SEMINAR NR. 5, REZOLVĂRI
EDCO, AIA

3. ECUAŢII DIFERENŢIALE DE ORDINUL n LINIARE
3.1. Ecuaţii diferenţiale de ordinul n liniare având coeficienţi variabili-NU
3.2. Ecuaţii diferenţiale de ordinul n liniare având coeficienţi constanţi

Forma generală a unei ecuaţii diferenţiale liniare neomogene/omogene de ordinul n cu coeficienţi constanţi :

$$\boxed{x^{(n)}(t) + a_1 x^{(n-1)}(t) + ... + a_{n-1}x'(t) + a_n x(t) = f(t), t \in \mathbb{I}} \tag{1}$$

$$\boxed{\frac{d^n x}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}} + ... + a_{n-1}\frac{dx}{dt} + a_n x = f} \tag{1'}$$

unde $a_i \in \mathbb{R}$, $i \in \{1, ..., n\}$, sunt numere reale numite *coeficienţi (constanţi)*, iar $f : \mathbb{I} \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este funcţie continuă, numită *termen liber.* Dacă f este neidentic nulă atunci (1) se numeşte ecuaţie *neomogenă (EN)*; dacă f este identic nulă, atunci (1) se numeşte ecuaţie *omogenă (EO).*

Rezolvare: Pentru $t \in \mathbb{I}_x = \mathbb{I}$, variabilă independentă din domeniul de definiţie a soluţiei, se caută $x(t; c_1, ..., c_n)$, soluţia generală pentru EN. Utilizând explicaţiile teoretice din curs se schiţează algoritmul de rezolvare a acestei ecuaţii diferenţiale.

Etapa 1 : Se determină soluţia generală a EO ataşate ecuaţiei (1) (notată $x_o(t; c_1, ..., c_n)$) :

$$\boxed{x^{(n)}(t) + a_1 x^{(n-1)}(t) + ... + a_{n-1}x'(t) + a_n x(t) = 0} \tag{2}$$

Pasul 1 : Se ataşează ecuaţiei diferenţiale EO (2) *ecuaţia ei caracteristică EC:*

$$\boxed{\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + ... + a_{n-1}\lambda + a_n = 0.} \tag{3}$$

Este o ecuaţie algebrică polinomială de grad n având coeficienţii reali $a_i \in \mathbb{R}$, $i \in \{1, ..., n\}$, în necunoscuta λ, care admite exact n rădăcini complexe. Se determină, precizând şi multiplicitatea lor.

Pasul 2 : Pentru fiecare rădăcină a EC se găsesc corespunzător soluţii particulare liniar independente ale EO, după algoritmul:

•Cazul 1 : $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ cu $m(\lambda_1) = 1 \rightsquigarrow x_1(t) = e^{\lambda_1 t}$.

•Cazul 2 : $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ cu $m(\lambda_1) = m \rightsquigarrow \begin{cases} x_1(t) = e^{\lambda_1 t}, \\ x_2(t) = te^{\lambda_1 t}, \\ ... \\ x_m(t) = t^{m-1}e^{\lambda_1 t}. \end{cases}$

•Cazul 3 : $\lambda_{1,2} \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, $\lambda_{1,2} = \alpha_1 \pm i\beta_1$ cu $m(\lambda_{1,2}) = 1 \rightsquigarrow$
$\{\ x_1(t) = e^{\alpha_1 t}\cos(\beta_1 t);\quad x_2(t) = e^{\alpha_1 t}\sin(\beta_1 t).$

•Cazul 4 : $\lambda_{1,2} \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, $\lambda_{1,2} = \alpha_1 \pm i\beta_1$ cu $m(\lambda_{1,2}) = m \rightsquigarrow$

$$\begin{cases} x_1(t) = e^{\alpha_1 t}\cos(\beta_1 t), & x_2(t) = e^{\alpha_1 t}\sin(\beta_1 t), \\ x_3(t) = te^{\alpha_1 t}\cos(\beta_1 t), & x_4(t) = te^{\alpha_1 t}\sin(\beta_1 t), \\ ... & ... \\ x_{2m-1}(t) = t^{m-1}e^{\alpha_1 t}\cos(\beta_1 t), & x_{2m}(t) = t^{m-1}e^{\alpha_1 t}\sin(\beta_1 t). \end{cases}$$

Din algoritm se găseşte $B = (x_1, ..., x_n)$, adică exact n soluţii particulare ale EO, liniar independente. Sistemul de funcţii $(x_1, ..., x_n)$ se numeşte *sistem fundamental de soluţii* pentru ecuaţia omogenă EO (bază).

Pasul 3 : Soluţia generală a EO este o combinaţie liniară de cele exact n soluţii particulare liniar independente determinate la Pasul 2

$$\boxed{x_o(t;c_1,...,c_n)=c_1x_1(t)+...+c_nx_n(t),\forall t\in\mathbb{R}\text{ şi }c_1,...,c_n\in\mathbb{R}.} \quad (4)$$

Etapa 2 : Se determină o soluţie particulară a EN, notată $x_p(t)$.

Metoda variaţiei constantelor: Teoretic se poate folosi la orice ecuaţie, practic apar dificultăţi în aplicare când ecuaţia este de ordin mare şi apar de calculat (fără calculator) determinanţi funcţionali de ordinul respectiv şi integrale. Se caută $x_p(t)$ de forma

$$\boxed{x_p(t)=u_1(t)x_1(t)+...+u_n(t)x_n(t),\forall t\in\mathbb{I}.} \quad (5)$$

unde $u_i':\mathbb{I}\to\mathbb{R}$, $i\in\{1,...,n\}$, sunt soluţii ale sistemului

$$\begin{cases} u_1'(t)x_1(t)+...+u_n'(t)x_n(t)=0\\ u_1'(t)x_1'(t)+...+u_n'(t)x_n'(t)=0\\ ...\\ u_1'(t)x_1^{(n-1)}(t)+...+u_n'(t)x_n^{(n-1)}(t)=f(t)\end{cases} \quad (6)$$

Se integrează rezultatele, se înlocuiesc expresiile lui u_i, $i\in\{1,...,n\}$ în (5) şi se obţine x_p.

Metoda coeficienţilor nedeterminaţi (asociată uneori cu **principiul superpoziţiei**) : Se aplică numai pentru ecuaţii neomogene cu coeficienţi constanţi pentru care termenul liber este un cvasipolinom sau o combinaţie liniară de cvasipolinoame. Se utilizează Teoremele 1şi 2.

Teorema 1. *Fie EN cu f un cvasipolinom, adică*

$$\boxed{f(t)=e^{\alpha t}(P(t)\cos(\beta t)+Q(t)\sin(\beta t)),\forall t\in\mathbb{R},} \quad (7)$$

unde $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, iar P,Q sunt polinoame.
Dacă $\lambda=\alpha+\beta i$ este rădăcină a EC, cu multiplicitatea $m(\lambda)=s$ ($s=0$ dacă $\lambda=\alpha+\beta i$ nu este rădăcină a EC), atunci EN admite o soluţie particulară de forma

$$\boxed{x_p(t)=t^se^{\alpha t}(A(t)\cos(\beta t)+B(t)\sin(\beta t)),\forall t\in\mathbb{R}.} \quad (8)$$

A şi B sunt polinoame de grad cel mai mare dintre gradele lui P şi Q iar coeficienţii lor se determină impunând ca x_p să verifice EN.

Teorema 2. (**Principiul superpoziţiei**) *Fie EN, cu f o combinaţie liniară de funcţii continue (pot fi cvasipolinome în particular), adică*

$$\boxed{f(t)=\overline{c}_1f_1(t)+...+\overline{c}_rf_r(t),\forall t\in\mathbb{I}\text{ şi }\overline{c}_1,...,\overline{c}_r\in\mathbb{R}.} \quad (9)$$

unde $f_i\in C(\mathbb{I};\mathbb{R})$ (în particular f_i pot fi de forma (7)). Dacă, pentru $\forall i\in\{1,...,r\}$, x_{p_i} sunt soluţii particulare pentru (EN_i)

$$\boxed{x^{(n)}(t)+a_1x^{(n-1)}(t)+...+a_{n-1}x'(t)+a_nx(t)=f_i(t),\forall t\in\mathbb{I}} \quad (10)$$

atunci

$$\boxed{x_p(t)=\overline{c}_1x_{p_1}(t)+...+\overline{c}_rx_{p_r}(t),\forall t\in\mathbb{I}\text{ şi }\overline{c}_1,...,\overline{c}_r\in\mathbb{R}.} \quad (11)$$

este soluţie particulară pentru EN.

Etapa 3 : Soluţia generală a EN este dată de

$$\boxed{x(t;c_1,...,c_n)=x_o(t;c_1,...,c_n)+x_p(t),\forall t\in\mathbb{I}\text{ şi }c_1,...,c_n\in\mathbb{R}.} \quad (12)$$

Exerciţiul 1. Să se determine soluţiile generale ale următoarelor ecuaţii diferenţiale liniare omogene cu coeficienţi constanţi:
a) $x^{(5)}-2x^{(4)}+x'''-2x''=0,t\in\mathbb{R}$; **b)** $x^{(4)}+6x''+9x=0,t\in\mathbb{R}$;
c) $x'''-2x''-x'+2x=0,t\in\mathbb{R}$; **d)** $3x''-2x'-8x=0,t\in\mathbb{R}$;
e) $x^{(4)}+2x'''+3x''+2x'+x=0,t\in\mathbb{R}$;
f) $x^{(6)}-x^{(5)}-4x^{(4)}+2x'''+5x''-x'-2x=0,t\in\mathbb{R}$;
g) $x^{(5)}-x^{(4)}-x'+x=0,t\in\mathbb{R}$; **h)** $x^{(4)}+2x''+x=0,t\in\mathbb{R}$.

Rezolvare : a) Fie $(*_{EO})$ $x^{(5)}-2x^{(4)}+x'''-2x''=0,\forall t\in\mathbb{R}$.
Ecuaţia $(*_{EO})$ este o ecuaţie diferenţială de ordin 5, liniară, cu coeficienţii constanţi $a_1=-2$,

$a_2 = 1$, $a_3 = -2$, $a_4 = 0$, $a_5 = 0$, omogenă. Pentru $t \in \mathbb{R}$, variabilă independentă din domeniul de definiţie a soluţiei, se caută $x_o(t; c_1, ..., c_5)$, soluţia generală pentru ecuaţia $(*_{EO})$.

Pasul 1 : Se ataşează ecuaţiei diferenţiale $(*_{EO})$ ecuaţia ei caracteristică

$(*_{EC})$ $\lambda^5 - 2\lambda^4 + \lambda^3 - 2\lambda^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda^2(\lambda - 2)(\lambda^2 + 1) = 0 \Rightarrow$

$$\begin{cases} \lambda_1 = 0 \text{ cu } m(\lambda_1) = 2, \\ \lambda_2 = 2 \text{ cu } m(\lambda_2) = 1, \\ \lambda_{3,4} = \pm i \text{ cu } m(\lambda_{3,4}) = 1. \end{cases}$$

Pasul 2 : Pentru fiecare rădăcină a ecuaţiei caracteristice se găsesc corespunzător soluţii particulare liniar independente ale ecuaţiei omogene $(*_{EO})$, după algoritmul dat

$\bullet \lambda_1 = 0$ cu $m(\lambda_1) = 2 \rightsquigarrow \begin{cases} x_1(t) = e^{0t}, \\ x_2(t) = te^{0t}. \end{cases}$

$\bullet \lambda_2 = 2$ cu $m(\lambda_2) = 1 \rightsquigarrow x_3(t) = e^{2t}$.

$\bullet \lambda_{3,4} = 0 \pm i \cdot 1$ cu $m(\lambda_{3,4}) = 1 \rightsquigarrow \begin{cases} x_4(t) = e^{0t}\cos 1t, \\ x_5(t) = e^{0t}\sin 1t. \end{cases}$

Pasul 3 : Conform algoritmului de la Pasul 2, $(x_1, ..., x_5)$ este un sistem fundamental de soluţii pentru $(*_{EO})$ (sunt exact 5 soluţii particulare pentru $(*_{EO})$ şi funcţii liniar independente). Atunci soluţia generală a ecuaţiei $(*_{EO})$ este

$x_o(t; c_1, ..., c_5) = c_1 \cdot 1 + c_2 t + c_3 e^{2t} + c_4 \cos t + c_5 \sin t, \forall t \in \mathbb{R}$ şi $c_1, ..., c_5 \in \mathbb{R}$.

b) Fie $(*_{EO})$ $x^{(4)} + 6x'' + 9x = 0, \forall t \in \mathbb{R}$.

Ecuaţia $(*_{EO})$ este o ecuaţie diferenţială de ordin 4, liniară, cu coeficienţii constanţi $a_1 = 0$, $a_2 = 6$, $a_3 = 0$, $a_4 = 9$, omogenă. Pentru $t \in \mathbb{R}$, variabilă independentă din domeniul de definiţie a soluţiei, se caută $x_o(t; c_1, ..., c_4)$, soluţia generală pentru ecuaţia $(*_{EO})$.

Pasul 1 : Se ataşează ecuaţiei diferenţiale $(*_{EO})$ ecuaţia ei caracteristică

$(*_{EC})$ $\lambda^4 + 6\lambda^2 + 9 = 0 \Leftrightarrow (\lambda^2 + 3)^2 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm i\sqrt{3}$ cu $m(\lambda_{1,2}) = 2$.

Pasul 2 : Pentru fiecare rădăcină a ecuaţiei caracteristice se găsesc corespunzător soluţii particulare liniar independente ale ecuaţiei omogene $(*_{EO})$, după algoritmul dat

$\bullet \lambda_{1,2} = 0 \pm i\sqrt{3}$ cu $m(\lambda_{1,2}) = 2 \rightsquigarrow \begin{cases} x_1(t) = e^{0t}\cos\sqrt{3}t, & x_2(t) = e^{0t}\sin\sqrt{3}t, \\ x_3(t) = te^{0t}\cos\sqrt{3}t, & x_4(t) = te^{0t}\sin\sqrt{3}t. \end{cases}$

Pasul 3 : Conform algoritmului de la Pasul 2, $(x_1, ..., x_4)$ este un sistem fundamental de soluţii pentru $(*_{EO})$ (sunt exact 4 soluţii particulare pentru $(*_{EO})$ şi funcţii liniar independente). Atunci soluţia generală a ecuaţiei $(*_{EO})$ este

$x_o(t; c_1, ..., c_4) = c_1 \cos\sqrt{3}t + c_2 \sin\sqrt{3}t + c_3 t \cos\sqrt{3}t + c_4 t \sin\sqrt{3}t, \forall t \in \mathbb{R}$ şi $c_1, ..., c_4 \in \mathbb{R}$.

Reprezentând grafic pe $\mathbb{I} = \mathbb{R}$ pentru

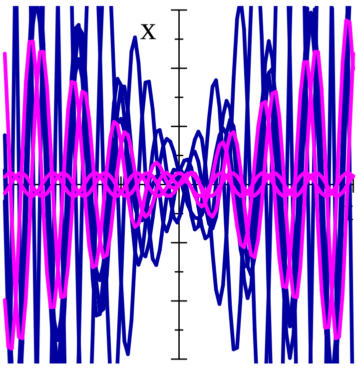
$(c_1, c_2, c_3, c_4) = (1, 0, 0, 0)$, $(c_1, c_2, c_3, c_4) = (0, 1, 0, 0)$, $(c_1, c_2, c_3, c_4) = (0, 0, 1, 0)$, $(c_1, c_2, c_3, c_4) = (0, 0, 0, 1)$

cu magenta (soluţiile particulare din sistemul fundamental) şi pentru

$(c_1, c_2, c_3, c_4) = (1, 1, 1, 1)$, $(c_1, c_2, c_3, c_4) = (-3, 1, 1, 1)$, $(c_1, c_2, c_3, c_4) = (1, -3, 1, 1)$,

$(c_1, c_2, c_3, c_4) = (1, 1, -3, 1)$, $(c_1, c_2, c_3, c_4) = (1, 1, 1, -3)$

cu albastru, se obţine



g), h)-A se vedea Curs.

Exerciţiul 2. Să se determine soluţiile generale ale următoarelor ecuaţii diferenţiale liniare neomogene :

a) $x'' + 4x = \dfrac{1}{\cos 2t}, t \in \mathbb{I}$; **b)** $x''' + x' = \dfrac{\sin t}{\cos^2 t}, t \in \mathbb{I}$; **c)** $x'' + x = \operatorname{tg} t, t \in \mathbb{I}$.

Rezolvare : a) Fie $(*_{EN})$ $x'' + 4x = \dfrac{1}{\cos 2t}, t \in \mathbb{I}$.

Ecuaţia $(*_{EN})$ este o ecuaţie diferenţială de ordin 2, liniară, cu coeficienţii constanţi $a_1 = 0$, $a_2 = 4$, neomogenă cu termenul liber

$f : \mathbb{I} \to \mathbb{R}$, $f(t) = \dfrac{1}{\cos 2t}$.

$\mathbb{I}$ este un interval ce nu conţine t a.î. $\cos 2t = 0$. Pentru $t \in \mathbb{I}$, variabilă independentă din domeniul de definiţie a soluţiei, se caută $x(t; c_1, c_2)$, soluţia generală pentru ecuaţia $(*_{EN})$.

Etapa 1 : Se determină soluţia generală a ecuaţiei omogene ataşate ecuaţiei $(*_{EN})$, adică a ecuaţiei

$(*_{EO})$ $x'' + 4x = 0, t \in \mathbb{R}$.

Pasul 1 : Se ataşează ecuaţiei diferenţiale $(*_{EO})$ ecuaţia ei caracteristică

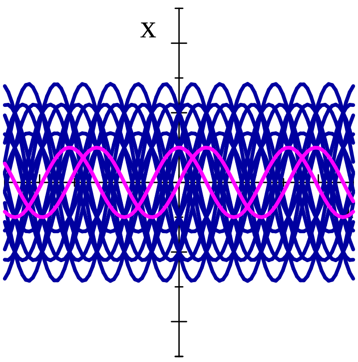
$(*_{EC})$ $\lambda^2 + 4 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = 0 \pm 2i$ cu $m(\lambda_{1,2}) = 1$

Pasul 2 : Pentru fiecare rădăcină a ecuaţiei caracteristice se găsesc corespunzător soluţii particulare liniar independente ale ecuaţiei omogene $(*_{EO})$, după algoritmul dat

$\bullet \lambda_{1,2} = 0 \pm 2i$ cu $m(\lambda_{1,2}) = 1 \rightsquigarrow \begin{cases} x_2(t) = e^{0t} \cos 2t, \\ x_3(t) = e^{0t} \sin 2t. \end{cases}$

Pasul 3 : Conform algoritmului de la Pasul 2, (x_1, x_2) este un sistem fundamental de soluţii pentru $(*_{EO})$ (sunt soluţii particulare pentru $(*_{EO})$ şi funcţii liniar independente). Atunci soluţia generală a ecuaţiei $(*_{EO})$ este

$x_o(t; c_1, c_2) = c_1 \cos 2t + c_2 \sin 2t, \forall t \in \mathbb{R}$ şi $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.



Etapa 2 : Se determină o soluţie particulară a ecuaţiei neomogene $(*_{EN})$.

Metoda coeficienţilor nedeterminaţi : Chiar dacă $(*_{EN})$ are coeficienţi constanţi , se observă că termenul ei liber nu este un cvasipolinom (nu este de forma (7))şi nici combinaţie liniară de cvasipolinoame. În consecinţă, nu se poate aplica metoda coeficienţilor nedeterminaţi.

Metoda variaţiei constantelor : Deoarece (x_1, x_2) este un sistem fundamental de soluţii pentru $(*_{EO})$, se caută x_p de forma

$$x_p(t) = u_1(t) \underbrace{\cos 2t}_{x_1(t)} + u_2(t) \underbrace{\sin 2t}_{x_2(t)}, \forall t \in \mathbb{I},$$

unde $u_i' : \mathbb{I} \to \mathbb{R}$, $i \in \{1, 2\}$, sunt soluţii ale sistemului

$$\begin{cases} u_1'(t) \cos 2t + u_2'(t) \sin 2t = 0 \\ u_1'(t)(-2\sin 2t) + u_2'(t)(2\cos 2t) = \dfrac{1}{\cos 2t} \end{cases}$$

Se calculează

$$\Delta(t) = W(t; x_1, x_2) = \begin{vmatrix} \cos 2t & \sin 2t \\ -2\sin 2t & 2\cos 2t \end{vmatrix} = 2 \neq 0, \forall t \in \mathbb{I}.$$

$$\Delta_1(t) = \begin{vmatrix} 0 & \sin 2t \\ \dfrac{1}{\cos 2t} & 2\cos 2t \end{vmatrix} = \frac{-\sin 2t}{\cos 2t}, \forall t \in \mathbb{I}.$$

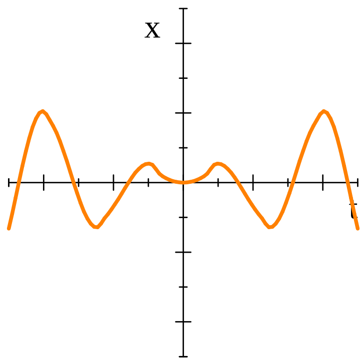
$$\Delta_2(t) = \begin{vmatrix} \cos 2t & 0 \\ -2\sin 2t & \dfrac{1}{\cos 2t} \end{vmatrix} = 1, \forall t \in \mathbb{I}.$$

Atunci

$$\begin{cases} u_1'(t) = \frac{\Delta_1(t)}{\Delta(t)} = \frac{1}{2} \dfrac{-\sin 2t}{\cos 2t}, \\ u_2'(t) = \frac{\Delta_2(t)}{\Delta(t)} = \frac{1}{2}. \end{cases} \Bigg| \int (\cdot)\, dt \Rightarrow \begin{cases} u_1(t) = \frac{1}{4} \ln|\cos 2t| + k_1, \\ u_2(t) = \frac{1}{2} t + k_2. \end{cases}$$

Deoarece se caută o soluţie particulară x_p, se alege $k_1 = 0$, $k_2 = 0$. S-a obţinut

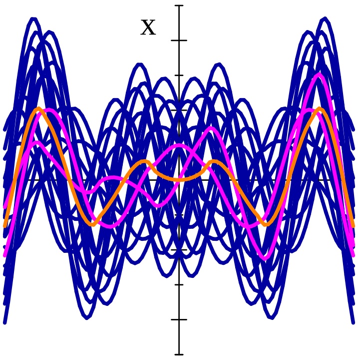
$$x_p(t) = \tfrac{1}{4} \ln|\cos 2t| (\cos 2t) + \tfrac{1}{2} t (\sin 2t), \forall t \in \mathbb{I}.$$



Etapa 3 : Soluţia generală a ecuaţiei neomogene $(*_{EN})$ este dată de

$$x(t; c_1, c_2) = x_o(t; c_1, c_2) + x_p(t), \forall t \in \mathbb{I} \text{ şi } c_1, c_2 \in \mathbb{R}, \text{ adică}$$

$$x(t; c_1, c_2) = c_1 \cos 2t + c_2 \sin 2t + \tfrac{1}{4} (\cos 2t) \ln|\cos 2t| + \tfrac{1}{2} t \sin 2t, \forall t \in \mathbb{I} \text{ şi } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$


x