SEMINAR NR. 4, REZOLVĂRI
EDCO, AIA

1.7. Ecuaţii diferenţiale rezolvabile prin cuadraturi-Recapitulare

Exerciţiul 1. Să se integreze următoarele ecuaţii diferenţiale
a) $tx(t)\,x'(t) = x^2(t) + t^2, t \in \mathbb{I};$
b) $t \sin \dfrac{x(t)}{t} x'(t) + t = x \sin \dfrac{x(t)}{t}, t \in \mathbb{I};$
c) $\left(x + e^t \sin x\right) dt + \left(t + e^t \cos x\right) dx = 0, t \in \mathbb{I};$
d) $\left(e^t + x + \sin x\right) dt + \left(e^x + t + t\cos x\right) dx = 0, t \in \mathbb{I};$
e) $(\arcsin t + 2tx)\, dt + \left(t^2 + 1 + \operatorname{arctg} x\right) dx = 0, t \in \mathbb{I};$
f) $x' \sin x \cos x - \left(\cos t + \sin^2 x + \operatorname{tg}^2 t\right) = 0, t \in \mathbb{I};$
g) $x(1 + tx)\, dt - t dx = 0, t \in \mathbb{I};$
h) $x' + \dfrac{tx}{1 - t^2} = \arcsin t + t, t \in \mathbb{I};$
i) $x' + 2\dfrac{x}{t} = 2\dfrac{\sqrt{x}}{\cos^2 t}, t \in \mathbb{I};$
j) $x' = x^2 + 6x - 4t^2 + 11, t \in \mathbb{I};$
k) $x' - 2x \operatorname{tg} t + x^2 \sin^2 t = 0, t \in \mathbb{I};$
l) $2\left(t - t^2\sqrt{t}\right) x' + 2\sqrt{t}x^2 - x - t = 0, x_1(t) = at + b, t \in \mathbb{I};$
m) $\left(t^2 \ln x - t\right) x' = x, t \in \mathbb{I};$
n) $tx'^2 - tx' + a = 0, t \in \mathbb{I};$
o) $x^2(t + a)\, x' - x = 0, t \in \mathbb{I};$
p) $\left(4t^2 + 3tx + x^2\right) dt + \left(4x^2 + 3tx + t^2\right) dx = 0, t \in \mathbb{I};$
q) $3tdx = x\left(1 + t\sin t - 3x^3 \sin t\right) dt, t \in \mathbb{I};$
r) $\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{12t + 5x - 9}{-5t - 2x + 3}, t \in \mathbb{I};$
s) $tx' - x = t^2 - 2t + 3, t \in \mathbb{I};$
t) $2txx' = t^2 + 3x^2, t \in \mathbb{I};$
u) $\left(xe^{tx} - 4tx\right) dt + \left(te^{tx} - 2t^2\right) dx = 0, t \in \mathbb{I};$
v) $x' + 2tx = t^3, t \in \mathbb{I};$
w) $(t + x + 1)\, dt + (2t + 2x - 1)\, dx = 0, t \in \mathbb{I};$
x) $\left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{x}{t^2}\right) dt + \left(\dfrac{1}{t} - \dfrac{t}{x^2}\right) dx = 0, t \in \mathbb{I};$
z) $\left(t^2 x + x^2 + 2tx\right) dt + \left(t^2 + t\right)(t + 2x)\, dx = 0, t \in \mathbb{I}.$
Rezolvare:
Reguli de lucru:
<u>caz **I**.</u> Dacă ecuaţia diferenţială are în formă $x(t), x'(t)$ atunci:
$1°$. Se aduce ecuaţia la forma normală şi se încadrează, dacă este posibil, în una din formele generale
–din Seminar $1, 2$-rezolvări:
(1) (ec. cu variabile separabile)
(2) (ec. reductibilă la ec. cu variabile separabile)
(4) (ec. omogenă)
(6) (ec. reductibilă la ec. cu variabile separabile sau la ec. omogenă)
–din Seminar 3-rezolvări:
(1) (ec. liniară)

(8) (ec. Bernoulli)
(10) (ec. Riccati)

2°. Dacă nu se poate încadra în 1°, se foloseşte Convenţia din Seminar 1-rezolvări, se aduce la forma
$P(t,x)\,dt + Q(t,x)\,dx = 0$
şi se încadrează, dacă este posibil, în una din formele generale
–din Seminar 2-rezolvări:
($11'$) (ec. cu diferenţială exactă)
($11'$) (ec. cu factor integrant de forma a) sau b) reductibile la ec. cu diferenţială exactă)

3°. Dacă nu se poate încadra în $1^\circ, 2^\circ$ atunci se caută $t(x)$ sau se aplică metode legate de ecuaţii diferenţiale Clairaut, Lagrange sau chiar alte metode, neprezentate la acest curs-seminar.

<u>caz **II**.</u> Dacă ecuaţia diferenţială este sub forma
$P(t,x)\,dt + Q(t,x)\,dx = 0$
atunci:

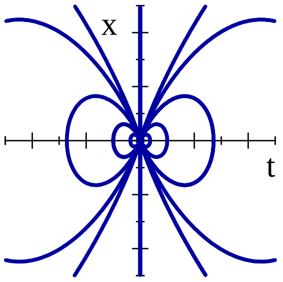
1°. Se încadrează, dacă este posibil, în una din formele generale
–din Seminar 2-rezolvări:
($11'$) (ec. cu diferenţială exactă)
($11'$) (ec. cu factor integrant de forma a) sau b) reductibile la ec. cu diferenţială exactă)

2°. Dacă nu se poate încadra în 1°, se foloseşte Convenţia din Seminar 1-rezolvări şi se aduce la o formă care să conţină $x(t), x'(t)$, apoi se aduce ecuaţia la forma normală şi se încadrează, dacă este posibil, în una din formele generale
–din Seminar $1, 2$-rezolvări:
(1) (ec. cu variabile separabile)
(2) (ec. reductibilă la ec. cu variabile separabile)
(4) (ec. omogenă)
(6) (ec. reductibilă la ec. cu variabile separabile sau la ec. omogenă)
–din Seminar 3-rezolvări:
(1) (ec. liniară)
(8) (ec. Bernoulli)
(10) (ec. Riccati)

3°. Dacă nu se poate încadra în $1^\circ, 2^\circ$ atunci se caută $t(x)$ sau se aplică metode legate de ecuaţii diferenţiale Clairaut, Lagrange sau chiar alte metode, neprezentate la acest curs-seminar.

a) Se determină soluţia generală a ecuaţiei
$(*)\ t x(t)\, x'(t) = x^2(t) + t^2, t \in \mathbb{I}.$
Pentru $t \in \mathbb{I}_x \subseteq \mathbb{I}$, variabilă independentă din domeniul de definiţie al soluţiei, se caută $x(t) = ?$, sau $t = t(x)$, sau o relaţie de dependenţă algebrico-funcţională între t şi x.
Este caz **I**.
<u>modul 1:</u> •Se observă că $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x(t) = 0$ nu este soluţie singulară pentru $(*)$. Se aduce $(*)$ la forma normală
$(*_O)\ x'(t) = \frac{x(t)}{t} + \frac{t}{x(t)}, \forall t \in \mathbb{I}_x$ a.î. $t \neq 0$ şi $x(t) \neq 0$.
•Este o ecuaţie diferenţială omogenă cu $f(z) = z + \dfrac{1}{z}$. Se face schimbarea de funcţie necunoscută $u(t) = \frac{x(t)}{t}$, adică
$$\begin{cases} x(t) = t u(t), \forall t \in \mathbb{I}_x \big| \frac{d}{dt}(\cdot) \\ x'(t) = u(t) + t u'(t). \end{cases}$$
Se înlocuieşte x şi x' şi se obţine o ecuaţie cu variabile separabile în necunoscuta $u(t)$,

$u(t) + tu'(t) = u(t) + \frac{1}{u(t)}, \forall t \in \mathbb{I}_x$ a.î. $t \neq 0$ şi $x(t) \neq 0 \Rightarrow$
$(*_{EVS})\ u(t)\, u'(t) = \frac{1}{t}, \forall t \in \mathbb{I}_x$ a.î. $t \neq 0$ şi $x(t) \neq 0 \,\big|\, \int (\cdot)\, dt \Rightarrow$
$\int u(t)\, u'(t)\, dt = \int \frac{1}{t} dt, \forall t \in \mathbb{I}_x$ a.î. $t \neq 0$ şi $x(t) \neq 0 \Rightarrow$
$\dfrac{u^2(t)}{2} = \ln |t| + c, \forall t \in \mathbb{I}_x$ a.î. $t \neq 0$ şi $x(t) \neq 0$ şi $c \in \mathbb{R}$.
Ultima relaţie reprezintă soluţia generală a ecuaţiei cu variabile separabile $(*_{EVS})$ în necunoscuta $u(t)$ sub formă implicită. Se revine la substituţie şi se obţine
$(**)\ \dfrac{x^2(t)}{2t^2} = -\ln |t| + c, \forall t \in \mathbb{I}_x$ a.î. $t \neq 0$ şi $x(t) \neq 0$ şi $c \in \mathbb{R}$.
Ultima relaţie reprezintă soluţia generală a ecuaţiei $(*_O)$ sub formă implicită.



modul 2: •Se observă că $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x(t) = 0$ nu este soluţie singulară pentru $(*)$. Se aduce $(*)$ la forma normală
$(*_B)\ x'(t) = \frac{1}{t} \cdot x(t) + t \cdot x^{-1}(t), \forall t \in \mathbb{I}_x$ a.î. $t \neq 0$ şi $x(t) \neq 0$.
•Este o ecuaţie diferenţială Bernoulli, cu $\alpha = -1$ şi
$$\begin{cases} a : \mathbb{I} \to \mathbb{R}, a(t) = \frac{1}{t}, \\ b : \mathbb{I} \to \mathbb{R}, b(t) = t. \end{cases}$$
$\mathbb{I}$ este un interval ce nu conţine $t = 0$, adică $\mathbb{I} \subseteq]-\infty, 0[$ sau $\mathbb{I} \subseteq]0, +\infty[$. Pentru a aduce ecuaţia $(*)$ la o forma similară cu cea a uneia diferenţiale liniare intr-o necunoscută $y = y(t)$, se înmulţeşte $(*_B)$ cu $x^1(t), \forall t \in \mathbb{I}_x$ a.î. ($t \neq 0$ şi $x(t) \neq 0$) (pentru ca termenul ce conţine $b(t)$ să nu mai conţină şi $x(t)$). Se obţine
$x(t)\, x'(t) = \frac{1}{t} x^2(t) + t, \forall t \in \mathbb{I}_x$ a.î. ($t \neq 0$ şi $x(t) \neq 0$).
Se face schimbarea de funcţie necunoscută
$$\begin{cases} y(t) = x^2(t), \forall t \in \mathbb{I}_x \big| \frac{d}{dt}(\cdot) \\ y'(t) = 2x(t)\, x'(t), \forall t \in \mathbb{I}_x. \end{cases}$$
Se înlocuiesc x şi x' şi se obţine o ecuaţie diferenţială liniară în necunoscuta $y(t)$,
$\frac{1}{2} y'(t) = \frac{1}{t} y(t) + t, \forall t \in \mathbb{I}_x$ a.î. ($t \neq 0$ şi $x(t) \neq 0$) $\Rightarrow$
$(*_{LN1})\ y'(t) = \frac{2}{t} y(t) + 2t, \forall t \in \mathbb{I}_x$ a.î. ($t \neq 0$ şi $x(t) \neq 0$).
Se observă că ecuaţia $(*_{LN1})$ este ecuaţie diferenţială liniară de ordin întâi neomogenă, cu
$$\begin{cases} a_1 : \mathbb{I} \to \mathbb{R}, a_1(t) = \frac{2}{t}, \\ b_1 : \mathbb{I} \to \mathbb{R}, b_1(t) = 2t. \end{cases}$$
Ecuaţia $(*_{LN1})$ se poate rezolva prin una din cele două metode descrise în Exerciţiul 1 din Seminar 3:
Metoda variaţiei constantelor detaliat-temă
Metoda variaţiei constantelor redusă la formula (6) pentru ecuaţia în necunoscuta $y(t)$ şi Convenţia.
Se obţine :
$y(t; c) = e^{\int \frac{2}{t} dt} \left(c + \int 2te^{-\int \frac{2}{t} dt} dt \right), \forall t \in \mathbb{I}_x$ şi $c \in \mathbb{R} \Rightarrow$
$y(t; c) = e^{2\ln|t|+0} \left(c + \int 2te^{-2\ln|t|+0} dt \right), \forall t \in \mathbb{I}_x$ şi $c \in \mathbb{R} \Rightarrow$
$y(t; c) = t^2 \left(c + \int 2t \frac{1}{t^2} dt \right), \forall t \in \mathbb{I}_x$ şi $c \in \mathbb{R} \Rightarrow$

$y(t;c) = t^2 \left(c + \ln t^2\right), \forall t \in \mathbb{I}_x$ şi $c \in \mathbb{R}$.

Metoda factorului integrant : Ecuaţia $(*_{LN1})$ este reductibilă la o ecuaţie cu diferenţială exactă, folosind factorul integrant

$\mu(t) = e^{-\int \left(\frac{2}{t}\right)dt} = e^{-2\ln|t|+0} = \frac{1}{t^2}, \forall t \in \mathbb{I}$.

În calculul integralei nedefinite ce apare în formula anterioară se cosideră constanta 0, deoarece se utilizează un singur factor integrant.

Pentru $\forall t \in \mathbb{I}$ se înmulţeşte ecuaţia $(*_{LN1})$ cu $\mu(t) = \frac{1}{t^2} \Rightarrow$

$y'(t) \cdot \frac{1}{t^2} = \frac{2}{t} y(t) \cdot \frac{1}{t^2} + 2t \cdot \frac{1}{t^2}, \forall t \in \mathbb{I}_x$ a.î. $(t \neq 0$ şi $x(t) \neq 0)$

Se trec termenii ce conţin y, y' în membrul stâng$\Rightarrow$

$y'(t) \cdot \frac{1}{t^2} + y(t) \frac{-2}{t^3} = \frac{2}{t}, \forall t \in \mathbb{I}_x \Rightarrow$

$\frac{d}{dt}\left(y(t) \cdot \frac{1}{t^2}\right) = \frac{2}{t}, \forall t \in \mathbb{I}_x \Big| \int (\cdot)\, dt \Rightarrow$

$y(t) \cdot \frac{1}{t^2} = 2\ln|t| + c, \forall t \in \mathbb{I}_x \Rightarrow$

$(**)\, y(t;c) = t^2 (2\ln|t| + c), \forall t \in \mathbb{I}_x$ şi $c \in \mathbb{R}$. $\square$

Ultima relaţie reprezintă soluţia generală a ecuaţiei $(*_{LN1})$ sub formă explicită. Se revine la substituţie $\Rightarrow$

$x^2(t;c) = t^2 (2\ln|t| + c), \forall t \in \mathbb{I}_x$ şi $c \in \mathbb{R}$.

Ultima relaţie reprezintă soluţia generală a ecuaţiei $(*_B)$, sub formă implicită. Atunci

$x^2(t;c) = t^2 \left(c + \ln t^2\right), \forall t \in \mathbb{I}_x$ şi $c \in \mathbb{R}$.

Domeniul de definiţie a soluţiei, $\mathbb{I}_x$, depinde de constanta c (pentru fiecare c se obţine o soluţie cu un anumit domeniu de definiţie şi o anumită lege de asociere) ($\mathbb{I}_x$ se obţine impunând $t \neq 0$ şi $t^2 \left(c + \ln t^2\right) \neq 0$).

modul 3: (fără încadrare în tip) Direct în $(*)$, se face schimbarea de funcţie necunoscută

$$\begin{cases} y(t) = x^2(t), \forall t \in \mathbb{R} \Big| \frac{d}{dt}(\cdot) \\ y'(t) = 2x(t)\, x'(t), \forall t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Se înlocuieşte x şi x' şi se obţine o ecuaţie diferenţială liniară în necunoscuta $y(t)$,

$\frac{1}{2} y'(t) = \frac{1}{t} y(t) + t, \forall t \in \mathbb{I}_x$ a.î. $t \neq 0$.

Se continuă rezolvarea ca la modul 2.

Dacă ecuaţia nu s-ar fi putut încadra în nici una din situaţiile de la caz **I**, s-ar fi apelat la:

modul 4: Folosind Convenţiile 1 şi 2 din Seminarul 1 $(*) \Rightarrow$

$tx \frac{dx}{dt} = x^2 + t^2 \Rightarrow$

$\left(x^2 + t^2\right) dt + (-tx)\, dx = 0$.

Se caută $x(t) = ?$, sau $t(x) = ?$, sau o relaţie de dependenţa algebrică între t şi x (fără operatorii de derivare sau integrare), soluţie pentru ecuaţia $(*)$.

Se notează $\mathbb{D}$ domeniu simplu conex, $\mathbb{D} \subseteq \mathbb{R}^2$ şi

$$\begin{cases} P : \mathbb{D} \to \mathbb{R}, P(t,x) = x^2 + t^2 \\ Q : \mathbb{D} \to \mathbb{R}, Q(t,x) = -tx. \end{cases}$$

Etapa 1 : Se studiază dacă ecuaţia $(*)$ este cu diferenţială exactă.

$$\begin{cases} \frac{\partial P}{\partial x}(t,x) = 2x, \forall (t,x) \in \mathbb{D} \\ \frac{\partial Q}{\partial t}(t,x) = -x, \forall (t,x) \in \mathbb{D}. \end{cases}$$

Atunci

$\frac{\partial P}{\partial x}(t,x) - \frac{\partial Q}{\partial t}(t,x) = 3x, \forall (t,x) \in \mathbb{D}$,

adică nu se verifică (14) din Seminarul 2, adică ecuaţia $(*)$ nu este cu diferenţială exactă.

Etapa 1_1 : Se determină un factor integrant $\mu(t,x)$, dacă se găseşte sub una din formele de la Rezolvare a) sau b) din Seminarul 2.

Fie $\mathbb{D}_1$ un domeniu simplu conex, $\mathbb{D}_1 \subset \left\{(t,x) \in \mathbb{R}^2; -tx \neq 0\right\} \subset \mathbb{D}$. Cum
$\frac{1}{Q(t,x)}\left(\frac{\partial P}{\partial x}(t,x) - \frac{\partial Q}{\partial t}(t,x)\right) = -\frac{3}{t}$
depinde doar de t, nu şi de x, se caută $\mu = \mu(t)$ factor integrant a.î.
$\frac{\mu'(t)}{\mu(t)} = -\frac{3}{t}, \forall t \in \mathbb{I}_x$ a.î. $t \neq 0 \Big| \int(\cdot)\, dt \Rightarrow$
$\ln|\mu(t)| = -3\ln|t| + \ln k, \forall t \in \mathbb{I}_x$ a.î. $t \neq 0$ şi $k \in \mathbb{R}_+^* \Rightarrow$
$\mu(t) = \frac{c}{t^3}, \forall t \in \mathbb{I}_x$ a.î. $t \neq 0$ şi $c \in \mathbb{R}^*$.
Se alege un factor integrant, se alege $c = 1 \Rightarrow$
$\mu(t) = \frac{1}{t^3}, \forall t \in \mathbb{I}_x$ a.î. $t \neq 0$
Se înmulţeşte ecuaţia $(*)$ cu $\mu(t) = \frac{1}{t^3} \Rightarrow$
$\left(x^2 + t^2\right) dt + (-tx)\, dx = 0.$
$(*_1)$ $\left(\frac{x^2}{t^3} + \frac{1}{t}\right) dt + \left(-\frac{x}{t^2}\right) dx = 0, (t,x) \in \mathbb{D}_1.$
Din algoritmul de determinare a lui $\mu(t)$, ecuaţia $(*_1)$ este cu diferenţială exactă, adică
$\begin{cases} P_1 : \mathbb{D}_1 \to \mathbb{R}, P_1(t,x) = \frac{x^2}{t^3} + \frac{1}{t} \\ Q_1 : \mathbb{D}_1 \to \mathbb{R}, Q_1(t,x) = -\frac{x}{t^2} \end{cases}$
verifică (14) din Seminarul 2.
Etapa 2_1 : Se determină acea funcţie (există conform Etapei 1_1) $F_1 : \mathbb{D}_1 \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, de clasa $\mathcal{C}^2$ pe $\mathbb{D}_1$, din a cărei diferenţială să provină ecuaţia $(*_1)$, adică

$$\begin{cases} (12.1)\ \dfrac{\partial F_1}{\partial t}(t,x) = \dfrac{x^2}{t^3} + \dfrac{1}{t}, \forall (t,x) \in \mathbb{D}_1, \\ (12.2)\ \dfrac{\partial F_1}{\partial x}(t,x) = -\dfrac{x}{t^2}, \forall (t,x) \in \mathbb{D}_1. \end{cases}$$

Sistemul anterior este un sistem de ecuaţii cu derivate parţiale în necunoscuta $F_1(t,x)$. Se rezolvă.
modul 12.1.
$(12.1)| \int(\cdot)\, dt \Rightarrow \int \frac{\partial F_1}{\partial t}(t,x)\, dt = \int \left(\frac{x^2}{t^3} + \frac{1}{t}\right) dt \Rightarrow$
$F_1(t,x) = x^2 \frac{t^{-2}}{-2} + \ln|t| + \varphi(x), \forall (t,x) \in \mathbb{D}_1,$
unde $\varphi_1(x)$ este o funcţie necunoscută, constantă în raport cu variabila de integrare t. Se determină φ_1 folosind şi (12.2). Se derivează ultima relaţie în raport cu $x \Rightarrow$
$\frac{\partial F_1}{\partial x}(t,x) = 2x\frac{t^{-2}}{-2} + \frac{d\varphi_1}{dx}(x), \forall (t,x) \in \mathbb{D}_1.$
Se înlocuieşte (12.2) $\Rightarrow$
$-\frac{x}{t^2} = 2x\frac{t^{-2}}{-2} + \frac{d\varphi_1}{dx}(x), \forall (t,x) \in \mathbb{D}_1 \Rightarrow$
$\frac{d\varphi_1}{dx}(x) = 0 \Rightarrow \varphi_1(x) = c_1, c_1 \in \mathbb{R}.$
Se înlocuieşte în expresia lui $F_1 \Rightarrow$
$F_1(t,x) = x^2\frac{t^{-2}}{-2} + \ln|t| + c_1, \forall (t,x) \in \mathbb{D}_1$ şi $c_1 \in \mathbb{R}$.
modul 12.2.
$(12.2)| \int(\cdot)\, dx \Rightarrow \int \frac{\partial F_1}{\partial x}(t,x)\, dx = \int \left(-\frac{x}{t^2}\right) dx \Rightarrow$
$F_1(t,x) = -\frac{1}{t^2} \cdot \frac{x^2}{2} + \psi_1(t), \forall (t,x) \in \mathbb{D}_1,$
unde $\psi_1(t)$ este o funcţie necunoscută, constantă în raport cu variabila de integrare x. Se determină ψ_1 folosind şi (2.1). Se derivează ultima relaţie în raport cu $t \Rightarrow$
$\frac{\partial F_1}{\partial t}(t,x) = -\frac{-2}{t^3} \cdot \frac{x^2}{2} + \frac{d\psi_1}{dt}(t), \forall (t,x) \in \mathbb{D}_1.$
Se înlocuieşte (12.1) $\Rightarrow$
$\frac{x^2}{t^3} + \frac{1}{t} = -\frac{-2}{t^3} \cdot \frac{x^2}{2} + \frac{d\psi_1}{dt}(t), \forall (t,x) \in \mathbb{D}_1 \Rightarrow$
$\frac{d\psi_1}{dt}(t) = \frac{1}{t} \Rightarrow \varphi(t) = \ln|t| + c_2, c_2 \in \mathbb{R}.$
Se înlocuieşte în expresia lui $F_1 \Rightarrow$

$F_1(t,x) = -\frac{1}{t^2} \cdot \frac{x^2}{2} + \ln|t| + c_2, \forall (t,x) \in \mathbb{D}_1$ şi $c_2 \in \mathbb{R}$.
Etapa 3_1 : Cu F_1 determinată la Etapa 2_1, se obţine că soluţia generală a ecuaţiei $(*_1)$ este data sub forma implicită de

$F_1(t,x) = c_3, c_3 \in \mathbb{R}$,

adică, notând $c = c_3 - c_{1,2}$, de

$(**)\ -\frac{x^2}{2t^2} + \ln|t| = c, \forall (t,x) \in \mathbb{D}_1$ şi $c \in \mathbb{R}$.

Ultima relaţie dă şi soluţia ecuaţiei $(*)$ sub formă implicită pe $\mathbb{D}_1 \subset \mathbb{D}$. Local, s-ar putea explicita $x : \mathbb{I}_x \to \mathbb{R}$,unde domeniul de definiţie a soluţiei, $\mathbb{I}_x$, depinde de constanta c (pentru fiecare c se obţine o soluţie cu un anumit domeniu de definiţie şi o anumită lege de asociere).
b)-z) analog
A se vedea şi Exerciţiul **1e)** din Seminarul 3 pentru a observa un alt mod de a aborda o ecuaţie diferenţială (căutând $t = t(x)$ ţinând cont de Convenţiile din Seminarul 1 şi de $t'(x) = \dfrac{1}{x'(t)}$ în ipoteze de inversare locală).

2. PROBLEME CAUCHY ŞI PROBLEME LA LIMITĂ PENTRU ECUAŢII DIFERENŢIALE DE ORDINUL 1

(cu rezolvare exactă)

Exerciţiul 1. Să se determine soluţiile pentru
a) problema Cauchy $\begin{cases} (1+e^t)\, x(t)\, x'(t) = e^t \\ x(0) = 1; \end{cases}$
Rezolvare : etapa1 : Se determină soluţia generală a ecuaţiei

$(*)\ \left(1+e^t\right) x(t)\, x'(t) = e^t, t \in \mathbb{I}$.

Pentru $t \in \mathbb{I}_x \subseteq \mathbb{I}$, variabilă independentă din domeniul de definiţie al soluţiei, se caută $x = x(t)$ funcţie necunoscută, soluţie pentru ecuaţia $(*)$. Se observă că este EVS :

$$(*) \Rightarrow x(t)\, x'(t) = \frac{e^t}{1+e^t}, \forall t \in \mathbb{I}_x \ \Big|\ \int (\cdot)\, dt \Rightarrow \int x(t)\, x'(t)\, dt = \int \frac{e^t}{1+e^t} dt, \forall t \in \mathbb{I}_x \Rightarrow$$

$$(**)\ \frac{x^2(t)}{2} = \ln\left(1+e^t\right) + c, \forall t \in \mathbb{I}_x \text{ şi } c \in \mathbb{R}.$$

Ultima relaţie reprezintă soluţia generală a ecuaţiei $(*)$ sub formă implicită. De menţionat că $(*)$ nu are soluţii singulare. Deci $(**)$ reprezintă toate soluţiile pentru $(*)$. Soluţia generală a ecuaţiei $(*)$ este dată sub formă explicită, pentru fiecare $c \in \mathbb{R}$, de următoarele două familii de funcţii

$x : \mathbb{I}_x^1 \to \mathbb{R}, x(t) = \sqrt{2\left(\ln\left(1+e^t\right)+c\right)}; x : \mathbb{I}_x^2 \to \mathbb{R}, x(t) = -\sqrt{2\left(\ln\left(1+e^t\right)+c\right)}$,

unde domeniul de definiţie a soluţiei depinde de constanta c. Pentru fiecare $c \in \mathbb{R}$,

$\mathbb{I}_x^1 = \mathbb{I}_x^2 = \mathbb{I}_x = \left\{t \in \mathbb{R}; 2\left(\ln\left(1+e^t\right)+c\right) \geq 0\right\}$.

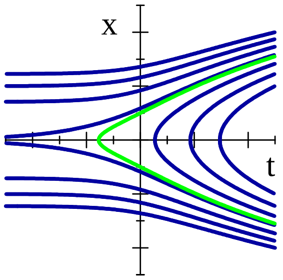
etapa 2 : Se determină acea soluţie particulară a ecuaţiei $(*)$ (dacă există, dacă e unică) ce verifică $CI : x(0) = 1$. Se înlocuieşte CI în $(**)$ şi se obţine $\frac{1}{2} = \ln\left(1+e^0\right) + c \Rightarrow c = \frac{1}{2} - \ln 2$.
Se înlocuieşte această constantă în $(**)$ şi se obţine

$$\frac{x^2(t)}{2} = \ln\left(1+e^t\right) + \tfrac{1}{2} - \ln 2, \forall t \in \mathbb{I}.$$

Ultima relaţie reprezintă soluţia particulară a ecuaţiei $(*)$ ce verifică $CI : x(0) = 1$, sub formă implicită(acea ramură cu $x(t) \geq 0$ din $x(0) = 1 \geq 0$). Soluţia pariculară a ecuaţiei $(*)$ este dată sub formă explicită de

$x : \mathbb{I} \to \mathbb{R}, x(t) = \sqrt{2\left(\ln\left(1+e^t\right) + \frac{1}{2} - \ln 2\right)}, \forall t \in \mathbb{I}$,

unde domeniul de definiţie a soluţiei, $\mathbb{I}_x = \mathbb{I}$ este un interval pe care $2\left(\ln\left(1+e^t\right) + \frac{1}{2} - \ln 2\right) \geq 0$.



b) problema Cauchy $\begin{cases} 1+x^2+txx'=0 \\ x(1)=0; \end{cases}$

Rezolvare: etapa1 : Se determină soluţia generală a ecuaţiei

$(*)\, 1+x^2+txx'=0.$

Pentru $t\in\mathbb{I}_x\subseteq\mathbb{I}$, variabilă independentă din domeniul de definiţie al soluţiei, se caută $x(t)=?$, x funcţie necunoscută, soluţie pentru ecuaţia $(*)$. Se observă că este EVS:

$$(*)\Rightarrow \frac{x(t)\,x'(t)}{1+x^2(t)}=\frac{-1}{t},\forall t\in\mathbb{I}_x,\text{ a.î. } t\neq 0\ \Big|\int(\cdot)\,dt\Rightarrow$$

$$\int\frac{x(t)\,x'(t)}{1+x^2(t)}dt=\int\frac{-1}{t}dt,\forall t\in\mathbb{I}_x,\text{ a.î. } t\neq 0\Rightarrow$$

$$\tfrac{1}{2}\ln\left|1+x^2(t)\right|=-\ln|t|+\ln k,\forall t\in\mathbb{I}_x,\text{ a.î. } t\neq 0 \text{ şi } k>0.$$

$$(**)\, 1+x^2(t)=\frac{c}{t^2},\forall t\in\mathbb{I}_x,\text{ a.î. } t\neq 0 \text{ şi } c\in\mathbb{R}_+^*.$$

Ultima relaţie reprezintă soluţia generală a ecuaţiei $(*)$ sub formă implicită. De menţionat că $(*)$ nu are soluţii singulare. Deci $(**)$ reprezintă toate soluţiile pentru $(*)$. Soluţia generală a ecuaţiei $(*)$ este dată sub formă explicită, pentru fiecare $c\in\mathbb{R}_+^*$, de următoarele două familii de funcţii

$$x:\mathbb{I}_x^1\to\mathbb{R}, x(t)=\sqrt{\frac{c}{t^2}-1}; x:\mathbb{I}_x^2\to\mathbb{R}, x(t)=-\sqrt{\frac{c}{t^2}-1},$$

unde domeniul de definiţie a soluţiei, $\mathbb{I}_x=\mathbb{I}_x^1=\mathbb{I}_x^2$ depinde de constanta c. Pentru fiecare $c\in\mathbb{R}$,

$$\mathbb{I}_x=\left\{t\in\mathbb{R};\tfrac{c}{t^2}-1\geq 0, t\neq 0\right\}.$$

etapa 2 : Se determină acea soluţie particulară a ecuaţiei $(*)$ (dacă există, dacă e unică) ce verifică $CI:\ x(1)=0$. Se înlocuieşte CI în $(**)$ şi se obţine $1+0^2=\frac{c}{1^2}\Rightarrow c=1$.

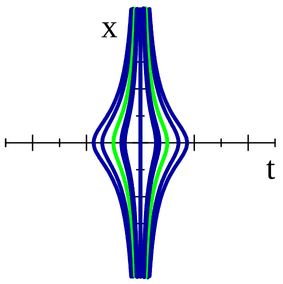
Se înlocuieşte această constantă în $(**)$ şi se obţine

$$1+x^2(t)=\frac{1}{t^2},\forall t\in\mathbb{I}.$$

Ultima relaţie reprezintă soluţia particulară a ecuaţiei $(*)$ ce verifică $CI:\ x(1)=0$, sub formă implicită. Soluţia pariculară a ecuaţiei $(*)$ este dată sub formă explicită de

$$x:\mathbb{I}\to\mathbb{R}, x(t)=+\sqrt{\frac{1}{t^2}-1}; x:\mathbb{I}\to\mathbb{R}, x(t)=-\sqrt{\frac{1}{t^2}-1},$$

unde domeniul de definiţie a soluţiei, $\mathbb{I}_x=\mathbb{I}\subseteq[-1,0[\cup]0,1]$ se obţine din $\frac{1}{t^2}-1\geq 0$.



c) problema la limită $\begin{cases} t^3 x'(t)\sin x(t) = 2 \\ \lim\limits_{t\to+\infty} x(t) = \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$

Rezolvare: c) etapa1 : Se determină soluţia generală a ecuaţiei

$(*)$ $t^3 x'(t)\sin x(t) = 2.$

Pentru $t \in \mathbb{I}_x \subseteq \mathbb{I}$, variabilă independentă din domeniul de definiţie al soluţiei, se caută $x(t) = ?$, x funcţie necunoscută, soluţie pentru ecuaţia $(*)$. Se observă că $(*) \Rightarrow$

$(\sin x(t))\, x'(t) = \dfrac{2}{t^3}, \forall t \in \mathbb{I}_x$, cu $t \neq 0 \Big| \int(\cdot)\,dt \Rightarrow \displaystyle\int (\sin x(t))\, x'(t)\,dt = \int \frac{2}{t^3}dt \Rightarrow$

$(**)$ $-\cos x(t) = -t^{-2} + c, \forall t \in \mathbb{I}_x$, cu $t \neq 0$ şi $c \in \mathbb{R}$.

Ultima relaţie reprezintă soluţia generală a ecuaţiei $(*)$ sub formă implicită. Soluţia generală a ecuaţiei $(*)$ este dată sub formă explicită, pentru fiecare $c \in \mathbb{R}$, de

$x : \mathbb{I}_x \to \mathbb{R}, x(t) = \arccos\left(t^{-2} - c\right), \forall t \in \mathbb{I}_x,$

unde domeniul de definiţie a soluţiei, $\mathbb{I}_x$ depinde de constanta c (pentru fiecare c se obţine o soluţie cu un anumit domeniu de definiţie şi o anumită lege de asociere) (se impune $t^{-2} - c \in [-1, 1]$ şi $t \neq 0$).

etapa 2 : Se determină acea soluţie particulară a ecuaţiei $(*)$ (dacă există, dacă este unică) ce verifică $CL : \lim\limits_{t\to\infty} x(t) = \dfrac{\pi}{2}$. Utilizăm CL în $(**)$ şi se obţine $-\cos\dfrac{\pi}{2} = -\lim\limits_{t\to+\infty} t^{-2} + c \Rightarrow c = 0.$

Se înlocuieşte această constantă în $(**)$ şi se obţine

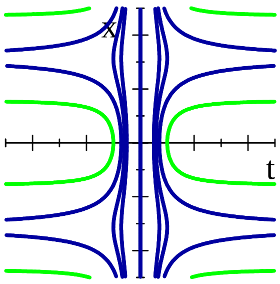
$-\cos x(t) = -t^{-2}, \forall t \in \mathbb{I}.$

Ultima relaţie reprezintă soluţia particulară a ecuaţiei $(*)$ ce verifică $CL : \lim\limits_{t\to\infty} x(t) = \dfrac{\pi}{2}$, sub formă implicită. Soluţia particulară a ecuaţiei $(*)$ este dată sub formă explicită de

$x : \mathbb{I} \to \mathbb{R}, x(t) = \arccos\left(t^{-2}\right), \forall t \in \mathbb{I},$

unde domeniul de definiţie a soluţiei, $\mathbb{I}_x = \mathbb{I} \subseteq [-1, 0[\cup]0, 1]$ se obţine din

$t^{-2} \in [-1, 1]$ şi $t \neq 0.$



Exerciţiul 2. Să se determine soluţia problemei Cauchy $\begin{cases} x(t)\left(e^{tx(t)} - 4t\right)dt + t\left(e^{tx(t)} - 2t\right)dx(t) = 0 \\ x(2) = 1 \end{cases}$

Rezolvare : Etapa 1 :Se determină soluţia generală a ecuaţiei

$(*)$ $x(t)\left(e^{tx(t)} - 4t\right)dt + t\left(e^{tx(t)} - 2t\right)dx(t) = 0, t \in \mathbb{I}.$

Pentru $t \in \mathbb{I}_x \subseteq \mathbb{I}$, variabilă independentă din domeniul de definiţie al soluţiei, se caută $x(t) = ?$, x funcţie necunoscută, soluţie pentru ecuaţia $(*)$.

Folosind Convenţiile 1 şi 2:

$(*) \Rightarrow (*')\; x\left(e^{tx} - 4t\right)dt + t\left(e^{tx} - 2t\right)dx = 0.$

Se notează $\mathbb{D}$ domeniu simplu conex, $\mathbb{D} \subseteq \mathbb{R}^2$ şi

$\begin{cases} P : \mathbb{D} \to \mathbb{R}, P(t,x) = x\left(e^{tx} - 4t\right) \\ Q : \mathbb{D} \to \mathbb{R}, Q(t,x) = t\left(e^{tx} - 2t\right). \end{cases}$

Etapa 1.1 : Se studiază dacă ecuaţia $(*)$ este cu diferenţială exactă.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial P}{\partial x}(t,x) = e^{tx} - 4t + xte^{tx}, \forall (t,x) \in \mathbb{D} \\ \dfrac{\partial Q}{\partial t}(t,x) = e^{tx} - 2t + t\left(e^{tx}x - 2\right), \forall (t,x) \in \mathbb{D}. \end{cases}$$

Atunci $\dfrac{\partial P}{\partial x}(t,x) - \dfrac{\partial Q}{\partial t}(t,x) = 0, \forall (t,x) \in \mathbb{D} \Rightarrow$ ecuaţia $(*)$ *poate fi* cu diferenţială exactă. Cum $\mathbb{D}$ este ales domeniu simplu conex$\Rightarrow$ ecuaţia $(*)$ este cu diferenţială exactă.

Etapa 1.2 : Se determină acea funcţie (există conform Etapei 1.1) $F : \mathbb{D} \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, de clasa $\mathcal{C}^2$ pe $\mathbb{D}$, din a cărei diferenţială să provină ecuaţia, adică

$$\begin{cases} (12.1)\ \dfrac{\partial F}{\partial t}(t,x) = x\left(e^{tx} - 4t\right), \forall (t,x) \in \mathbb{D}, \\ (12.2)\ \dfrac{\partial F}{\partial x}(t,x) = t\left(e^{tx} - 2t\right), \forall (t,x) \in \mathbb{D}. \end{cases}$$

Sistemul anterior este un sistem de ecuaţii cu derivate parţiale în necunoscuta $F(t,x)$. Îl rezolvăm.

modul 1. $(2.1) | \int (\cdot)\, dt \Rightarrow$

$$\int \frac{\partial F}{\partial t}(t,x)\, dt = \int x\left(e^{tx} - 4t\right) dt \Rightarrow F(t,x) = e^{tx} - 2xt^2 + \varphi(x), \forall (t,x) \in \mathbb{D},$$

unde $\varphi(x)$ este o funcţie necunoscută, constantă în raport cu variabila de integrare t. Se determină φ folosind şi (12.2) din sistem. Se derivează ultima relaţie în raport cu $x \Rightarrow$

$$\frac{\partial F}{\partial x}(t,x) = te^{tx} - 2t^2 + \frac{d\varphi}{dx}(x), \forall (t,x) \in \mathbb{D}.$$

Se înlocuieşte (2.2) $\Rightarrow$

$$t(e^{tx} - 2t) = te^{tx} - 2t^2 + \frac{d\varphi}{dx}(x), \forall (t,x) \in \mathbb{D} \Rightarrow \frac{d\varphi}{dx}(x) = 0 \Rightarrow \varphi(x) = c_1, c_1 \in \mathbb{R}.$$

Se înlocuieşte în expresia lui $F \Rightarrow$

$$F(t,x) = e^{tx} - 2xt^2 + c_1, \forall (t,x) \in \mathbb{D} \text{ şi } c_1 \in \mathbb{R}.$$

modul 2. $(2.2) | \int (\cdot)\, dx \Rightarrow$

$$\int \frac{\partial F}{\partial x}(t,x)\, dx = \int t(e^{tx} - 2t) dx \Rightarrow F(t,x) = e^{tx} - 2xt^2 + \psi(t), \forall (t,x) \in \mathbb{D},$$

unde $\psi(t)$ este o funcţie necunoscută, constantă în raport cu variabila de integrare x. Se determină ψ folosind şi (12.1) din sistem. Se derivează ultima relaţie în raport cu $t \Rightarrow$

$$\frac{\partial F}{\partial t}(t,x) = xe^{tx} - 4xt + \frac{d\psi}{dt}(t), \forall (t,x) \in \mathbb{D}.$$

Se înlocuieşte (2.1) $\Rightarrow$

$$x(e^{tx} - 4t) = xe^{tx} - 4xt + \frac{d\psi}{dt}(t), \forall (t,x) \in \mathbb{D} \Rightarrow \frac{d\psi}{dt}(t) = 0 \Rightarrow \psi(t) = c_2, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Se înlocuieşte în expresia lui $F \Rightarrow$

$$F(t,x) = e^{tx} - 2xt^2 + c_2, \forall (t,x) \in \mathbb{D} \text{ şi } c_2 \in \mathbb{R}$$

Etapa 1.3 : Cu F determinată la Etapa 2, se obţine că soluţia generala a ecuaţiei $(*)$ este data sub forma implicită de

$$F(t,x) = c_3, c_3 \in \mathbb{R},$$

adică, notând $c = c_3 - c_1$ sau $c = c_3 - c_2$, de

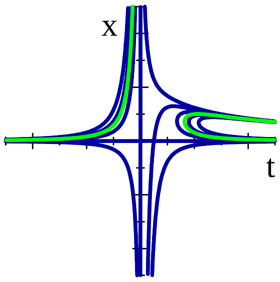
$$(**)\ e^{tx} - 2xt^2 = c, \forall (t,x) \in \mathbb{D} \text{ şi } c \in \mathbb{R}.$$

Local, s-ar putea explicita $x : \mathbb{I}_x \to \mathbb{R}$,unde domeniul de definiţie a soluţiei, $\mathbb{I}_x$, depinde de constanta c (pentru fiecare c se obţine o soluţie cu un anumit domeniu de definiţie şi o anumită lege de asociere).

Etapa 2 : Se impune asupra soluţiei generale găsite condiţia iniţială $CI:\ x(2) = 1$ şi se găseşte acea soluţie particulară ce verifică CI. Se înlocuieşte în $(**)$ condiţia iniţială $x(2) = 1 \Rightarrow e^{2\cdot 1} - 2 \cdot 1 \cdot 2^2 = c \Rightarrow c = e^2 - 8$. Se înlocuieşte acest c în $(**) \Rightarrow$

$$e^{tx} - 2xt^2 = e^2 - 8, \forall (t,x) \in \mathbb{D}.$$

Ultima relaţie reprezintă soluţia particulară a ecuaţiei $(*)$ ce verifică $CI : x(2) = 1$.



Exerciţiul 3. **a)** Să se determine soluţia problemei Cauchy $\begin{cases} x' = \dfrac{-2}{t^2-1}x + 2(t+1), \forall t \in \mathbb{I} \\ x(0) = -3. \end{cases}$

Rezolvare: Se determină soluţia generală a ecuaţiei

$(*_{LN1})\ \ x'(t) = \dfrac{-2}{t^2-1}x(t) + 2(t+1), t \in \mathbb{I}.$

Pentru $t \in \mathbb{I}_x \subseteq \mathbb{I}$, variabilă independentă din domeniul de definiţie al soluţiei, se caută $x = x(t)$ funcţie necunoscută, soluţie pentru ecuaţia $(*_{LN1})$. Se observă că ecuaţia $(*_{LN1})$ este ecuaţie diferenţială liniară de ordin întâi neomogenă, cu

$$\begin{cases} a : \mathbb{I} \to \mathbb{R}, a(t) = \dfrac{-2}{t^2-1}, \\ b : \mathbb{I} \to \mathbb{R}, b(t) = 2(t+1). \end{cases}$$

$\mathbb{I} \subset \mathbb{R}$ este un interval ce nu conţine $\{-1, 1\}$, adică $\mathbb{I} \subseteq]-\infty, -1[$ sau $\mathbb{I} \subseteq]-1, 1[$ sau $\mathbb{I} \subseteq]1, +\infty[$.

Metoda variaţiei constantelor detaliat-temă

Metoda variaţiei constantelor redusă la formula (6) pentru ecuaţia în necunoscuta $x(t)$ şi Convenţia. Se obţine :

$$x(t) = e^{\int\left(\frac{-2}{t^2-1}\right)dt}\left(c + \int 2(t+1)\, e^{-\int\left(\frac{-2}{t^2-1}\right)dt} dt\right), \forall t \in \mathbb{I} \text{ şi } c \in \mathbb{R} \Rightarrow$$

$$x(t) = e^{-\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|+0}\left(c + \int 2(t+1)\, e^{-\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|+0} dt\right), \forall t \in \mathbb{I} \text{ şi } c \in \mathbb{R} \Rightarrow$$

$$x(t) = \left|\frac{t+1}{t-1}\right|\left(c + \int 2(t+1)\left|\frac{t-1}{t+1}\right| dt\right), \forall t \in \mathbb{I} \text{ şi } c \in \mathbb{R}.$$

Pentru $\mathbb{I} \subseteq]-\infty, -1[$ sau $\mathbb{I} \subseteq]1, +\infty[\Rightarrow$

$(**_1)\ x(t; c) = \dfrac{t+1}{t-1}\left(c + t^2 - 2t + 0\right), \forall t \in \mathbb{I}$ şi $c \in \mathbb{R}$.

Pentru $\mathbb{I} \subseteq]-1, 1[$, $x(t; c) = -\dfrac{t+1}{t-1}\left(c - t^2 + 2t + 0\right), \forall t \in \mathbb{I}$ şi $c \in \mathbb{R} \Rightarrow$

$(**_2)\ x(t; c) = \dfrac{t+1}{t-1}\left(-c + t^2 - 2t\right), \forall t \in \mathbb{I}$ şi $c \in \mathbb{R}$.

Relaţiile $(**_1)$ şi $(**_2)$ dau cele două familii de soluţii generale ale ecuaţiei $(*_{LN1})$.

Metoda factorului integrant **:** Se determină factorul integrant:

$$\mu(t) = e^{-\int\left(\frac{-2}{t^2-1}\right)dt} = e^{2\cdot\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|+0} = \left|\tfrac{t-1}{t+1}\right|, \forall t \in \mathbb{I}.$$

$$\mu(t) = \left|\tfrac{t-1}{t+1}\right| = \begin{cases} \frac{t-1}{t+1}, & \text{dacă } t \in \mathbb{I}, \mathbb{I} \subseteq]-\infty, -1[\text{ sau } \mathbb{I} \subseteq]1, +\infty[\\ -\frac{t-1}{t+1}, & \text{dacă } t \in \mathbb{I}, \mathbb{I} \subseteq]-1, 1[\end{cases}$$

Deoarece în etapa 2 se va impune $CI : x(0) = -3$, se studiază cazul în care $0 \in \mathbb{I}$, adică $\mathbb{I} \subseteq]-1, 1[$.

Pentru $\forall t \in \mathbb{I} \subseteq]-1, 1[$ se înmulţeşte ecuaţia $(*_{LN1})$ cu $\mu(t) = -\frac{t-1}{t+1} \Rightarrow$

$x'(t)\left(-\frac{t-1}{t+1}\right) = \frac{-2}{(t-1)(t+1)}x(t)\left(-\frac{t-1}{t+1}\right) + 2(t+1)\left(-\frac{t-1}{t+1}\right), \forall t \in \mathbb{I}.$

Se trec termenii ce conţin x, x' în membrul stâng$\Rightarrow$

$x'(t)\left(-\frac{t-1}{t+1}\right)+x(t)\left(-\frac{2}{(t+1)^2}\right) = -2(t-1), \forall t \in \mathbb{I} \Rightarrow \dfrac{d}{dt}\left(x(t)\left(-\frac{t-1}{t+1}\right)\right) = -2(t-1), \forall t \in \mathbb{I}\Big| \int (\cdot)\, dt \Rightarrow$

$x(t)\left(-\frac{t-1}{t+1}\right) = -2\left(\frac{t^2}{2} - t\right) + c, \forall t \in \mathbb{I} \Rightarrow x(t;c) = \left(-\frac{t+1}{t-1}\right)\left(-2\left(\frac{t^2}{2} - t\right) + c\right), \forall t \in \mathbb{I}$ şi $c \in \mathbb{R}$.

$(**_2)\; x(t;c) = \frac{t+1}{t-1}\left(t^2 - 2t + c\right), \forall t \in \mathbb{I}$ şi $c \in \mathbb{R}$.

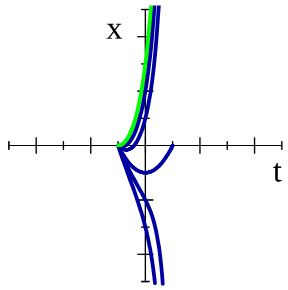
Pentru $\forall t \in \mathbb{I}$, $\mathbb{I} \subseteq]-\infty, -1[$ sau $\mathbb{I} \subseteq]1, +\infty[$ se înmulţeşte ecuaţia $(*_{LN1})$ cu $\mu(t) = \frac{t-1}{t+1}$ $\Rightarrow$analog.

etapa 2. Se impune asupra soluţiei generale condiţia iniţială $x(0) = -3$, adică $(t_0, x_0) = (0, -3)$. Cum $t_0 = 0 \in \mathbb{I} \subseteq]-1, 1[$ Se înlocuieşte $(t_0, x_0) = (0, -3)$ în $(**_2) \Rightarrow$

$$-3 = \frac{0+1}{0-1}\left(-c + 0^2 - 2 \cdot 0\right) \Rightarrow c = -3.$$

Se înlocuieşte $c = -3$ în $(**_2) \Rightarrow x(t;-3) = \dfrac{t+1}{t-1}\left(3 + t^2 - 2t\right), \forall t \in \mathbb{I}.$

Ultima relaţie reprezintă soluţia particulară a ecuaţiei $(*_{LN1})$, sub formă explicită, ce verifică $x(0) = -3$



b) Să se determine soluţia pentru $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}(t)\sin t - x(t)\cos t = -\dfrac{\sin^2 t}{t^2} \\ \lim\limits_{t\to+\infty} x(t) = 0. \end{cases}$

Rezolvare: etapa 1. Se determină soluţia generală a ecuaţiei

$\dfrac{dx}{dt}(t)\sin t - x(t)\cos t = -\dfrac{\sin^2 t}{t^2}, t \in \mathbb{I} \Rightarrow (*_{LN1})\;\; x'(t) = (\operatorname{ctg} t)\, x(t) - \dfrac{\sin t}{t^2}, t \in \mathbb{I}.$

Pentru $t \in \mathbb{I}_x \subseteq \mathbb{I}$, variabilă independentă din domeniul de definiţie al soluţiei, se caută $x = x(t)$ funcţie necunoscută, soluţie pentru ecuaţia $(*_{LN1})$. Se observă că ecuaţia $(*_{LN1})$ este ecuaţie diferenţială liniară de ordin întâi neomogenă, cu

$$\begin{cases} a : \mathbb{I} \to \mathbb{R}, a(t) = \operatorname{ctg} t, \\ b : \mathbb{I} \to \mathbb{R}, b(t) = -\dfrac{\sin t}{t^2}. \end{cases}$$

$\mathbb{I} \subset \mathbb{R}$ este un interval ce nu conţine nici 0, nici $\{l\pi; l \in \mathbb{Z}\}$, adică $\mathbb{I} \subseteq]-\pi, 0[$ sau $\mathbb{I} \subseteq]0, \pi[$ ş.a.m.d.

La acest exerciţiu se va utiliza direct formula (6) pentru ecuaţia în necunoscuta $x(t)$ şi Convenţia:

$x(t;c) = e^{\int (\operatorname{ctg} t)dt}\left(c + \displaystyle\int \left(-\frac{\sin t}{t^2}\right) e^{-\int (\operatorname{ctg} t)dt} dt\right), \forall t \in \mathbb{I}$ şi $c \in \mathbb{R} \Rightarrow$

$x(t;c) = e^{\ln|\sin t|+0}\left(c + \displaystyle\int \left(-\frac{\sin t}{t^2}\right) e^{-\ln|\sin t|+0} dt\right), \forall t \in \mathbb{I}$ şi $c \in \mathbb{R} \Rightarrow$

$x(t;c) = |\sin t|\left(c + \displaystyle\int \left(-\frac{\sin t}{t^2}\right) \frac{1}{|\sin t|} dt\right), \forall t \in \mathbb{I}$ şi $c \in \mathbb{R}$.

Pentru $\mathbb{I}$ astfel încât $\sin t > 0, \forall t \in \mathbb{I} \Rightarrow$

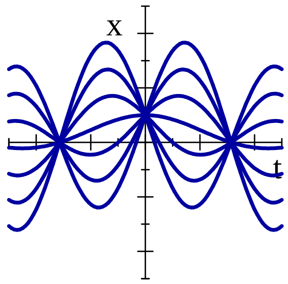
$(**_1)\;\; x(t;c) = (\sin t)\left(c + \frac{1}{t} + 0\right), \forall t \in \mathbb{I}$ şi $c \in \mathbb{R}$.

Pentru $\mathbb{I}$ astfel încât $\sin t > 0, \forall t \in \mathbb{I} \Rightarrow x(t;c) = (-\sin t)\left(c - \frac{1}{t} + 0\right), \forall t \in \mathbb{I}$ şi $c \in \mathbb{R} \Rightarrow$

$(**_2)$ $x(t;c) = (\sin t)\left(-c + \frac{1}{t}\right), \forall t \in \mathbb{I}$ şi $c \in \mathbb{R}$.

Relaţiile $(**_1)$ şi $(**_2)$ dau cele două familii de soluţii generale ale ecuaţiei $(*_{LN1})$. Se pot grupa cele doua expresii în

$(**)$ $x(t;c) = (\sin t)\left(\bar{c} + \frac{1}{t}\right), \forall t \in \mathbb{I}$ a.î. $\sin t \neq 0$ şi $\bar{c} \in \mathbb{R}$.



etapa 2. Se impune Condiţia la limită $\lim\limits_{t\to+\infty} x(t) = 0$. Cum trecerea la limită pentru $t \to +\infty$ în expresia lui $x(t)$ presupune alegerea unui interval de definiţie a soluţiei de forma $\mathbb{I} =]d, +\infty[$ iar $\sin t$ este funcţie periodică (adică există intervale $]d_1, +\infty[$ pe care $\sin t > 0$ şi există intervale $]d_2, +\infty[$ pe care $\sin t < 0$) nu se poate şti în care din relaţiile $(**_1)$ sau $(**_2)$ să trecem la limită. Deoarece pentru ecuaţii diferenţiale liniare, deci şi la ecest exerciţiu, soluţiile pot fi grupate sub $(**)$, convenim să se impună asupra soluţiei generale $(**)$ condiţia la limită $\lim\limits_{t\to+\infty} x(t) = 0$, adică

$\lim\limits_{t\to+\infty} x(t) = \lim\limits_{t\to+\infty} \left((\sin t)\left(\bar{c} + \frac{1}{t}\right)\right)$

Cum limita din membrul drept al relaţiei anterioare nu există $\Rightarrow$ nu găsim nici un c din relaţia anterioară $\Rightarrow$ nu există nici o soluţie particulară a ecuaţiei $(*_{LN1})$ care să verifice condiţia la limită $\lim\limits_{t\to+\infty} x(t) = 0$.

Dacă s-ar fi cerut $\lim\limits_{t\to 0} x(t) = 1$, se considera $\mathbb{I}_1 =]-\pi, 0[$ şi $\mathbb{I}_2 =]0, \pi[$, se impunea

$$\begin{cases} \lim\limits_{t\uparrow 0, t\in\mathbb{I}_1} x(t) = 1 \\ \lim\limits_{t\downarrow 0, t\in\mathbb{I}_2} x(t) = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{t\uparrow 0, t\in\mathbb{I}_1} \left[(\sin t)\left(c_1 + \frac{1}{t}\right)\right] = 1 \\ \lim\limits_{t\downarrow 0, t\in\mathbb{I}_2} \left[(\sin t)\left(-c_2 + \frac{1}{t}\right)\right] = 1 \end{cases} \Rightarrow c_1 \in \mathbb{R} \text{ şi } c_2 \in \mathbb{R}$$

adică $\lim\limits_{t\uparrow 0} x(t) = 0$ este verificată de toate soluţiile definite pe $\mathbb{I}_1$ şi $\lim\limits_{t\downarrow 0} x(t) = 0$ este verificată de toate soluţiile definite pe $\mathbb{I}_2$.

○2. PROBLEME CAUCHY PENTRU ECUAŢII DIFERENŢIALE DE ORDINUL 1 (cu rezolvare numerică)

○**Exerciţiul 1.** Să se demonstreze teorema de existenţă şi unicitate a soluţiei pentru problema Cauchy corespunzătoare ecuaţiei cu variabile separabile, ecuaţiei liniare, ecuaţiei Bernoulli, ecuaţiei Riccati.

○**Exerciţiul 2.** Să se determine un interval arbitrar pe care să existe o unică soluţie pentru rezolvarea următoarei probleme Cauchy şi să se calculeze primele 3 iteraţii Picard ale problemei:

$$\begin{cases} x' = 2t + 3x^5, \\ CI : x(0) = 0. \end{cases}$$

○**Exerciţiul 3.** Să se arate că problema Cauchy

$$\begin{cases} x' = x^3 + e^{-t^2}, \\ CI : x(0) = 1 \end{cases}$$

are soluţie unică pe intervalul $\mathbb{I} = \left[-\frac{1}{9}, \frac{1}{9}\right]$ şi pe acest interval are loc inegalitatea $0 \leq x(t) \leq 2$.

○**Exerciţiul** 4. Să se studieze existenţa soluţiei problemei Cauchy pentru

a) $\begin{cases} x' = 2e^{-t^2} + \ln(1 + x^2) \\ CI : x(0) = 0; \end{cases}$

b) $\begin{cases} x' = t^2 - x^2 \\ CI : x(0) = 0; \end{cases}$

c) $\begin{cases} x' = \dfrac{t}{1 + x^2} \\ CI : x(0) = 0; \end{cases}$

d) $\begin{cases} x' = \dfrac{1}{1 + t^2} e^{-x^2 \sin^2 t} \\ CI : x(0) = 0. \end{cases}$

○**Exerciţiul 5.** Să se stabilească dacă sunt îndeplinite condiţiile de existenţă şi unicitate ale soluţiei pentru următoarele probleme Cauchy

a) $\begin{cases} x' = 3x^{2/3}(x^{1/3} + 1) \\ CI : x(0) = 0; \end{cases}$

b) $\begin{cases} x' = \dfrac{\sqrt{\sin x}}{\cos t} \\ CI : x(\frac{\pi}{2}) = 3; \end{cases}$

c) $\begin{cases} tx' = x - 1 \\ CI : x(0) = 0; \end{cases}$

d) $\begin{cases} tx' = x - 1 \\ CI : x(1) = 1. \end{cases}$

○**Exerciţiul 6.** Să se determine cu ajutorul metodei aproximaţiilor succesive soluţia problemei Cauchy

$$\begin{cases} x' = 1 - x^2 + t^2 \\ CI : x(0) = 0. \end{cases}$$

○**Exerciţiul 7.** Să se determine primele trei aproximaţii succesive pentru următoarele probleme Cauchy şi să se evalueze eroarea pentru t aparţinând intervalelor indicate

a) $\begin{cases} x' = x + t^2 \\ CI : x(0) = 0 \end{cases}$, pentru $0 \leq t \leq \frac{1}{2}$;

b) $\begin{cases} x' = \dfrac{1 + x^2}{1 + t^2} \\ CI : x(0) = 0 \end{cases}$, pentru $0 \leq t \leq \frac{1}{4}$.