SEMINAR NR. 6, REZOLVĂRI
EDCO, AIA

3. ECUAŢII DIFERENŢIALE LINIARE DE ORDINUL n
3.1. Ecuaţii diferenţiale liniare de ordinul n cu coeficienţi variabili
3.2. Ecuaţii diferenţiale liniare de ordinul n cu coeficienţi constanţi-continuare

Exerciţiul 3. Să se determine soluţiile generale ale următoarelor ecuaţii diferenţiale liniare neomogene cu coeficienţi constanţi:
a) $x^{(4)} - 2x''' + x'' = t^3, t \in \mathbb{R}$; **b)** $x''' - x = t^3 - 1, t \in \mathbb{R}$;
c) $x^{(4)} - 2x''' + x'' = te^t, t \in \mathbb{R}$; **d)** $x^{(4)} + x''' = \cos 4t, t \in \mathbb{R}$;
e) $x'' - x = t^2, t \in \mathbb{R}$; **f)** $x^{(4)} - 4x'' = 8tv^2, t \in \mathbb{R}$;
g) $x'' - 3x' + 2x = 8t^2 e^{3t}, t \in \mathbb{R}$; **h)** $x'' - 6x' + 9x = t^2 e^{3t}, t \in \mathbb{R}$;
i) $x'' - 6x' + 9x = 10 \sin t, t \in \mathbb{R}$; **j)** $x'' + x = 10 \sin t, t \in \mathbb{R}$.
Rezolvare : a) Fie $(*_{EN})$ $x^{(4)} - 2x''' + x'' = t^3, t \in \mathbb{R}$.
Ecuaţia $(*_{EN})$ este o ecuaţie diferenţială de ordin 4, liniară, cu coeficienţii constanţi $a_1 = -2$, $a_2 = 1$, $a_3 = 0$, $a_4 = 0$, neomogenă cu termenul liber $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(t) = t^3$. Pentru $t \in \mathbb{R}$, variabilă independentă din domeniul de definiţie a soluţiei, se caută $x(t; c_1, ..., c_4)$, soluţia generală pentru ecuaţia $(*_{EN})$.
<u>Etapa1 :</u> Se determină soluţia generală a ecuaţiei omogene ataşate ecuaţiei $(*_{EN})$, adică a ecuaţiei
$(*_{EO})$ $x^{(4)} - 2x''' + x'' = 0, t \in \mathbb{R}$.
<u>Pasul 1 :</u> Se ataşează ecuaţiei diferenţiale $(*_{EO})$ ecuaţia ei caracteristică

$$(*_{EC})\, \lambda^4 - 2\lambda^3 + \lambda^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 (\lambda - 1)^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0 \text{ cu } m(\lambda_1) = 2, \\ \lambda_2 = 1 \text{ cu } m(\lambda_2) = 2. \end{cases}$$

<u>Pasul 2 :</u> Pentru fiecare rădăcină a ecuaţiei caracteristice se găsesc corespunzător soluţii particulare liniar independente ale ecuaţiei omogene $(*_{EO})$, după algoritmul dat

$$\bullet \lambda_1 = 0 \text{ cu } m(\lambda_1) = 2 \rightsquigarrow \begin{cases} x_1(t) = e^{0t}, \\ x_2(t) = te^{0t}. \end{cases}$$

$$\bullet \lambda_2 = 1 \text{ cu } m(\lambda_2) = 2 \rightsquigarrow \begin{cases} x_3(t) = e^{1t}, \\ x_4(t) = te^{1t}. \end{cases}$$

<u>Pasul 3 :</u> Conform algoritmului de la Pasul 2, $(x_1, ..., x_4)$ este un sistem fundamental de soluţii pentru $(*_{EO})$ (sunt exact 4 soluţii particulare pentru $(*_{EO})$ şi funcţii liniar independente). Atunci soluţia generală a ecuaţiei $(*_{EO})$ este

$$x_o(t; c_1, ..., c_4) = c_1 1 + c_2 t + c_3 e^t + c_4 te^t, \forall t \in \mathbb{R} \text{ şi } c_1, ..., c_4 \in \mathbb{R}.$$

<u>Etapa 2 :</u> Se determină o soluţie particulară a ecuaţiei neomogene $(*_{EN})$.
Metoda variaţiei constantelor (mult calcul, apar determinanţi, derivate, integrale; nu se justifică folosirea)**:** Deoarece $(x_1, ..., x_4)$ este un sistem fundamental de soluţii pentru $(*_{EO})$ se caută x_p de forma

$$x_p(t) = u_1(t) \underbrace{1}_{x_1(t)} + u_2(t) \underbrace{t}_{x_2(t)} + u_3(t) \underbrace{e^t}_{x_3(t)} + u_4(t) \underbrace{te^t}_{x_4(t)}, \forall t \in \mathbb{R},$$

unde $u_i' : \mathbb{I} \to \mathbb{R}$, $i \in \{1, 2, 3, 4\}$, sunt soluţii ale sistemului

$$\begin{cases} u_1'(t) \cdot 1 + u_2'(t) \cdot t + u_3'(t) \cdot e^t + u_4'(t) \cdot te^t = 0 \\ u_1'(t) \cdot 0 + u_2'(t) \cdot 1 + u_3'(t) \cdot e^t + u_4'(t) \cdot (t+1) e^t = 0 \\ u_1'(t) \cdot 0 + u_2'(t) \cdot 0 + u_3'(t) \cdot e^t + u_4'(t) \cdot (t+2) e^t = 0 \\ u_1'(t) \cdot 0 + u_2'(t) \cdot 0 + u_3'(t) \cdot e^t + u_4'(t) \cdot (t+3) e^t = t^3 \end{cases}$$

Se calculează:

$$\Delta(t) = W(t; x_1, ..., x_4) = \begin{vmatrix} 1 & t & e^t & te^t \\ 0 & 1 & e^t & (t+1)e^t \\ 0 & 0 & e^t & (t+2)e^t \\ 0 & 0 & e^t & (t+3)e^t \end{vmatrix} = e^{2t} \neq 0, \forall t \in \mathbb{R}.$$

$$\Delta_1(t) = \begin{vmatrix} 0 & t & e^t & te^t \\ 0 & 1 & e^t & (t+1)e^t \\ 0 & 0 & e^t & (t+2)e^t \\ t^3 & 0 & e^t & (t+3)e^t \end{vmatrix} = -t^3 \begin{vmatrix} t & e^t & te^t \\ 1 & e^t & (t+1)e^t \\ 0 & e^t & (t+2)e^t \end{vmatrix} = -t^3 e^{2t}(t-2), \forall t \in \mathbb{R}.$$

$$\Delta_2(t) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & e^t & te^t \\ 0 & 0 & e^t & (t+1)e^t \\ 0 & 0 & e^t & (t+2)e^t \\ 0 & t^3 & e^t & (t+3)e^t \end{vmatrix} = t^3 e^{2t}, \forall t \in \mathbb{R}.$$

$$\Delta_3(t) = \begin{vmatrix} 1 & t & 0 & te^t \\ 0 & 1 & 0 & (t+1)e^t \\ 0 & 0 & 0 & (t+2)e^t \\ 0 & 0 & t^3 & (t+3)e^t \end{vmatrix} = -t^3 e^t (t+2), \forall t \in \mathbb{R}.$$

$$\Delta_4(t) = \begin{vmatrix} 1 & t & e^t & 0 \\ 0 & 1 & e^t & 0 \\ 0 & 0 & e^t & 0 \\ 0 & 0 & e^t & t^3 \end{vmatrix} = t^3 e^t, \forall t \in \mathbb{R}.$$

Atunci

$$\left\{ \begin{array}{l} u_1'(t) = \frac{\Delta_1(t)}{\Delta(t)} = -t^4 + 2t^3 \\ u_2'(t) = \frac{\Delta_2(t)}{\Delta(t)} = t^3 \\ u_3'(t) = \frac{\Delta_3(t)}{\Delta(t)} = \left(-t^4 - 2t\right) e^{-t} \\ u_4'(t) = \frac{\Delta_4(t)}{\Delta(t)} = t^3 e^{-t} \end{array} \right| \int (\cdot)\, dt \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} u_1(t) = -\frac{t^5}{5} + 2\frac{t^4}{4} + k_1 \\ u_2(t) = \frac{t^4}{4} + k_2 \\ u_3(t) = \left(t^4 + 2t + 4t^3 + 2 + 12t^2 + 24t + 24\right) e^{-t} + k_3 \\ u_4(t) = \left(-t^3 - 3t^2 - 6t - 6\right) e^{-t} + k_4 \end{array} \right.$$

Deoarece se caută o soluţie particulară x_p, se alege $k_1 = 0$, $k_2 = 0$, $k_3 = 0$, $k_4 = 0$. S-a obţinut

$$x_p(t) = \left(-\frac{t^5}{5} + 2\frac{t^4}{4}\right) 1 + \frac{t^4}{4} t + \left(t^4 + 4t^3 + 12t^2 + 26t + 26\right) e^{-t} e^t + \left(-t^3 - 3t^2 - 6t - 6\right) e^{-t} t e^t \Rightarrow$$

$$x_p(t) = \frac{1}{20} t^5 + \frac{1}{2} t^4 + t^3 + 6t^2 + 20t + 26, \forall t \in \mathbb{R}$$

Metoda coeficienţilor nedeterminaţi : Deoarece $(*_{EN})$ are coeficienţi constanţi şi termenul liber un cvasipolinom, atunci se poate căuta x_p cu Teorema 1. Într-adevăr,

$$f(t) = t^3 = e^{0t} \left(\underbrace{t^3}_{P(t)} \cos(0t) + \underbrace{1}_{Q(t)} \sin(0t) \right), \forall t \in \mathbb{R},$$

adică f este de forma (7), cu $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $P(t) = t^3$, $Q(t) = 1$. Cum $\lambda = 0 + 0i$ este rădacină caracteristică de multiplicitate $m(\lambda) = 2 = s \Rightarrow$ se caută o soluţie particulară pentru $(*_{EN})$ de forma

$$x_p(t) = t^2 e^{0t} (A(t) \cos(0t) + B(t) \sin(0t)) = t^2 A(t), \forall t \in \mathbb{R},$$

unde A şi B sunt polinoame de grad cel mai mare dintre gradele lui P şi Q, adică 3. Se determină coeficienţii $\mu_i, i \in \{0, 1, 2, 3\}$ ai polinomului $A(t) = \mu_0 + \mu_1 t + \mu_2 t^2 + \mu_3 t^3$ impunând ca x_p să fie soluţie particulară a $(*_{EN})$.

$$\begin{array}{ll|l}
0 & \cdot & x_p(t) = \mu_0 t^2 + \mu_1 t^3 + \mu_2 t^4 + \mu_3 t^5 \\
0 & \cdot & x_p'(t) = 2\mu_0 t + 3\mu_1 t^2 + 4\mu_2 t^3 + 5\mu_3 t^4 \\
1 & \cdot & x_p''(t) = 2\mu_0 + 6\mu_1 t + 12\mu_2 t^2 + 20\mu_3 t^3 \\
-2 & \cdot & x_p'''(t) = 6\mu_1 + 24\mu_2 t + 60\mu_3 t^2 \\
1 & \cdot & x_p^{(4)}(t) = 24\mu_2 + 120\mu_3 t \\
\hline
\multicolumn{2}{l|}{+ \text{ în } (*_{EN})} & t^3 = (2\mu_0 - 12\mu_1 + 24\mu_2) + (6\mu_1 - 48\mu_2 + 120\mu_3)\, t + \\
 & & (12\mu_2 - 120\mu_3)\, t^2 + 20\mu_3 t^3, \forall t \in \mathbb{R}.
\end{array}$$

Identificăm coeficienţii puterilor lui $t \Rightarrow$

$$\begin{array}{l} t^0: \\ t^1: \\ t^2: \\ t^3: \end{array}\left\{\begin{array}{l} 0 = 2\mu_0 - 12\mu_1 + 24\mu_2 \\ 0 = 6\mu_1 - 48\mu_2 + 120\mu_3 \\ 0 = 12\mu_2 - 120\mu_3 \\ 1 = 20\mu_3 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \mu_0 = 12 \\ \mu_1 = 3 \\ \mu_2 = \frac{1}{2} \\ \mu_3 = \frac{1}{20} \end{array}\right.$$

S-a obţinut

$x_p(t) = t^2\left(12 + 3t + \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{20}t^3\right), \forall t \in \mathbb{R}.$

Era posibil să se obţină soluţii particulare diferite prin cele două metode.

Etapa 3 : Soluţia generală a ecuaţiei neomogene $(*_{EN})$ este dată de

$x(t; c_1, ..., c_4) = x_o(t; c_1, ..., c_4) + x_p(t), \forall t \in \mathbb{R}$ şi $c_1, ..., c_4 \in \mathbb{R}$.

Se înlocuieşte $x_o(t; c_1, ..., c_4)$ de la Etapa 1 şi una din $x_p(t)$ de la Etapa 2.

b) Fie $(*_{EN})$ $x''' - x = t^3 - 1, t \in \mathbb{R}$.

Ecuaţia $(*_{EN})$ este o ecuaţie diferenţială de ordin 3, liniară, cu coeficienţii constanţi $a_1 = 0$, $a_2 = 0$, $a_3 = -1$, neomogenă cu termenul liber $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(t) = t^3 - 1$. Pentru $t \in \mathbb{R}$, variabilă independentă din domeniul de definiţie a soluţiei, se caută $x(t; c_1, ..., c_3)$, soluţia generală pentru ecuaţia $(*_{EN})$.

Etapa 1 : Se determină soluţia generală a ecuaţiei omogene ataşate ecuaţiei $(*_{EN})$, adică a ecuaţiei $(*_{EO})$ $x''' - x = 0, t \in \mathbb{R}$.

Pasul 1 : Se ataşează ecuaţiei diferenţiale $(*_{EO})$ ecuaţia ei caracteristică

$$(*_{EC})\ \lambda^3 - 1 = 0 \Leftrightarrow (\lambda - 1)\left(\lambda^2 + \lambda + 1\right) = 0 \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \lambda_1 = 1 \text{ cu } m(\lambda_1) = 1, \\ \lambda_{2,3} = \frac{-1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i \text{ cu } m(\lambda_{2,3}) = 1. \end{array}\right.$$

Pasul 2 : Pentru fiecare rădăcină a ecuaţiei caracteristice se găsesc corespunzător soluţii particulare liniar independente ale ecuaţiei omogene $(*_{EO})$, după algoritmul dat

$\bullet \lambda_1 = 1$ cu $m(\lambda_1) = 1 \rightsquigarrow x_1(t) = e^{1t}$,

$$\bullet \lambda_{2,3} = \frac{-1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i \text{ cu } m(\lambda_{2,3}) = 1 \rightsquigarrow \left\{\begin{array}{l} x_2(t) = e^{\frac{-1}{2}t}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right), \\ x_3(t) = e^{\frac{-1}{2}t}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right). \end{array}\right.$$

Pasul 3 : Conform algoritmului de la Pasul 2, (x_1, x_2, x_3) este un sistem fundamental de soluţii pentru $(*_{EO})$ (sunt exact 3 soluţii particulare pentru $(*_{EO})$ şi funcţii liniar independente). Atunci soluţia generală a ecuaţiei $(*_{EO})$ este

$$x_o(t; c_1, c_2, c_3) = c_1 e^{1t} + c_2 e^{\frac{-1}{2}t}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + c_3 e^{\frac{-1}{2}t}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right), \forall t \in \mathbb{R} \text{ şi } c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}.$$

Etapa 2 : Se determină o soluţie particulară a ecuaţiei neomogene $(*_{EN})$.

Metoda variaţiei constantelor (mult calcul, apar determinanţi, derivate, integrale; nu se justifică folosirea)**:** Deoarece (x_1, x_2, x_3) este un sistem fundamental de soluţii pentru $(*_{EO})$, se caută x_p de forma

$$x_p(t) = u_1(t)\underbrace{e^{1t}}_{x_1(t)} + u_2(t)\underbrace{e^{\frac{-1}{2}t}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)}_{x_2(t)} + u_3(t)\underbrace{e^{\frac{-1}{2}t}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)}_{x_3(t)}, \forall t \in \mathbb{R},$$

unde $u_i' : \mathbb{I} \to \mathbb{R}$, $i \in \{1,2,3\}$, sunt soluţii ale unui sistem funcţional. Din cauza expresiilor funcţiilor $x_1, x_2, x_3 \Rightarrow$ este greoi de aplicat Metoda variaţiei constantelor.

Metoda coeficienţilor nedeterminaţi : Deoarece $(*_{EN})$ are coeficienţi constanţi şi termenul liber un cvasipolinom (vezi mai jos) atunci se poate căuta x_p cu Teorema 1. Într-adevăr,

$$f(t) = t^3 - 1 = e^{0t}\left(\underbrace{(t^3-1)}_{P(t)}\cos(0t) + \underbrace{1}_{Q(t)}\sin(0t)\right), \forall t \in \mathbb{R},$$

adică f este de forma (7), cu $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $P(t) = t^3 - 1$, $Q(t) = 1$. Cum $\lambda = 0 + 0i$ nu este rădacină caracteristică $\Rightarrow$ se caută o soluţie particulară pentru $(*_{EN})$ folosind Teorema 1, de forma

$$x_p(t) = e^{0t}(A(t)\cos(0t) + B(t)\sin(0t)) = A(t), \forall t \in \mathbb{R},$$

unde A şi B sunt polinoame de grad cel mai mare dintre gradele lui P şi Q, adică 3. Se determină coeficienţii $\mu_i, i \in \{0,1,2,3\}$ ai polinomului $A(t) = \mu_0 + \mu_1 t + \mu_2 t^2 + \mu_3 t^3$, impunând ca x_p să fie soluţie particulară a $(*_{EN})$.

$$\begin{array}{l|l}
-1 & \cdot\ x_p(t) = \mu_0 + \mu_1 t + \mu_2 t^2 + \mu_3 t^3 \\
0 & \cdot\ x_p'(t) = \mu_1 + 2\mu_2 t + 3\mu_3 t^2 \\
0 & \cdot\ x_p''(t) = 2\mu_2 + 6\mu_3 t \\
1 & \cdot\ x_p'''(t) = 6\mu_3 \\
\hline
+ \text{ în } (*_{EN}) & t^3 - 1 = (-\mu_0 + 6\mu_3) - \mu_1 t - \mu_2 t^2 - \mu_3 t^3, \forall t \in \mathbb{R}.
\end{array}$$

Identificăm coeficienţii puterilor lui $t \Rightarrow$

$$\begin{array}{l} t^0: \\ t^1: \\ t^2: \\ t^3: \end{array}\begin{cases} -1 = -\mu_0 + 6\mu_3 \\ 0 = -\mu_1 \\ 0 = -\mu_2 \\ 1 = -\mu_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mu_0 = -5 \\ \mu_1 = 0 \\ \mu_2 = 0 \\ \mu_3 = -1 \end{cases}$$

S-a obţinut

$$x_p(t) = -5 - t^3, \forall t \in \mathbb{R}.$$

Etapa 3 : Soluţia generală a ecuaţiei neomogene $(*_{EN})$ este dată de

$$x(t; c_1, c_2, c_3) = x_o(t; c_1, c_2, c_3) + x_p(t), \forall t \in \mathbb{R} \text{ şi } c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}, \text{ adică}$$

$$x(t; c_1, c_2, c_3) = c_1 e^{1t} + c_2 e^{\frac{-1}{2}t}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + c_3 e^{\frac{-1}{2}t}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) - 5 - t^3, \forall t \in \mathbb{R} \text{ şi } c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}.$$

c) $x^{(4)} - 2x''' + x'' = te^t, t \in \mathbb{R}$;

Indicaţie: $f(t) = te^t = e^{1t}\left(\underbrace{t}_{P(t)}\cos(0t) + \underbrace{1}_{Q(t)}\sin(0t)\right), \forall t \in \mathbb{R}.$

d) $x^{(4)} + x''' = \cos 4t, t \in \mathbb{R}$.

Indicaţie: $f(t) = \cos 4t = e^{0t}\left(\underbrace{1}_{P(t)}\cos(4t) + \underbrace{0}_{Q(t)}\sin(4t)\right), \forall t \in \mathbb{R}.$

e), f), g), h), i), j) A se vedea Curs.

Exerciţiul 4. Să se determine soluţiile generale ale următoarelor ecuaţii diferenţiale liniare neomogene cu coeficienţi constanţi:

a) $x^{(5)} - x^{(4)} - x' + x = t^2 e^t + \sin t + t^2, t \in \mathbb{R}$; **b)** $x''' + x'' = t^2 + 1 + 3te^t$;

c) $x^{(4)} - 2x''' + 2x'' - 2x' + x = te^t + \dfrac{1}{2}\cos t$; **d)** $x^{(5)} - x^{(4)} = te^t - 1$;
e) $x'' - 9x = e^{3t}\cos t - 12te^{-3t} + t^2, t \in \mathbb{R}$.
Rezolvare : a) Fie $(*_{EN})$ $x^{(5)} - x^{(4)} - x' + x = t^2e^t + \sin t + t^2, t \in \mathbb{R}$.
Ecuaţia $(*_{EN})$ este o ecuaţie diferenţială de ordin 5, liniară, cu coeficienţii constanţi $a_1 = -1$, $a_2 = 0$, $a_3 = 0$, $a_4 = -1$, $a_5 = 1$, neomogenă cu termenul liber $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(t) = t^2e^t + \sin t + t^2$. Pentru $t \in \mathbb{R}$, variabilă independentă din domeniul de definiţie a soluţiei, se caută $x(t; c_1, ..., c_5)$, soluţia generală pentru ecuaţia $(*_{EN})$.
Etapa 1 : Se determină soluţia generală a ecuaţiei omogene ataşate ecuaţiei $(*_{EN})$, adică a ecuaţiei
$(*_{EO})$ $x^{(5)} - x^{(4)} - x' + x = 0, t \in \mathbb{R}$.
Pasul 1 : Se ataşează ecuaţiei diferenţiale $(*_{EO})$ ecuaţia ei caracteristică

$$(*_{EC})\ \lambda^5 - \lambda^4 - \lambda + 1 = 0 \Leftrightarrow (\lambda - 1)^2(\lambda + 1)\left(\lambda^2 + 1\right) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 1 \text{ cu } m(\lambda_1) = 2, \\ \lambda_2 = -1 \text{ cu } m(\lambda_2) = 1, \\ \lambda_{3,4} = 0 \pm i \text{ cu } m(\lambda_{3,4}) = 1. \end{cases}$$

Pasul 2 : Pentru fiecare rădăcină a ecuaţiei caracteristice se găsesc corespunzător soluţii particulare liniar independente ale ecuaţiei omogene $(*_{EO})$, după algoritmul dat.

$\bullet \lambda_1 = 1$ cu $m(\lambda_1) = 2 \rightsquigarrow \begin{cases} x_3(t) = e^{1t}, \\ x_4(t) = te^{1t}. \end{cases}$

$\bullet \lambda_2 = -1$ cu $m(\lambda_2) = 1 \rightsquigarrow x_3(t) = e^{-1t}$

$\bullet \lambda_{3,4} = 0 \pm 1i$ cu $m(\lambda_{3,4}) = 1 \rightsquigarrow \begin{cases} x_4(t) = e^{0t}\cos 1t, \\ x_5(t) = e^{0t}\sin 1t. \end{cases}$

Pasul 3 : Conform algoritmului de la Pasul 2, $(x_1, ..., x_4)$ este un sistem fundamental de soluţii pentru $(*_{EO})$ (sunt soluţii particulare pentru $(*_{EO})$ şi funcţii liniar independente). Atunci soluţia generală a ecuaţiei $(*_{EO})$ este

$$x_o(t; c_1, ..., c_4) = c_1e^t + c_2te^t + c_3e^{-t} + c_4\cos t + c_5\sin t, \forall t \in \mathbb{R} şi c_1, ..., c_4 \in \mathbb{R}.$$

Etapa 2 : Se determină o soluţie particulară a ecuaţiei neomogene $(*_{EN})$.
Metoda variaţiei constantelor (mult calcul, apar determinanţi, derivate, integrale; nu se justifică folosirea). Deoarece $(x_1, ..., x_4)$ este un sistem fundamental de soluţii pentru $(*_{EO})$ se caută x_p de forma

$$x_p(t) = u_1(t)\underbrace{e^t}_{x_1(t)} + u_2(t)\underbrace{te^t}_{x_2(t)} + u_3(t)\underbrace{e^{-t}}_{x_3(t)} + u_4(t)\underbrace{\cos t}_{x_4(t)} + u_5(t)\underbrace{\sin t}_{x_5(t)}, \forall t \in \mathbb{R},$$

unde $u_i' : \mathbb{I} \to \mathbb{R}$, $i \in \{1, 2, 3, 4\}$, sunt soluţii ale unui sistem funcţional. Din cauza expresiilor funcţiilor $x_1, ..., x_4$ cât şi a ordinului ecuaţiei (deci şi a determinanţilor - de ordin 4 - ce apar în rezolvarea sistemului)$\Rightarrow$ este greu de aplicat Metoda variaţiei constantelor.
Metoda coeficienţilor nedeterminaţi : Se observă că ecuaţia $(*_{EN})$ are coeficienţi constanţi, nu are termenul liber un cvasipolinom (de forma (7)) dar are termenul liber o combinaţie liniară de cvasipolinoame (vezi mai jos). Se caută x_p cu Teorema 1 şi Teorema 2:

$$f(t) = \underbrace{1}_{\overline{c}_1} \cdot \underbrace{t^2e^t}_{f_1(t)} + \underbrace{1}_{\overline{c}_2} \cdot \underbrace{\sin t}_{f_2(t)} + \underbrace{1}_{\overline{c}_3} \cdot \underbrace{t^2}_{f_3(t)}$$

Pentru fiecare $i \in \{1, 2, 3\}$ se determină soluţii particulare x_{p_i} corespunzătoare pentru

$$(*_{ENi})\ x^{(5)} - x^{(4)} - x' + x = f_i(t), t \in \mathbb{R} \overset{\text{Teorema 2}}{\Rightarrow}$$

$x_p(t) = 1 \cdot x_{p_1}(t) + 1 \cdot x_{p_2}(t) + 1 \cdot x_{p_3}(t), \forall t \in \mathbb{R}$ este soluţie particulară pentru $(*_{ENi})$.
Etapa 2.1 : Fie $(*_{EN1})$ $x^{(5)} - x^{(4)} - x' + x = t^2e^t, t \in \mathbb{R}$,
Se observă că

$$f_1(t) = t^2e^t = e^{1t}\left(\underbrace{t^2}_{P_1(t)}\cos(0t) + \underbrace{1}_{Q_1(t)}\sin(0t)\right), \forall t \in \mathbb{R},$$

adică f_1 este de forma (7), cu $\alpha = 1$, $\beta = 0$, $P_1(t) = t^2$, $Q_1(t) = 1$. Cum $\lambda = 1 + 0i$ este rădacină caracteristică de multiplicitate $m(\lambda) = 2 = s \Rightarrow$ se caută o soluţie particulară pentru $(*_{EN1})$ folosind Teorema 1, b) de forma

$$x_{p_1}(t) = t^2 e^{1t}\left(A_1(t)\cos(0t) + B_1(t)\sin(0t)\right) = t^2 e^t A_1(t), \forall t \in \mathbb{R},$$

unde A_1 şi B_1 sunt polinoame de grad cel mai mare dintre gradele lui P_1 şi Q_1, adică 2. Se determină coeficienţii $\mu_i, i \in \{0,1,2\}$ ai polinomului $A_1(t) = \mu_0 + \mu_1 t + \mu_2 t^2$ impunând ca x_{p_1} să fie soluţie particulară a $(*_{EN1})$.

$$\begin{array}{rl|l}
1 & \cdot & x_{p_1}(t) = e^t\left(\mu_0 t^2 + \mu_1 t^3 + \mu_2 t^4\right) \\
-1 & \cdot & x'_{p_1}(t) = e^t\left(\mu_0 t^2 + \mu_1 t^3 + \mu_2 t^4\right) + e^t\left(2\mu_0 t + 3\mu_1 t^2 + 4\mu_2 t^3\right) \\
0 & \cdot & x''_{p_1}(t) = e^t\left(\mu_0 t^2 + \mu_1 t^3 + \mu_2 t^4\right) + 2e^t\left(2\mu_0 t + 3\mu_1 t^2 + 4\mu_2 t^3\right) + \\
 & & \qquad e^t\left(2\mu_0 + 6\mu_1 t + 12\mu_2 t^2\right) \\
0 & \cdot & x'''_{p_1}(t) = e^t\left(\mu_0 t^2 + \mu_1 t^3 + \mu_2 t^4\right) + 3e^t\left(2\mu_0 t + 3\mu_1 t^2 + 4\mu_2 t^3\right) + \\
 & & \qquad 3e^t\left(2\mu_0 + 6\mu_1 t + 12\mu_2 t^2\right) + e^t\left(6\mu_1 + 24\mu_2 t\right) \\
-1 & \cdot & x^{(4)}_{p_1}(t) = e^t\left(\mu_0 t^2 + \mu_1 t^3 + \mu_2 t^4\right) + 4e^t\left(2\mu_0 t + 3\mu_1 t^2 + 4\mu_2 t^3\right) + \\
 & & \qquad 6e^t\left(2\mu_0 + 6\mu_1 t + 12\mu_2 t^2\right) + 4e^t\left(6\mu_1 + 24\mu_2 t\right) + e^t\left(24\mu_2 t\right) \\
1 & \cdot & x^{(5)}_{p_1}(t) = e^t\left(\mu_0 t^2 + \mu_1 t^3 + \mu_2 t^4\right) + 5e^t\left(2\mu_0 t + 3\mu_1 t^2 + 4\mu_2 t^3\right) + \\
 & & \qquad 10e^t\left(2\mu_0 + 6\mu_1 t + 12\mu_2 t^2\right) + 10e^t\left(6\mu_1 + 24\mu_2 t\right) + 5e^t\left(24\mu_2 t\right) \\
\hline
\multicolumn{2}{r|}{+ \text{ în } (*_{EN1})} & t^2 e^t = (1-1-1+1)\, e^t\left(\mu_0 t^2 + \mu_1 t^3 + \mu_2 t^4\right) + (-1-4+5)\, e^t \cdot \\
 & & \quad \cdot\left(2\mu_0 t + 3\mu_1 t^2 + 4\mu_2 t^3\right) + (-6+10)\, e^t\left(2\mu_0 + 6\mu_1 t + 12\mu_2 t^2\right) + \\
 & & \quad (-4+10)\, e^t\left(6\mu_1 + 24\mu_2 t\right) + (-1+5)\, e^t\left(24\mu_2 t\right), \forall t \in \mathbb{R}
\end{array}$$

Se împarte prin e^t, apoi identificăm coeficienţii puterilor lui $t \Rightarrow$

$$\begin{array}{l} t^0: \\ t^1: \\ t^2: \\ t^3: \\ t^4: \end{array}
\left\{\begin{array}{l} 0 = 0 \\ 0 = 0 \\ 1 = 48\mu_2 \\ 0 = 24\mu_1 + 6\cdot 24\mu_2 \\ 0 = 8\mu_0 + 36\mu_1 + 4\cdot 24\mu_2 \end{array}\right.
\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \mu_0 = \frac{5}{16} \\ \mu_1 = \frac{-1}{8} \\ \mu_2 = \frac{1}{48} \end{array}\right.$$

S-a obţinut

$$x_{p_1}(t) = t^2 e^t\left(\tfrac{5}{16} + \tfrac{-1}{8}t + \tfrac{1}{48}t^2\right), \forall t \in \mathbb{R}.$$

<u>Etapa 2.2 :</u> Fie $(*_{EN2})$ $x^{(5)} - x^{(4)} - x' + x = \sin t, t \in \mathbb{R}$.

Se observă că $f_2(t) = \sin t = e^{0t}\left[\underbrace{0}_{P_2(t)}\cos(1t) + \underbrace{1}_{Q_2(t)}\sin(1t)\right], \forall t \in \mathbb{R}$,

adică f_2 este de forma (7), cu $\alpha = 0$, $\beta = 1$, $P_2(t) = 0$, $Q_2(t) = 1$. Cum $\lambda = 0 + 1i$ este rădacină caracteristică de multiplicitate $m(\lambda) = 1 = s \Rightarrow$ se caută o soluţie particulară pentru $(*_{EN2})$ folosind Teorema 1, b) de forma

$$x_{p_2}(t) = te^{0t}\left(A_2(t)\cos(1t) + B_2(t)\sin(1t)\right), \forall t \in \mathbb{R},$$

unde A_2 şi B_2 sunt polinoame de grad cel mai mare dintre gradele lui P_2 şi Q_2, adică 0. Se determină polinoamele constante $A_2(t) = \mu_0$ şi $B_2(t) = \nu_0$ impunând ca x_{p_2} să fie soluţie particulară a $(*_{EN2})$.

$$\begin{array}{rl|l}
1 & \cdot & x_{p_2}(t) = t\left(\mu_0\cos t + \nu_0\sin t\right) \\
-1 & \cdot & x'_{p_2}(t) = \left(\mu_0\cos t + \nu_0\sin t\right) + t\left(-\mu_0\sin t + \nu_0\cos t\right) \\
0 & \cdot & x''_{p_2}(t) = 2\left(-\mu_0\sin t + \nu_0\cos t\right) + t\left(-\mu_0\cos t - \nu_0\sin t\right) \\
0 & \cdot & x'''_{p_2}(t) = 3\left(-\mu_0\cos t - \nu_0\sin t\right) + t\left(\mu_0\sin t - \nu_0\cos t\right) \\
-1 & \cdot & x^{(4)}_{p_2}(t) = 4\left(\mu_0\sin t - \nu_0\cos t\right) + t\left(\mu_0\cos t + \nu_0\sin t\right) \\
1 & \cdot & x^{(5)}_{p_2}(t) = 5\left(\mu_0\cos t + \nu_0\sin t\right) + t\left(-\mu_0\sin t + \nu_0\cos t\right)
\end{array}$$

$$\begin{array}{l|l} \overline{+\text{ în } (*_{EN}2)} & \sin t = (\mu_0 t - \mu_0 - \nu_0 t + 4\nu_0 - \mu_0 t + 5\mu_0 + \nu_0 t)\cos t + \\ & + (\nu_0 t - \nu_0 + \mu_0 t - 4\mu_0 - \nu_0 t + 5\nu_0 - \mu_0 t)\sin t, \forall t \in \mathbb{R} \end{array}$$

Cum $(\cos t, \sin t), \forall t \in \mathbb{R}$ sunt funcţii liniar independente pe $\mathbb{R}$ (au $W = 1$) $\Rightarrow$ identificăm coeficienţii lor$\Rightarrow$

$$\begin{array}{l} \cos t : \\ \sin t : \end{array} \left\{ \begin{array}{l} 0 = 4\mu_0 + 4\nu_0 \\ 1 = -4\mu_0 + 4\nu_0 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \mu_0 = \frac{-1}{8} \\ \nu_0 = \frac{1}{8} \end{array} \right.$$

Se putea ajunge la două egalităţi de polinoame din care să fi identificat şi coeficienţii puterilor lui t. S-a obţinut

$$x_{p_2}(t) = t\left(\frac{-1}{8}\cos t + \frac{1}{8}\sin t\right), \forall t \in \mathbb{R}.$$

Etapa 2.3 : Fie $(*_{EN}3)$ $x^{(5)} - x^{(4)} - x' + x = t^2, t \in \mathbb{R}$,

Se observă că $f_3(t) = t^2 = e^{0t}\left(\underbrace{t^2}_{P_3(t)}\cos(0t) + \underbrace{1}_{Q_3(t)}\sin(0t)\right), \forall t \in \mathbb{R}$,

adică f_3 este de forma (7), cu $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $P_3(t) = t^2$, $Q_3(t) = 1$. Cum $\lambda = 0 + 0i$ nu este rădacină caracteristică $\Rightarrow$ se caută o soluţie particulară pentru $(*_{EN}3)$ folosind Teorema 1, a) de forma

$$x_{p_3}(t) = e^{0t}(A_3(t)\cos(0t) + B_3(t)\sin(0t)) = A_3(t), \forall t \in \mathbb{R},$$

unde A_3 şi B_3 sunt polinoame de grad cel mai mare dintre gradele lui P_3 şi Q_3, adică 2. Se determină coeficienţii $\mu_i, i \in \{0,1,2\}$ ai polinomului $A_3(t) = \mu_0 + \mu_1 t + \mu_2 t^2$ impunând ca x_{p_3} să fie soluţie particulară a $(*_{EN}3)$.

$$\begin{array}{ll|l} 1 & \cdot & x_{p_3}(t) = \mu_0 + \mu_1 t + \mu_2 t^2 \\ -1 & \cdot & x'_{p_3}(t) = \mu_1 + 2\mu_2 t \\ 0 & \cdot & x''_{p_3}(t) = 2\mu_2 \\ 0 & \cdot & x'''_{p_3}(t) = 0 \\ -1 & \cdot & x^{(4)}_{p_3}(t) = 0 \\ 1 & \cdot & x^{(5)}_{p_3}(t) = 0 \\ \hline \multicolumn{2}{l|}{+\text{ în } (*_{EN}3)} & t^2 = (\mu_0 - \mu_1) + (\mu_1 - 2\mu_2)t + \mu_2 t^2, \forall t \in \mathbb{R} \end{array}$$

Identificăm coeficienţii puterilor lui $t \Rightarrow$

$$\begin{array}{l} t^0 : \\ t^1 : \\ t^2 : \end{array} \left\{ \begin{array}{l} 0 = \mu_0 - \mu_1 \\ 0 = \mu_1 - 2\mu_2 \\ 1 = \mu_2 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \mu_0 = 2 \\ \mu_1 = 2 \\ \mu_2 = 1 \end{array} \right.$$

S-a obţinut

$$x_{p_3}(t) = 2 + 2t + t^2, \forall t \in \mathbb{R}.$$

Atunci o soluţie particulară pentru $(*_{EN})$ este

$$x_p(t) = 1t^2 e^t\left(\frac{5}{16} + \frac{-1}{8}t + \frac{1}{48}t^2\right) + 1t\left(\frac{-1}{8}\cos t + \frac{1}{8}\sin t\right) + 1\left(2 + 2t + t^2\right), \forall t \in \mathbb{R}.$$

Etapa 3 : Soluţia generală a ecuaţiei neomogene $(*_{EN})$ este dată de

$$x(t; c_1, ..., c_4) = x_o(t; c_1, ..., c_4) + x_p(t), \forall t \in \mathbb{R} \text{ şi } c_1, ..., c_4 \in \mathbb{R}.$$

Se înlocuieşte $x_o(t; c_1, ..., c_4)$ de la Etapa 1 şi $x_p(t)$ de la Etapa 2.

b) $x''' + x'' = t^2 + 1 + 3te^t$;

Indicaţie: $\forall t \in \mathbb{R}$,

$$f_1(t) = t^2 + 1 = e^{0t}\left(\underbrace{(t^2+1)}_{P_1(t)}\cos(0t) + \underbrace{1}_{Q_1(t)}\sin(0t)\right); f_2(t) = 3te^t = e^{1t}\left(\underbrace{3t}_{P_2(t)}\cos(0t) + \underbrace{1}_{Q_2(t)}\sin(0t)\right).$$

c) $x^{(4)} - 2x''' + 2x'' - 2x' + x = te^t + \frac{1}{2}\cos t$;
Indicaţie: $\forall t \in \mathbb{R}$,

$$f_1(t) = te^t = e^{1t}\left(\underbrace{t}_{P_1(t)}\cos(0t) + \underbrace{1}_{Q_1(t)}\sin(0t)\right); f_2(t) = \frac{1}{2}\cos t = e^{0t}\left(\underbrace{\frac{1}{2}}_{P_2(t)}\cos(1t) + \underbrace{0}_{Q_2(t)}\sin(1t)\right).$$

d) $x^{(5)} - x^{(4)} = te^t - 1$;
Indicaţie: $\forall t \in \mathbb{R}$,

$$f_1(t) = te^t = e^{1t}\left(\underbrace{t}_{P_1(t)}\cos(0t) + \underbrace{1}_{Q_1(t)}\sin(0t)\right); f_2(t) = -1 = e^{0t}\left(\underbrace{-1}_{P_2(t)}\cos(0t) + \underbrace{1}_{Q_2(t)}\sin(0t)\right).$$

e) A se vedea Curs.

Problema Cauchy asociată unei ecuaţii diferenţiale liniare neomogene/omogene de ordinul n cu coeficienţi constanţi cu datele $\mathcal{D} = (\mathbb{I}, f, t_0, \mathbf{x}_0)$ constă în determinarea unei funcţii $x : \mathbb{I} \to \mathbb{R}$ de clasă $\mathcal{C}^n$, unde $\mathbb{I} \subseteq \mathbb{R}$ este un interval nevid deschis, $t_0 \in \mathbb{I}, x_{0,i} \in \mathbb{R}$, $i = \overline{0, n-1}$ pentru care

$$\mathcal{PC}(\mathcal{D}) : \begin{cases} (1)\ \ x^{(n)}(t) + a_1 x^{(n-1)}(t) + ... + a_{n-1}x'(t) + a_n x(t) = f(t), t \in \mathbb{I} \\ (CI)\ \ x(t_0) = x_{0,0}, x'(t_0) = x_{0,1}, ..., x^{(n-1)}(t_0) = x_{0,n-1}. \end{cases}$$

Funcţia x se numeşte *soluţie a problemei Cauchy* $\mathcal{PC}(\mathcal{D})$.
Rezolvare (exactă)**:** Pentru $t \in \mathbb{I}$, variabilă independentă din domeniul de definiţie a soluţiei, se caută $x(t; c_1, ..., c_n)$, soluţia generală pentru ecuaţia (1). Apoi se impun asupra soluţiei generale condiţiile iniţiale.

Exerciţiul 5. Să se determine soluţia următoarelor probleme Cauchy:

a) $\begin{cases} x''' - x' = -2t, \\ CI : x(0) = 0, x'(0) = 1, x''(0) = 2; \end{cases}$

b) $\begin{cases} x'' - 5x' + 4x = 0, \\ CI : x(0) = 5, x'(0) = 8; \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} x'' + 3x' + 2x = 0, \\ CI : x(0) = 1, x'(0) = -1; \end{cases}$

d) $\begin{cases} x'' - 4x' + 5x = 2t^2 e^t, \\ CI : x(0) = 2, x'(0) = 3; \end{cases}$ **e)** $\begin{cases} x''' + 2x'' + 2x' + x = t, \\ CI : x(0) = x'(0) = x''(0) = 0; \end{cases}$

f) $\begin{cases} x''' - x' = -2t, \\ CI : x(0) = 0, x'(0) = 1, x''(0) = 2; \end{cases}$ **g)** $\begin{cases} x'' + 4x = \sin 2t, \\ CI : x(0) = 0, x'(0) = 0; \end{cases}$

h) $\begin{cases} x''' + 3x'' - x' - 3x = 0, \\ CI : x(0) = 0, x'(0) = 1, x''(0) = -1; \end{cases}$ **i)** $\begin{cases} x'' + x = \dfrac{1}{\cos t}, \\ CI : x(0) = 1, x'(0) = -1. \end{cases}$

Rezolvare : a) Fie $(*_{EN})$ $x''' - x' = -2t, t \in \mathbb{R}$.
Ecuaţia $(*_{EN})$ este o ecuaţie diferenţială de ordin 3, liniară, cu coeficienţii constanţi $a_1 = 0$, $a_2 = 0$, $a_3 = -1$, neomogenă cu termenul liber $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(t) = -2t$. Pentru $t \in \mathbb{R}$, variabilă independentă din domeniul de definiţie a soluţiei, se caută $x(t; c_1, ..., c_3)$, soluţia generală pentru ecuaţia $(*_{EN})$.
Etapa 1 : Se determină soluţia generală a ecuaţiei omogene ataşate ecuaţiei $(*_{EN})$, adică a ecuaţiei $(*_{EO})$ $x''' - x' = 0, t \in \mathbb{R}$.
Pasul 1 : Se ataşează ecuaţiei diferenţiale $(*_{EO})$ ecuaţia ei caracteristică

$$(*_{EC})\ \lambda^3 - \lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda(\lambda-1)(\lambda+1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0 \text{ cu } m(\lambda_1) = 1, \\ \lambda_2 = 1 \text{ cu } m(\lambda_2) = 1, \\ \lambda_3 = -1 \text{ cu } m(\lambda_3) = 1. \end{cases}$$

<u>Pasul 2 :</u> Pentru fiecare rădăcină a ecuaţiei caracteristice se găsesc corespunzător soluţii particulare liniar independente ale ecuaţiei omogene $(*_{EO})$, după algoritmul dat

•$\lambda_1 = 0$ cu $m(\lambda_1) = 1 \rightsquigarrow x_1(t) = e^{0t}$,
•$\lambda_2 = 1$ cu $m(\lambda_2) = 1 \rightsquigarrow x_2(t) = e^{1t}$,
•$\lambda_3 = -1$ cu $m(\lambda_3) = 1 \rightsquigarrow x_3(t) = e^{-1t}$,

<u>Pasul 3 :</u> Conform algoritmului de la Pasul 2, (x_1, x_2, x_3) este un sistem fundamental de soluţii pentru $(*_{EO})$ (sunt exact 3 soluţii particulare pentru $(*_{EO})$ şi funcţii liniar independente). Atunci soluţia generală a ecuaţiei $(*_{EO})$ este

$x_o(t; c_1, c_2, c_3) = c_1 1 + c_2 e^t + c_3 e^{-t}, \forall t \in \mathbb{R}$ şi $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$.

Reprezentând grafic pe $\mathbb{I} = \mathbb{R}$ pentru

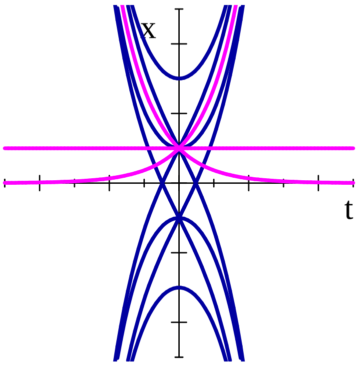
$(c_1, c_2, c_3) = (1, 0, 0)$, $(c_1, c_2, c_3) = (0, 1, 0)$, $(c_1, c_2, c_3) = (0, 0, 1)$

cu magenta (soluţiile particulare din sistemul fundamental) şi pentru

$(c_1, c_2, c_3) = (1, 1, 1), (c_1, c_2, c_3) = (-1, 1, 1), (c_1, c_2, c_3) = (1, -1, 1), (c_1, c_2, c_3) = (1, 1, -1),$

$(c_1, c_2, c_3) = (-1, -1, 1), (c_1, c_2, c_3) = (1, -1, -1), (c_1, c_2, c_3) = (-1, 1, -1), (c_1, c_2, c_3) = (-1, -1, -1),$

cu albastru, se obţine



<u>Etapa 2 :</u> Se determină o soluţie particulară a ecuaţiei neomogene $(*_{EN})$.

Metoda variaţiei constantelor : Deoarece (x_1, x_2, x_3) este un sistem fundamental de soluţii pentru $(*_{EO})$ se caută x_p de forma

$$x_p(t) = u_1(t)\underbrace{1}_{x_1(t)} + u_2(t)\underbrace{e^t}_{x_2(t)} + u_3(t)\underbrace{e^{-t}}_{x_3(t)}, \forall t \in \mathbb{R},$$

unde $u_i' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $i \in \{1, 2, 3\}$, sunt soluţii ale sistemului

$$\begin{cases} u_1'(t) \cdot 1 + u_2'(t) e^t + u_3'(t) e^{-t} = 0 \\ u_1'(t) \cdot 0 + u_2'(t) e^t + u_3'(t)\left(-e^{-t}\right) = 0 \\ u_1'(t) \cdot 0 + u_2'(t) e^t + u_3'(t) e^{-t} = -2t \end{cases}$$

Calculăm

$$\Delta(t) = W(t; x_1, x_2, x_3) = \begin{vmatrix} 1 & e^t & e^{-t} \\ 0 & e^t & -e^{-t} \\ 0 & e^t & e^{-t} \end{vmatrix} = 2 \neq 0, \forall t \in \mathbb{R}.$$

$$\Delta_1(t) = \begin{vmatrix} 0 & e^t & e^{-t} \\ 0 & e^t & -e^{-t} \\ -2t & e^t & e^{-t} \end{vmatrix} = 4t, \forall t \in \mathbb{R}.$$

$$\Delta_2(t) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & e^{-t} \\ 0 & 0 & -e^{-t} \\ 0 & -2t & e^{-t} \end{vmatrix} = -2te^{-t}, \forall t \in \mathbb{R}.$$

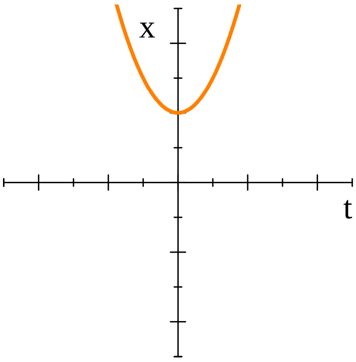
$$\Delta_3(t) = \begin{vmatrix} 1 & e^{t} & 0 \\ 0 & e^{t} & 0 \\ 0 & e^{t} & -2t \end{vmatrix} = -2te^{t}, \forall t \in \mathbb{R}.$$

Atunci

$$\begin{cases} u_1'(t) = \frac{\Delta_1(t)}{\Delta(t)} = 2t \\ u_2'(t) = \frac{\Delta_2(t)}{\Delta(t)} = -te^{-t} \\ u_3'(t) = \frac{\Delta_3(t)}{\Delta(t)} = -te^{t} \end{cases} \int(\cdot)\,dt \Rightarrow \begin{cases} u_1(t) = t^2 + k_1 \\ u_2(t) = (t+1)e^{-t} + k_2 \\ u_3(t) = -(t-1)e^{t} + k_3 \end{cases}$$

Deoarece se caută o soluţie particulară x_p se alege $k_1 = 0$, $k_2 = 0$, $k_3 = 0$. S-a obţinut

$$x_p(t) = t^2 \cdot 1 + (t+1)e^{-t} \cdot e^{t} + \left(-(t-1)e^{t}\right) \cdot e^{-t}, \forall t \in \mathbb{R} \Rightarrow x_p(t) = t^2 + 2, \forall t \in \mathbb{R}$$



Metoda coeficienţilor nedeterminaţi : Deoarece $(*_{EN})$ are coeficienţi constanţi şi termenul liber un cvasipolinom (vezi mai jos) atunci se poate căuta x_p şi cu Teorema 1. Într-adevăr,

$$f(t) = -2t = e^{0t}\left(\underbrace{(-2t)}_{P(t)}\cos(0t) + \underbrace{1}_{Q(t)}\sin(0t)\right), \forall t \in \mathbb{R},$$

adică f este de forma (7), cu $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $P(t) = t^3$, $Q(t) = 1$. Cum $\lambda = 0 + 0i$ este rădacină caracteristică de multiplicitate $m(\lambda) = 1 = s \Rightarrow$ se caută o soluţie particulară pentru $(*_{EN})$ folosind Teorema 1, b) de forma

$$x_p(t) = te^{0t}A((t)\cos(0t) + B(t)\sin(0t)) = tA(t), \forall t \in \mathbb{R},$$

unde A şi B sunt polinoame de grad cel mai mare dintre gradele lui P şi Q, adică 1. Se determină coeficienţii $\mu_i, i \in \{0,1\}$ ai polinomului $A(t) = \mu_0 + \mu_1 t$ impunând ca x_p să fie soluţie particulară a $(*_{EN})$.

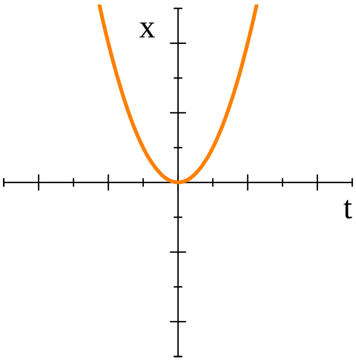
$$\begin{array}{l|l} 0 & \cdot\, x_p(t) = \mu_0 t + \mu_1 t^2 \\ -1 & \cdot\, x_p'(t) = \mu_0 + 2\mu_1 t \\ 0 & \cdot\, x_p''(t) = 2\mu_1 \\ 1 & \cdot\, x_p'''(t) = 0 \\ \hline + \text{ în } (*_{EN}) & -2t = -\mu_0 - 2\mu_1 t, \forall t \in \mathbb{R} \end{array}$$

Identificăm coeficienţii puterilor lui $t \Rightarrow$

$$\begin{array}{l} t^0 : \\ t^1 : \end{array} \begin{cases} 0 = -\mu_0 \\ -2 = -2\mu_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mu_0 = 0 \\ \mu_1 = 1 \end{cases}$$

S-a obţinut

$x_p(t) = t^2, \forall t \in \mathbb{R}.$



Era posibil să se obţină soluţii particulare diferite prin cele două metode.

Etapa 3 : Soluţia generală a ecuaţiei neomogene $(*_{EN})$ este dată de

$x(t; c_1, c_2, c_3) = x_o(t; c_1, c_2, c_3) + x_p(t), \forall t \in \mathbb{R}$ şi $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$.

Se înlocuieşte $x_o(t; c_1, ..., c_4)$ de la Etapa 1 şi una din $x_p(t)$ de la Etapa 2. Se obţine

$x(t; c_1, c_2, c_3) = c_1 1 + c_2 e^t + c_3 e^{-t} + t^2 + 2, \forall t \in \mathbb{R}$ şi $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$.

sau

$x(t; \widetilde{c}_1, \widetilde{c}_2, \widetilde{c}_3) = \widetilde{c}_1 1 + \widetilde{c}_2 e^t + \widetilde{c}_3 e^{-t} + t^2, \forall t \in \mathbb{R}$ şi $\widetilde{c}_1, \widetilde{c}_2, \widetilde{c}_3 \in \mathbb{R}$.

Etapa 4 : Pentru a determina soluţia problemei Cauchy $((*_{EN}), CI)$ se impun asupra soluţiei găsite x condiţiile iniţiale

$$\begin{cases} x(t) = c_1 1 + c_2 e^t + c_3 e^{-t} + t^2 + 2 \overset{x(0)=0}{\Rightarrow} c_1 1 + c_2 e^0 + c_3 e^{-0} + 0^2 + 2 = 0 \\ x'(t) = c_2 e^t + c_3\left(-e^{-t}\right) + 2t \overset{x'(0)=1}{\Rightarrow} c_2 e^0 + c_3\left(-e^{-0}\right) + 2 \cdot 0 = 1 \\ x''(t) = c_2 e^t + c_3 e^{-t} + 2 \overset{x''(0)=2}{\Rightarrow} c_2 e^0 + c_3 e^{-0} + 2 = 2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} c_1 + c_2 + c_3 = -2 \\ c_2 - c_3 = 1 \\ c_2 + c_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = -2 \\ c_2 = \frac{1}{2} \\ c_3 = \frac{-1}{2} \end{cases}$$

Sau

$$\begin{cases} x(t) = \widetilde{c}_1 1 + \widetilde{c}_2 e^t + \widetilde{c}_3 e^{-t} + t^2 \overset{x(0)=0}{\Rightarrow} \widetilde{c}_1 1 + \widetilde{c}_2 e^0 + \widetilde{c}_3 e^{-0} + 0^2 = 0 \\ x'(t) = \widetilde{c}_2 e^t + \widetilde{c}_3\left(-e^{-t}\right) + 2t \overset{x'(0)=1}{\Rightarrow} \widetilde{c}_2 e^0 + \widetilde{c}_3\left(-e^{-0}\right) + 2 \cdot 0 = 1 \\ x''(t) = \widetilde{c}_2 e^t + \widetilde{c}_3 e^{-t} + 2 \overset{x''(0)=2}{\Rightarrow} \widetilde{c}_2 e^0 + \widetilde{c}_3 e^{-0} + 2 = 2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \widetilde{c}_1 + \widetilde{c}_2 + \widetilde{c}_3 = 0 \\ \widetilde{c}_2 - \widetilde{c}_3 = 1 \\ \widetilde{c}_2 + \widetilde{c}_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \widetilde{c}_1 = 0 \\ \widetilde{c}_2 = \frac{1}{2} \\ \widetilde{c}_3 = \frac{-1}{2} \end{cases}$$

Atunci

$x(t) = \frac{1}{2} e^t + \frac{-1}{2} e^{-t} + t^2 = \operatorname{sh} t + t^2, \forall t \in \mathbb{R},$

este unica soluţie a ecuaţiei $(*_{EN})$ ce verifică CI date.

Reprezentând grafic pe $\mathbb{I} = \mathbb{R}$ pentru

$(c_1, c_2, c_3) = (1, 0, 0)$, $(c_1, c_2, c_3) = (0, 1, 0)$, $(c_1, c_2, c_3) = (0, 0, 1)$

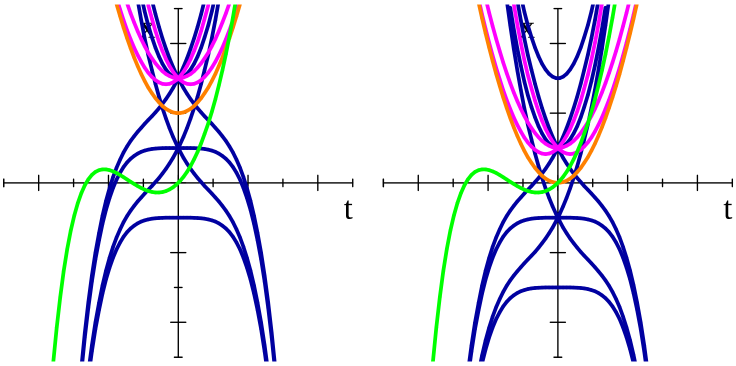
cu magenta (soluţiile particulare ale EN corespunzătoare celor din sistemul fundamental) şi pentru

$(c_1, c_2, c_3) = (1, 1, 1), (c_1, c_2, c_3) = (-1, 1, 1), (c_1, c_2, c_3) = (1, -1, 1), (c_1, c_2, c_3) = (1, 1, -1),$

$(c_1, c_2, c_3) = (-1, -1, 1), (c_1, c_2, c_3) = (1, -1, -1), (c_1, c_2, c_3) = (-1, 1, -1), (c_1, c_2, c_3) = (-1, -1, -1),$

cu albastru, şi pentru

$(c_1, c_2, c_3) = (0, 0, 0)$
cu portocaliu (soluţia particulară a EN cu metoda variaţiei constantelor), şi pentru
$(c_1, c_2, c_3) = \left(0, \frac{1}{2}, \frac{-1}{2}\right)$
cu verde (soluţia problemei Cauchy), apoi analog pentru $(\widetilde{c}_1, \widetilde{c}_2, \widetilde{c}_3)$, se obţine



h), i) A se vedea Curs.