SEMINAR NR. 3, REZOLVĂRI
EDCO, AIA

1.5. Ecuaţii diferenţiale liniare de ordinul întâi şi ecuaţii reductibile la acestea: ecuaţii Bernoulli, ecuaţii Riccati

1.5.1. Ecuaţii diferenţiale liniare de ordinul întâi

Forma generală a unei ecuaţii diferenţiale liniare de ordinul întâi :

$\boxed{x'(t) = a(t)\,x(t) + b(t)}$ sau (1)

$$\boxed{\frac{dx}{dt} = ax + b} \qquad (1')$$

unde $a : \mathbb{I} \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $b : \mathbb{I} \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sunt două funcţii continue.

Rezolvare: Pentru $t \in \mathbb{I}_x \subseteq \mathbb{I}$, variabilă independentă din domeniul de definiţie al soluţiei, se caută $x = x(t)$ funcţie necunoscută, soluţie pentru ecuaţiile (1) sau (1′). Se schiţează două metode de rezolvare a acestei ecuaţii diferenţiale.

Metoda variaţiei constantelor (Lagrange) :

Etapa 1 : Se determină soluţia generală a *ecuaţiei omogene ataşate* ecuaţiei (1),

$$\boxed{x'(t) = a(t)\,x(t),} \qquad (2)$$

care este o ecuaţie cu variabile separabile, şi se obţine

$$x_o(t;c) = ce^{\int a(t)dt}, \forall t \in \mathbb{I} \text{ şi } c \in \mathbb{R}. \qquad (3)$$

Etapa 2 : Se determină o *soluţie particulară* a ecuaţiei neomogene (1), folosind metoda variaţiei constantelor, de forma

$$x_p(t) = u(t)\,e^{\int a(t)dt}, \forall t \in \mathbb{I}. \qquad (4)$$

$u : \mathbb{I} \to \mathbb{R}$ este o funcţie derivabilă care se determină impunând ca x_p dată de (4) să verifice (1). Se înlocuieşte expresia lui u în (4) şi se obţine

$$x_p(t) = \left(\int b(t)\,e^{-\int a(t)dt}dt\right) e^{\int a(t)dt}, \forall t \in \mathbb{I}. \qquad (5)$$

Etapa 3 : Soluţia generală a ecuaţiei neomogene (1) este dată de

$$x(t;c) = x_o(t;c) + x_p(t), \forall t \in \mathbb{I} \text{ şi } c \in \mathbb{R}. \qquad (6')$$

Înlocuind în formula anterioară relaţiile (3) şi (5) se obţine

$$\boxed{x(t;c) = e^{\int a(t)dt}\left(c + \int b(t)\,e^{-\int a(t)dt}dt\right), \forall t \in \mathbb{I} \text{ şi } c \in \mathbb{R}.} \qquad (6)$$

Ultima relaţie reprezintă soluţia generală a ecuaţiilor (1) sau (1′), sub formă explicită. Domeniul de definiţie a soluţiei este chiar $\mathbb{I}_x = \mathbb{I}$.

Convenţie : În calculul integralelor nedefinite ce apar în formulele (3), (5) şi (6) se consideră toate constantele 0. În formulele (3) şi (6) apare o singura constantă c, deoarece formulele respective sunt pentru soluţii generale ale unor ecuaţii diferenţiale de ordin întâi. În formula (4) nu apare nici o constantă deoarece formula dă o soluţie particulară pentru ecuaţia diferenţială (1).

Metoda factorului integrant : Ecuaţia (1) este reductibilă la o ecuaţie cu diferenţială exactă, folosind factorul integrant

$$\boxed{\mu(t) = e^{-\int a(t)dt}, \forall t \in \mathbb{I}.} \qquad (7)$$

Se înmulţeşte ecuaţia (1) cu $\mu(t)$ pe $\mathbb{I}$, se trec termenii ce conţin x, x' în membrul stâng şi se restrâng ca şi derivata unei funcţii $(x(t) \cdot \mu(t))'$, se integrează ecuaţia şi se obţine formula (6). La pasul în care se integrează ecuaţia se pune în evidenţa constanta $c \in \mathbb{R}$. Pentru formula (6) se utilizează Convenţia. În calculul integralei nedefinite ce apare în formula (7) se cosideră constanta 0, deoarece se utilizează un singur factor integrant.

Exerciţiul 1. Să se determine soluţiile generale ale următoarelor ecuaţii diferenţiale liniare
a) $x'(t) = -2tx(t) + t^3, t \in \mathbb{I}$; **b)** $tx'(t) = x(t) + t^2, t \in \mathbb{I}$;
c) $\frac{dx}{dt}(t) = x(t)\operatorname{ctg} t + 2t \sin t, t \in \mathbb{I}$; **d)** $\frac{dx}{dt}(t) = x(t) + \sin t, t \in \mathbb{I}$;
$\circ$**e)** $\left(\sin^2 x(t) + t \operatorname{ctg} x(t)\right) x'(t) = 1, t \in \mathbb{I}$; $\circ$**f)** $\left(2e^{x(t)} - t\right) x'(t) = 1, t \in \mathbb{I}$.
Rezolvare : a) A se vedea Curs.
b) Fie $tx'(t) = x(t) + t^2, t \in I$. Se aduce ecuaţia anterioară la forma normală

$(*_{LN1})$ $x'(t) = \frac{1}{t}x(t) + t, \forall t \in \mathbb{I}$ a.î. $t \neq 0$.

Pentru $t \in \mathbb{I}_x \subseteq D$, variabilă independentă din domeniul de definiţie al soluţiei, se caută $x = x(t)$ funcţie necunoscută, soluţie pentru ecuaţia $(*_{LN1})$. Se observă că ecuaţia $(*_{LN1})$ este ecuaţie diferenţială liniară de ordin întâi neomogenă, cu

$$\begin{cases} a : \mathbb{I} \to \mathbb{R}, a(t) = \frac{1}{t}, \\ b : \mathbb{I} \to \mathbb{R}, b(t) = t. \end{cases}$$

$\mathbb{I}$ este un interval ce nu conţine $t = 0$, adică $\mathbb{I} \subseteq]-\infty, 0[$ sau $\mathbb{I} \subseteq]0, +\infty[$.

$\circ$**Metoda variaţiei constantelor (Lagrange) :**

Etapa 1 : Se determină soluţia generală a ecuaţiei omogene ataşate ecuaţiei $(*_{LN1})$,

$(*_{LO1})$ $x'(t) = \frac{1}{t}x(t), t \in \mathbb{I}$, care este o ecuaţie cu variabile separabile.

•Se observă că

$x : \mathbb{I} \to \mathbb{R}, x(t) = 0$, este soluţie pentru ecuaţia $(*_{LO1})$, numită soluţie singulară.

•Se caută şi alte soluţii decât cea singulară. $(*_{LO1}) \Rightarrow$

$$\frac{x'(t)}{x(t)} = \frac{1}{t}, \forall t \in \mathbb{I}_x \text{ a.î. } (t \neq 0 \text{ şi } x(t) \neq 0) \Big| \int(\cdot)\, dt \Rightarrow \int \frac{x'(t)}{x(t)} dt = \int \frac{1}{t} dt \Rightarrow$$

$\ln|x(t)| = \ln|t| + \ln k, \forall t \in \mathbb{I}_x$ a.î. $(t \neq 0$ şi $x(t) \neq 0)$ şi $k \in \mathbb{R}_+^* \Rightarrow$

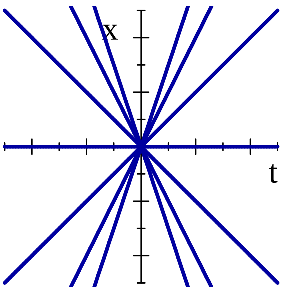
$|x(t)| = k|t|, \forall t \in \mathbb{I}_x$ a.î. $(t \neq 0$ şi $x(t) \neq 0)$ şi $k \in \mathbb{R}_+^* \Rightarrow$

$x(t) = ct, \forall t \in \mathbb{I}_x$ a.î. $(t \neq 0$ şi $x(t) \neq 0)$ şi $c \in \mathbb{R}^*$.

Ultima relaţie reprezintă soluţia generală a ecuaţiei $(*)$ sub formă explicită, unde $\mathbb{I}_x$ este domeniul de definiţie a soluţiei.

•Atunci toate soluţiile ecuaţiei $(*_{LO1})$ sunt date explicit de

$x_o(t; c) = ct, \forall t \in \mathbb{I}$ şi $c \in \mathbb{R}$.



Etapa 2 : Se determină o soluţie particulară a ecuaţiei neomogene $(*_{LN1})$, folosind metoda variaţiei constantelor, de forma

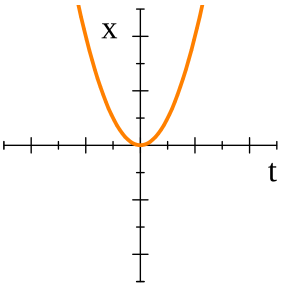
$x_p(t) = u(t)t, \forall t \in \mathbb{I}$.

$u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este o funcţie derivabilă care se determină impunând ca x_p dată anterior să verifice $(*_{LN1})$, adică

$u'(t)\,t + u(t) = \dfrac{1}{t}u(t)\,t + t, \forall t \in \mathbb{I} \Rightarrow u'(t) = 1, \forall t \in \mathbb{I} | \int (\cdot)\,dt \Rightarrow$
$\int u'(t)\,dt = \int 1dt \Rightarrow u(t) = t + 0, \forall t \in \mathbb{I}.$

S-a ales constanta 0 deoarece se caută o soluţie particulară x_p. Se înlocuieşte expresia lui u în cea a lui x_p şi se obţine

$x_p(t) = t \cdot t, \forall t \in \mathbb{I}.$

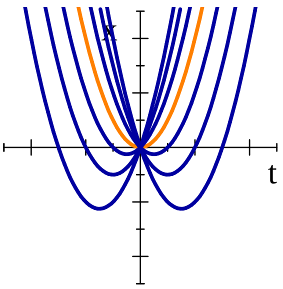


Etapa 3 : Soluţia generală a ecuaţiei neomogene $(*_{LN1})$ este dată de

$x(t;c) = x_o(t;c) + x_p(t), \forall t \in \mathbb{I}$ şi $c \in \mathbb{R}$, adică

$x(t;c) = t(c+t), \forall t \in \mathbb{I}$ şi $c \in \mathbb{R}$.

Ultima relaţie reprezintă soluţia generală a ecuaţiiei $(*_{LN1})$, sub formă explicită. Domeniul de definiţie a soluţiilor este chiar $\mathbb{I}$, pentru fiecare $c \in \mathbb{R}$.



Metoda variaţiei constantelor -redusă la formulă : Aplicând direct formula (6) şi convenţia se obţine

$$x(t) = e^{\int \frac{1}{t}dt}\left(c + \int t e^{-\int \frac{1}{t}dt}dt\right), \forall t \in \mathbb{I} \text{ şi } c \in \mathbb{R} \Rightarrow$$

$$x(t) = e^{\ln|t|+0}\left(c + \int t e^{-\ln|t|+0}dt\right), \forall t \in \mathbb{I} \text{ şi } c \in \mathbb{R} \Rightarrow$$

$$x(t) = |t|\left(c + \int \frac{t}{|t|}dt\right), \forall t \in \mathbb{I} \text{ şi } c \in \mathbb{R}.$$

Atunci, •pentru $\mathbb{I} \subseteq]0,+\infty[$, $x(t;c) = t(c+t+0), \forall t \in \mathbb{I}$ şi $c \in \mathbb{R}$ şi,

•pentru $\mathbb{I} \subseteq]-\infty,0[\,, x(t;c) = -t(c-t+0) = t(-c+t), \forall t \in \mathbb{I}$ şi $c \in \mathbb{R}$.

Metoda factorului integrant : Se determină factorul integrant

$$\mu(t) = e^{-\int \frac{1}{t}dt} = e^{-\ln|t|+0} = \frac{1}{|t|}, \forall t \in \mathbb{I}.$$

În calculul integralei nedefinite ce apare în formula anterioară se cosideră constanta 0, deoarece se utilizează un singur factor integrant. Pentru $\forall t \in \mathbb{I} \subseteq]0,+\infty[$ se înmulţeşte ecuaţia $(*_{LN1})$ cu $\mu(t) = \frac{1}{t} \Rightarrow$

$$x'(t)\frac{1}{t} = \frac{1}{t}x(t)\frac{1}{t} + t\frac{1}{t}, \forall t \in \mathbb{I}.$$

Se trec termenii ce conţin x, x' în membrul stâng$\Rightarrow$

$$x'(t)\frac{1}{t}+x(t)\left(-\frac{1}{t^2}\right)=1,\forall t\in\mathbb{I}\Rightarrow\frac{d}{dt}\left(x(t)\frac{1}{t}\right)=1,\forall t\in\mathbb{I}\Big|\int(\cdot)\,dt\Rightarrow$$

$$x(t)\frac{1}{t}=t+c,\forall t\in\mathbb{I}\Rightarrow x(t;c)=t(t+c),\forall t\in\mathbb{I}\text{ şi }c\in\mathbb{R}.$$

Pentru $\forall t\in\mathbb{I}\subseteq\left]-\infty,0\right[$ se înmulţeşte ecuaţia $(*_{LN1})$ cu $\mu(t)=\dfrac{-1}{t}\Rightarrow$

$$x(t;c)=t(t+c),\forall t\in\mathbb{I}\text{ şi }c\in\mathbb{R}.$$

Domeniul de definiţie a soluţiilor este chiar $\mathbb{I}$, pentru fiecare $c\in\mathbb{R}$.

c) Fie $(*_{LN1})$ $\dfrac{dx}{dt}(t)=x(t)\operatorname{ctg}t+2t\sin t,t\in\mathbb{I}$.

Pentru $t\in\mathbb{I}_x\subseteq D$, variabilă independentă din domeniul de definiţie al soluţiei, se caută $x=x(t)$ funcţie necunoscută, soluţie pentru ecuaţia $(*_{LN1})$. Se observă că ecuaţia $(*_{LN1})$ este ecuaţie diferenţială liniară de ordin întâi neomogenă, cu

$$\begin{cases}a:\mathbb{I}\to\mathbb{R},a(t)=\operatorname{ctg}t,\\ b:\mathbb{I}\to\mathbb{R},b(t)=2t\sin t.\end{cases}$$

$\mathbb{I}\subset\mathbb{R}$ este un interval ce nu conţine $\{l\pi;l\in\mathbb{Z}\}$, adică $\mathbb{I}\subseteq\left]-\pi,0\right[$ sau $\mathbb{I}\subseteq\left]0,\pi\right[$ ş.a.m.d.

$\circ$**Metoda variaţiei constantelor (Lagrange) :**

Etapa1 : Se determină soluţia generală a ecuaţiei omogene ataşate ecuaţiei (1),

$(*_{LO1})$ $x'(t)=x(t)\operatorname{ctg}t,\forall t\in\mathbb{I}$, care este o ecuaţie cu variabile separabile.

•Se observă că

$x:\mathbb{I}\to\mathbb{R},x(t)=0$, este soluţie pentru ecuaţia $(*_{LO1})$, numită soluţie singulară.

•Se caută şi alte soluţii decât cea singulară. $(*_{LO1})\Rightarrow$

$$\frac{x'(t)}{x(t)}=\operatorname{ctg}t,\forall t\in\mathbb{I}_x\text{ a.î. }(t\notin\{l\pi;l\in\mathbb{Z}\}\text{ şi }x(t)\neq0)\Big|\int(\cdot)\,dt\Rightarrow\int\frac{x'(t)}{x(t)}dt=\int\operatorname{ctg}t\,dt\Rightarrow$$

$$\ln|x(t)|=\ln|\sin t|+\ln k,\forall t\in\mathbb{I}_x\text{ a.î. }(t\notin\{l\pi;l\in\mathbb{Z}\},x(t)\neq0)\text{ şi }k\in\mathbb{R}_+^*\Rightarrow$$

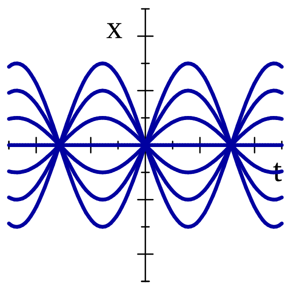
$$|x(t)|=k|\sin t|,\forall t\in\mathbb{I}_x\text{ a.î. }(t\notin\{l\pi;l\in\mathbb{Z}\},x(t)\neq0)\text{ şi }k\in\mathbb{R}_+^*\Rightarrow$$

$$x(t)=c\sin t,\forall t\in\mathbb{I}_x\text{ a.î. }(t\notin\{l\pi;l\in\mathbb{Z}\},x(t)\neq0)\text{ şi }c\in\mathbb{R}^*.$$

Ultima relaţie reprezintă soluţia generală a ecuaţiei $(*)$ sub formă explicită, unde $\mathbb{I}_x$ este domeniul de definiţie a soluţiei.

•Atunci toate soluţiile ecuaţiei $(*_{LO1})$ sunt date explicit de

$$x_o(t;c)=c\sin t,\forall t\in\mathbb{I}\text{ şi }c\in\mathbb{R}.$$



Etapa2 : Se determină o soluţie particulară a ecuaţiei neomogene $(*_{LN1})$, folosind metoda variaţiei constantelor, de forma $x_p(t)=u(t)\sin t,\forall t\in\mathbb{I}$,

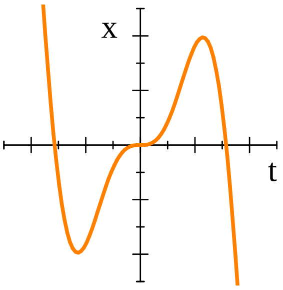
$u:\mathbb{I}\to\mathbb{R}$ este o funcţie derivabilă care se determină impunând ca x_p dată anterior să verifice $(*_{LN1})$, adică

$$u'(t)\sin t+u(t)\cos t=u(t)\sin t\operatorname{ctg}t++2t\sin t,\forall t\in\mathbb{I}\Rightarrow u'(t)=2t,\forall t\in\mathbb{I}|\int(\cdot)\,dt\Rightarrow$$

$$u(t)=t^2+0,\forall t\in\mathbb{I}.$$

S-a ales constanta 0 deoarece se caută o soluţie particulară x_p. Se înlocuieşte expresia lui u în cea a lui x_p şi se obţine

$x_p(t) = t^2 \sin t, \forall t \in \mathbb{I}.$

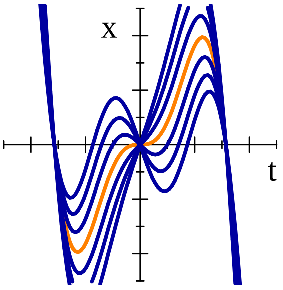


Etapa3 : Soluţia generală a ecuaţiei neomogene $(*_{LN1})$ este dată de

$x(t;c) = x_o(t;c) + x_p(t), \forall t \in \mathbb{I}$ şi $c \in \mathbb{R}$, adică

$x(t;c) = (\sin t)\left(c + t^2\right), \forall t \in \mathbb{I}$ şi $c \in \mathbb{R}$.

Ultima relaţie reprezintă soluţia generală a ecuaţiiei $(*_{LN1})$, sub formă explicită. Domeniul de definiţie a soluţiilor este chiar $\mathbb{I}$, pentru fiecare $c \in \mathbb{R}$.



Metoda variaţiei constantelor -redusă la formulă : Aplicând direct formula (6) şi convenţia se obţine

$$x(t;c) = e^{\int \operatorname{ctg} t dt}\left(c + \int 2t(\sin t)\, e^{-\int \operatorname{ctg} t dt} dt\right), \forall t \in \mathbb{I} \text{ şi } c \in \mathbb{R} \Rightarrow$$

$$x(t;c) = e^{\ln|\sin t|+0}\left(c + \int 2t(\sin t)\, e^{-\ln|\sin t|+0} dt\right), \forall t \in \mathbb{I} \text{ şi } c \in \mathbb{R} \Rightarrow$$

$$x(t;c) = |\sin t|\left(c + \int 2t\frac{\sin t}{|\sin t|} dt\right), \forall t \in \mathbb{I} \text{ şi } c \in \mathbb{R}.$$

Fie $\mathbb{I}$, interval ales astfel încât $\sin t > 0, \forall t \in \mathbb{I}$. Atunci

$x(t;c) = (\sin t)\left(c + t^2\right), \forall t \in \mathbb{I}$ şi $c \in \mathbb{R}$.

Fie $\mathbb{I}$, interval ales astfel încât $\sin t < 0, \forall t \in \mathbb{I}$. Atunci

$x(t;c) = -\sin t\left(c - t^2 + 0\right), \forall t \in \mathbb{I}$ şi $c \in \mathbb{R} \Rightarrow x(t;c) = (\sin t)\left(-c + t^2\right), \forall t \in \mathbb{I}$ şi $c \in \mathbb{R}$.

Metoda factorului integrant : Se determină factorul integrant

$$\mu(t) = e^{-\int \operatorname{ctg} t dt} = e^{-\ln|\sin t|+0} = \frac{1}{|\sin t|}, \forall t \in \mathbb{I}.$$

În calculul integralei nedefinite ce apare în formula anterioară se cosideră constanta 0, deoarece se utilizează un singur factor integrant. Fie $\mathbb{I}$, interval ales astfel încât $\sin t > 0, \forall t \in \mathbb{I}$. Atunci se înmulţeşte ecuaţia $(*_{LN1})$ cu $\mu(t) = \frac{1}{\sin t} \Rightarrow$

$$x'(t)\frac{1}{\sin t} = x(t)\operatorname{ctg} t\frac{1}{\sin t} + 2t, \forall t \in \mathbb{I}.$$

Se trec termenii ce conţin x, x' în membrul stâng$\Rightarrow$

$$x'(t)\frac{1}{\sin t} + x(t)\left(-\frac{\cos t}{\sin^2 t}\right) = 2t, \forall t \in \mathbb{I} \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(x(t)\frac{1}{\sin t}\right) = 2t, \forall t \in \mathbb{I} \left| \int (\cdot)\, dt \right. \Rightarrow$$

$x(t)\dfrac{1}{\sin t} = t^2 + c, \forall t \in \mathbb{I}$ şi $c \in \mathbb{R} \Rightarrow x(t;c) = (\sin t)\left(t^2 + c\right), \forall t \in \mathbb{I}$ şi $c \in \mathbb{R}$.

Fie $\mathbb{I}$, interval ales astfel încât $\sin t < 0, \forall t \in \mathbb{I}$. Atunci se înmulţeşte ecuaţia $(*_{LN1})$ cu $\mu(t) = \frac{-1}{\sin t} \Rightarrow$

$x(t;c) = (\sin t)\left(t^2 + c\right), \forall t \in \mathbb{I}$ şi $c \in \mathbb{R}$.

d) analog cu c).

○**e)** Fie ecuaţia

$\left(\sin^2 x(t) + t \operatorname{ctg} x(t)\right) x'(t) = 1, t \in \mathbb{I}$

Se aduce la forma normală

$x'(t) = \dfrac{1}{\sin^2 x(t) + t \operatorname{ctg} x(t)}, \forall t \in \mathbb{I}$ a.î. $\sin^2 x(t) + t \operatorname{ctg} x(t) \neq 0$.

Ecuaţia anterioară nu este ecuaţie diferenţială liniară de ordin întâi neomogenă în necunoscuta $x = x(t)$. În anumite ipoteze de inversare locală şi derivabilitate se poate căuta $t = t(x)$ în loc de $x = x(t)$, ştiind că

$$\boxed{t'(x) = \frac{1}{x'(t)}, \ \forall x \in E.}$$

Se consideră

$(*_{LN1})\; t'(x) = t(x) \operatorname{ctg} x + \sin^2 x, \forall x \in E.$

Pentru $x \in \mathbb{J}_t \subseteq D$, variabilă independentă din domeniul de definiţie al soluţiei, se caută $t = t(x)$ funcţie necunoscută, soluţie pentru ecuaţia $(*_{LN1})$. Se observă că ecuaţia $(*_{LN1})$ este ecuaţie diferenţială liniară de ordin întâi neomogenă, cu

$$\begin{cases} a : \mathbb{J} \to \mathbb{R}, a(x) = \operatorname{ctg} x, \\ b : \mathbb{J} \to \mathbb{R}, b(x) = \sin^2 x. \end{cases}$$

$\mathbb{J} \subset \mathbb{R}$ este un interval ce nu conţine $\{l\pi; l \in \mathbb{Z}\}$, adică $\mathbb{J} \subseteq]-\pi, 0[$ sau $\mathbb{J} \subseteq]0, \pi[$ ş.a.m.d.

○**Metoda variaţiei constantelor (Lagrange) :**

Etapa1 : Se determină soluţia generală a ecuaţiei omogene ataşate ecuaţiei (1),

$(*_{LO1})\;\; t'(x) = t(x) \operatorname{ctg} x, x \in \mathbb{J},$

care este o ecuaţie cu variabile separabile.

•Se observă că

$t : \mathbb{J} \to \mathbb{R}, t(x) = 0,$

este soluţie pentru ecuaţia $(*_{LO1})$, numită soluţie singulară.

•Se caută şi alte soluţii decât cea singulară. $(*_{LO1}) \Rightarrow$

$\frac{t'(x)}{t(x)} = \operatorname{ctg} x, \forall x \in \mathbb{J}_t$ a.î. $(x \notin \{l\pi; l \in \mathbb{Z}\}$ şi $t(x) \neq 0) \Big| \int (\cdot)\, dx \Rightarrow$

$\displaystyle\int \frac{t'(x)}{t(x)} dt = \int \operatorname{ctg} x dx \Rightarrow$

$\ln|t(x)| = \ln|\sin x| + \ln k, \forall x \in \mathbb{J}_t$ a.î. $(x \notin \{l\pi; l \in \mathbb{Z}\}$ şi $t(x) \neq 0)$ şi $k \in \mathbb{R}_+^* \Rightarrow$

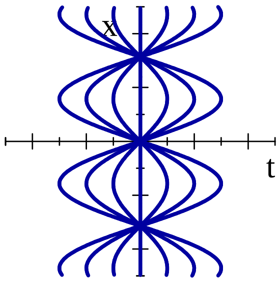
$|t(x)| = k|\sin x|, \forall x \in \mathbb{J}_t$ a.î. $(x \notin \{l\pi; l \in \mathbb{Z}\}$ şi $t(x) \neq 0)$ şi $k \in \mathbb{R}_+^* \Rightarrow$

$t(x) = c \sin x, \forall x \in \mathbb{J}_t$ a.î. $(x \notin \{l\pi; l \in \mathbb{Z}\}$ şi $t(x) \neq 0)$ şi $c \in \mathbb{R}^*$.

Ultima relaţie reprezintă soluţia generală a ecuaţiei $(*)$ sub formă explicită, unde $\mathbb{J}_t$ este domeniul de definiţie a soluţiei.

•Atunci toate soluţiile ecuaţiei $(*_{LO1})$ sunt date explicit de

$t_o(x;c) = c \sin x, \forall x \in \mathbb{J}$ şi $c \in \mathbb{R}$.



Etapa2 : Se determină o soluţie particulară a ecuaţiei neomogene $(*_{LN1})$, folosind metoda variaţiei constantelor, de forma

$t_p(x) = u(x)\sin x, \forall x \in \mathbb{J},$

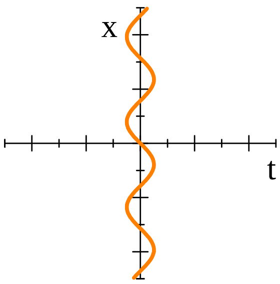
$u : \mathbb{J} \to \mathbb{R}$ este o funcţie derivabilă care se determină impunând ca t_p dată anterior să verifice $(*_{LN1})$, adică

$u'(x)\sin x + u(x)\cos x = u(x)\sin x \operatorname{ctg} x + \sin^2 x, \forall x \in \mathbb{J} \Rightarrow u'(x) = \sin x, \forall x \in \mathbb{J} | \int (\cdot)\, dx \Rightarrow$

$u(x) = -\cos x + 0, \forall x \in \mathbb{J}.$

S-a ales constanta 0 deoarece se caută o soluţie particulară t_p. Se înlocuieşte expresia lui u în cea a lui t_p şi se obţine

$t_p(x) = -\cos x \sin x, \forall x \in \mathbb{J}.$



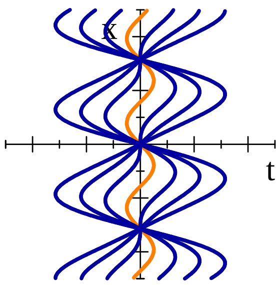
Etapa3 : Soluţia generală a ecuaţiei neomogene $(*_{LN1})$ este dată de

$t(x; c) = t_o(x; c) + t_p(x), \forall x \in \mathbb{J}$ şi $c \in \mathbb{R}$.

adică

$t(x; c) = (\sin x)(c - \cos x), \forall x \in \mathbb{J}$ şi $c \in \mathbb{R}$.

Ultima relaţie reprezintă soluţia generală a ecuaţiiei $(*_{LN1})$, sub formă explicită. Domeniul de definiţie a soluţiilor este chiar $\mathbb{J}$, pentru fiecare $c \in \mathbb{R}$.



Metoda variaţiei constantelor -redusă la formulă : Aplicând direct formula (6) şi convenţia se obţine

$$t(x; c) = e^{\int \operatorname{ctg} x dx}\left(c + \int \left(\sin^2 x\right) e^{-\int \operatorname{ctg} x dx} dx\right), \forall x \in \mathbb{J} \text{ şi } c \in \mathbb{R} \Rightarrow$$

$t\,(x;c) = e^{\ln|\sin x|+0}\left(c + \int \left(\sin^2 x\right) e^{-\ln|\sin x|+0}dx\right), \forall x \in \mathbb{J}$ şi $c \in \mathbb{R} \Rightarrow$
$t\,(x;c) = |\sin x|\left(c + \int \frac{\sin^2 x}{|\sin x|}dt\right), \forall x \in \mathbb{J}$ şi $c \in \mathbb{R}$.
Fie $\mathbb{J}$, interval ales astfel încât $\sin x > 0$. $\forall x \in \mathbb{J}$. Atunci
$t\,(x;c) = (\sin x)\,(c - \cos x)\,, \forall x \in \mathbb{J}$ şi $c \in \mathbb{R}$.
Fie $\mathbb{J}$, interval ales astfel încât $\sin x < 0$. $\forall x \in \mathbb{J}$. Atunci
$t\,(x;c) = -\sin x\,(c + \cos x + 0)\,, \forall x \in \mathbb{J}$ şi $c \in \mathbb{R} \Rightarrow$
$t\,(x;c) = (\sin x)\,(-c - \cos x)\,, \forall x \in \mathbb{J}$ şi $c \in \mathbb{R}$.
Metoda factorului integrant : Ecuaţia $(*_{LN1})$ este reductibilă la o ecuaţie cu diferenţială exactă, folosind factorul integrant
$\mu\,(x) = e^{-\int \operatorname{ctg} x dx} = e^{-\ln|\sin x|+0} = \frac{1}{|\sin x|}, \forall x \in \mathbb{J}$.
În calculul integralei nedefinite ce apare în formula anterioară se cosideră constanta 0, deoarece se utilizează un singur factor integrant. Fie $\mathbb{J}$, interval ales astfel încât $\sin x > 0$. $\forall x \in \mathbb{J}$. Atunci se înmulţeşte ecuaţia $(*_{LN1})$ cu $\mu\,(x) = \frac{1}{\sin x} \Rightarrow$
$t'\,(x)\,\frac{1}{\sin x} = t\,(x)\operatorname{ctg} x \frac{1}{\sin x} + \sin^2 x \frac{1}{\sin x}, \forall x \in \mathbb{J}$.
Se trec termenii ce conţin t, t' în membrul stâng$\Rightarrow$
$t'\,(x)\,\frac{1}{\sin x} - t\,(x)\,\frac{\cos x}{\sin^2 x} = \sin x, \forall x \in \mathbb{J} \Rightarrow$
$\frac{d}{dx}\left(t\,(x)\,\frac{1}{\sin x}\right) = \sin x, \forall x \in \mathbb{J}\Big| \int (\cdot)\,dt \Rightarrow$
$t\,(x)\,\frac{1}{\sin x} = -\cos x + c, \forall x \in \mathbb{J}$ şi $c \in \mathbb{R} \Rightarrow$
$t\,(x;c) = (\sin x)\,(-\cos x + c)\,, \forall x \in \mathbb{J}$ şi $c \in \mathbb{R}$.
Fie $\mathbb{J}$, interval ales astfel încât $\sin x < 0$. $\forall x \in \mathbb{J}$. Atunci se înmulţeşte ecuaţia $(*_{LN1})$ cu $\mu\,(x) = \frac{-1}{\sin x} \Rightarrow$
$t\,(x;c) = (\sin x)\,(-\cos x + c)\,, \forall x \in \mathbb{J}$ şi $c \in \mathbb{R}$.
Domeniul de definiţie a soluţiilor este chiar $\mathbb{J}$, pentru fiecare $c \in \mathbb{R}$.

○**f)** Fie ecuaţia
$\left(2e^{x(t)} - t\right) x'\,(t) = 1, t \in \mathbb{I}$
Se aduce la forma normală
$x'\,(t) = \frac{1}{2e^{x(t)} - t}, \forall t \in \mathbb{I}$ a.î. $2e^{x(t)} - t \neq 0$.
Ecuaţia anterioară nu este ecuaţie reductibilă la unul din tipurile cunoscute în necunoscuta $x = x\,(t)$. În anumite ipoteze de inversare locală şi derivabilitate se poate căuta $t = t\,(x)$ în loc de $x = x\,(t)$, ştiind că $t'\,(x) = \frac{1}{x'(t)}$, $\forall x \in E$.
Se consideră
$(*_{LN1})\ t'\,(x) = -t\,(x) + 2e^x, \forall x \in E$.
Pentru $x \in \mathbb{J}_t \subseteq D$, variabilă independentă din domeniul de definiţie al soluţiei, se caută $t = t\,(x)$ funcţie necunoscută, soluţie pentru ecuaţia $(*_{LN1})$. Se observă că ecuaţia $(*_{LN1})$ este ecuaţie diferenţială liniară de ordin întâi neomogenă, cu
$\begin{cases} a : \mathbb{J} \to \mathbb{R}, a\,(x) = -1, \\ b : \mathbb{J} \to \mathbb{R}, b\,(x) = 2e^x. \end{cases}$
$\mathbb{J} \subset \mathbb{R}$ este un interval, chiar $\mathbb{J} = \mathbb{R}$. În continuare se rezolvă ca la e).

○1.5.2. Ecuaţii diferenţiale Bernoulli

Forma generală a unei ecuaţii diferenţiale Bernoulli :
$$\boxed{x'\,(t) = a\,(t)\,x\,(t) + b\,(t)\,x^{\alpha}\,(t)} \qquad (8)$$
sau

$$\boxed{\frac{dx}{dt} = ax + bx^{\alpha}} \tag{8'}$$

unde $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$, $a : \mathbb{I} \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $b : \mathbb{I} \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sunt două funcţii continue, neidentic nule şi neproporţionale pe $\mathbb{I}$.

Rezolvare: Pentru $t \in \mathbb{I}_x \subseteq \mathbb{I}$, variabilă independentă din domeniul de definiţie al soluţiei, se caută $x = x(t)$ funcţie necunoscută, soluţie pentru ecuaţiile (8) sau (8′). Se face schimbarea de funcţie necunoscută

$$y(t) = x^{1-\alpha}(t), \tag{9}$$

pe un interval corespunzător. Se înlocuieşte x şi x' obţinuţi din (9) în (8) sau (8′), se obţine o ecuaţie diferenţială liniară în necunoscuta $y(t)$, se rezolvă şi se revine la substituţie. Domeniul de definiţie a soluţiei, $\mathbb{I}_x$, depinde de constanta c (pentru fiecare c se obţine o soluţie cu un anumit domeniu de definiţie şi o anumită lege de asociere).

○**Exerciţiul 2**. Să se determine soluţiile generale ale următoarelor ecuaţii diferenţiale Bernoulli

a) $x' + \frac{1}{t}x = \frac{1}{t^2x^2}, t \in \mathbb{I}$; **b)** $x' = \frac{4}{t}x + t\sqrt{x}, t \in \mathbb{I}$;

c) $tx'(t) + x(t) + t^5x^3(t)e^t = 0, t \in \mathbb{I}$; **d)** $\frac{dx}{dt}(t) = \frac{x(t)}{2t} + \frac{t^2}{2x(t)}, t \in \mathbb{I}$;

e) $\frac{dx}{dt}(t) + 2x(t) = e^t x^2(t), t \in \mathbb{I}$; **f)** $x' - \frac{2t}{1+t^2}x = \frac{4\operatorname{arctg} t}{\sqrt{1+t^2}}\sqrt{x}, t \in \mathbb{I}$;

g) $x't^3 \sin x = tx' - 2x, t \in \mathbb{I}$.

Rezolvare : a) A se vedea Curs.

b) Fie $x' = \frac{4}{t}x + t\sqrt{x}, t \in \mathbb{I} \Rightarrow$

$$(*_B)\ \ x'(t) = \frac{4}{t}x(t) + tx^{\frac{1}{2}}(t), t \in \mathbb{I}.$$

Pentru $t \in \mathbb{I}_x \subseteq D$, variabilă independentă din domeniul de definiţie al soluţiei, se caută $x = x(t)$ funcţie necunoscută, soluţie pentru ecuaţia $(*_B)$. Se observă că ecuaţia $(*_B)$ este ecuaţie Bernoulli, cu $\alpha = \frac{1}{2}$ şi

$$\begin{cases} a : \mathbb{I} \to \mathbb{R}, a(t) = \dfrac{4}{t}, \\ b : \mathbb{I} \to \mathbb{R}, b(t) = t. \end{cases}$$

$\mathbb{I}$ este un interval ce nu conţine $t = 0$, adică $\mathbb{I} \subseteq]-\infty, 0[$ sau $\mathbb{I} \subseteq]0, +\infty[$.

•Se observă că $x : \mathbb{I} \to \mathbb{R}$, $x(t) = 0$ este soluţie singulară pentru $(*_B)$.

•Se caută şi alte soluţii decât cea singulară.

<u>modul 1.</u> Pentru a aduce ecuaţia $(*_B)$ la o forma similară cu cea a uneia diferenţiale liniare intr-o necunoscută $y = y(t)$, se înmulţeşte $(*_B)$ cu $x^{\frac{-1}{2}}(t)$, $\forall t \in \mathbb{I}_x$ a.î. ($t \neq 0$ şi $x(t) \gneqq 0$) (pentru ca termenul ce conţine $b(t)$ să nu mai conţină şi $x(t)$). Se obţine

$$x^{\frac{-1}{2}}(t)\, x'(t) = \tfrac{4}{t}x^{\frac{1}{2}}(t) + t, \forall t \in \mathbb{I}_x \text{ a.î. } (t \neq 0 \text{ şi } x(t) \gneqq 0).$$

Se face schimbarea de funcţie necunoscută

$$\begin{cases} y(t) = x^{\frac{1}{2}}(t), \forall t \in \mathbb{I}_x \Big| \frac{d}{dt}(\cdot) \\ y'(t) = \dfrac{1}{2}x^{\frac{-1}{2}}(t)\, x'(t), \forall t \in \mathbb{I}_x. \end{cases}$$

Se înlocuieşte x şi x' şi se obţine o ecuaţie diferenţială liniară în necunoscuta $y(t)$,

$$2y'(t) = \frac{4}{t}y(t) + t, \forall t \in \mathbb{I}_x \text{ a.î. } (t \neq 0 \text{ şi } x(t) \gneqq 0) \Rightarrow$$

$$(*_{LN1})\ y'(t) = \frac{2}{t}y(t) + \frac{t}{2}, \forall t \in \mathbb{I}_x \text{ a.î. } (t \neq 0 \text{ şi } x(t) \gneqq 0).$$

modul $1'$. O variantă de lucru este înlocuirea directă a substituţiei. Adică se face schimbarea de funcţie necunoscută

$$\begin{cases} y(t) = x^{\frac{1}{2}}(t), \forall t \in \mathbb{I}_x \text{ a.î. } (t \neq 0, x(t) \gneqq 0) \\ \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x(t) = y^2(t), \forall t \in \mathbb{I}_x \text{ a.î. } (t \neq 0, x(t) \gneqq 0) \\ x'(t) = 2y(t)\,y'(t) \end{cases}$$

Se înlocuieşte x şi x' în $(*_B)$ şi se obţine o ecuaţie diferenţială liniară în necunoscuta $y(t)$,

$$2y(t)\,y'(t) = \frac{4}{t}y^2(t) + t\left(y^2(t)\right)^{\frac{1}{2}}, \forall t \in \mathbb{I}_x \text{ a.î. } (t \neq 0, x(t) \gneqq 0)\Big| : 2y(t) \Rightarrow$$

$$(*_{LN1})\ y'(t) = \frac{2}{t}y(t) + \frac{t}{2}, \forall t \in \mathbb{I}_x \text{ a.î. } (t \neq 0 \text{ şi } x(t) \gneqq 0).$$

În ambele variante se observă că ecuaţia $(*_{LN1})$ este ecuaţie diferenţială liniară de ordin întâi neomogenă, cu

$$\begin{cases} a_1 : \mathbb{I} \to \mathbb{R}, a_1(t) = \dfrac{2}{t}, \\ b_1 : \mathbb{I} \to \mathbb{R}, b_1(t) = \dfrac{t}{2}. \end{cases}$$

Ecuaţia $(*_{LN1})$ se poate rezolva prin una din cele două metode descrise în Exerciţiul 1:

Metoda variaţiei constantelor detaliat-temă

Metoda variaţiei constantelor redusă la formula (6) pentru ecuaţia în necunoscuta $y(t)$ şi Convenţia. Se obţine

$$y(t;c) = e^{\int\left(\frac{2}{t}\right)dt}\left(c + \int \frac{t}{2}e^{-\int\left(\frac{2}{t}\right)dt}dt\right), \forall t \in \mathbb{I}_x \text{ şi } c \in \mathbb{R} \Rightarrow$$

$$y(t;c) = e^{2\ln|t|+0}\left(c + \int \frac{t}{2}e^{-2\ln|t|+0}dt\right), \forall t \in \mathbb{I}_x \text{ şi } c \in \mathbb{R} \Rightarrow$$

$$y(t;c) = t^2\left(c + \tfrac{1}{2}\ln|t| + 0\right), \forall t \in \mathbb{I}_x \text{ şi } c \in \mathbb{R}.$$

Metoda factorului integrant : Ecuaţia $(*_{LN1})$ este reductibilă la o ecuaţie cu diferenţială exactă, folosind factorul integrant

$$\mu(t) = e^{-\int\left(\frac{2}{t}\right)dt} = e^{-2\ln|t|+0} = \tfrac{1}{t^2}, \forall t \in \mathbb{I}.$$

În calculul integralei nedefinite ce apare în formula anterioară se cosideră constanta 0, deoarece se utilizează un singur factor integrant.

Pentru $\forall t \in \mathbb{I}$ se înmulţeşte ecuaţia $(*_{LN1})$ cu $\mu(t) = \frac{1}{t^2} \Rightarrow$

$$y'(t)\cdot\tfrac{1}{t^2} = \frac{2}{t}y(t)\cdot\tfrac{1}{t^2} + \frac{t}{2}\cdot\tfrac{1}{t^2}, \forall t \in \mathbb{I}_x \text{ a.î. } (t \neq 0 \text{ şi } x(t) \gneqq 0).$$

Se trec termenii ce conţin y, y' în membrul stâng$\Rightarrow$

$$y'(t)\cdot\tfrac{1}{t^2} + y(t)\cdot\tfrac{-2}{t^3} = \tfrac{1}{2t}, \forall t \in \mathbb{I}_x \Rightarrow$$

$$\frac{d}{dt}\left(y(t)\cdot\tfrac{1}{t^2}\right) = \tfrac{1}{2t}, \forall t \in \mathbb{I}_x \Big| \int(\cdot)\,dt \Rightarrow$$

$$y(t)\cdot\tfrac{1}{t^2} = \tfrac{1}{2}\ln|t| + c, \forall t \in \mathbb{I}_x \Rightarrow$$

$$(**)\, y(t;c) = t^2\left(\tfrac{1}{2}\ln|t| + c\right), \forall t \in \mathbb{I}_x \text{ şi } c \in \mathbb{R}. \ \square$$

Ultima relaţie reprezintă soluţia generală a ecuaţiei $(*_{LN1})$, sub formă explicită. Se revine la substituţie $\Rightarrow$

$$(**)\ x^{\frac{1}{2}}(t) = t^2\left(c + \tfrac{1}{2}\ln|t|\right), \forall t \in \mathbb{I}_x \text{ şi } c \in \mathbb{R}.$$

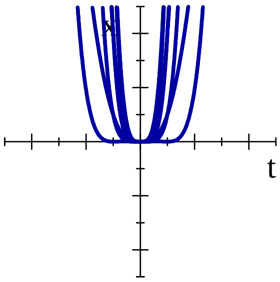
Ultima relaţie reprezintă soluţia generală a ecuaţiei $(*_B)$, sub formă implicită. Pentru $\mathbb{I}_x \subseteq \left]0, +\infty\right[$ $\Rightarrow$

$$x(t;c) = \left(t^2\left(c + \tfrac{1}{2}\ln t\right)\right)^2, \forall t \in \mathbb{I}_x \text{ şi } c \in \mathbb{R}.$$

Domeniul de definiţie a soluţiei, $\mathbb{I}_x$, depinde de constanta c (pentru fiecare c se obţine o soluţie cu un anumit domeniu de definiţie şi o anumită lege de asociere) ($\mathbb{I}_x$ se obţine impunând $t > 0$ şi $c + \frac{1}{2}\ln t > 0$). Pentru $\mathbb{I}_x \subseteq \left]-\infty, 0\right[$,

$x(t;c) = \left(t^2\left(c + \frac{1}{2}\ln(-t)\right)\right)^2, \forall t \in \mathbb{I}_x$ şi $c \in \mathbb{R}$.

Domeniul de definiţie a soluţiei, $\mathbb{I}_x$, depinde de constanta c (pentru fiecare c se obţine o soluţie cu un anumit domeniu de definiţie şi o anumită lege de asociere) ($\mathbb{I}_x$ se obţine impunând $t < 0$ şi $c + \frac{1}{2}\ln(-t) > 0$).



c) Fie $tx'(t) + x(t) + t^5x^3(t)e^t = 0, t \in \mathbb{I} \Rightarrow$

$(*_B)\ \ x'(t) = \frac{-1}{t}x(t) - t^4e^tx^3(t), t \in \mathbb{I}.$

Pentru $t \in \mathbb{I}_x \subseteq D$, variabilă independentă din domeniul de definiţie al soluţiei, se caută $x = x(t)$ funcţie necunoscută, soluţie pentru ecuaţia $(*_B)$. Se observă că ecuaţia $(*_B)$ este ecuaţie Bernoulli, cu $\alpha = 3$ şi

$$\begin{cases} a : \mathbb{I} \to \mathbb{R}, a(t) = \frac{-1}{t}, \\ b : \mathbb{I} \to \mathbb{R}, b(t) = -t^4e^t. \end{cases}$$

$\mathbb{I}$ este un interval ce nu conţine $t = 0$, adică $\mathbb{I} \subseteq \left]-\infty, 0\right[$ sau $\mathbb{I} \subseteq \left]0, +\infty\right[$. Pentru a aduce ecuaţia $(*_B)$ la o forma similară cu cea a uneia diferenţiale liniare intr-o necunoscută $y = y(t)$, se înmulţeşte $(*_B)$ cu $x^{-3}(t)$, $\forall t \in \mathbb{I}_x$ a.î. ($t \neq 0$ şi $x(t) \neq 0$) (pentru ca termenul ce conţine $b(t)$ să nu mai conţină şi $x(t)$). Se obţine

$x^{-3}(t)x'(t) = \frac{-1}{t}x^{-2}(t) - t^4e^t, \forall t \in \mathbb{I}_x$ a.î. ($t \neq 0$ şi $x(t) \neq 0$).

Se face schimbarea de funcţie necunoscută

$$\begin{cases} y(t) = x^{-2}(t), \forall t \in \mathbb{I}_x \Big| \frac{d}{dt}(\cdot) \\ y'(t) = -2x^{-3}(t)x'(t), \forall t \in \mathbb{I}_x. \end{cases}$$

Se înlocuieşte x şi x' şi se obţine o ecuaţie diferenţială liniară în necunoscuta $y(t)$,

$\frac{-1}{2}y'(t) = \frac{-1}{t}y(t) - t^4e^t, \forall t \in \mathbb{I}_x$ a.î. ($t \neq 0$ şi $x(t) \neq 0$) $\Rightarrow$

$(*_{LN1})\ y'(t) = \frac{2}{t}y(t) + 2t^4e^t, \forall t \in \mathbb{I}_x$ a.î. ($t \neq 0$ şi $x(t) \neq 0$).

Se observă că ecuaţia $(*_{LN1})$ este ecuaţie diferenţială liniară de ordin întâi neomogenă, cu

$$\begin{cases} a_1 : \mathbb{I} \to \mathbb{R}, a_1(t) = \frac{2}{t}, \\ b_1 : \mathbb{I} \to \mathbb{R}, b_1(t) = 2t^4e^t. \end{cases}$$

Ecuaţia $(*_{LN1})$ se poate rezolva prin una din cele două metode descrise în Exerciţiul 1 (Metoda variaţiei constantelor sau Metoda factorului integrant). La acest exerciţiu se va utiliza direct formula (6) pentru ecuaţia în necunoscuta $y(t)$ şi Convenţia. Se obţine :

$$y(t;c) = e^{\int\left(\frac{2}{t}\right)dt}\left(c + \int 2t^4e^te^{-\int\left(\frac{2}{t}\right)dt}dt\right), \forall t \in \mathbb{I}_x \text{ şi } c \in \mathbb{R} \Rightarrow$$

$$y(t;c) = e^{2\ln|t|+0}\left(c + \int 2t^4e^te^{-2\ln|t|+0}dt\right), \forall t \in \mathbb{I}_x \text{ şi } c \in \mathbb{R} \Rightarrow$$

$$y(t;c) = t^2\left(c + \int 2t^2e^tdt\right), \forall t \in \mathbb{I}_x \text{ şi } c \in \mathbb{R} \Rightarrow$$

$$y(t;c) = t^2\left(c + 2t^2e^t - 4te^t + 4e^t + 0\right), \forall t \in \mathbb{I}_x \text{ şi } c \in \mathbb{R}.$$

$y^{-2} = x^2 \left(0 + 2y^2e^x - 4xe^x + 4e^x\right)$
Ultima relaţie reprezintă soluţia generală a ecuaţiiei $(*_{LN1})$, sub formă explicită. Se revine la substituţie $\Rightarrow$

$(**)\ x^{-2}(t) = t^2 \left(c + 2t^2e^t - 4te^t + 4e^t + 0\right), \forall t \in \mathbb{I}_x$ şi $c \in \mathbb{R}$.

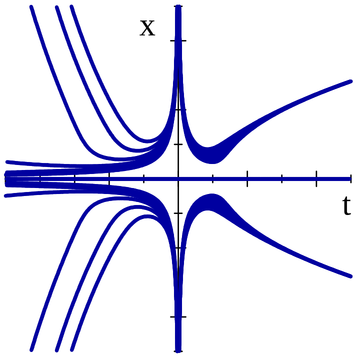
Ultima relaţie reprezintă soluţia generală a ecuaţiiei $(*_B)$, sub formă implicită. Atunci

$x(t;c) = \sqrt{t^2 \left(c + 2t^2e^t - 4te^t + 4e^t\right)^{-1}}, \forall t \in \mathbb{I}_x$ şi $c \in \mathbb{R}$.

şi

$x(t;c) = -\sqrt{t^2 \left(c + 2t^2e^t - 4te^t + 4e^t\right)^{-1}}, \forall t \in \mathbb{I}_x$ şi $c \in \mathbb{R}$.

reprezintă cele două familii de soluţii generale pentru $(*_B)$, sub formă explicită. Domeniul de definiţie a soluţiei, $\mathbb{I}_x$, depinde de constanta c (pentru fiecare c se obţine o soluţie cu un anumit domeniu de definiţie şi o anumită lege de asociere) ($\mathbb{I}_x$ se obţine impunând $t \neq 0$ şi $c + 2t^2e^t - 4te^t + 4e^t \neq 0$).



d), e), f)-analog cu c).

g) Fie $x' t^3 \sin x = tx' - 2x, t \in \mathbb{I}$

Se aduce la forma normală

$x'(t) = \frac{2x}{t - t^3 \sin x}, \forall t \in \mathbb{I}$ a.î. $t - t^3 \sin x \neq 0$.

Ecuaţia anterioară nu este ecuaţie reductibilă la unul din tipurile cunoscute în necunoscuta $x = x(t)$. În anumite ipoteze de inversare locală şi derivabilitate se poate căuta $t = t(x)$ în loc de $x = x(t)$, ştiind că $t'(x) = \frac{1}{x'(t)}$, $\forall x \in E$.

Se consideră:

$(*_{LN1})\ t'(x) = \frac{1}{2x} t(x) - \frac{\sin x}{2x} t^3(x), \forall x \in E$.

Pentru $x \in \mathbb{J}_t \subseteq D$, variabilă independentă din domeniul de definiţie al soluţiei, se caută $t = t(x)$ funcţie necunoscută, soluţie pentru ecuaţia $(*_B)$. Se observă că ecuaţia $(*_B)$ este ecuaţie Bernoulli în necunoscuta $t(x)$, cu $\alpha = 3$ şi

$$\begin{cases} a : \mathbb{J} \to \mathbb{R}, a(x) = \frac{1}{2x}, \\ b : \mathbb{J} \to \mathbb{R}, b(t) = -\frac{\sin x}{2x}. \end{cases}$$

$\mathbb{J}$ este un interval ce nu conţine $x = 0$, adică $\mathbb{J} \subseteq \left]-\infty, 0\right[$ sau $\mathbb{J} \subseteq \left]0, +\infty\right[$. Pentru a aduce ecuaţia $(*_B)$ la o forma similară cu cea a uneia diferenţiale liniare intr-o necunoscută $y = y(x)$, se înmulţeşte $(*_B)$ cu $t^{-3}(x)$, $\forall t \in \mathbb{J}_t$ a.î. ($x \neq 0$ şi $t(x) \neq 0$) (pentru ca termenul ce conţine $b(x)$ să nu mai conţină şi $t(x)$). Se obţine

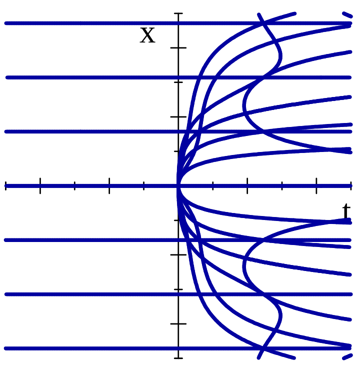
$t^{-3}(x)\, t'(x) = \frac{1}{2x} t^{-2}(x) - \frac{\sin x}{2x}, \forall t \in \mathbb{J}_t$ a.î. ($x \neq 0$ şi $t(x) \neq 0$).

Se face schimbarea de funcţie necunoscută

$$\begin{cases} y(x) = t^{-2}(x), \forall t \in \mathbb{J}_t \Big| \frac{d}{dt}(\cdot) \\ y'(x) = -2t^{-3}(x)\, t'(x), \forall t \in \mathbb{J}_t. \end{cases}$$

Se înlocuieşte t şi t' şi se obţine o ecuaţie diferenţială liniară în necunoscuta $y(x)$,

$\frac{-1}{2}y'(x) = \frac{1}{2x}y(x) - \frac{\sin x}{2x}, \forall t \in \mathbb{J}_t$ a.î. $(x \neq 0$ şi $t(x) \neq 0)$.
$(*_{LN1})\ y'(x) = \frac{-1}{x}y(x) + \frac{\sin x}{x}, \forall t \in \mathbb{J}_t$ a.î. $(x \neq 0$ şi $t(x) \neq 0)$.
Se observă că ecuaţia $(*_{LN1})$ este ecuaţie diferenţială liniară de ordin întâi neomogenă, cu
$$\begin{cases} a_1 : \mathbb{J} \to \mathbb{R}, a_1(x) = \frac{-1}{x}, \\ b_1 : \mathbb{J} \to \mathbb{R}, b_1(x) = \frac{\sin x}{x}. \end{cases}$$
Ecuaţia $(*_{LN1})$ se poate rezolva prin una din cele două metode descrise în Exerciţiul 1 (Metoda variaţiei constantelor sau Metoda factorului integrant). La acest exerciţiu se va utiliza direct formula (6) pentru ecuaţia în necunoscuta $y(x)$ şi Convenţia. Se obţine
$$y(x;c) = e^{\int\left(\frac{-1}{x}\right)dx}\left(c + \int \frac{\sin x}{x} e^{-\int\left(\frac{-1}{x}\right)dx} dx\right), \forall x \in \mathbb{J}_t \text{ şi } c \in \mathbb{R} \Rightarrow$$
$$y(x;c) = e^{-\ln|x|+0}\left(c + \int \frac{\sin x}{x} e^{\ln|x|+0} dx\right), \forall x \in \mathbb{J}_t \text{ şi } c \in \mathbb{R} \Rightarrow$$
$$y(x;c) = \frac{1}{|x|}\left(c + \int \frac{\sin x}{x}|x|\, dx\right), \forall x \in \mathbb{J}_t \text{ şi } c \in \mathbb{R}.$$
Ultima relaţie reprezintă soluţia generală a ecuaţiei $(*_{LN1})$, sub formă explicită. Revenim la substituţie $\Rightarrow$
$$(**)\ t^{-2}(x) = \frac{1}{|x|}\left(c + \int \frac{\sin x}{x}|x|\, dx\right), \forall x \in \mathbb{J}_t \text{ şi } c \in \mathbb{R} \Rightarrow$$
$$(**)\ t(x;c) = \left(\frac{1}{|x|}\left(c + \int \frac{\sin x}{x}|x|\, dx\right)\right)^{-2}, \forall x \in \mathbb{J}_t \text{ şi } c \in \mathbb{R} \Rightarrow$$
Ultima relaţie reprezintă soluţia generală a ecuaţiei $(*_B)$, sub formă explicită. Pentru $\mathbb{J}_t \subseteq]0, +\infty[$ $\Rightarrow$
$$t(x;c) = \left(\frac{1}{x}(c - \cos x)\right)^{-2}, \forall x \in \mathbb{J}_t \text{ şi } c \in \mathbb{R}.$$
Domeniul de definiţie a soluţiei, $\mathbb{J}_t$, depinde de constanta c (pentru fiecare c se obţine o soluţie cu un anumit domeniu de definiţie şi o anumită lege de asociere) ($\mathbb{J}_t$ se obţine impunând $x > 0$ şi $c - \cos x \neq 0$). Pentru $\mathbb{J}_t \subseteq]-\infty, 0[$,
$$t(x;c) = \left(\frac{1}{-x}(c + \cos x)\right)^{-2}, \forall x \in \mathbb{J}_t \text{ şi } c \in \mathbb{R} \Rightarrow$$
$$t(x;c) = \left(\frac{1}{x}(-c - \cos x)\right)^{-2}, \forall x \in \mathbb{J}_t \text{ şi } c \in \mathbb{R}.$$
Domeniul de definiţie a soluţiei, $\mathbb{J}_t$, depinde de constanta c (pentru fiecare c se obţine o soluţie cu un anumit domeniu de definiţie şi o anumită lege de asociere) ($\mathbb{J}_t$ se obţine impunând $x < 0$ şi $c - \cos x \neq 0$).
$$x = \left(\frac{1}{y}(c - \cos y)\right)^{-2}$$



○1.5.3. Ecuaţii diferenţiale Riccati

Forma generală a unei ecuaţii diferenţiale Riccati:

$$\boxed{x'(t) = a(t)\,x(t) + b(t)\,x^2(t) + c(t)} \tag{10}$$

sau

$$\boxed{\frac{dx}{dt} = ax + bx^2 + c} \tag{10'}$$

unde $a : \mathbb{I} \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $b : \mathbb{I} \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $c : \mathbb{I} \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sunt trei funcţii continue, b, c neidentic nule pe $\mathbb{I}$.

Rezolvare: Pentru $t \in \mathbb{I}_x \subseteq \mathbb{I}$, variabilă independentă din domeniul de definiţie al soluţiei, se caută $x = x(t)$ funcţie necunoscută, soluţie pentru ecuaţiile (10) sau (10′). Ecuaţia Riccati se poate rezolva numai dacă se cunoaşte sau se observă o soluţie particulară a ecuaţiei, notată $x_1(t)$. Se face schimbarea de funcţie necunoscută

$$y(t) = x(t) - x_1(t), \tag{11}$$

pe un interval corespunzător. Se înlocuieşte x şi x' obţinuţi din (11) în (10) sau (10′), se obţine o ecuaţie diferenţială Bernoulli cu $\alpha = 2$ în necunoscuta $y(t)$, se rezolvă şi se revine la substituţie. Se poate face şi schimbarea de funcţie necunoscută

$$\frac{1}{u(t)} = x(t) - x_1(t), \tag{12}$$

pe un interval corespunzător. Se înlocuieşte x şi x' obţinuţi din (12) în (10) sau (10′), se obţine o ecuaţie diferenţială Bernoulli liniară în necunoscuta $u(t)$, se rezolvă şi se revine la substituţie. Domeniul de definiţie a soluţiei, $\mathbb{I}_x$, depinde de constanta c (pentru fiecare c se obţine o soluţie cu un anumit domeniu de definiţie şi o anumită lege de asociere).

Exerciţiul 3. Să se determine soluţiile generale ale următoarelor ecuaţii diferenţiale Riccati

a) $x'(t) = x^2(t) - \dfrac{2}{t^2}, t \in \mathbb{I}$, observând că admite o anumită soluţie particulară ;

b) $x' = x^2 + x \operatorname{ctg} t - \sin^2 t, t \in \mathbb{I}$, ştiind că admite o soluţie particulară $x_1(t) = \sin t$;

c) $x' = x^2 - tx - t$, ştiind că admite o soluţie particulară de forma $x_1(t) = mt + n$ cu $m, n \in \mathbb{R}$ de determinat;

d) $x'(t) + x^2(t) - \dfrac{1}{2t^2} = 0$, ştiind că admite o soluţie particulară de forma $x_1(t) = \dfrac{m}{t}$ cu $m \in \mathbb{R}$ de determinat.

Rezolvare : a) A se vedea Curs.

b) Fie $x' = x^2 + x \operatorname{ctg} t - \sin^2 t, t \in \mathbb{I} \Rightarrow$

$$(*_R)\ \ x'(t) = (\operatorname{ctg} t)\,x(t) + x^2(t) - \sin^2 t, t \in \mathbb{I}.$$

Pentru $t \in \mathbb{I}_x \subseteq D$, variabilă independentă din domeniul de definiţie al soluţiei, se caută $x = x(t)$ funcţie necunoscută, soluţie pentru ecuaţia $(*_R)$. Se observă că ecuaţia $(*_R)$ este ecuaţie Riccati, cu

$$\begin{cases} a : \mathbb{I} \to \mathbb{R}, a(t) = \operatorname{ctg} t, \\ b : \mathbb{I} \to \mathbb{R}, b(t) = 1, \\ c : \mathbb{I} \to \mathbb{R}, c(t) = -\sin^2 t. \end{cases}$$

$\mathbb{I} \subset \mathbb{R}$ este un interval ce nu conţine t cu $\sin t = 0$, adică nu conţine $\{l\pi; l \in \mathbb{Z}\}$, adică $\mathbb{I} \subseteq\ ]-\pi, 0[$ sau $\mathbb{I} \subseteq\ ]0, \pi[$ ş.a.m.d. Se ştie din enunţ că

$$x_1 : \mathbb{I} \to \mathbb{R},\ x_1(t) = \sin t$$

este soluţie particulară pentru $(*_R)$ (este de clasă $\mathcal{C}_1$ pe $\mathbb{I}$ şi verifică identic $(*_R)$).

<u>modul 1.</u> Se face schimbarea de funcţie necunoscută $y(t) = x(t) - x_1(t)$, adică

$$\begin{cases} x(t) = y(t) + \sin t, \forall t \in \mathbb{I} \mid \frac{d}{dt}(\cdot) \\ x'(t) = y'(t) + \cos t, \forall t \in \mathbb{I} \end{cases}$$

Se înlocuieşte x şi x' obţinuţi în $(*_R) \Rightarrow$

$y'(t) + \cos t = (\operatorname{ctg} t)(y(t) + \sin t) + y^2(t) + 2y(t)\sin t + \sin^2 t - \sin^2 t, \forall t \in \mathbb{I} \Rightarrow$
$(*_B)\ \ y'(t) = (\operatorname{ctg} t + 2\sin t)\, y(t) + y^2(t), \forall t \in \mathbb{I}.$
Se observă că ecuaţia $(*_B)$ este ecuaţie Bernoulli, în necunoscuta $y(t)$, cu $\alpha = 2$ şi

$$\begin{cases} a_1 : \mathbb{I} \to \mathbb{R}, a(t) = \operatorname{ctg} t + 2\sin t, \\ b_1 : \mathbb{I} \to \mathbb{R}, b(t) = 1. \end{cases}$$

<u>modul 1.1.</u> Pentru a aduce ecuaţia $(*_B)$ la o forma similară cu cea a uneia diferenţiale liniare intr-o necunoscută $u = u(t)$, se înmulţeşte $(*_B)$ cu $y^{-2}(t)$, $\forall t \in \mathbb{I}_x$ a.î. $(t \notin \{l\pi; l \in \mathbb{Z}\}$ şi $y(t) \neq 0)$ (pentru ca termenul ce conţine $b_1(t)$ să nu mai conţină şi $y(t)$). Se obţine

$y^{-2}(t)\, y'(t) = (\operatorname{ctg} t + 2\sin t)\, y^{-1}(t) + 1, \forall t \in \mathbb{I}_x$ a.î. $(t \notin \{l\pi; l \in \mathbb{Z}\}$ şi $y(t) \neq 0)$.

Se face schimbarea de funcţie necunoscută

$$\begin{cases} u(t) = y^{-1}(t), \forall t \in \mathbb{I}_x \Big| \frac{d}{dt}(\cdot) \\ u'(t) = -y^{-2}(t)\, y'(t), \forall t \in \mathbb{I}_x. \end{cases}$$

Se înlocuieşte y şi y' şi se obţine o ecuaţie diferenţială liniară în necunoscuta $u(t)$,
$-u'(t) = (\operatorname{ctg} t + 2\sin t)\, u(t) + 1, \forall t \in \mathbb{I}_x \Rightarrow$
$(*_{LN1})\ \ u'(t) = -(\operatorname{ctg} t + 2\sin t)\, u(t) - 1, \forall t \in \mathbb{I}_x.$

<u>modul 1.1′.</u> O variantă de lucru este înlocuirea directă a substituţiei. Adică se face schimbarea de funcţie necunoscută

$$\begin{cases} u(t) = y^{-1}(t), \forall t \in \mathbb{I}_x \text{ a.î. } (t \neq 0, y(t) \gneqq 0) \\ \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} y(t) = u^{-1}(t), \forall t \in \mathbb{I}_x \text{ a.î. } (t \neq 0, y(t) \gneqq 0) \\ y'(t) = -u^{-2}(t)\, u'(t) \end{cases}$$

Se înlocuieşte y şi y' în $(*_B)$ şi se obţine o ecuaţie diferenţială liniară în necunoscuta $y(t)$,

$-u^{-2}(t)\, u'(t) = (\operatorname{ctg} t + 2\sin t)\, u^{-1}(t) + \left(u^{-1}(t)\right)^2, \forall t \in \mathbb{I}_x$ a.î. $(t \neq 0, y(t) \gneqq 0)\Big| \cdot \left(-u^2(t)\right) \Rightarrow$
$(*_{LN1})\ \ u'(t) = -(\operatorname{ctg} t + 2\sin t)\, u(t) - 1, \forall t \in \mathbb{I}_x$ a.î. $(t \neq 0$ şi $y(t) \gneqq 0)$.

În ambele variante se observă că ecuaţia $(*_{LN1})$ este ecuaţie diferenţială liniară de ordin întâi neomogenă, cu

$$\begin{cases} a_2 : \mathbb{I} \to \mathbb{R}, a_2(t) = -(\operatorname{ctg} t + 2\sin t), \\ b_2 : \mathbb{I} \to \mathbb{R}, b_2(t) = -1. \end{cases}$$

Ecuaţia $(*_{LN1})$ se poate rezolva prin una din cele două metode descrise în Exerciţiul 1 (Metoda variaţiei constantelor sau Metoda factorului integrant). La acest exerciţiu se va utiliza direct formula (6) pentru ecuaţia în necunoscuta $u(t)$ şi Convenţia. Se obţine

$$u(t;c) = e^{\int -(\operatorname{ctg} t + 2\sin t)dt}\left[c + \int (-1)\, e^{-\int -(\operatorname{ctg} t + 2\sin t)dt} dt\right], \forall t \in \mathbb{I}_x \text{ şi } c \in \mathbb{R} \Rightarrow$$

$$u(t;c) = e^{-\ln|\sin t| + 2(\cos t) + 0}\left[c + \int (-1)\, e^{\ln|\sin t| - 2(\cos t) + 0} dt\right], \forall t \in \mathbb{I}_x \text{ şi } c \in \mathbb{R} \Rightarrow$$

$$u(t;c) = \frac{1}{|\sin t|} e^{2\cos t}\left(c - \int |\sin t|\, e^{-2\cos t} dt\right), \forall t \in \mathbb{I}_x \text{ şi } c \in \mathbb{R}.$$

Ultima relaţie reprezintă soluţia generală a ecuaţiei $(*_{LN1})$, sub formă explicită. Integrala $\int |\sin t|\, e^{-2\cos t} dt$ există, şi este exprimabilă cu funcţii elementare. Fiind în raport cu variabila independentă t iar soluţia ecuaţiei diferenţiale liniare $(*_{LN1})$ fiind găsită drept funcţia $u(t)$ (explicit în raport cu variabilaindependentă t), se poate conveni sa nu se exprime integrala. Se revine la substituţie $\Rightarrow$

$$y^{-1}(t) = \frac{1}{|\sin t|} e^{2\cos t}\left(c - \int |\sin t|\, e^{-2\cos t} dt\right), \forall t \in \mathbb{I}_x \text{ şi } c \in \mathbb{R}.$$

Ultima relaţie reprezintă soluţia generală a ecuaţiei $(*_B)$, sub formă implicită. Se revine la substituţie $\Rightarrow$

$$[x(t) - \sin t]^{-1} = \frac{1}{|\sin t|} e^{2\cos t} \left(c - \int |\sin t| \, e^{-2\cos t} dt \right), \forall t \in \mathbb{I}_x \text{ şi } c \in \mathbb{R}.$$

Ultima relaţie reprezintă soluţia generală a ecuaţiiei $(*_R)$, sub formă implicită. Se explicitează $\Rightarrow$

$$x(t) = \sin t + \left[\frac{1}{|\sin t|} e^{2\cos t} \left(c - \int |\sin t| \, e^{-2\cos t} dt \right) \right]^{-1}, \forall t \in \mathbb{I}_x \text{ şi } c \in \mathbb{R}.$$

Domeniul de definiţie a soluţiei, $\mathbb{I}_x$, depinde de constanta c (pentru fiecare c se obţine o soluţie cu un anumit domeniu de definiţie şi o anumită lege de asociere) ($\mathbb{I}_x$ se obţine impunând $t \notin \{l\pi; l \in \mathbb{Z}\}$ şi $c - \int |\sin t| \, e^{-2\cos t} dt \neq 0$).

<u>modul 2.</u> Se face direct schimbarea de funcţie necunoscută $u^{-1}(t) = x(t) - x_1(t)$, adică

$$\begin{cases} x(t) = \dfrac{1}{u(t)} + \sin t, \forall t \in \mathbb{I}_x \Big| \frac{d}{dt}(\cdot) \\ x'(t) = \dfrac{-1}{u^2(t)} u'(t) + \cos t, \forall t \in \mathbb{I}_x \end{cases}$$

Se înlocuieşte x şi x' obţinuţi în $(*_R) \Rightarrow$

$$\frac{-1}{u^2(t)} u'(t) + \cos t = (\operatorname{ctg} t) \left(\frac{1}{u(t)} + \sin t \right) + \left(\frac{1}{u(t)} + \sin t \right)^2 - \sin^2 t, \forall t \in \mathbb{I}_x \Rightarrow$$

$(*_{LN1})$ $u'(t) = -(\operatorname{ctg} t + 2\sin t) u(t) - 1, \forall t \in \mathbb{I}_x$ a.î. şi $u(t) \neq 0$..

S.a obţinut exact ecuaţia diferenţială liniară de la modul 1, care se rezlovă în continuare ca la modul 1.

c) Fie $x' = x^2 - tx - t, t \in \mathbb{I} \Rightarrow$

$(*_R)$ $x'(t) = -tx(t) + x^2(t) - t, t \in \mathbb{I}$.

Pentru $t \in \mathbb{I}_x \subseteq D$, variabilă independentă din domeniul de definiţie al soluţiei, se caută $x = x(t)$ funcţie necunoscută, soluţie pentru ecuaţia $(*_R)$. Se observă că ecuaţia $(*_R)$ este ecuaţie Riccati, cu

$$\begin{cases} a : \mathbb{I} \to \mathbb{R}, a(t) = -t, \\ b : \mathbb{I} \to \mathbb{R}, b(t) = 1, \\ c : \mathbb{I} \to \mathbb{R}, c(t) = -t. \end{cases}$$

$\mathbb{I}$ este un interval $\mathbb{I} \subseteq \mathbb{R}$.

Se impune ca $x_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x_1(t) = mt + n$ să fie soluţie particulară pentru $(*_R)$. Este de clasă $\mathcal{C}_1$ pe $\mathbb{I}$. Se impune să verifice identic $(*_R) \Rightarrow$

$$m = -t(mt + n) + (mt + n)^2 - t, \forall t \in \mathbb{R}.$$

Se identifică coeficienţii puterilor lui $t \Rightarrow$

$$\begin{cases} -m + m^2 = 0 \\ -n + 2mn - 1 = 0 \\ n^2 = m. \end{cases}$$

Se obţine $(m, n) = (1, 1)$, adică soluţia particulară pentru $(*_R)$ de forma impusă este

$x_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x_1(t) = t + 1$

<u>modul 1.</u> Se face schimbarea de funcţie necunoscută $y(t) = x(t) - x_1(t)$, adică

$$\begin{cases} x(t) = y(t) + (t + 1), \forall t \in \mathbb{R} | \frac{d}{dt}(\cdot) \\ x'(t) = y'(t) + 1, \forall t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Se înlocuieşte x şi x' obţinuţi în $(*_R) \Rightarrow$

$$y'(t) + 1 = -t[y(t) + (t + 1)] + [y(t) + (t + 1)]^2 - t, \forall t \in \mathbb{R} \Rightarrow$$

$(*_B)$ $y'(t) = (t + 2) y(t) + y^2(t), \forall t \in \mathbb{R}$.

Se observă că ecuaţia $(*_B)$ este ecuaţie Bernoulli, în necunoscuta $y(t)$, cu $\alpha = 2$ şi

$$\begin{cases} a_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, a(t) = t + 2, \\ b_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, b(t) = 1. \end{cases}$$

Pentru a aduce ecuaţia $(*_B)$ la o formă similară cu cea a uneia diferenţiale liniare intr-o necunoscută $u = u(t)$, se înmulţeşte $(*_B)$ cu $y^{-2}(t)$, $\forall t \in \mathbb{I}_x$ a.î. $(t \neq 0$ şi $y(t) \neq 0)$ (pentru ca termenul ce conţine $b_1(t)$ să nu mai conţină şi $y(t)$). Se obţine

$$y^{-2}(t)\, y'(t) = (t+2)\, y^{-1}(t) + 1, \forall t \in \mathbb{I}_x \text{ a.î. } (t \neq 0 \text{ şi } y(t) \neq 0).$$

Se face schimbarea de funcţie necunoscută

$$\begin{cases} u(t) = y^{-1}(t), \forall t \in \mathbb{I}_x \Big| \frac{d}{dt}(\cdot) \\ u'(t) = -y^{-2}(t)\, y'(t), \forall t \in \mathbb{I}_x. \end{cases}$$

Se înlocuieşte y şi y' şi se obţine o ecuaţie diferenţială liniară în necunoscuta $u(t)$,

$$-u'(t) = (t+2)\, u(t) + 1, \forall t \in \mathbb{I}_x \text{ a.î. } (t \neq 0 \text{ şi } y(t) \neq 0) \Rightarrow$$

$$(*_{LN1})\ u'(t) = -(t+2)\, u(t) - 1, \forall t \in \mathbb{I}_x \text{ a.î. } (t \neq 0 \text{ şi } y(t) \neq 0).$$

Se observă că ecuaţia $(*_{LN1})$ este ecuaţie diferenţială liniară de ordin întâi neomogenă, cu

$$\begin{cases} a_2 : \mathbb{I} \to \mathbb{R}, a_2(t) = -(t+2), \\ b_2 : \mathbb{I} \to \mathbb{R}, b_2(t) = -1. \end{cases}$$

Ecuaţia $(*_{LN1})$ se poate rezolva prin una din cele două metode descrise în Exerciţiul 1 (Metoda variaţiei constantelor sau Metoda factorului integrant). La acest exerciţiu se va utiliza direct formula (6) pentru ecuaţia în necunoscuta $u(t)$ şi Convenţia. Se obţine :

$$u(t;c) = e^{\int -(t+2)dt} \left(c + \int (-1)\, e^{-\int -(t+2)dt} dt \right), \forall t \in \mathbb{I}_x \text{ şi } c \in \mathbb{R} \Rightarrow$$

$$u(t;c) = e^{-\left(\frac{t^2}{2}+2t\right)+0} \left(c + \int (-1)\, e^{\left(\frac{t^2}{2}+2t\right)+0} dt \right), \forall t \in \mathbb{I}_x \text{ şi } c \in \mathbb{R} \Rightarrow$$

$$u(t;c) = e^{-\left(\frac{t^2}{2}+2t\right)} \left(c - \int e^{\left(\frac{t^2}{2}+2t\right)} dt \right), \forall t \in \mathbb{I}_x \text{ şi } c \in \mathbb{R}.$$

Ultima relaţie reprezintă soluţia generală a ecuaţiei $(*_{LN1})$, sub formă explicită. Integrala $\int e^{\left(\frac{t^2}{2}+2t\right)} dt$ există, dar nu este exprimabilă cu funcţii elementare. Fiind în raport cu variabila independentă t iar soluţia ecuaţiei diferenţiale liniare $(*_{LN1})$ fiind găsită drept funcţia $u(t)$ (explicit în raport cu variabila independentă t), se poate conveni sa nu se exprime integrala. Se revine la substituţie $\Rightarrow$

$$y^{-1}(t) = e^{-\left(\frac{t^2}{2}+2t\right)} \left(c - \int e^{\left(\frac{t^2}{2}+2t\right)} dt \right), \forall t \in \mathbb{I}_x \text{ şi } c \in \mathbb{R}.$$

Ultima relaţie reprezintă soluţia generală a ecuaţiei $(*_B)$, sub formă implicită. Se revine la substituţie

$$[x(t) - (t+1)]^{-1} = e^{-\left(\frac{t^2}{2}+2t\right)} \left(c - \int e^{\left(\frac{t^2}{2}+2t\right)} dt \right), \forall t \in \mathbb{I}_x \text{ şi } c \in \mathbb{R}.$$

Ultima relaţie reprezintă soluţia generală a ecuaţiei $(*_R)$, sub formă implicită. Se explicitează$\Rightarrow$

$$x(t;c) = (t+1) + \left(e^{-\left(\frac{t^2}{2}+2t\right)} \left(c - \int e^{\left(\frac{t^2}{2}+2t\right)} dt \right) \right)^{-1}, \forall t \in \mathbb{I}_x \text{ şi } c \in \mathbb{R}.$$

Domeniul de definiţie a soluţiei, $\mathbb{I}_x$, depinde de constanta c (pentru fiecare c se obţine o soluţie cu un anumit domeniu de definiţie şi o anumită lege de asociere) ($\mathbb{I}_x$ se obţine impunând $c - \int e^{\left(\frac{t^2}{2}+2t\right)} dt \neq 0$).

<u>modul 2.</u> Facem direct schimbarea de funcţie necunoscută $u^{-1}(t) = x(t) - x_1(t)$, adică

$$\begin{cases} x(t) = \frac{1}{u(t)} + (t+1), \forall t \in \mathbb{I}_x \Big| \frac{d}{dt}(\cdot) \\ x'(t) = \frac{-1}{u(t)} u'(t) + 1, \forall t \in \mathbb{I}_x \end{cases}$$

Se înlocuieşte x şi x' obţinuţi în $(*_R) \Rightarrow$

$$\frac{-1}{u(t)} u'(t) + 1 = -t\left(\frac{1}{u(t)} + t + 1 \right) + \left(\frac{1}{u(t)} + t + 1 \right)^2 - t, \forall t \in \mathbb{I}_x \Rightarrow$$

$(*_{LN1})$ $u'(t) = -(t+2)\,u(t) - 1, \forall t \in \mathbb{I}_x$ a.î. $(t \neq 0$ şi $u(t) \neq 0)$.
Am obţinut exact ecuaţia diferenţială liniară de la modul 1, care se rezlovă în continuare ca la modul 1.

d) Fie $x'(t) + x^2(t) - \dfrac{1}{2t^2} = 0, t \in \mathbb{I} \Rightarrow$

$(*_R)$ $x'(t) = -x^2(t) + \dfrac{1}{2t^2}, t \in \mathbb{I}$.

Pentru $t \in \mathbb{I}_x \subseteq D$, variabilă independentă din domeniul de definiţie al soluţiei, se caută $x = x(t)$ funcţie necunoscută, soluţie pentru ecuaţia $(*_R)$. Se observă că ecuaţia $(*_R)$ este ecuaţie Riccati, cu

$$\begin{cases} a : \mathbb{I} \to \mathbb{R}, a(t) = 0, \\ b : \mathbb{I} \to \mathbb{R}, b(t) = -1, \\ c : \mathbb{I} \to \mathbb{R}, c(t) = \dfrac{1}{2t^2}. \end{cases}$$

$\mathbb{I}$ este un interval ce nu conţine $t = 0$, adică $\mathbb{I} \subseteq]-\infty, 0[$ sau $\mathbb{I} \subseteq]0, +\infty[$.

Se impune ca $x_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x_1(t) = \frac{m}{t}$ să fie soluţie particulară pentru $(*_R)$. Este de clasă $\mathcal{C}_1$ pe $\mathbb{I}$. Se impune să verifice identic $(*_R) \Rightarrow$

$\frac{-m}{t^2} = -\frac{m^2}{t^2} + \dfrac{1}{2t^2}, \forall t \in \mathbb{I} \Rightarrow$

$2m^2 - 2m + 1 = 0 \Rightarrow \left(m_1 = \frac{1+\sqrt{3}}{2} \text{ sau } m_2 = \frac{1-\sqrt{3}}{2}\right).$

Se obţine două soluţii particulare pentru $(*_R)$ de forma impusă, şi anume

$x_1 : \mathbb{I} \to \mathbb{R}, x_1(t) = \frac{1+\sqrt{3}}{2}\frac{1}{t}$ sau $x_2 : \mathbb{I} \to \mathbb{R}, x_2(t) = \frac{1-\sqrt{3}}{2}\frac{1}{t}$

Cu una dintre ele se parcurge modul 1 sau modul 2 analog cu c).