt}(t), \forall (t,x) \in \mathbb{D}_1 \Rightarrow$$
$$\frac{d\psi_1}{dt}(t) = -\tfrac{1}{t} \Rightarrow \psi_1(t) = -\ln|t| + c_2, c_2 \in \mathbb{R}.$$
Se înlocuieşte în expresia lui $F_1 \Rightarrow$
$$F_1(t,x) = t^{-1}x^2 - \ln|t| + c_2, \forall (t,x) \in \mathbb{D}_1 \text{ şi } c_2 \in \mathbb{R}.$$
Etapa 3_1: Cu F_1 determinată la Etapa 2_1, se obţine că soluţia generală a ecuaţiei $(*_1)$ este dată sub forma implicită de
$$F_1(t,x) = c_3, c_3 \in \mathbb{R},$$
adică, notând $c = c_3 - c_1$ sau $c = c_3 - c_2$, de
$$(**) \ -\ln|t| + x^2 t^{-1} = c, \forall (t,x) \in \mathbb{D}_1 \text{ şi } c \in \mathbb{R}.$$
Ultima relaţie dă şi soluţia ecuaţiei $(*)$ sub formă implicită pe $\mathbb{D}_1 \subset \mathbb{D}$. Local, s-ar putea explicita $x : \mathbb{I}_x \to \mathbb{R}$,unde domeniul de definiţie a soluţiei, $\mathbb{I}_x$, depinde de constanta c (pentru fiecare c se

obţine o soluţie cu un anumit domeniu de definiţie şi o anumită lege de asociere).



d) Indicaţie:
$$\frac{\partial P}{\partial x}(t,x) - \frac{\partial Q}{\partial t}(t,x) = -2tx + 2t^2, \forall (t,x) \in \mathbb{D} \Rightarrow \mu(t) = \frac{1}{t^2}.$$

e) Indicaţie:
$$\frac{\partial P}{\partial x}(t,x) - \frac{\partial Q}{\partial t}(t,x) = 2x, \forall (t,x) \in \mathbb{D} \Rightarrow \mu(t) = e^t.$$

f) Se determină soluţia generală a ecuaţiei
$$(*)\ \left(tx^2 - x^3\right) dt + \left(1 - tx^2\right) dx = 0, t \in \mathbb{I}.$$
Pentru $t \in \mathbb{I}_x \subseteq D$, variabilă independentă din domeniul de definiţie a soluţiei, se caută $x(t) =?$, x funcţie necunoscută, soluţie pentru ecuaţia $(*)$. De fapt, se caută $x(t) =?$, sau $t(x) =?$, sau o relaţie de dependenţa algebrică între t şi x (fără operatorii de derivare sau integrare), soluţie pentru ecuaţia $(*)$.

Se notează $\mathbb{D}$ domeniu simplu conex, $\mathbb{D} \subseteq \mathbb{R}^2$ şi
$$\begin{cases} P : \mathbb{D} \to \mathbb{R}, P(t,x) = tx^2 - x^3 \\ Q : \mathbb{D} \to \mathbb{R}, Q(t,x) = 1 - tx^2. \end{cases}$$
Etapa 1: Se studiază dacă ecuaţia $(*)$ este cu diferenţială exactă. Se verifică condiţia (14).
$$\begin{cases} \dfrac{\partial P}{\partial x}(t,x) = 2tx - 3x^2, \forall (t,x) \in \mathbb{D} \\ \dfrac{\partial Q}{\partial t}(t,x) = -x^2, \forall (t,x) \in \mathbb{D}. \end{cases}$$
Atunci
$$\frac{\partial P}{\partial x}(t,x) - \frac{\partial Q}{\partial t}(t,x) = 2tx - 2x^2, \forall (t,x) \in \mathbb{D},$$
adică nu se verifică (14), adică ecuaţia $(*)$ nu este cu diferenţială exactă.

Etapa 1_2: Se determină un factor integrant $\mu(t,x)$, dacă se găseşte sub una din formele de la Rezolvare a) sau b).

Fie $\mathbb{D}_1$ un domeniu simplu conex, $\mathbb{D}_1 \subset \left\{(t,x) \in \mathbb{R}^2; 1 - tx^2 \neq 0\right\} \subset \mathbb{D}$. Cum
$$\frac{1}{Q(t,x)}\left(\frac{\partial P}{\partial x}(t,x) - \frac{\partial Q}{\partial t}(t,x)\right) = \frac{2tx - 2x^2}{1 - tx^2}$$
nu depinde doar de t, ci şi de $x \Rightarrow$ nu se poate utiliza a).

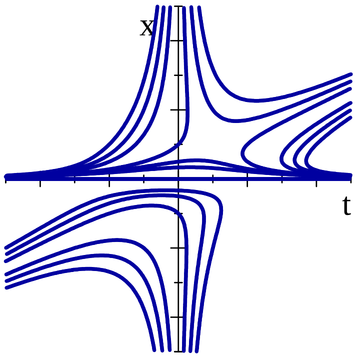
Fie $\mathbb{D}_2$ un domeniu simplu conex, $\mathbb{D}_2 \subset \left\{(t,x) \in \mathbb{R}^2; 3t^2 + x \neq 0\right\} \subset \mathbb{D}$. Cum
$$\frac{-1}{P(t,x)}\left(\frac{\partial P}{\partial x}(t,x) - \frac{\partial Q}{\partial t}(t,x)\right) = \frac{-2}{x}$$
depinde doar de x, nu şi de $t \Rightarrow$ Se caută $\mu = \mu(x)$ factor integrant a.î.

$\dfrac{\mu'(x)}{\mu(x)} = \dfrac{-2}{x}, \forall x \in \mathbb{J} \subseteq \mathbb{R} \Bigg| \int (\cdot)\, dx \Rightarrow$
$\ln|\mu(x)| = -2\ln|x| + \ln k, \forall x \in \mathbb{J} \subseteq \mathbb{R}$ şi $k \in \mathbb{R}_+^* \Rightarrow$
$\mu(x) = \dfrac{c}{x^2}, \forall x \in \mathbb{J} \subseteq \mathbb{R}$ şi $c \in \mathbb{R}^*$.
Se alege un factor integrant, se alege $c = 1 \Rightarrow$
$\mu(x) = \dfrac{1}{x^2}, \forall x \in \mathbb{J} \subseteq \mathbb{R}$.
Se înmulţeşte ecuaţia $(*)$ cu $\mu(x) = \frac{1}{x^2} \Rightarrow$
$(*_2)$ $(t - x)\, dt + (\frac{1}{x^2} - t)dx = 0, (t, x) \in \mathbb{D}_2$.
Din algoritmul de determinare a lui $\mu(x)$, ecuaţia $(*_2)$ este cu diferenţială exactă, adică
$$\begin{cases} P_2 : \mathbb{D}_2 \to \mathbb{R}, P_2(t, x) = t - x \\ Q_2 : \mathbb{D}_2 \to \mathbb{R}, Q_2(t, x) = \dfrac{1}{x^2} - t \end{cases}$$
verifică (14).
<u>Etapa 2_2</u>: Se determină acea funcţie (există conform Etapei 1_2) $F_2 : \mathbb{D}_2 \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, de clasa $\mathcal{C}^2$ pe $\mathbb{D}_2$, din a cărei diferenţială să provină ecuaţia $(*_2)$, adică
$$\begin{cases} (12.1) \ \dfrac{\partial F_2}{\partial t}(t, x) = t - x, \forall (t, x) \in \mathbb{D}_2, \\ (12.2) \ \dfrac{\partial F_2}{\partial x}(t, x) = \dfrac{1}{x^2} - t, \forall (t, x) \in \mathbb{D}_2. \end{cases}$$
Sistemul anterior este un sistem de ecuaţii cu derivate parţiale în necunoscuta $F_2(t, x)$. Se rezolvă.
<u>modul 12.1.</u> $(12.1) | \int (\cdot)\, dt \Rightarrow$
$$\int \frac{\partial F_2}{\partial t}(t, x)\, dt = \int (t - x)\, dt \Rightarrow F_2(t, x) = \frac{t^2}{2} - xt + \varphi_2(x), \forall (t, x) \in \mathbb{D}_2,$$
unde $\varphi_2(x)$ este o funcţie necunoscută, constantă în raport cu variabila de integrare t. Se determină φ_2 folosind şi (12.2). Se derivează ultima relaţie în raport cu $x \Rightarrow$
$\dfrac{\partial F_2}{\partial x}(t, x) = -t + \dfrac{d\varphi_2}{dx}(x), \forall (t, x) \in \mathbb{D}_2$.
Se înlocuieşte (12.2) $\Rightarrow$
$\dfrac{1}{x^2} - t = -t + \dfrac{d\varphi_2}{dx}(x), \forall (t, x) \in \mathbb{D}_2 \Rightarrow \dfrac{d\varphi_2}{dx}(x) = \dfrac{1}{x^2} \Rightarrow \varphi_2(x) = -x^{-1} + c_1, c_1 \in \mathbb{R}$.
Se înlocuieşte în expresia lui $F_2 \Rightarrow$
$F_2(t, x) = \dfrac{t^2}{2} - xt - x^{-1} + c_1, \forall (t, x) \in \mathbb{D}_2$ şi $c_1 \in \mathbb{R}$.
<u>modul 12.2.</u> $(12.2) | \int (\cdot)\, dx \Rightarrow$
$$\int \frac{\partial F_2}{\partial x}(t, x)\, dx = \int \left(\frac{1}{x^2} - t\right) dx \Rightarrow F_2(t, x) = -x^{-1} - tx + \psi_2(t), \forall (t, x) \in \mathbb{D}_1,$$
unde $\psi_2(t)$ este o funcţie necunoscută, constantă în raport cu variabila de integrare x. Se determină ψ_2 folosind şi (12.1). Se derivează ultima relaţie în raport cu $t \Rightarrow$
$\dfrac{\partial F_2}{\partial t}(t, x) = -x + \dfrac{d\psi_2}{dt}(t), \forall (t, x) \in \mathbb{D}_1$.
Se înlocuieşte (12.1) $\Rightarrow$
$t - x = -x + \dfrac{d\psi_2}{dt}(t), \forall (t, x) \in \mathbb{D}_1 \Rightarrow \dfrac{d\psi_2}{dt}(t) = t \Rightarrow \psi_2(t) = \dfrac{t^2}{2} + c_2, c_2 \in \mathbb{R}$.
Se înlocuieşte în expresia lui $F_2 \Rightarrow$
$F_2(t, x) = -x^{-1} - tx + \dfrac{t^2}{2} + c_2, \forall (t, x) \in \mathbb{D}_1$ şi $c_2 \in \mathbb{R}$.
<u>Etapa 3_2</u>: Cu F_2 determinată la Etapa 2_2, obţinem că soluţia generala a ecuaţiei $(*_2)$ este data sub forma implicită de
$F_2(t, x) = c_3, c_3 \in \mathbb{R}$,

adică, notând $c = c_3 - c_1$ sau $c = c_3 - c_2$, de

$(**)\ \dfrac{t^2}{2} - xt - x^{-1} = c, \forall (t,x) \in \mathbb{D}_2$ şi $c \in \mathbb{R}$.

Ultima relaţie dă şi soluţia ecuaţiei $(*)$ sub formă implicită pe $\mathbb{D}_2 \subset \mathbb{D}$. Local, s-ar putea explicita $x : \mathbb{I}_x \to \mathbb{R}$,unde domeniul de definiţie a soluţiei, $\mathbb{I}_x$, depinde de constanta c (pentru fiecare c se obţine o soluţie cu un anumit domeniu de definiţie şi o anumită lege de asociere).



g) Indicaţie: $\dfrac{\partial P}{\partial x}(t,x) - \dfrac{\partial Q}{\partial t}(t,x) = 2, \forall (t,x) \in \mathbb{D} \Rightarrow \mu(x) = \dfrac{1}{x^2}$.

h) Indicaţie: $\dfrac{\partial P}{\partial x}(t,x) - \dfrac{\partial Q}{\partial t}(t,x) = 4t, \forall (t,x) \in \mathbb{D} \Rightarrow$ ...

○**Exerciţiul 11.** Să se determine câte un factor integrant de forma indicată pentru ecuaţiile diferenţiale de mai jos şi apoi să se rezolve aceste ecuaţii

a) $t(1 - x(t))\,dt + \left(t^2 + x(t)\right)dx(t) = 0, \mu = \mu(t^2 + x^2)$;

Rezolvare: a) Se determină soluţia generală a ecuaţiei

$(*)\ t(1 - x(t))\,dt + \left(t^2 + x(t)\right)dx(t) = 0, t \in \mathbb{I}$.

Pentru $t \in \mathbb{I}_x \subseteq D$, variabilă independentă din domeniul de definiţie a soluţiei, se caută $x(t) = ?$, x funcţie necunoscută, soluţie pentru ecuaţia $(*)$. De fapt, se caută $x(t) = ?$, sau $t(x) = ?$, sau o relaţie de dependenţa algebrică între t şi x (fără operatorii de derivare sau integrare), soluţie pentru ecuaţia $(*)$.

Folosind Convenţiile 1 şi 2 din Seminarul 1, se observă că $(*) \Rightarrow$

$t(1 - x)\,dt + \left(t^2 + x\right)dx = 0$.

Se notează $\mathbb{D}$ domeniu simplu conex, $\mathbb{D} \subseteq \mathbb{R}^2$ şi

$$\begin{cases} P : \mathbb{D} \to \mathbb{R}, P(t,x) = t(1 - x) \\ Q : \mathbb{D} \to \mathbb{R}, Q(t,x) = t^2 + x. \end{cases}$$

Etapa 1: Se studiază dacă ecuaţia $(*)$ este cu diferenţială exactă. Se verifică condiţia (14).

$$\begin{cases} \dfrac{\partial P}{\partial x}(t,x) = -t, \forall (t,x) \in \mathbb{D} \\ \dfrac{\partial Q}{\partial t}(t,x) = 2t, \forall (t,x) \in \mathbb{D}. \end{cases}$$

Atunci

$$\frac{\partial P}{\partial x}(t,x) - \frac{\partial Q}{\partial t}(t,x) = -3t, \forall (t,x) \in \mathbb{D},$$

adică nu se verifică (14), adică ecuaţia $(*)$ nu este cu diferenţială exactă.

Etapa 1_3: Se determină un factor integrant $\mu(t,x)$, de forma impusă apriori $\mu = \mu\left(t^2 + x^2\right)$. Se consideră $\mathbb{D}_3$ un domeniu simplu conex, $\mathbb{D}_3 \subseteq \mathbb{D}$ şi se defineşte

$v : \mathbb{D}_3 \to \mathbb{R}$, $v(t,x) = t^2 + x^2$.

Se determină un factor integrant $\mu(v(t,x))$, astfel încât ecuaţia

$(*_3)$ $t(1-x)\mu(v(t,x))\,dt+\left(t^2+x\right)\mu(v(t,x))\,dx=0,(t,x)\in\mathbb{D}_3$,

să fie cu diferenţială exactă. Se notează

$$\begin{cases} P_3:\mathbb{D}_3\to\mathbb{R}, P_3(t,x)=(t-tx)\cdot\mu(v(t,x)) \\ Q_3:\mathbb{D}_3\to\mathbb{R}, Q_3(t,x)=\left(t^2+x\right)\cdot\mu(v(t,x)). \end{cases}$$

Se impune ca P_3 şi Q_3 să verifice condiţia (14),

$$\frac{\partial P_3}{\partial x}(t,x)-\frac{\partial Q_3}{\partial t}(t,x)=0,\forall(t,x)\in\mathbb{D}_3.$$

Cum

$$\begin{cases} \dfrac{\partial P_3}{\partial x}(t,x)=(-t)\cdot\mu(v(t,x))+(t-tx)\cdot\dfrac{d\mu}{dv}(v(t,x))\cdot\dfrac{\partial v}{\partial x}(t,x),\forall(t,x)\in\mathbb{D}_3 \\ \dfrac{\partial Q_3}{\partial t}(t,x)=(2t)\cdot\mu(v(t,x))+\left(t^2+x\right)\cdot\dfrac{d\mu}{dv}(v(t,x))\cdot\dfrac{\partial v}{\partial t}(t,x),\forall(t,x)\in\mathbb{D}_3, \end{cases}$$

şi $\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial x}(t,x)=2x,\forall(t,x)\in\mathbb{D}_3 \\ \dfrac{\partial v}{\partial t}(t,x)=2t,\forall(t,x)\in\mathbb{D}_3, \end{cases}$

se obţine

$$(-3t)\cdot\mu(v(t,x))+(-2t)\left(t^2+x^2\right)\cdot\frac{d\mu}{dv}(v(t,x))=0,\forall(t,x)\in\mathbb{D}_3\Rightarrow$$

$$3\mu(v(t,x))+2\left(t^2+x^2\right)\cdot\frac{d\mu}{dv}(v(t,x))=0,\forall(t,x)\in\mathbb{D}_3 \text{ a.î. } t\neq 0\Rightarrow$$

$$3\mu(v)+2v\frac{d\mu}{dv}(v)=0,\forall v\in\mathbb{J}.$$

Ultima ecuaţie este cu variabile separabile în necunoscuta $\mu(v)$. Se caută $\mu(v)$ factor integrant, diferit de soluţia singulară nulă pentru ecuaţia anterioară.

$$\frac{1}{\mu(v)}\mu'(v)=-\tfrac{3}{2}\frac{1}{v},\forall v\in\mathbb{J}_\mu \text{ a.î. } (v\neq 0 \text{ şi } \mu(v)\neq 0)\Big|\int(\cdot)\,dv\Rightarrow$$

$$\int\frac{1}{\mu(v)}\mu'(v)\,dv=\int-\tfrac{3}{2}\frac{1}{v}dv\Rightarrow$$

$$\ln|\mu(v)|=-\tfrac{3}{2}\ln|v|+\ln k,\forall v\in\mathbb{J}_\mu \text{ a.î. } (v\neq 0 \text{ şi } \mu(v)\neq 0) \text{ şi } k\in\mathbb{R}_+^*\Rightarrow$$

$$\mu(v)=cv^{-\frac{3}{2}},\forall v\in\mathbb{J}_\mu \text{ a.î. } (v>0 \text{ şi } \mu(v)\neq 0) \text{ şi } c\in\mathbb{R}^*.$$

Se alege un factor integrant, se alege $c=1\Rightarrow$

$$\mu(v)=v^{-\frac{3}{2}},\forall v\in\mathbb{J}_\mu \text{ a.î. } v>0.$$

Se înmulţeşte ecuaţia $(*)$ cu $\mu\left(t^2+x^2\right)=\left(t^2+x^2\right)^{-\frac{3}{2}}$ pe domeniul simplu conex $\mathbb{D}_3$ definit astfel încât $t\neq 0$ şi $t^2+x^2\neq 0\Rightarrow$

$(*_3)$ $t(1-x)\left(t^2+x^2\right)^{-\frac{3}{2}}dt+\left(t^2+x\right)\left(t^2+x^2\right)^{-\frac{3}{2}}dx=0,\forall(t,x)\in\mathbb{D}_3$.

Din algoritmul de determinare a lui $\mu\left(t^2+x^2\right)$, ecuaţia $(*_3)$ este cu diferenţială exactă, adică

$$\begin{cases} P_3:\mathbb{D}_3\to\mathbb{R}, P_3(t,x)=t(1-x)\left(t^2+x^2\right)^{-\frac{3}{2}} \\ Q_3:\mathbb{D}_3\to\mathbb{R}, Q_3(t,x)=\left(t^2+x\right)\left(t^2+x^2\right)^{-\frac{3}{2}} \end{cases}$$

verifică (14).

<u>Etapa 2_3:</u> Se determină acea funcţie (există conform Etapei 1_3) $F_3:\mathbb{D}_3\subseteq\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, de clasa $\mathcal{C}^2$ pe $\mathbb{D}_3$, din a cărei diferenţială să provină ecuaţia $(*_3)$, adică

$$\begin{cases} (12.1)\ \dfrac{\partial F_3}{\partial t}(t,x)=t(1-x)\left(t^2+x^2\right)^{-\frac{3}{2}},\forall(t,x)\in\mathbb{D}_3, \\ (12.2)\ \dfrac{\partial F_3}{\partial x}(t,x)=\left(t^2+x\right)\left(t^2+x^2\right)^{-\frac{3}{2}},\forall(t,x)\in\mathbb{D}_3. \end{cases}$$

Sistemul anterior este un sistem de ecuaţii cu derivate parţiale în necunoscuta $F_3(t,x)$. Se rezolvă.

<u>modul 1.</u> $(2.1)|\int(\cdot)\,dt\Rightarrow$

$\int \frac{\partial F_3}{\partial t}(t,x)\,dt = \int t(1-x)\left(t^2+x^2\right)^{-\frac{3}{2}} dt \Rightarrow F_3(t,x) = -(1-x)\left(t^2+x^2\right)^{-\frac{1}{2}} + \varphi_3(x), \forall (t,x) \in \mathbb{D}_3$,

unde $\varphi_3(x)$ este o funcţie necunoscută, constantă în raport cu variabila de integrare t. Se determină φ_3 folosind şi (12.2). Se derivează ultima relaţie în raport cu $x \Rightarrow$

$\frac{\partial F_3}{\partial x}(t,x) = \left(t^2+x^2\right)^{-\frac{1}{2}} + (1-x)\left(t^2+x^2\right)^{-\frac{3}{2}} x + \frac{d\varphi_3}{dx}(x), \forall (t,x) \in \mathbb{D}_3.$

Se înlocuieşte (21.2) $\Rightarrow$

$\left(t^2+x\right)\left(t^2+x^2\right)^{-\frac{3}{2}} = \left(t^2+x^2\right)^{-\frac{1}{2}} + (1-x)\left(t^2+x^2\right)^{-\frac{3}{2}} x + \frac{d\varphi_3}{dx}(x), \forall (t,x) \in \mathbb{D}_3 \Rightarrow$

$\frac{d\varphi_3}{dx}(x) = 0 \Rightarrow \varphi_3(x) = c_1, c_1 \in \mathbb{R}.$

Se înlocuieşte în expresia lui $F_3 \Rightarrow$

$F_3(t,x) = -(1-x)\left(t^2+x^2\right)^{-\frac{1}{2}} + c_1, \forall (t,x) \in \mathbb{D}_3$ şi $c_1 \in \mathbb{R}$.

modul 2. $(21.2)| \int (\cdot)\,dx \Rightarrow$

$\int \frac{\partial F_3}{\partial x}(t,x)\,dx = \int \left(t^2+x\right)\left(t^2+x^2\right)^{-\frac{3}{2}} dx.$

Se observă ca acest mod de determinare a lui F_3 este mai greu de aplicat din cauza dificultăţii determinării integralei din membrul drept al egalităţii anterioare.

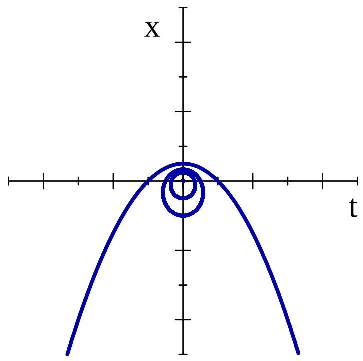
Etapa 3_3: Cu F_3 determinată la Etapa 2_3, obţinem că soluţia generala a ecuaţiei $(*_3)$ este data sub forma implicită de

$F_3(t,x) = c_3, c_3 \in \mathbb{R},$

adică, notând $c = c_3 - c_1$, de

$(**_3)$ $(x-1)\left(t^2+x^2\right)^{-\frac{1}{2}} = c, \forall (t,x) \in \mathbb{D}_3$ şi $c \in \mathbb{R}$.

Ultima relaţie dă şi soluţia ecuaţiei $(*)$ sub formă implicită pe $\mathbb{D}_3 \subset \mathbb{D}$. Local, s-ar putea explicita $x : \mathbb{I}_x \rightarrow \mathbb{R}$,unde domeniul de definiţie a soluţiei, $\mathbb{I}_x$, depinde de constanta c (pentru fiecare c se obţine o soluţie cu un anumit domeniu de definiţie şi o anumită lege de asociere).



Observaţie . La exerciţiul precedent se putea studia şi existenţa unui factor integrant de forma $\mu(t)$ sau $\mu(x)$.

Fie $\mathbb{D}_1$ un domeniu simplu conex, $\mathbb{D}_1 \subset \left\{(t,x) \in \mathbb{R}^2; t^2+x \neq 0\right\} \subset \mathbb{D}$. Cum

$\frac{1}{Q(t,x)}\left(\frac{\partial P}{\partial x}(t,x) - \frac{\partial Q}{\partial t}(t,x)\right) = \frac{-3t}{t^2+x}$

nu depinde doar de t, ci şi de $x \Rightarrow$ nu se poate găsi un factor integrant de forma $\mu(t)$.

Fie $\mathbb{D}_2$ un domeniu simplu conex, $\mathbb{D}_2 \subset \left\{(t,x) \in \mathbb{R}^2; t(1-x) \neq 0\right\} \subset \mathbb{D}$. Cum

$\frac{-1}{P(t,x)}\left(\frac{\partial P}{\partial x}(t,x) - \frac{\partial Q}{\partial t}(t,x)\right) = \frac{3}{1-x}$

depinde doar de x, nu şi de $t \Rightarrow$ se caută $\mu = \mu(x)$ factor integrant a.î.

$$\frac{\mu'(x)}{\mu(x)} = \frac{3}{1-x}, \forall x \in \mathbb{J} \subseteq \mathbb{R} \text{ a.î. } x \neq 1 \Big| \int (\cdot)\, dx \Rightarrow$$

$$\ln|\mu(x)| = -3\ln|1-x| + \ln k, \forall x \in \mathbb{J} \subseteq \mathbb{R} \text{ şi } k \in \mathbb{R}_+^* \Rightarrow$$

$$\mu(x) = \frac{c}{(1-x)^3}, \forall x \in \mathbb{J} \subseteq \mathbb{R} \text{ a.î. } x \neq 1 \text{ şi } c \in \mathbb{R}^*.$$

Se alege un factor integrant, se alege $c = 1 \Rightarrow$

$$\mu(x) = \frac{1}{(1-x)^3}, \forall x \in \mathbb{J} \subseteq \mathbb{R} \text{ a.î. } x \neq 1.$$

Se înmulţeşte ecuaţia $(*)$ cu $\mu(x) = \frac{1}{(1-x)^3} \Rightarrow$

$$(*_2) \quad \frac{t}{(1-x)^2} dt + \frac{t^2+x}{(1-x)^3} dx = 0, \forall (t,x) \in \mathbb{D}_2.$$

Din algoritmul de determinare a lui $\mu(x)$, ecuaţia $(*_2)$ este cu diferenţială exactă, adică

$$\begin{cases} P_2 : \mathbb{D}_2 \to \mathbb{R}, P_1(t,x) = \dfrac{t}{(1-x)^2} \\ Q_2 : \mathbb{D}_2 \to \mathbb{R}, Q_1(t,x) = \dfrac{t^2+x}{(1-x)^3} \end{cases}$$

verifică (14).

Se determină acea funcţie (există conform afirmaţiilor anterioare) $F_2 : \mathbb{D}_2 \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, de clasa $\mathcal{C}^2$ pe $\mathbb{D}_2$, din a cărei diferenţială să provină ecuaţia $(*_2)$, adică

$$\begin{cases} (12.1) \quad \dfrac{\partial F_2}{\partial t}(t,x) = \dfrac{t}{(1-x)^2}, \forall (t,x) \in \mathbb{D}_2, \\ (12.2) \quad \dfrac{\partial F_2}{\partial x}(t,x) = \dfrac{t^2+x}{(1-x)^3}, \forall (t,x) \in \mathbb{D}_2. \end{cases}$$

Sistemul anterior este un sistem de ecuaţii cu derivate parţiale în necunoscuta $F_2(t,x)$. Se rezolvă.

$$(12.1) \Big| \int (\cdot)\, dt \Rightarrow \int \frac{\partial F_2}{\partial t}(t,x)\, dt = \int \frac{t}{(1-x)^2} dt \Rightarrow F_2(t,x) = \frac{t^2}{2(1-x)^2} + \varphi_2(x), \forall (t,x) \in \mathbb{D}_2,$$

unde $\varphi_2(x)$ este o funcţie necunoscută, constantă în raport cu variabila de integrare t. Se determină φ_2 folosind şi (12.2). Se derivează ultima relaţie în raport cu $x \Rightarrow$

$$\frac{\partial F_2}{\partial x}(t,x) = \frac{t^2}{(1-x)^3} + \frac{d\varphi_2}{dx}(x), \forall (t,x) \in \mathbb{D}_2.$$

Se înlocuieşte (12.2) $\Rightarrow$

$$\frac{t^2+x}{(1-x)^3} = \frac{t^2}{(1-x)^3} + \frac{d\varphi_2}{dx}(x), \forall (t,x) \in \mathbb{D}_2 \Rightarrow \frac{d\varphi_2}{dx}(x) = \frac{x}{(1-x)^3} \Big| \int (\cdot)\, dx \Rightarrow$$

$$\varphi_2(x) = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{2}\frac{1}{(x-1)^2} + c_1, \forall x : \mathbb{I} \text{ şi } c_1 \in \mathbb{R}.$$

Se înlocuieşte în expresia lui $F_2 \Rightarrow$

$$F_2(t,x) = \frac{t^2}{2(1-x)^2} + \frac{1}{2}\frac{2x-1}{(x-1)^2} + c_1, \forall (t,x) \in \mathbb{D}_2 \text{ şi } c_1 \in \mathbb{R}.$$

Cu F_2 astfel determinată, se obţine că soluţia generală a ecuaţiei $(*_2)$ este dată sub forma implicită de

$$F_2(t,x) = c_3, c_3 \in \mathbb{R},$$

adică, notând $c = c_3 - c_1$, de

$$(**_2) \quad \frac{t^2}{2(1-x)^2} + \frac{1}{2}\frac{2x-1}{(x-1)^2} = c, \forall (t,x) \in \mathbb{D}_2 \text{ şi } c \in \mathbb{R}.$$

Ultima relaţie dă şi soluţia ecuaţiei $(*)$ sub formă implicită pe $\mathbb{D}_2 \subset \mathbb{D}$. Local, s-ar putea explicita

$x:\mathbb{I}_x\to\mathbb{R}$,unde domeniul de definiţie a soluţiei, $\mathbb{I}_x$, depinde de constanta c (pentru fiecare c se obţine o soluţie cu un anumit domeniu de definiţie şi o anumită lege de asociere).

Se poate arăta ca soluţiile date de $(**_2)$ şi de $(**_3)$ coincid pe $\mathbb{D}_2\cap\mathbb{D}_3$.

b) Se determină soluţia generală a ecuaţiei

$(*)\ \left(x^3-1\right)+\left(2t^2x+tx^2-1\right)x'=0, t\in\mathbb{I}.$

Pentru $t\in\mathbb{I}_x\subseteq D$, variabilă independentă din domeniul de definiţie a soluţiei, se caută $x(t)=?$, x funcţie necunoscută, soluţie pentru ecuaţia $(*)$. De fapt, se caută $x(t)=?$, sau $t(x)=?$, sau o relaţie de dependenţa algebrică între t şi x (fără operatorii de derivare sau integrare), soluţie pentru ecuaţia $(*)$.

Folosind Convenţiile 1 şi 2 din Seminarul 1, se observă că $(*)\Rightarrow$

$\left(x^3-1\right)dt+\left(2t^2x+tx^2-1\right)dx=0.$

Se notează $\mathbb{D}$ domeniu simplu conex, $\mathbb{D}\subseteq\mathbb{R}^2$ şi

$$\begin{cases} P:\mathbb{D}\to\mathbb{R}, P(t,x)=x^3-1\\ Q:\mathbb{D}\to\mathbb{R}, Q(t,x)=2t^2x+tx^2-1.\end{cases}$$

Etapa 1: Se studiază dacă ecuaţia $(*)$ este cu diferenţială exactă. Se verifică condiţia (14).

$$\begin{cases} \dfrac{\partial P}{\partial x}(t,x)=3x^2,\forall(t,x)\in\mathbb{D}\\ \dfrac{\partial Q}{\partial t}(t,x)=4tx+x^2,\forall(t,x)\in\mathbb{D}.\end{cases}$$

Atunci

$$\frac{\partial P}{\partial x}(t,x)-\frac{\partial Q}{\partial t}(t,x)=-4tx+2x^2,\forall(t,x)\in\mathbb{D},$$

adică nu se verifică (14), adică ecuaţia $(*)$ nu este cu diferenţială exactă.

Etapa 1_3: Se determină un factor integrant $\mu(t,x)$, de forma impusă apriori $\mu=\mu(t+x)$. Considerăm $\mathbb{D}_3$ un domeniu simplu conex, $\mathbb{D}_3\subseteq\mathbb{D}$ şi definim

$v:\mathbb{D}_3\to\mathbb{R},\ v(t,x)=t+x.$

Se determină un factor integrant $\mu(v(t,x))$, astfel încât ecuaţia

$(*_3)\ \left(x^3-1\right)\mu(v(t,x))\,dt+\left(2t^2x+tx^2-1\right)\mu(v(t,x))\,dx=0,(t,x)\in\mathbb{D}_3,$

să fie cu diferenţială exactă. Se notează

$$\begin{cases} P_3:\mathbb{D}_3\to\mathbb{R}, P_3(t,x)=(x^3-1)\cdot\mu(v(t,x))\\ Q_3:\mathbb{D}_3\to\mathbb{R}, Q_3(t,x)=\left(2t^2x+tx^2-1\right)\cdot\mu(v(t,x)).\end{cases}$$

Impunem ca P_3 şi Q_3 să verifice condiţia (4),

$$\frac{\partial P_3}{\partial x}(t,x)-\frac{\partial Q_3}{\partial t}(t,x)=0,\forall(t,x)\in\mathbb{D}_3,$$

Cum

$$\begin{cases} \dfrac{\partial P_3}{\partial x}(t,x)=\left(3x^2\right)\cdot\mu(v(t,x))+(x^3-1)\cdot\dfrac{d\mu}{dv}(v(t,x))\cdot\dfrac{\partial v}{\partial x}(t,x),\forall(t,x)\in\mathbb{D}_3\\ \dfrac{\partial Q_3}{\partial t}(t,x)=\left(4tx+x^2\right)\cdot\mu(v(t,x))+\left(2t^2x+tx^2-1\right)\cdot\dfrac{d\mu}{dv}(v(t,x))\cdot\dfrac{\partial v}{\partial t}(t,x),\forall(t,x)\in\mathbb{D}_3,\end{cases}$$

şi $\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial x}(t,x)=1,\forall(t,x)\in\mathbb{D}_3\\ \dfrac{\partial v}{\partial t}(t,x)=1,\forall(t,x)\in\mathbb{D}_3,\end{cases}$

se obţine

$$\left(-4tx+2x^2\right)\cdot\mu(v(t,x))+\left(x^3-2t^2x-tx^2\right)\cdot\frac{d\mu}{dv}(v(t,x))=0,\forall(t,x)\in\mathbb{D}_3\Rightarrow$$

$$2\mu(v(t,x))+(t+x)\cdot\frac{d\mu}{dv}(v(t,x))=0,\forall(t,x)\in\mathbb{D}_3\text{ a.î. }x-2t\neq0\Rightarrow$$

$$2\mu(v)+v\frac{d\mu}{dv}(v)=0,\forall v\in\mathbb{J}.$$

Ultima ecuaţie este cu variabile separabile în necunoscuta $\mu(v)$. Se caută $\mu(v)$ factor integrant, diferit de soluţia singulară nulă pentru ecuaţia anterioară.

$\frac{1}{\mu(v)}\mu'(v) = -\frac{2}{v}, \forall v \in \mathbb{J}_\mu$ a.î. $(v \neq 0$ şi $\mu(v) \neq 0)\Big| \int(\cdot)\,dv \Rightarrow$

$\int \frac{1}{\mu(v)}\mu'(v)\,dv = \int -\frac{2}{v}dv \Rightarrow$

$\ln|\mu(v)| = -2\ln|v| + \ln k, \forall v \in \mathbb{J}_\mu$ a.î. $(v \neq 0$ şi $\mu(v) \neq 0)$ şi $k \in \mathbb{R}_+^* \Rightarrow$

$\mu(v) = \frac{c}{v^2}, \forall v \in \mathbb{J}_\mu$ a.î. $(v \neq 0$ şi $\mu(v) \neq 0)$ şi $c \in \mathbb{R}^*$.

Se alege un factor integrant, se alege $c = 1 \Rightarrow$

$\mu(v) = \frac{1}{v^2}, \forall v \in \mathbb{J}_\mu$ a.î. $v \neq 0$.

Se înmulţeşte ecuaţia $(*)$ cu $\mu(t+x) = \frac{1}{(t+x)^2}$ pe domeniul simplu conex $\mathbb{D}_3$ definit astfel încât $x - 2t \neq 0$ şi $t + x \neq 0 \Rightarrow$

$(*_3)\ \frac{x^3-1}{(t+x)^2}dt + \frac{2t^2x + tx^2 - 1}{(t+x)^2}dx = 0, (t,x) \in \mathbb{D}_3, \forall (t,x) \in \mathbb{D}_3.$

Din algoritmul de determinare a lui $\mu\left(t^2 + x^2\right)$, ecuaţia $(*_3)$ este cu diferenţială exactă, adică

$$\begin{cases} P_3 : \mathbb{D}_3 \to \mathbb{R}, P_3(t,x) = \dfrac{x^3-1}{(t+x)^2} \\ Q_3 : \mathbb{D}_3 \to \mathbb{R}, Q_3(t,x) = \dfrac{2t^2x + tx^2 - 1}{(t+x)^2} \end{cases}$$

verifică (14).

<u>Etapa 2_3:</u> Se determină acea funcţie (există conform Etapei 1_3) $F_3 : \mathbb{D}_3 \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, de clasa $\mathcal{C}^2$ pe $\mathbb{D}_3$, din a cărei diferenţială să provină ecuaţia $(*_3)$, adică

$$\begin{cases} (12.1)\ \dfrac{\partial F_3}{\partial t}(t,x) = \left(x^3-1\right)(t+x)^{-2}, \forall (t,x) \in \mathbb{D}_3, \\ (12.2)\ \dfrac{\partial F_3}{\partial x}(t,x) = \left(2t^2x + tx^2 - 1\right)(t+x)^{-2}, \forall (t,x) \in \mathbb{D}_3. \end{cases}$$

Sistemul anterior este un sistem de ecuaţii cu derivate parţiale în necunoscuta $F_3(t,x)$. Se rezolvă.

<u>modul 1.</u> $(12.1)|\int(\cdot)\,dt \Rightarrow$

$\int \frac{\partial F_3}{\partial t}(t,x)\,dt = \int \left(x^3-1\right)(t+x)^{-2}dt \Rightarrow F_3(t,x) = -\left(x^3-1\right)(t+x)^{-1} + \varphi_3(x), \forall (t,x) \in \mathbb{D}_3$,

unde $\varphi_3(x)$ este o funcţie necunoscută, constantă în raport cu variabila de integrare t. Se determină φ_3 folosind şi (12.2). Se derivează ultima relaţie în raport cu $x \Rightarrow$

$\frac{\partial F_3}{\partial x}(t,x) = -\frac{3x^2(t+x) - \left(x^3-1\right)}{(t+x)^2} + \frac{d\varphi_3}{dx}(x), \forall (t,x) \in \mathbb{D}_3.$

Se înlocuieşte (12.2) $\Rightarrow$

$\frac{2t^2x + tx^2 - 1}{(t+x)^2} = -\frac{3x^2(t+x) - \left(x^3-1\right)}{(t+x)^2} + \frac{d\varphi_3}{dx}(x), \forall (t,x) \in \mathbb{D}_3 \Rightarrow$

$\frac{d\varphi_3}{dx}(x) = 2x \Rightarrow \varphi_3(x) = x^2 + c_1, c_1 \in \mathbb{R}.$

Se înlocuieşte în expresia lui $F_3 \Rightarrow$

$F_3(t,x) = -\left(x^3-1\right)(t+x)^{-1} + x^2 + c_1, \forall (t,x) \in \mathbb{D}_3$ şi $c_1 \in \mathbb{R}$.

<u>modul 2.</u> $(12.2)|\int(\cdot)\,dx \Rightarrow$

$\int \frac{\partial F_3}{\partial x}(t,x)\,dx = \int \left(2t^2x + tx^2 - 1\right)(t+x)^{-2}dx.$

Se observă ca acest mod de determinare a lui F_3 este mai greu de aplicat din cauza dificultăţii

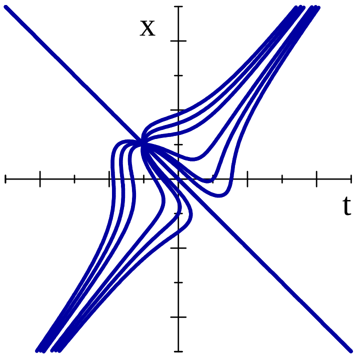
determinării integralei din membrul drept al egalităţii anterioare.
Etapa 3_3: Cu F_3 determinată la Etapa 2_3, obţinem că soluţia generala a ecuaţiei $(*_3)$ este data sub forma implicită de

$F_3(t,x) = c_2, c_2 \in \mathbb{R}$,

adică, notând $c = c_2 - c_1$, de

$(**_3)\ -\left(x^3-1\right)(t+x)^{-1} + x^2 = c, \forall (t,x) \in \mathbb{D}_3$ şi $c \in \mathbb{R}$.

Ultima relaţie dă şi soluţia ecuaţiei $(*)$ sub formă implicită pe $\mathbb{D}_3 \subset \mathbb{D}$. Local, s-ar putea explicita $x : \mathbb{I}_x \to \mathbb{R}$,unde domeniul de definiţie a soluţiei, $\mathbb{I}_x$, depinde de constanta c (pentru fiecare c se obţine o soluţie cu un anumit domeniu de definiţie şi o anumită lege de asociere).



Observaţie . La exerciţiul precedent se putea studia şi existenţa unui factor integrant de forma $\mu(t)$ sau $\mu(x)$.

Fie $\mathbb{D}_1$ un domeniu simplu conex, $\mathbb{D}_1 \subset \left\{(t,x) \in \mathbb{R}^2; 2t^2x + tx^2 - 1 \neq 0\right\} \subset \mathbb{D}$. Cum

$$\frac{1}{Q(t,x)}\left(\frac{\partial P}{\partial x}(t,x) - \frac{\partial Q}{\partial t}(t,x)\right) = \frac{-4tx + 2x^2}{2t^2x + tx^2 - 1}$$

nu depinde doar de t, ci şi de $x \Rightarrow$ nu se poate găsi un factor integrant de forma $\mu(t)$.

Fie $\mathbb{D}_2$ un domeniu simplu conex, $\mathbb{D}_2 \subset \left\{(t,x) \in \mathbb{R}^2; x^3 - 1 \neq 0\right\} \subset \mathbb{D}$. Cum

$$\frac{-1}{P(t,x)}\left(\frac{\partial P}{\partial x}(t,x) - \frac{\partial Q}{\partial t}(t,x)\right) = \frac{-\left(-4tx + 2x^2\right)}{x^3 - 1}$$

nu depinde doar de x, ci şi de $t \Rightarrow$ nu se poate găsi un factor integrant de forma $\mu(x)$.

○**Exerciţiul 12.** Să se demonstreze că orice ecuaţie cu variabile separabile de forma

$a(t)\,dt + b(x(t))\,dx(t) = 0, t \in \mathbb{I}$,

unde a şi b sunt funcţii continue, este o ecuaţie cu diferenţială exactă şi să se rezolve.

○**Exerciţiul 13.** Să se demonstreze că orice ecuaţie diferenţială de ordinul întâi cu variabile separabile de forma

$a_1(t)\,b_1(x(t))\,dt + a_2(t)\,b_2(x(t))\,dx(t) = 0, t \in \mathbb{I}$,

unde a_1, a_2, b_1, b_2 sunt funcţii continue, admite un factor integrant de forma

$$\mu(t,x) = \frac{1}{a_2(t)\,b_1(x)}$$

şi să se rezolve.