SEMINAR NR. 7, REZOLVĂRI
EDCO, AIA

4.2. Sisteme de n ecuaţii diferenţiale de ordinul 1, liniare, având coeficienţi constanţi

Forma generală a unui sistem de n ecuaţii diferenţiale de ordinul 1, liniare, neomogen/omogen, având coeficienţi constanţi, sub formă normală:

$$\boxed{\begin{cases} x_1'(t) = a_{11}x_1(t) + a_{12}x_2(t) + ... + a_{1n}x_n(t) + b_1(t) \\ x_2'(t) = a_{21}x_1(t) + a_{22}x_2(t) + ... + a_{2n}x_n(t) + b_2(t) \\ \vdots \\ x_n'(t) = a_{n1}x_1(t) + a_{n2}x_2(t) + ... + a_{nn}x_n(t) + b_n(t) \end{cases}, t \in \mathbb{I}} \tag{1}$$

unde $\mathbb{I} \subseteq \mathbb{R}$ este un interval nevid deschis, $a_{ij} \in \mathbb{R}$, $i, j \in \{1, ..., n\}$, sunt numere reale numite *coeficienţi constanţi*, iar $b_i : \mathbb{I} \to \mathbb{R}, i \in \{1, ..., n\}$, sunt funcţii continue numite *termeni liberi*. Dacă $b_i : \mathbb{I} \to \mathbb{R}$ sunt funcţii identic nule $\forall i \in \{1, ..., n\}$, atunci (1) se numeşte sistem *omogen SO*; dacă $\exists i \in \{1, ..., n\}$ a.î. $b_i : \mathbb{I} \to \mathbb{R}$ este funcţie neidentic nulă, atunci (1) se numeşte sistem *neomogen SN*. Funcţiile $x_j : \mathbb{I} \to \mathbb{R}, j \in \{1, ..., n\}$ sunt funcţiile *necunoscute* ale sistemului. O funcţie $\underline{\mathbf{x}} : \mathbb{I} \to \mathcal{M}_{n\times1}(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^n$, $\underline{\mathbf{x}}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ ... \\ x_n(t) \end{pmatrix} \simeq (x_1(t), ..., x_n(t))$ de clasă $\mathcal{C}^1$ ce verifică (1) se numeşte *soluţie* pentru sistem. A se vedea Curs pentru notaţiile $A, \underline{\mathbf{b}}$.

Rezolvare: Pentru $t \in \mathbb{I}$, variabilă independentă din domeniul de definiţie a soluţiei, se caută

$$\underline{\mathbf{x}} : \mathbb{I} \to \mathcal{M}_{n\times1}(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^n, \underline{\mathbf{x}}(t, \underline{\mathbf{c}}) = \begin{pmatrix} x_1(t; c_1, ..., c_n) \\ x_2(t; c_1, ..., c_n) \\ ... \\ x_n(t; c_1, ..., c_n) \end{pmatrix},$$

soluţia generală pentru SN.

Metoda eliminării direct pentru SO, SN: ca în exerciţii

Metoda cu valori proprii (la SO; indirect şi pentru SN): ca în exerciţii

Etapa 1 : Se determină soluţia generală a SO ataşat sistemului (1), notată $\underline{\mathbf{x}}_o(t; \underline{\mathbf{c}})$:

$$\boxed{\begin{cases} x_1'(t) = a_{11}x_1(t) + a_{12}x_2(t) + ... + a_{1n}x_n(t) \\ x_2'(t) = a_{21}x_1(t) + a_{22}x_2(t) + ... + a_{2n}x_n(t) \\ \vdots \\ x_n'(t) = a_{n1}x_1(t) + a_{n2}x_2(t) + ... + a_{nn}x_n(t) \end{cases}, t \in \mathbb{I}, \text{ chiar } t \in \mathbb{R}} \tag{2}$$

Pasul 1 : Se ataşează ecuaţia caracteristică a matricei A şi se rezolvă. Adică se determină valorile proprii în $\mathbb{C}$ ale matricei A, precum şi multiplicitatea lor algebrică.

• Se determină polinomul caracteristic al matricei A,
$\boxed{P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_n)}$ sau
$\boxed{P_A(\lambda) = (-1)^n \left(\lambda^n - \delta_1\lambda^{n-1} + ... + (-1)^n \delta_n\right)}$, unde δ_i este suma minorilor principali de ordin i ai matricei A, $\boxed{\delta_1 = TrA, \delta_n = \det A.}$

•Se rezolvă ecuaţia caracteristică a matricei A,
$\boxed{P_A(\lambda) = 0.}$

Este o ecuaţie algebrică polinomială de grad n având coeficienţi reali, în necunoscuta λ, care admite exact n rădăcini complexe. Se determină, precizând şi multiplicitatea lor.

Pasul 2. Se determină un sitem fundamental de soluţii ale SO / o matrice fundamentală a SO.
modul 1.- aplicabil dacă $A \sim D$ în $\mathbb{R}$. Se determină subspaţiile proprii ale matricei A, precum şi dimensiunile lor (în $\mathbb{C}$ chiar-NU pentru EDCO în acest an universitar)
modul 1.1. Dacă A **este** diagonalizabilă în $\mathbb{R}$, pentru fiecare rădăcină a EC se găsesc corespunzător soluţii particulare liniar independente ale SO, după un algoritm precizat la exerciţii.

Dacă A **nu este** matrice diagonalizabilă în $\mathbb{R}$, chiar dacă este diagonalizabilă în $\mathbb{C}$ sau este cvasidiagonalizabilă (este asemenea cu o matrice Jordan), nu se foloseşte în cadrul acestui curs / seminar modul 1 pentru a găsi corespunzător soluţii particulare liniar independente ale SO.

Se găseşte o bază, un sistem fundamental de soluţii ale SO,

$B = (\underline{\mathbf{x}}_1, \underline{\mathbf{x}}_2, \ldots, \underline{\mathbf{x}}_n) \overset{\text{not.}}{=} (\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n)$, adică exact n soluţii particulare ale SO, liniar independente.
modul 1.2. O matrice fundamentală a SO este:

-sau $\mathcal{X}(t; \underline{\mathbf{x}}_1, \underline{\mathbf{x}}_2, \ldots, \underline{\mathbf{x}}_n) = \begin{pmatrix} x_{1,1}(t) & x_{1,2}(t) & ... & x_{1,n}(t) \\ x_{2,1}(t) & x_{2,2}(t) & ... & x_{2,n}(t) \\ ... & ... & ... & ... \\ x_{n,1}(t) & x_{n,2}(t) & ... & x_{n,n}(t) \end{pmatrix}$

-sau $\mathcal{X}(t) = e^{tA}$, unde

a) Dacă $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ este matrice diagonalizabilă în $\mathbb{R}$ (○chiar şi în $\mathbb{C}$), adică $\exists P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ inversabilă, matrice modală (cu vectori proprii ai A pe coloane), cu

$$A = PDP^{-1}, \text{ atunci } \boxed{e^{tA} = Pe^{tD}P^{-1}, \text{ unde } e^{tD_n} = \begin{pmatrix} e^{t\lambda_1} & 0 & ... & 0 \\ 0 & e^{t\lambda_2} & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & e^{t\lambda_n} \end{pmatrix}}$$

De menţionat că dacă λ_1 apare pe diagonala matricei D de m_1 ori, adică apare o celulă diagonală de ordin $m_1 = m(\lambda_1)$ cu λ_1 pe diagonală, atunci pe diagonala matricei e^{tD_n} apare o celulă diagonală corespunzătoare de ordin m_1 cu $e^{t\lambda_1}$ pe diagonală.

○**b)** Dacă $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ este matrice cvasidiagonalizabilă (poate fi adusă la o formă Jordan), adică $\exists P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ inversabilă, matrice modală (cu vectori proprii ai A pe coloane), cu

$A = PJP^{-1}$, atunci

$$\boxed{e^{tA} = Pe^{tJ}P^{-1}, \text{ unde } e^{tJ_n} = e^{t\lambda} \begin{pmatrix} 1 & \frac{t}{1!} & \frac{t^2}{2!} & ... & 0 & \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \\ 0 & 1 & \frac{t}{1!} & ... & 0 & \frac{t^{n-2}}{(n-2)!} \\ 0 & 0 & 1 & ... & 0 & \frac{t^{n-3}}{(n-3)!} \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... & 1 & \frac{t}{1!} \\ 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 1 \end{pmatrix}, e^{tJ} = \begin{pmatrix} e^{tJ_1} & & & \\ & e^{tJ_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & e^{tJ_s} \end{pmatrix}}.$$

modul 2. Pe baza teoriei de la ecuaţii diferenţiale de ordin n, liniare şi omogene, se caută n soluţii particulare liniar independente ale SO, ca în exerciţii.
Pasul 3 : Soluţia generală a SO
-sau este o combinaţie liniară de cele exact n soluţii particulare liniar independente determinate la Pasul 2

$$\boxed{\underline{\mathbf{x}}_o(t; c_1, ..., c_n) = c_1\underline{\mathbf{x}}_1(t) + ... + c_n\underline{\mathbf{x}}_n(t), \forall t \in \mathbb{I} \text{ şi } c_1, ..., c_n \in \mathbb{R},}$$

unde $\underline{\mathbf{x}}_j(t) \overset{\text{renotat}}{=} \varphi_j(t) = \begin{pmatrix} x_{1,j}(t) \\ x_{2,j}(t) \\ ... \\ x_{n,j}(t) \end{pmatrix}, \forall j \in \{1,...,n\}$ −index.

-sau este o combinaţie liniară de coloane ale matricei e^{tA},

$\boxed{\underline{\mathbf{x}}_o(t;\underline{\mathbf{c}}) = e^{tA}\cdot \underline{\mathbf{c}}, \forall t \in \mathbb{I}, \underline{\mathbf{c}} \in \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^n.}$

Etapa 2 : Se determină o soluţie particulară a SN, notată $\underline{\mathbf{x}}_p(t) = ?$.

Metoda variaţiei constantelor Teoretic se poate folosi la orice sistem, practic apar dificultăţi în aplicare când sistemul este de ordin mare şi apar de calculat (fără calculator) determinanţi funcţionali de ordinul respectiv, integrale.

Teoremă.Fie e^{tA} sau $\mathcal{X}(t;\underline{\mathbf{x}}_1,\underline{\mathbf{x}}_2,\ldots,\underline{\mathbf{x}}_n) = \begin{pmatrix} x_{1,1}(t) & x_{1,2}(t) & ... & x_{1,n}(t) \\ x_{2,1}(t) & x_{2,2}(t) & ... & x_{2,n}(t) \\ ... & ... & ... & ... \\ x_{n,1}(t) & x_{n,2}(t) & ... & x_{n,n}(t) \end{pmatrix}$ o matrice fundamentală a sistemului diferenţial omogen (2), cu soluţia generală a SO

$\underline{\mathbf{x}}_o(t;\underline{\mathbf{c}}) = c_1\underline{\mathbf{x}}_1(t) + ... + c_n\underline{\mathbf{x}}_n(t), \forall t \in \mathbb{I}$ şi $c_1,...,c_n \in \mathbb{R}$.

(dacă se dă e^{tA}, atunci $\underline{\mathbf{x}}_1,\underline{\mathbf{x}}_2,\ldots,\underline{\mathbf{x}}_n$ sunt coloanele matricei e^{tA}).

Atunci o soluţie particulară $\underline{\mathbf{x}}_p(t)$ pe $\mathbb{I}$ a sistemului diferenţial neomogen (1) este de forma

$\boxed{\underline{\mathbf{x}}_p(t) = u_1(t)\underline{\mathbf{x}}_1(t) + ... + u_n(t)\underline{\mathbf{x}}_n(t), \forall t \in \mathbb{I}.}$

unde $u_i' : \mathbb{I} \to \mathbb{R}$, $i \in \{1,...,n\}$, sunt funcţii-soluţii ale sistemului

$$\begin{cases} u_1'(t)\,x_{1,1}(t) + ... + u_n'(t)\,x_{1,n}(t) = b_1(t) \\ u_1'(t)\,x_{2,1}(t) + ... + u_n'(t)\,x_{2,n}(t) = b_2(t) \\ ... \\ u_1'(t)\,x_{n,1}(t) + ... + u_n'(t)\,x_{n,n}(t) = b_n(t)\,. \end{cases}$$

Se integrează rezultatele, se înlocuiesc expresiile lui u_i, $i \in \{1,...,n\}$ şi se obţine $\underline{\mathbf{x}}_p$.

Metoda coeficienţilor nedeterminaţi (asociată uneori cu **principiul superpoziţiei**): Se aplică numai pentru sisteme neomogene cu coeficienţi constanţi pentru care termenii liberi sunt cvasipolinoame de acelaşi tip sau combinaţii liniare de cvasipolinoame.

Teorema Fie SN (1) cu $\underline{\mathbf{b}}$ având pe coloană cvasipolinoame de acelaşi tip, adică

$\boxed{b_i(t) = e^{\alpha t}(P_i(t)\cos(\beta t) + Q_i(t)\sin(\beta t)), \forall t \in \mathbb{R}, i = \overline{1,n}}$

unde $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$, iar P_i, Q_i sunt polinoame, $i = \overline{1,n}$.

Dacă $\lambda = \alpha + \beta i$ este rădăcină a EC, cu multiplicitatea $m(\lambda) = s$ ($s = 0$ dacă $\lambda = \alpha + \beta i$ nu este rădăcină a EC), atunci SN admite o soluţie particulară de forma

$\underline{\mathbf{x}}_p(t) = \begin{pmatrix} x_{1,p}(t) \\ ... \\ x_{n,p}(t) \end{pmatrix}$, cu

$\boxed{x_{i,p}(t) = e^{\alpha t}(A_i(t)\cos(\beta t) + B_i(t)\sin(\beta t)), \forall t \in \mathbb{R}.}$

A_i şi B_i sunt polinoame de grad egal cu cel mai mare dintre gradele lui P_i şi Q_i la care se adună s, iar coeficienţii lor se determină impunând ca $\underline{\mathbf{x}}_p$ să verifice SN.

Teorema Fie SN (1), cu $\underline{\mathbf{b}}$ combinaţie liniară de coloane de funcţii continue (pot fi cvasipolinome în particular), adică

$\boxed{\underline{\mathbf{b}}(t) = \overline{c}_1\underline{\mathbf{b}}_1(t) + ... + \overline{c}_r\underline{\mathbf{b}}_r(t), \forall t \in \mathbb{I} \text{ şi } \overline{c}_1,...,\overline{c}_r \in \mathbb{R}.}$

unde $\underline{\mathbf{b}}_i \in C(\mathbb{R};\mathbb{R}^n)$ (în particular $\underline{\mathbf{b}}_i$ pot fi de forma (7)). Dacă, pentru $\forall i \in \{1,...,r\}$, $\underline{\mathbf{x}}_{p_i}$ sunt soluţii particulare pentru (SN$_i$)

$\boxed{\underline{\mathbf{x}}'(t) = A \cdot \underline{\mathbf{x}}(t) + \underline{\mathbf{b}}_i(t), t \in \mathbb{R}}$

atunci

$\boxed{\underline{\mathbf{x}}_p(t) = \bar{c}_1 \underline{\mathbf{x}}_{p_1}(t) + ... + \bar{c}_r \underline{\mathbf{x}}_{p_r}(t), \forall t \in \mathbb{R} \text{ şi } \bar{c}_1, ..., \bar{c}_r \in \mathbb{R}.}$

este soluţie particulară pentru EN.

Etapa 3 : Soluţia generală a sistemului diferenţial neomogen SN (1) este

$\boxed{\underline{\mathbf{x}}(t;\underline{\mathbf{c}}) = \underline{\mathbf{x}}_o(t;\underline{\mathbf{c}}) + \underline{\mathbf{x}}_p(t), t \in \mathbb{I}, \underline{\mathbf{c}} \in \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^n.}$

unde $\underline{\mathbf{x}}_o(t;\underline{\mathbf{c}})$ este soluţia generală a sistemului diferenţial omogen (2) şi $\underline{\mathbf{x}}_p(t)$ este o soluţie particulară a sistemului diferenţial neomogen (1).

Exerciţiul 1. Să se rezolve următoarele sisteme diferenţiale liniare:

a) $\begin{cases} x' = x + y \\ y' = -2x + 4y; \end{cases}$

Rezolvare : Sistemul $(SO)\begin{cases} x'(t) = x(t) + y(t) + 0 \\ y'(t) = -2x(t) + 4y(t) + 0 \end{cases}, t \in \mathbb{R},$

este sistem de $n = 2$ ecuaţii diferenţiale de ordin 1, liniare, cu coeficienţii constanţi, daţi de

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$,omogen, cu $\underline{\mathbf{b}}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, cu $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ =? funcţii necunoscute.

I. **Metoda eliminării**

Pasul 0: Din prima ecuaţie a $(SO) \Rightarrow$

$$\begin{cases} (\circ)\, y(t) = x'(t) - x(t) | \dfrac{d}{dt}() \\ y'(t) = x''(t) - x'(t) \end{cases}$$

Se înlocuiesc y şi y' în a doua ecuaţie a SO (se elimină y, y' din a doua ecuaţie a (SO)) $\Rightarrow$

$x''(t) - x'(t) = -2x(t) + 4(x'(t) - x(t)) \Rightarrow$

$(*_{EO})\, x''(t) - 5x'(t) + 6x(t) = 0.$

Ecuaţia $(*_{EO})$ este o ecuaţie diferenţială de ordin 2, liniară, cu coeficienţii constanţi -5, 6, omogenă. Pentru $t \in \mathbb{R}$, variabilă independentă din domeniul de definiţie a soluţiei, se caută $x_o(t; c_1, c_2)$, soluţia generală pentru ecuaţia $(*_{EO})$.

Pasul 1 : Se ataşează ecuaţiei diferenţiale $(*_{EO})$ ecuaţia ei caracteristică

$$(*_{EC})\ \lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0 \Leftrightarrow (\lambda - 2)(\lambda - 3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 2 \text{ cu } m(\lambda_1) = 1, \\ \lambda_2 = 3 \text{ cu } m(\lambda_2) = 1. \end{cases}$$

Pasul 2 : Pentru fiecare rădăcină a ecuaţiei caracteristice se găsesc corespunzător soluţii particulare liniar independente ale ecuaţiei omogene $(*_{EO})$

$\bullet \lambda_1 = 2$ cu $m(\lambda_1) = 1 \rightsquigarrow x_1(t) = e^{2t}$

$\bullet \lambda_2 = 3$ cu $m(\lambda_2) = 1 \rightsquigarrow x_2(t) = e^{3t}$.

$B = (x_1, x_2)$ este un sistem fundamental de soluţii pentru $(*_{EO})$.

Pasul 3 : Soluţia generală a ecuaţiei $(*_{EO})$ este

$x_o(t; c_1, c_2) = c_1 \cdot e^{2t} + c_2 \cdot e^{3t}, \forall t \in \mathbb{R}$ şi $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Pasul 4 : Se înlocuiesc x, x' în $(\circ)\, y(t) = x'(t) - x(t) \Rightarrow$

$y_o(t; c_1, c_2) = c_1 \cdot e^{2t} \cdot 2 + c_2 \cdot e^{3t} \cdot 3 - c_1 \cdot e^{2t} - c_2 \cdot e^{3t} = c_1 \cdot e^{2t} + 2c_2 \cdot e^{3t}$.

Concluzie: Soluţia generală a SO este

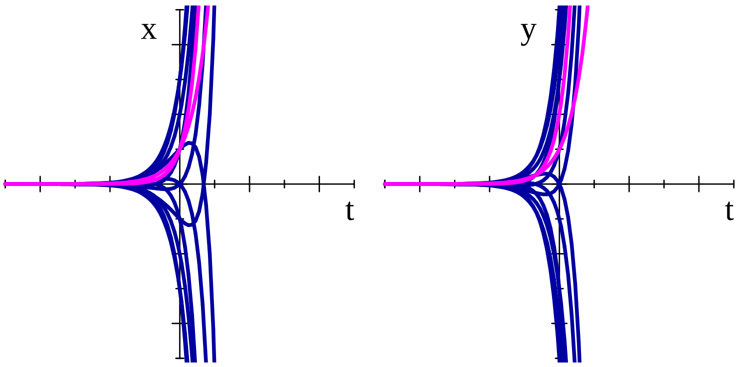
$$\begin{pmatrix} x_o(t; c_1, c_2) \\ y_o(t; c_1, c_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \cdot e^{2t} + c_2 \cdot e^{3t} \\ c_1 \cdot e^{2t} + 2c_2 \cdot e^{3t} \end{pmatrix} = c_1 \cdot \begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix} + c_2 \cdot \begin{pmatrix} e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix} =$$

$$= c_1 \cdot e^{2t} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\substack{\text{vect. pr. al } A \\ \text{coresp. lui } \lambda_1 = 2}} + c_2 \cdot e^{3t} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}}_{\substack{\text{vect. pr. al } A \\ \text{coresp. lui } \lambda_2 = 3}} .$$

Reprezentând grafic pe x şi y pe $\mathbb{I} = \mathbb{R}$ pentru $(c_1, c_2) = (1, 0)$ şi $(c_1, c_2) = (0, 1)$ cu magenta (corespunzătoare soluţiilor particulare din sistemul fundamental) şi pentru

$(c_1, c_2) = (1, 1), (c_1, c_2) = (1, -1), (c_1, c_2) = (-1, 1), (c_1, c_2) = (-1, -1),$
$(c_1, c_2) = (1, 2), (c_1, c_2) = (2, 1), (c_1, c_2) = (-1, 2), (c_1, c_2) = (-2, 1)$
$(c_1, c_2) = (1, -2), (c_1, c_2) = (2, -1), (c_1, c_2) = (-1, -2), (c_1, c_2) = (-2, -1)$

cu albastru, se obţine:



Comentariu: Soluţiile x şi y sunt de acelaşi tip, de aceeaşi formă (combinaţii liniare de e^{2t} şi e^{3t}), deoarece sunt legate în SO şi, ca soluţii, prin constantele de indexare (c_1, c_2).

II. **Metoda cu valori proprii**

Pasul 1 : Se ataşează ecuaţia caracteristică a matricei A şi se rezolvă. Adică se determină valorile proprii în $\mathbb{C}$ ale matricei A, precum şi multiplicitatea lor algebrică.

•Se determină polinomul caracteristic al matricei $A, P_A(\lambda)$.

$$\boxed{P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_2)} = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ -2 & 4-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 5\lambda + 6 \text{ sau}$$

$$\boxed{P_A(\lambda) = (-1)^2 \left(\lambda^2 - \delta_1 \lambda + \delta_2\right)} = \lambda^2 - 5\lambda + 6, \text{ unde}$$

$$\boxed{\delta_1 = \operatorname{Tr} A} = 1 + 4 = 5; \boxed{\delta_2 = \det A} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = 6$$

•Se rezolvă ecuaţia caracteristică a matricei A (este aceeaşi cu cea a ecuaţiei caracteristice pentru $(*_{EO})$).

$$P_A(\lambda) = 0 \Leftrightarrow (*_{EC})\ \lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0 \Leftrightarrow (\lambda - 2)(\lambda - 3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 2 \text{ cu } m(\lambda_1) = 1, \\ \lambda_2 = 3 \text{ cu } m(\lambda_2) = 1. \end{cases}$$

Se observă că toate rădăcinile caracteristice sunt din $\mathbb{R}$, adică sunt valori proprii ale matricei A în $\mathbb{R}$.

Spectrul matricei A este $\sigma(A) = \{2, 3\}$.

Raza spectrală a matricei A este $\rho(A) = \max\{|2|, |3|\} = 3$.

Pasul 2. Se determină un sitem fundamental de soluţii ale SO / o matrice fundamentală a SO.

$\boxed{\text{modul 1.}}$ - aplicabil dacă $A \sim D$ în $\mathbb{R}$ (pentru $n = 2$ şi rădăcini caracteristice reale şi distincte$\Rightarrow$ $A \sim D$ în $\mathbb{R}$). Se determină subspaţiile proprii ale matricei A, precum şi dimensiunile lor.

$\lambda_1 = 2$ Se caută vectorii proprii corespunzători valorii proprii $\lambda_1 = 2$, adică

$\underline{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times1}(\mathbb{R})$, $\underline{\mathbf{x}} \neq \underline{\boldsymbol{\theta}}_{\mathcal{M}_{2\times1}(\mathbb{R})}$ a.î.$(A - 2I_2)\,\underline{\mathbf{x}} = \boldsymbol{\theta}_{\mathcal{M}_{2\times1}(\mathbb{R})}$, adică

$$\begin{cases} (1-2)\,x_1 + x_2 = 0 \\ -2x_1 + (4-2)\,x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \alpha \\ x_2 = \alpha \in \mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow$$

$S_{\lambda_1}(A) = \{\underline{\mathbf{x}} \in \mathcal{M}_{2\times1}(\mathbb{R})\,;\underline{\mathbf{x}}$ este vect. propriu. pt. A coresp. val. proprii $\lambda_1 = 2\} \cup \left\{\underline{\boldsymbol{\theta}}_{\mathcal{M}_{2\times1}(\mathbb{R})}\right\} =$

$$= \left\{ \underline{\mathbf{x}} \in \mathcal{M}_{2\times1}(\mathbb{R})\,; \underline{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha \end{pmatrix} = \alpha \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\mathbf{u}_1^1 = \mathbf{v}_1}, \alpha \in \mathbb{R} \right\} =$$

$= \left[\left(\mathbf{u}_1^1\right)\right] \Rightarrow \dim_{\mathbb{R}} S_{\lambda_1}(A) = 1 = m(\lambda_1)$.

$\underline{|\lambda_2 = 3|}$ Se caută vectorii proprii corespunzători valorii proprii $\lambda_2 = 3$, adică

$\underline{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times1}(\mathbb{R})$, $\underline{\mathbf{x}} \neq \underline{\boldsymbol{\theta}}_{\mathcal{M}_{2\times1}(\mathbb{R})}$ a.î.$(A - 3I_2)\,\underline{\mathbf{x}} = \underline{\boldsymbol{\theta}}_{\mathcal{M}_{2\times1}(\mathbb{R})}$, adică

$$\begin{cases} (1-3)\,x_1 + x_2 = 0 \\ -2x_1 + (4-3)\,x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \beta \\ x_2 = 2\beta \in \mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow$$

$S_{\lambda_2}(A) = \{\underline{\mathbf{x}} \in \mathcal{M}_{2\times1}(\mathbb{R})\,;\underline{\mathbf{x}}$ este vect. propriu. pt. A coresp. val. proprii $\lambda_2 = 3\} \cup \left\{\boldsymbol{\theta}_{\mathcal{M}_{2\times1}(\mathbb{R})}\right\} =$

$$= \left\{ \underline{\mathbf{x}} \in \mathcal{M}_{2\times1}(\mathbb{R})\,; \underline{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \beta \\ 2\beta \end{pmatrix} = \beta \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}}_{\mathbf{u}_2^1 = \mathbf{v}_2}, \beta \in \mathbb{R} \right\} =$$

$= \left[\left(\mathbf{u}_1^2\right)\right] \Rightarrow \dim_{\mathbb{R}} S_{\lambda_2}(A) = 1 = m(\lambda_2)$.

Cum toate rădăcinile caracteristice ale matricei A sunt din $\mathbb{R}$ (sunt valori proprii) si cum multiplicităţile geometrice (dimensiunile subspaţiilor proprii) coincid cu multiplicităţile algebrice ale valorilor proprii, atunci, conform teoremei Jordan, matricea A este diagonalizabilă, adică

$\exists D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ matrice diagonală şi $\exists P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ matrice modală, astfel încât $A \sim D$, adică $A = P \cdot D \cdot P^{-1}$ sau $D = P^{-1} \cdot A \cdot P$. Matricea modală P este formată din coloanele vectorilor proprii, baze în $S_{\lambda_1}(A)$ respectiv $S_{\lambda_2}(A)$. Mai mult, matricea modală P este nesingulară, deoarece respectivii vectori proprii formează o bază în $\mathcal{M}_{2\times1}(\mathbb{R})$, cu $P =_C A_S$.

<u>modul 1.1.</u> Deoarece A este diagonalizabilă,

$$\bullet\lambda_1 = 2,\ m(\lambda_1) = 1 \rightsquigarrow \underline{\mathbf{x}}_1(t) \overset{\text{not.}}{=} \varphi_1(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ y_1(t) \end{pmatrix} = e^{2t} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\mathbf{v}_1} = \begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}.$$

$$\bullet\lambda_2 = 3,\ m(\lambda_2) = 1 \rightsquigarrow \underline{\mathbf{x}}_2(t) \overset{\text{not.}}{=} \varphi_2(t) = \begin{pmatrix} x_2(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = e^{3t} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}}_{\mathbf{v}_2} = \begin{pmatrix} e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}.$$

$B = (\underline{\mathbf{x}}_1, \underline{\mathbf{x}}_2)$ este un sistem fundamental de soluţii ale SO.

<u>modul 1.2.</u> O matrice fundamentală este

-sau $\mathcal{X}(t) = \mathcal{X}(t; \underline{\mathbf{x}}_1, \underline{\mathbf{x}}_2) = \begin{pmatrix} e^{2t} & e^{3t} \\ e^{2t} & 2e^{3t} \end{pmatrix}$.

-sau $\mathcal{X}(t) = e^{tA} = Pe^{tD}P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{2t} & 0 \\ 0 & e^{3t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} =$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{2t} & 0 \\ 0 & e^{3t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2e^{2t}-e^{3t} & e^{3t}-e^{2t} \\ 2e^{2t}-2e^{3t} & 2e^{3t}-e^{2t} \end{pmatrix}.$$

$\boxed{\underline{\text{modul 2.}}}$ Pe baza teoriei de la ecuaţii diferenţiale liniare de ordin 2, se caută soluţii particulare liniar independente ale (SO):

•$\lambda_1 = 2 \in \mathbb{R}$ cu $m(\lambda_1) = 1 \rightsquigarrow$ se caută o soluţie particulară a SO de forma

$$\varphi(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 e^{2t} \\ a_2 e^{2t} \end{pmatrix}.$$

Se determină a_1, a_2, impunând ca x şi y să verifice (SO)

$$\begin{cases} a_1 e^{2t} \cdot 2 = a_1 e^{2t} + a_2 e^{2t} \\ a_2 e^{2t} \cdot 2 = -2a_1 e^{2t} + 4a_2 e^{2t} \end{cases}, t \in \mathbb{R},$$

Se împarte fiecare ecuaţie prin e^{2t}:

$$\begin{cases} (1-2)\,a_1 + a_2 = 0 \\ -2a_1 + (4-2)\,a_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = \alpha \\ a_2 = \alpha \in \mathbb{R} \end{cases} -\text{este acelaşi sistem ca la } S_{\lambda_1}(A).$$

S-a găsit

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha e^{2t} \\ \alpha e^{2t} \end{pmatrix} = \alpha e^{2t} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}.$$

Se caută o soluţie particulară$\Rightarrow$

$$\alpha = 1 \rightsquigarrow \underline{\mathbf{x}}_1(t) \overset{\text{not.}}{=} \varphi_1(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ y_1(t) \end{pmatrix} = e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

•$\lambda_2 = 3 \in \mathbb{R}$ cu $m(\lambda_2) = 1 \rightsquigarrow$ se caută o soluţie particulară a SO de forma

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_3 e^{3t} \\ a_4 e^{3t} \end{pmatrix}.$$

Se determină a_3, a_4 (numere, altele decât constantele de indexare), impunând ca x, y să verifice (SO)

$$\begin{cases} a_3 e^{3t} \cdot 3 = a_3 e^{3t} + a_4 e^{3t} \\ a_4 e^{3t} \cdot 3 = -2a_3 e^{3t} + 4a_4 e^{3t} \end{cases}, t \in \mathbb{R} \Rightarrow$$

Se împarte fiecare ecuaţie prin e^{3t}:

$$\begin{cases} (1-3)\,a_3 + a_4 = 0 \\ -2a_3 + (4-3)\,a_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_3 = \beta \\ a_4 = 2\beta \in \mathbb{R} \end{cases} -\text{este acelaşi sistem ca la } S_{\lambda_2}(A).$$

S-a găsit

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta e^{3t} \\ 2\beta e^{3t} \end{pmatrix} = \beta e^{3t} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}}$$

$$\beta = 1 \rightsquigarrow \underline{\mathbf{x}}_2(t) \overset{\text{notez}}{=} \varphi_2(t) = \begin{pmatrix} x_2(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Din algoritm, se obţin 2 soluţii liniar independente, adică $B = (\underline{\mathbf{x}}_1, \underline{\mathbf{x}}_2) = (\varphi_1, \varphi_2)$ este un sistem fundamental de soluţii ale (SO).

<u>Pasul 3.</u> Soluţia generală a SO este:

-sau $\underline{\mathbf{x}}_o(t; \underline{\mathbf{c}}) = \mathcal{X}(t; \underline{\mathbf{x}}_1, \underline{\mathbf{x}}_2) \cdot \underline{\mathbf{c}} = c_1 \underline{\mathbf{x}}_1(t) + c_2 \underline{\mathbf{x}}_2(t), t \in \mathbb{R}, c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$

$$\begin{pmatrix} x_o(t; c_1, c_2) \\ y_o(t; c_1, c_2) \end{pmatrix} = c_1 e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 e^{2t} + c_2 e^{3t} \\ c_1 e^{2t} + 2c_2 e^{3t} \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}, c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

-sau $\underline{\mathbf{x}}_o(t; \underline{\mathbf{c}}) = e^{tA} \cdot \underline{\mathbf{c}}, \forall t \in \mathbb{I}, \underline{\mathbf{c}} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 1}(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^2,$

$$\begin{pmatrix} x_o(t; c_1, c_2) \\ y_o(t; c_1, c_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2e^{2t}-e^{3t} & e^{3t}-e^{2t} \\ 2e^{2t}-2e^{3t} & 2e^{3t}-e^{2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}.$$

Comentariu.

b) Fiecare componentă a matricei fundamentale este o combinaţie liniară de funcţiile e^{2t} şi e^{3t}.

c) Modul cu determinarea matricei fundamentale $\mathcal{X}\left(t; \underline{\mathbf{x}}_1, \underline{\mathbf{x}}_2, \ldots, \underline{\mathbf{x}}_n\right)$ se foloseşte uşor pentru n oarecare (chiar $n = 3, 4, 5, ...$) când A este diagonalizabilă, cu modul 1.1; se poate folosi programul Scientific WorkPlace sau Matlab sau altele, pentru a determina automat forma Jordan (diagonală) a matricei A şi vectorii proprii, pe coloanele matricei P.

d) Modul cu determinarea matricei fundamentale e^{tA} se foloseşte uşor pentru n oarecare (chiar $n = 3, 4, 5, ...$) când A este diagonalizabilă, cu modul 1.2; este utilă folosirea programului Scientific WorkPlace sau altele, pentru a determina automat forma Jordan (diagonală) a matricei A, adică D, P, P^{-1}, pentru a determina automat produse cu matrice şi alte calcule matriceale.

e) Dacă în fenomenele de modelat au semnificaţie atât valorile proprii cât şi vectorii proprii, la pasul 2 se foloseşte modul 1; dacă au semnificaţie doar valorile proprii, la pasul 2 se poate folosi modul 2.

f) Modul 2 de la Pasul 2 se foloseşte cu pondere în cazul în care matricea A nu este diagonalizabilă în $\mathbb{R}$ şi $n = 2, 3$. Pentru $n \geq 4$, dacă A are o rădăcină caracteristică de multiplicitate ≥ 2, atunci modul 2 devine greoi, cu rezolvare de sisteme algebrice liniare omogene de ordin mare.

g) De menţionat, fără demonstraţie, că în cazul în care matricea A are rădăcini caracteristice complexe $\lambda = \alpha \pm i\beta$, atunci componentele matricei fundamentale vor conţine şi $e^{\alpha t}\cos\beta t, e^{\alpha t}\sin\beta t$.

b) $\begin{cases} x' = -2x - 5y \\ y' = \qquad +3y \end{cases}$

Indicaţie. A are valorile proprii $\begin{cases} \lambda_1 = -2 \text{ cu } m(\lambda_1) = 1, \\ \lambda_2 = 3 \text{ cu } m(\lambda_2) = 1. \end{cases}$, este diagonalizabilă în $\mathbb{R}$.

c) $\begin{cases} x' = 6x + 2y \\ y' = -3x + y \end{cases}$

Indicaţie. A are valorile proprii $\begin{cases} \lambda_1 = 4 \text{ cu } m(\lambda_1) = 1, \\ \lambda_2 = 3 \text{ cu } m(\lambda_2) = 1. \end{cases}$, este diagonalizabilă în $\mathbb{R}$.

d) $\begin{cases} x' = 3x + 2y \\ y' = -3x - 4y \end{cases}$

Indicaţie. A are valorile proprii $\begin{cases} \lambda_1 = 2 \text{ cu } m(\lambda_1) = 1, \\ \lambda_2 = -3 \text{ cu } m(\lambda_2) = 1. \end{cases}$, este diagonalizabilă în $\mathbb{R}$.

e) $\begin{cases} x' = x + y \\ y' = -2x + 4y; \end{cases}$

Indicaţie. A are valorile proprii $\begin{cases} \lambda_1 = 1 \text{ cu } m(\lambda_1) = 1, \\ \lambda_2 = 5 \text{ cu } m(\lambda_2) = 1. \end{cases}$, este diagonalizabilă în $\mathbb{R}$.

f) $\begin{cases} x' = x - y \\ y' = y - 4x \end{cases}$

Indicaţie. A are valorile proprii $\begin{cases} \lambda_1 = -1 \text{ cu } m(\lambda_1) = 1, \\ \lambda_2 = 3 \text{ cu } m(\lambda_2) = 1. \end{cases}$, este diagonalizabilă în $\mathbb{R}$.

g) $\begin{cases} x' = -x + 8y \\ y' = x + y \end{cases}$

Indicaţie. A are valorile proprii $\begin{cases} \lambda_1 = 3 \text{ cu } m(\lambda_1) = 1, \\ \lambda_2 = -3 \text{ cu } m(\lambda_2) = 1. \end{cases}$, este diagonalizabilă în $\mathbb{R}$.

h) $\begin{cases} x' = 3x + 6y \\ y' = 4x + 4y \end{cases}$

Indicaţie. A are valorile proprii $\begin{cases} \lambda_1 = 2 \text{ cu } m(\lambda_1) = 1, \\ \lambda_2 = 5 \text{ cu } m(\lambda_2) = 1. \end{cases}$, este diagonalizabilă în $\mathbb{R}$.

i) $\begin{cases} x' = 2x - 5y \\ y' = \quad\quad 2y \end{cases}$

Rezolvare : Sistemul $(SO)\begin{cases} x'(t) = 2x(t) - 5y(t) \\ y'(t) = 0 \cdot x(t) + 2y(t) \end{cases}, t \in \mathbb{R}$,
este sistem de 2 ecuaţii diferenţiale de ordin 1, liniare, cu coeficienţii constanţi, daţi de
$A = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$,omogen, cu $\underline{\mathbf{b}}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Are $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ =?– funcţii necunoscute.

I. **Metoda eliminării**

Pasul 0: Din prima ecuaţie a $(SO) \Rightarrow$

$$\begin{cases} (\circ)\; y(t) = \frac{1}{-5}\left(x'(t) - 2x(t)\right) \Big| \frac{d}{dt}() \\ y'(t) = \frac{1}{-5}\left(x''(t) - 2x'(t)\right) \end{cases}$$

Se înlocuiesc y şi y' în a doua ecuaţie a SO (se elimină y, y' din a doua ecuaţie a (SO)) $\Rightarrow$

$\frac{1}{-5}\left(x''(t) - 2x'(t)\right) = 0 \cdot x(t) + 2\frac{1}{-5}\left(x'(t) - 2x(t)\right) \Rightarrow$

$x''(t) - 2x'(t) = 2\left(x'(t) - 2x(t)\right)$

$(*_{EO})\; x''(t) - 4x'(t) + 4x(t) = 0.$

Ecuaţia $(*_{EO})$ este o ecuaţie diferenţială de ordin 2, liniară, cu coeficienţii constanţi -4, 4, omogenă. Pentru $t \in \mathbb{R}$, variabilă independentă din domeniul de definiţie a soluţiei, se caută $x_o(t; c_1, c_2)$, soluţia generală pentru ecuaţia $(*_{EO})$.

Pasul 1 : Se ataşează ecuaţiei diferenţiale $(*_{EO})$ ecuaţia ei caracteristică

$(*_{EC})\; \lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0 \Leftrightarrow (\lambda - 2)^2 = 0 \Rightarrow \{\lambda_1 = 2$ cu $m(\lambda_1) = 2$

Pasul 2 : Pentru fiecare rădăcină a ecuaţiei caracteristice se găsesc corespunzător soluţii particulare liniar independente ale ecuaţiei omogene $(*_{EO})$

$\bullet \lambda_1 = 2$ cu $m(\lambda_1) = 2 \rightsquigarrow \begin{cases} x_1(t) = e^{2t} \\ x_2(t) = te^{2t} \end{cases}$

$B = (x_1, x_2)$ este un sistem fundamental de soluţii pentru $(*_{EO})$.

Pasul 3 : Soluţia generală a ecuaţiei $(*_{EO})$ este

$x_o(t; c_1, c_2) = c_1 \cdot e^{2t} + c_2 \cdot te^{2t}, \forall t \in \mathbb{R}$ şi $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Pasul 4 : Se înlocuiesc x, x' în $(\circ) \Rightarrow$

$y_o(t; c_1, c_2) = \frac{1}{-5}\left(c_1 \cdot e^{2t} \cdot 2 + c_2 \cdot \left(e^{2t} + te^{2t} \cdot 2\right) - 2\left(c_1 \cdot e^{2t} + c_2 \cdot te^{2t}\right)\right) =$
$= \frac{1}{-5}\left(c_2 \cdot e^{2t}\right).$

Concluzie: Soluţia generală a SO este

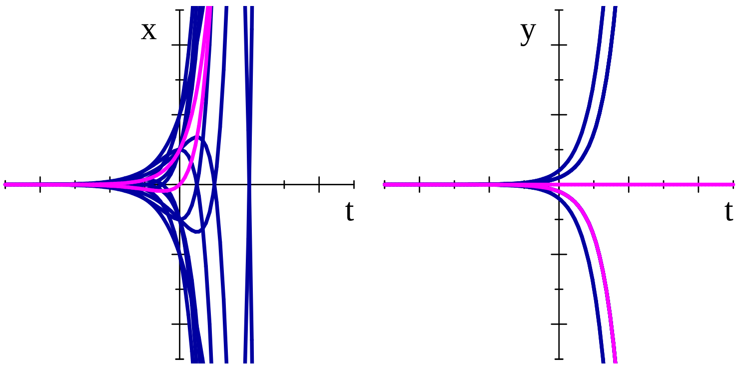
$$\begin{pmatrix} x_o(t; c_1, c_2) \\ y_o(t; c_1, c_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \cdot e^{2t} + c_2 \cdot te^{2t} \\ c_1 \cdot 0 + \frac{1}{-5} c_2 \cdot e^{2t} \end{pmatrix} = c_1 \cdot \begin{pmatrix} e^{2t} \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \cdot \begin{pmatrix} te^{2t} \\ \frac{1}{-5} e^{2t} \end{pmatrix} =$$

$$= c_1 \cdot e^{2t} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\substack{\text{vect. pr. al } A \\ \text{coresp. lui } \lambda_1 = 2}} + c_2 \cdot e^{2t} \cdot \begin{pmatrix} t \\ \frac{1}{-5} \end{pmatrix}.$$

Reprezentând grafic pe x şi y pe $\mathbb{I} = \mathbb{R}$ pentru $(c_1, c_2) = (1, 0)$ şi $(c_1, c_2) = (0, 1)$ cu magenta (corespunzătoare soluţiilor particulare din sistemul fundamental) şi pentru

$(c_1, c_2) = (1, 1), (c_1, c_2) = (1, -1), (c_1, c_2) = (-1, 1), (c_1, c_2) = (-1, -1),$
$(c_1, c_2) = (1, 2), (c_1, c_2) = (2, 1), (c_1, c_2) = (-1, 2), (c_1, c_2) = (-2, 1)$
$(c_1, c_2) = (1, -2), (c_1, c_2) = (2, -1), (c_1, c_2) = (-1, -2), (c_1, c_2) = (-2, -1)$

cu albastru, se obţine:



Comentariu: Soluţiile x şi y sunt de acelaşi tip, de aceeaşi formă (combinaţii liniare de e^{2t} şi te^{2t}), deoarece sunt legate în SO şi, ca soluţii, prin constantele de indexare (c_1, c_2).

II. **Metoda cu valori proprii**

Pasul 1 Se ataşează ecuaţia caracteristică a matricei A şi se rezolvă. Adică se determină valorile proprii în $\mathbb{C}$ ale matricei A, precum şi multiplicitatea lor algebrică.

•Se determină polinomul caracteristic al matricei $A, P_A(\lambda)$.

$\boxed{P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_2)} = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -5 \\ 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 4\lambda + 4$ sau

$\boxed{P_A(\lambda) = (-1)^2 \left(\lambda^2 - \delta_1\lambda + \delta_2\right)} = \lambda^2 - 4\lambda + 4$, unde

$\boxed{\delta_1 = \mathrm{Tr}\, A} = 2 + 2 = 4; \boxed{\delta_2 = \det A} = \begin{vmatrix} 2 & -5 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4.$

•Se rezolvă ecuaţia caracteristică a matricei A,

$P_A(\lambda) = 0 \Leftrightarrow (*_{EC})\, (\lambda - 2)^2 = 0 \Rightarrow \{\lambda_1 = 2$ cu $m(\lambda_1) = 2$

Se observă că toate rădăcinile caracteristice sunt din $\mathbb{R}$, adică sunt valori proprii ale matricei A.

Spectrul matricei A este $\sigma(A) = \{2\}$.

Raza spectrală a matricei A este $\rho(A) = \max\{|2|\} = 2$.

Pasul 2. Se determină un sitem fundamental de soluţii ale SO / o matrice fundamentală a SO.

$\boxed{\text{modul 1.}}$- aplicabil dacă $A \sim D$ în $\mathbb{R}$ (pentru $n = 2$ şi rădăcini caracteristice reale egale$\Rightarrow A \nsim D$ în $\mathbb{R}$, ci $A \sim J$ în $\mathbb{R}$). Se determină subspaţiile proprii ale matricei A, precum şi dimensiunile lor.

$\lambda_1 = 2$ Se caută vectorii proprii corespunzători valorii proprii $\lambda_1 = 2$, adică

$\underline{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 1}(\mathbb{R})$, $\underline{\mathbf{x}} \neq \underline{\boldsymbol{\theta}}_{\mathcal{M}_{2\times 1}(\mathbb{R})}$ a.î.$(A - 2I_2)\,\underline{\mathbf{x}} = \underline{\boldsymbol{\theta}}_{\mathcal{M}_{2\times 1}(\mathbb{R})}$, adică

$$\begin{cases} (2-2)\,x_1 - 5x_2 = 0 \\ 0x_1 + (2-2)\,x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \alpha \in \mathbb{R} \\ x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$S_{\lambda_1}(A) = \{\underline{\mathbf{x}} \in \mathcal{M}_{2\times 1}(\mathbb{R})\,;\underline{\mathbf{x}}$ este vect. propriu. pt. A coresp. val. proprii $\lambda_1 = 2\} \cup \left\{\underline{\boldsymbol{\theta}}_{\mathcal{M}_{2\times 1}(\mathbb{R})}\right\} =$

$$= \left\{ \underline{\mathbf{x}} \in \mathcal{M}_{2\times 1}(\mathbb{R})\,; \underline{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \end{pmatrix} = \alpha \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\mathbf{u}_1^1 = \mathbf{v}_1}, \alpha \in \mathbb{R} \right\} =$$

$= \left[\left(\mathbf{u}_1^1\right)\right] \Rightarrow \dim_{\mathbb{R}} S_{\lambda_1}(A) = 1 \neq 2 = m(\lambda_1)$.

A nu este diagonalizabilă, dar este cvasidiagonalizabilă. Se poate scrie, folosind SWP, $A = PJP^{-1}$

$$\begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{5} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -5 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

dar nu va fi continuat exerciţiul cu modul 1.

$\boxed{\text{modul 2.}}$ Pe baza teoriei de la ecuaţii diferenţiale liniare de ordin 2, se caută soluţii particulare liniar independente ale (SO):

$\bullet\lambda_1 = 2 \in \mathbb{R}$ cu $m(\lambda_1) = 2 \rightsquigarrow$ se caută o soluţie particulară a SO de forma

$$\varphi(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (a_1 + a_2 t) e^{2t} \\ (a_3 + a_4 t) e^{2t} \end{pmatrix}.$$

Se determină $a_1, ..., a_4$, impunând ca x, y să verifice (SO) :

$$\begin{cases} a_2 e^{2t} + (a_1 + a_2 t) e^{2t} \cdot 2 = 2(a_1 + a_2 t) e^{2t} - 5(a_3 + a_4 t) e^{2t} \\ a_4 e^{2t} + (a_3 + a_4 t) e^{2t} \cdot 2 = 2(a_3 + a_4 t) e^{2t} \end{cases}, t \in \mathbb{R},$$

Se împarte fiecare ecuaţie prin e^{2t} şi se identifică coeficienţii polinoamelor din cele două ecuaţii:

$$\begin{array}{l} t^0: \\ t^1: \\ t^0: \\ t^1: \end{array} \begin{cases} a_2 + 2a_1 = 2a_1 - 5a_3 \\ 2a_2 = 2a_2 - 5a_4 \\ a_4 + 2a_3 = 2a_3 \\ 2a_4 = 2a_4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_2 + 5a_3 = 0 \\ 5a_4 = 0 \\ a_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = \alpha \in \mathbb{R} \\ a_2 = -5\beta \\ a_3 = \beta \in \mathbb{R} \\ a_4 = 0 \end{cases}$$

S-a găsit

$$\varphi(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\alpha - 5\beta t) e^{2t} \\ (\beta + 0t) e^{2t} \end{pmatrix} = \alpha e^{2t} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{v_1} + \beta \begin{pmatrix} -5te^{2t} \\ 1e^{2t} \end{pmatrix}.$$

Se caută două soluţii particulare l.i. ale $(SO) \Rightarrow$

$$\alpha = 1, \beta = 0 \rightsquigarrow \underline{\mathbf{x}}_1(t) \overset{\text{not.}}{=} \varphi_1(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ y_1(t) \end{pmatrix} = e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{2t} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\alpha = 0, \beta = 1 \rightsquigarrow \underline{\mathbf{x}}_2(t) \overset{\text{not.}}{=} \varphi_2(t) = \begin{pmatrix} x_2(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = e^{2t} \begin{pmatrix} -5t \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5te^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}.$$

Din algoritm se obţin 2 soluţii liniar independente, adică $B = (\underline{\mathbf{x}}_1, \underline{\mathbf{x}}_2)$ este un sistem fundamental de soluţii ale (SO).

<u>Pasul 3.</u> Soluţia generală a SO este:

-sau $\underline{\mathbf{x}}_o(t; \underline{\mathbf{c}}) = \mathcal{X}(t; \underline{\mathbf{x}}_1, \underline{\mathbf{x}}_2) \cdot \underline{\mathbf{c}} = c_1 \underline{\mathbf{x}}_1(t) + c_2 \underline{\mathbf{x}}_2(t), t \in \mathbb{R}, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

$$\begin{pmatrix} x_o(t; c_1, c_2) \\ y_o(t; c_1, c_2) \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} e^{2t} \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -5te^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 e^{2t} - 5c_2 te^{t} \\ c_1 \cdot 0 + c_2 e^{3t} \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}, c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

-sau $\underline{\mathbf{x}}_o(t; \underline{\mathbf{c}}) = e^{tA} \cdot \underline{\mathbf{c}}$-NU.

j) $\begin{cases} x' = x + 2y \\ y' = \quad\quad y \end{cases}$

Indicaţie. A are valorile proprii$\{\lambda_1 = 1$ cu $m(\lambda_1) = 2$, nu este diagonalizabilă în $\mathbb{R}/\ \mathbb{C}$.

k) $\begin{cases} x' = 3x - 7y \\ y' = \quad\quad 3y \end{cases}$

Indicaţie. A are valorile proprii$\{\lambda_1 = 3$ cu $m(\lambda_1) = 2$, nu este diagonalizabilă în $\mathbb{R}/\ \mathbb{C}$.

l) $\begin{cases} x' = 2x + y \\ y' = 4y - x \end{cases}$

Indicaţie. A are valorile proprii$\{\lambda_1 = 3$ cu $m(\lambda_1) = 2$, nu este diagonalizabilă în $\mathbb{R}/\ \mathbb{C}$.

m) $\begin{cases} x' = x - \frac{1}{2}y \\ y' = \frac{1}{2}x \end{cases}$

Indicaţie. A are valorile proprii$\{\lambda_1 = \frac{1}{2}$ cu $m(\lambda_1) = 2$, nu este diagonalizabilă în $\mathbb{R}/\ \mathbb{C}$.

n) $\begin{cases} x' = 2x - 3y \\ y' = 3x + 2y \end{cases}$

Rezolvare : Sistemul $(SO)\begin{cases} x'(t) = 2x(t) - 3y(t) \\ y'(t) = 3x(t) + 2y(t) \end{cases}, t \in \mathbb{R}$,

este sistem de 2 ecuaţii diferenţiale de ordin 1, liniare, cu coeficienţii constanţi, daţi de

$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$,omogen, cu $\underline{\mathbf{b}}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Are $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ =?− funcţii necunoscute.

I. **Metoda eliminării**

Pasul 0: Din prima ecuaţie a $(SO) \Rightarrow$

$$\begin{cases} (\circ)\ y(t) = \frac{1}{-3}\left(x'(t) - 2x(t)\right) \Big| \frac{d}{dt}() \\ y'(t) = \frac{1}{-3}\left(x''(t) - 2x'(t)\right) \end{cases}$$

Se înlocuiesc y şi y' în a doua ecuaţie a SO (se elimină y, y' din a doua ecuaţie a (SO)) $\Rightarrow$

$\frac{1}{-3}\left(x''(t) - 2x'(t)\right) = 3x(t) + 2\frac{1}{-3}\left(x'(t) - 2x(t)\right) \Rightarrow$

$x''(t) - 2x'(t) = -9x(t) + 2\left(x'(t) - 2x(t)\right)$

$(*_{EO})\ x''(t) - 4x'(t) + 13x(t) = 0.$

Ecuaţia $(*_{EO})$ este o ecuaţie diferenţială de ordin 2, liniară, cu coeficienţii constanţi -4, 13, omogenă. Pentru $t \in \mathbb{R}$, variabilă independentă din domeniul de definiţie a soluţiei, se caută $x_o(t; c_1, c_2)$, soluţia generală pentru ecuaţia $(*_{EO})$.

Pasul 1 : Se ataşează ecuaţiei diferenţiale $(*_{EO})$ ecuaţia ei caracteristică

$(*_{EC})\ \lambda^2 - 4\lambda + 13 = 0 \Leftrightarrow (\lambda - 2)(\lambda - 3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 2 + 3i \text{ cu } m(\lambda_1) = 1, \\ \lambda_2 = 2 - 3i \text{ cu } m(\lambda_2) = 1. \end{cases}$

Pasul 2 : Pentru fiecare rădăcină a ecuaţiei caracteristice se găsesc corespunzător soluţii particulare liniar independente ale ecuaţiei omogene $(*_{EO})$

$\bullet \lambda_{1,2} = 2 \pm 3i$ cu $m(\lambda_{1,2}) = 1 \rightsquigarrow \begin{cases} x_1(t) = e^{2t}\cos 3t \\ x_2(t) = e^{2t}\sin 3t \end{cases}.$

$B = (x_1, x_2)$ este un sistem fundamental de soluţii pentru $(*_{EO})$.

Pasul 3 : Soluţia generală a ecuaţiei $(*_{EO})$ este:

$x_o(t; c_1, c_2) = c_1 \cdot e^{2t}\cos 3t + c_2 \cdot e^{2t}\sin 3t, \forall t \in \mathbb{R}$ şi $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Pasul 4 : Se înlocuiesc x, x' în $(\circ)\ y(t) = \frac{1}{-3}\left(x'(t) - 2x(t)\right) \Rightarrow$

$y_o(t; c_1, c_2) = \frac{1}{-3}\left(x'(t) - 2x(t)\right) =$

$= \frac{1}{-3}\left(c_1 \cdot \left(e^{2t} \cdot 2\cos 3t + e^{2t}(\sin 3t)(-3)\right) + c_2 \cdot \left(e^{2t} \cdot 2\sin 3t + e^{2t}(\cos 3t) \cdot 3\right) - 2\left(c_1 \cdot e^{2t}\cos 3t + c_2 \cdot e^{2t} \sin\right.\right.$

$= \frac{1}{-3}\left(c_1 \cdot \left(2e^{2t}\cos 3t - 2e^{2t}\cos 3t + e^{2t}(\sin 3t)(-3)\right) + c_2 \cdot \left(e^{2t} \cdot 2\sin 3t + e^{2t}(\cos 3t) \cdot 3 - 2e^{2t}\sin 3t\right)\right)$

$= \frac{1}{-3}\left(c_1 \cdot \left(-3e^{2t}\sin 3t\right) + c_2 \cdot \left(+e^{2t}(\cos 3t) \cdot 3\right)\right) =$

$= c_1 \cdot e^{2t}\sin 3t - c_2 \cdot e^{2t}\cos 3t.$

Concluzie: Soluţia generală a SO este

$$\begin{pmatrix} x_o(t; c_1, c_2) \\ y_o(t; c_1, c_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \cdot e^{2t}\cos 3t + c_2 \cdot e^{2t}\sin 3t \\ c_1 \cdot e^{2t}\sin 3t - c_2 \cdot e^{2t}\cos 3t \end{pmatrix} =$$

$$= c_1 \cdot \begin{pmatrix} e^{2t}\cos 3t \\ e^{2t}\sin 3t \end{pmatrix} + c_2 \cdot \begin{pmatrix} e^{2t}\sin 3t \\ -e^{2t}\cos 3t \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R},\ c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

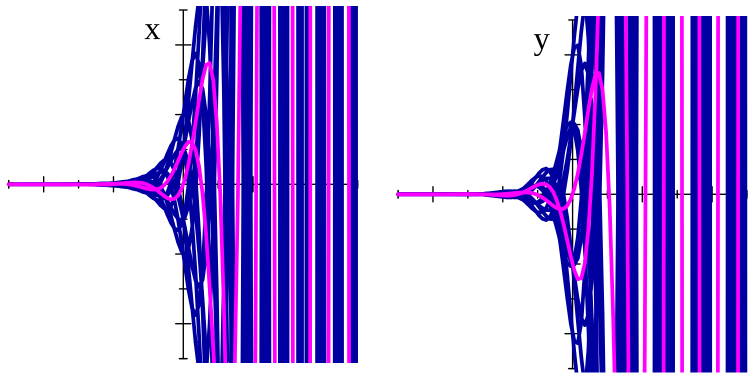
Reprezentând grafic pe x şi y pe $\mathbb{I} = \mathbb{R}$ pentru $(c_1, c_2) = (1, 0)$ şi $(c_1, c_2) = (0, 1)$ cu magenta (corespunzătoare soluţiilor particulare din sistemul fundamental) şi pentru

$(c_1, c_2) = (1, 1), (c_1, c_2) = (1, -1), (c_1, c_2) = (-1, 1), (c_1, c_2) = (-1, -1),$

$(c_1, c_2) = (1, 2), (c_1, c_2) = (2, 1), (c_1, c_2) = (-1, 2), (c_1, c_2) = (-2, 1)$

$(c_1, c_2) = (1, -2), (c_1, c_2) = (2, -1), (c_1, c_2) = (-1, -2), (c_1, c_2) = (-2, -1)$

cu albastru, se obţine:



Comentariu: Soluţiile x şi y sunt de acelaşi tip, de aceeaşi formă (combinaţii liniare de $e^{2t}\cos 3t$ şi $e^{2t}\sin 3t$), deoarece sunt legate în SO şi, ca soluţii, prin constantele de indexare (c_1, c_2).

II. **Metoda cu valori proprii**

Pasul 1 Se ataşează ecuaţia caracteristică a matricei A şi se rezolvă. Adică se determină valorile proprii în $\mathbb{C}$ ale matricei A, precum şi multiplicitatea lor algebrică.

•Se determină polinomul caracteristic al matricei $A, P_A(\lambda)$.

$$\boxed{P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_2)} = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -3 \\ 3 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 4\lambda + 13 \text{ sau}$$

$$\boxed{P_A(\lambda) = (-1)^2\left(\lambda^2 - \delta_1\lambda + \delta_2\right)} = \lambda^2 - 4\lambda + 13, \text{ unde}$$

$$\boxed{\delta_1 = \operatorname{Tr} A} = 2 + 2 = 4; \boxed{\delta_2 = \det A} = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 13.$$

•Se rezolvă ecuaţia caracteristică a matricei A,

$$P_A(\lambda) = 0 \Leftrightarrow (*_{EC})\ \lambda^2 - 4\lambda + 13 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 2 + 3i \text{ cu } m(\lambda_1) = 1, \\ \lambda_2 = 2 - 3i \text{ cu } m(\lambda_2) = 1. \end{cases}$$

Se observă că rădăcinile caracteristice sunt din $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, nu sunt valori proprii ale matricei A în $\mathbb{R}$, ci în $\mathbb{C}$.

Pasul 2. Se determină un sitem fundamental de soluţii ale SO / o matrice fundamentală a SO.

$\boxed{\text{modul 1.}}$ - aplicabil dacă $A \sim D$ în $\mathbb{R}$ (pentru $n = 2$ şi rădăcini caracteristice complexe conjugate$\Rightarrow$ $A \sim D$ în $\mathbb{C}$). Aici A nu este diagonalizabilă în $\mathbb{R}$. Se poate diagonaliza ca în Exemplul 4.2.4 din Curs sau se poate folosi SWP pentru a determina forma Jordan (chiar diagonală) în $\mathbb{C}$.

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2-3i & 0 \\ 0 & 2+3i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}i \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}i \end{pmatrix}$$

Nu se va continua rezolvarea cu modul 1.

$\boxed{\text{modul 2.}}$ Pe baza teoriei de la ecuaţii diferenţiale liniare de ordin 2, se caută soluţii particulare liniar independente ale (SO):

•$\lambda_{1,2} = 2 \pm 3i \in \mathbb{R}$ cu $m(\lambda_{1,2}) = 1 \rightsquigarrow$se caută două soluţii particulare l.i. ale SO de forma

$$\varphi(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 e^{2t}\cos 3t + a_2 e^{2t}\sin 3t \\ a_3 e^{2t}\cos 3t + a_4 e^{2t}\sin 3t \end{pmatrix}.$$

Se determină a_1, a_2, a_3, a_4, impunând ca x, y să verifice (SO):

$$\begin{cases} a_1\left(2e^{2t}\cos 3t - 3e^{2t}\sin 3t\right) + a_2\left(2e^{2t}\sin 3t + 3e^{2t}\cos 3t\right) = \\ \qquad = 2\left(a_1 e^{2t}\cos 3t + a_2 e^{2t}\sin 3t\right) - 3\left(a_3 e^{2t}\cos 3t + a_4 e^{2t}\sin 3t\right) \\ a_3\left(2e^{2t}\cos 3t - 3e^{2t}\sin 3t\right) + a_4\left(2e^{2t}\sin 3t + 3e^{2t}\cos 3t\right) = \\ \qquad = 3\left(a_1 e^{2t}\cos 3t + a_2 e^{2t}\sin 3t\right) + 2\left(a_3 e^{2t}\cos 3t + a_4 e^{2t}\sin 3t\right) \end{cases}$$

Se împarte prin e^{2t} :

$$\begin{cases} a_1\left(2\cos 3t-3\sin 3t\right)+a_2\left(2\sin 3t+3\cos 3t\right)=2\left(a_1\cos 3t+a_2\sin 3t\right)-3\left(a_3\cos 3t+a_4\sin 3t\right)\\ a_3\left(2\cos 3t-3\sin 3t\right)+a_4\left(2\sin 3t+3\cos 3t\right)=3\left(a_1\cos 3t+a_2\sin 3t\right)+2\left(a_3\cos 3t+a_4\sin 3t\right)\end{cases}$$

Se identifică coeficienţii funcţiilor liniar independente $(\cos 3t, \sin 3t)$ (au $W=3$) :

$$\begin{array}{l}\cos 3t:\\ \sin 3t:\\ \cos 3t:\\ \sin 3t:\end{array}\begin{cases}2a_1+3a_2=2a_1-3a_3\\ -3a_1+2a_2=2a_2-3a_4\\ 2a_3+3a_4=3a_1+2a_3\\ -3a_3+2a_4=3a_2+2a_4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3a_2+3a_3=0\\ -3a_1+3a_4=0\\ 3a_1-3a_4=0\\ 3a_2+3a_3=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a_1=\beta\\ a_2=-\alpha\\ a_3=\alpha\in\mathbb{R}\\ a_4=\beta\in\mathbb{R}\end{cases}.$$

S-a găsit

$$\begin{pmatrix}x(t)\\ y(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\beta e^{2t}\cos 3t+\alpha e^{2t}\sin 3t\\ -\alpha e^{2t}\cos 3t+\beta e^{2t}\sin 3t\end{pmatrix}=\alpha\begin{pmatrix}e^{2t}\sin 3t\\ -e^{2t}\cos 3t\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}e^{2t}\cos 3t\\ e^{2t}\sin 3t\end{pmatrix}.$$

Se caută două soluţii particulare l.i. ale $(SO)\Rightarrow$

$$\alpha=0,\beta=1\rightsquigarrow \underline{\mathbf{x}}_1(t)\overset{\text{notez}}{=}\varphi_1(t)=\begin{pmatrix}x_1(t)\\ y_1(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}e^{2t}\cos 3t\\ e^{2t}\sin 3t\end{pmatrix}.$$

$$\alpha=1,\beta=0\rightsquigarrow \underline{\mathbf{x}}_2(t)\overset{\text{notez}}{=}\varphi_2(t)=\begin{pmatrix}x_2(t)\\ y_2(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}e^{2t}\sin 3t\\ -e^{2t}\cos 3t\end{pmatrix}.$$

Din algoritm se obţin 2 soluţii liniar independente, adică $B=\left(\underline{\mathbf{x}}^1,\underline{\mathbf{x}}^2\right)$ este un sistem fundamental de soluţii ale (SO)..

Pasul 3. Soluţia generală a SO este:

-sau $\underline{\mathbf{x}}_o(t;\underline{\mathbf{c}})=\mathcal{X}(t;\underline{\mathbf{x}}_1,\underline{\mathbf{x}}_2)\cdot\underline{\mathbf{c}}=c_1\underline{\mathbf{x}}_1(t)+c_2\underline{\mathbf{x}}_2(t), t\in\mathbb{R},\ c_1,c_2\in\mathbb{R}$.

$$\begin{pmatrix}x_o(t;c_1,c_2)\\ y_o(t;c_1,c_2)\end{pmatrix}=c_1\begin{pmatrix}e^{2t}\cos 3t\\ e^{2t}\sin 3t\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}e^{2t}\sin 3t\\ -e^{2t}\cos 3t\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}c_1e^{2t}\cos 3t+c_2e^{2t}\sin 3t\\ c_1e^{2t}\sin 3t-c_2e^{2t}\cos 3t\end{pmatrix}, t\in\mathbb{R},\ c_1,c_2\in\mathbb{R}.$$

-sau $\underline{\mathbf{x}}_o(t;\underline{\mathbf{c}})=e^{tA}\cdot\underline{\mathbf{c}}$- NU.

o) $\begin{cases}x'=x-2y\\ y'=2x+y\end{cases}$

Indicaţie. A are valorile proprii $\begin{cases}\lambda_1=1+2i \text{ cu } m(\lambda_1)=1,\\ \lambda_2=1-2i \text{ cu } m(\lambda_2)=1.\end{cases}$, nu este diagonalizabilă în $\mathbb{R}$, este diagonalizabilă în $\mathbb{C}$.

p) $\begin{cases}x'=x+y\\ y'=3y-2x\end{cases}$

Indicaţie. A are valorile proprii $\begin{cases}\lambda_1=2+i \text{ cu } m(\lambda_1)=1,\\ \lambda_2=2-i \text{ cu } m(\lambda_2)=1.\end{cases}$, nu este diagonalizabilă în $\mathbb{R}$, este diagonalizabilă în $\mathbb{C}$.

q) $\begin{cases}x'=x+y\\ y'=-5x+3y\end{cases}$

Indicaţie. A are valorile proprii $\begin{cases}\lambda_1=2+2i \text{ cu } m(\lambda_1)=1,\\ \lambda_2=2-2i \text{ cu } m(\lambda_2)=1.\end{cases}$, nu este diagonalizabilă în $\mathbb{R}$, este diagonalizabilă în $\mathbb{C}$.

r) $\begin{cases}x'=-x-5y\\ y'=x+y\end{cases}$

Indicaţie. A are valorile proprii $\begin{cases}\lambda_1=+2i \text{ cu } m(\lambda_1)=1,\\ \lambda_2=-2i \text{ cu } m(\lambda_2)=1.\end{cases}$, nu este diagonalizabilă în $\mathbb{R}$, este diagonalizabilă în $\mathbb{C}$.

Exerciţiul 2. Să se rezolve următoarele sisteme diferenţiale liniare:

a) $\begin{cases} x' = 3x - y + z \\ y' = x + y + z \\ z' = 4x - y + 4z; \end{cases}$

Rezolvare: Sistemul $(SO)\begin{cases} x'(t) = 3x(t) - y(t) + z(t) \\ y'(t) = x(t) + y(t) + z(t) \\ z'(t) = 4x(t) - y(t) + 4z(t) \end{cases}, t \in \mathbb{R},$

este sistem de $n = 3$ ecuaţii diferenţiale de ordin 1, liniare, cu coeficienţii constanţi, daţi de

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & -1 & 4 \end{pmatrix}, \text{ omogen, cu } \underline{\mathbf{b}}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Are $n = 3$ necunoscute $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} =?$

Metoda cu valori proprii

Pasul 1 Se ataşează ecuaţia caracteristică a matricei A şi se rezolvă. Adică se determină valorile proprii în $\mathbb{C}$ ale matricei A, precum şi multiplicitatea lor algebrică.

•Se determină polinomul caracteristic al matricei $A, P_A(\lambda)$.

$$\boxed{P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_3)} = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 4 & -1 & 4-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 8\lambda^2 - 17\lambda + 10$$

$\boxed{P_A(\lambda) = (-1)^3\left(\lambda^3 - \delta_1\lambda^2 + \delta_2\lambda - \delta_3\right)}$, unde δ_i este suma minorilor principali de ordin i ai matricei A, adică

$\boxed{\delta_1 = \operatorname{Tr} A} = 3 + 1 + 4 = 8;$

$$\delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}_{1,2} + \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 4 \end{vmatrix}_{1,3} + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix}_{2,3} = 17;$$

$$\boxed{\delta_3 = \det A} = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 10$$

$P_A(\lambda) = -\left(\lambda^3 - 8\lambda^2 + 17\lambda - 10\right).$

•Se rezolvă ecuaţia caracteristică a matricei A,

$$P_A(\lambda) = 0 \Leftrightarrow -(\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda - 5) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 1 \in \mathbb{R} \text{ cu } m(\lambda_1) = 1; \\ \lambda_2 = 2 \in \mathbb{R} \text{ cu } m(\lambda_2) = 1; \\ \lambda_3 = 5 \in \mathbb{R} \text{ cu } m(\lambda_3) = 1; \end{cases}$$

Se observă că toate rădăcinile caracteristice sunt din $\mathbb{R}$, adică sunt valori proprii ale matricei A.

Spectrul matricei A este $\sigma(A) = \{1, 2, 5\}$.

Raza spectrală a matricei A este $\rho(A) = \max\{|1|, |2|, |5|\} = 5$.

Pasul 2. Se determină un sitem fundamental de soluţii ale SO / o matrice fundamentală a SO.

$\boxed{\text{modul 1.}}$- aplicabil dacă $A \sim D$ în $\mathbb{R}$ (pentru $n = 3$ şi rădăcini caracteristice reale şi distincte$\Rightarrow$ $A \sim D$ în $\mathbb{R}$). Se determină subspaţiile proprii ale matricei A, precum şi dimensiunile lor.

$\boxed{\lambda_1 = 1}$ Se caută vectorii proprii corespunzători valorii proprii $\lambda_1 = 1$, adică

$$\underline{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 1}(\mathbb{R}),\ \underline{\mathbf{x}} \neq \underline{\boldsymbol{\theta}}_{\mathcal{M}_{3\times 1}(\mathbb{R})} \text{ a.î.} (A - 1I_3)\,\underline{\mathbf{x}} = \underline{\boldsymbol{\theta}}_{\mathcal{M}_{3\times 1}(\mathbb{R})}, \text{ adică}$$

$$\begin{cases} (3-1)x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + (1-1)x_2 + x_3 = 0 \\ 4x_1 - x_2 + (4-1)x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -\alpha \\ x_2 = -\alpha \\ x_3 = \alpha \in \mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow$$

$S_{\lambda_1}(A) = \{\underline{\mathbf{x}} \in \mathcal{M}_{3\times 1}(\mathbb{R})\,; \underline{\mathbf{x}}$ este vect. propriu. pt. A coresp. val. proprii $\lambda_1 = -1\} \cup \left\{\underline{\boldsymbol{\theta}}_{\mathcal{M}_{3\times 1}(\mathbb{R})}\right\} =$

$$= \left\{ \underline{\mathbf{x}} \in \mathcal{M}_{3\times 1}(\mathbb{R})\,; \underline{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} -\alpha \\ -\alpha \\ \alpha \end{pmatrix} = \alpha \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\mathbf{u}_1^1 = \mathbf{v}_1}, \alpha \in \mathbb{R} \right\} =$$

$= \left[\left(\mathbf{u}_1^1\right)\right] \Rightarrow \dim_{\mathbb{R}} S_{\lambda_1}(A) = 1 = m(\lambda_1)$.

$\underline{|\lambda_2 = 2|}$ Se caută vectorii proprii corespunzători valorii proprii $\lambda_2 = 2$, adică

$\underline{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 1}(\mathbb{R})$, $\underline{\mathbf{x}} \neq \underline{\boldsymbol{\theta}}_{\mathcal{M}_{3\times 1}(\mathbb{R})}$ a.î.$(A - 2I_3)\,\underline{\mathbf{x}} = \underline{\boldsymbol{\theta}}_{\mathcal{M}_{3\times 1}(\mathbb{R})}$, adică

$$\begin{cases} (3-2)\,x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + (1-2)\,x_2 + x_3 = 0 \\ 4x_1 - x_2 + (4-2)\,x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -\beta \\ x_2 = 2\beta \\ x_3 = 3\beta \in \mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow$$

$S_{\lambda_2}(A) = \{\underline{\mathbf{x}} \in \mathcal{M}_{3\times 1}(\mathbb{R})\,; \underline{\mathbf{x}}$ este vect. propriu. pt. A coresp. val. proprii $\lambda_2 = 2\} \cup \left\{\underline{\boldsymbol{\theta}}_{\mathcal{M}_{3\times 1}(\mathbb{R})}\right\} =$

$$= \left\{ \underline{\mathbf{x}} \in \mathcal{M}_{3\times 1}(\mathbb{R})\,; \underline{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} -\beta \\ 2\beta \\ 3\beta \end{pmatrix} = \beta \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}}_{\mathbf{u}_1^2 = \mathbf{v}_2}, \beta \in \mathbb{R} \right\} =$$

$= \left[\left(\mathbf{u}_1^2\right)\right] \Rightarrow \dim_{\mathbb{R}} S_{\lambda_2}(A) = 1 = m(\lambda_2)$.

$\underline{|\lambda_3 = 5|}$ Se caută vectorii proprii corespunzători valorii proprii $\lambda_3 = 5$, adică

$\underline{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 1}(\mathbb{R})$, $\underline{\mathbf{x}} \neq \underline{\boldsymbol{\theta}}_{\mathcal{M}_{3\times 1}(\mathbb{R})}$ a.î.$(A - 5I_3)\,\underline{\mathbf{x}} = \underline{\boldsymbol{\theta}}_{\mathcal{M}_{3\times 1}(\mathbb{R})}$, adică

$$\begin{cases} (3-5)\,x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + (1-5)\,x_2 + x_3 = 0 \\ 4x_1 - x_2 + (4-5)\,x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \gamma \\ x_2 = \gamma \\ x_3 = 3\gamma \in \mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow$$

$S_{\lambda_3}(A) = \{\underline{\mathbf{x}} \in \mathcal{M}_{3\times 1}(\mathbb{R})\,; \underline{\mathbf{x}}$ este vect. propriu. pt. A coresp. val. proprii $\lambda_3 = 2\} \cup \left\{\boldsymbol{\theta}_{\mathcal{M}_{3\times 1}(\mathbb{R})}\right\} =$

$$= \left\{ \underline{\mathbf{x}} \in \mathcal{M}_{3\times 1}(\mathbb{R})\,; \underline{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \gamma \\ \gamma \\ 3\gamma \end{pmatrix} = \gamma \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}}_{\mathbf{u}_1^3 = \mathbf{v}_3}, \gamma \in \mathbb{R} \right\} =$$

$= \left[\left(\mathbf{u}_1^3\right)\right] \Rightarrow \dim_{\mathbb{R}} S_{\lambda_3}(A) = 1 = m(\lambda_3)$.

Cum toate rădăcinile caracteristice ale matricei A sunt din $\mathbb{R}$ (sunt valori proprii) si cum multiplicităţile geometrice (dimensiunile subspaţiilor proprii) coincid cu multiplicităţile algebrice ale valorilor proprii, atunci, conform teoremei Jordan, matricea A este diagonalizabilă, adică

$\exists D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ matrice diagonală şi $\exists P = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ matrice modală, astfel încât $A \sim D$, adică $A = P \cdot D \cdot P^{-1}$ sau $D = P^{-1} \cdot A \cdot P$. Se precizează că matricea modală P este formată din coloanele vectorilor proprii, baze în $S_{\lambda_1}(A)$ respectiv $S_{\lambda_2}(A), S_{\lambda_3}(A)$. Mai mult, matricea modală P este nesingulară, deoarece respectivii vectori proprii formează o bază în $\mathcal{M}_{3\times 1}(\mathbb{R})$, cu $P =_C A_S$.

<u>modul 1.1.</u> Deoarece A este diagonalizabilă,

$$\bullet\lambda_1 = 1,\ m(\lambda_1) = 1 \rightsquigarrow \underline{\mathbf{x}}_1(t) \overset{\text{notez}}{=} \varphi_1(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ y_1(t) \\ z_1(t) \end{pmatrix} = e^{1t} \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\mathbf{v}_1} = \begin{pmatrix} -e^{1t} \\ -e^{1t} \\ e^{1t} \end{pmatrix}.$$

$$\bullet\lambda_2 = 2,\ m(\lambda_2) = 1 \rightsquigarrow \underline{\mathbf{x}}_2(t) \overset{\text{notez}}{=} \varphi_2(t) = \begin{pmatrix} x_2(t) \\ y_2(t) \\ z_2(t) \end{pmatrix} = e^{2t} \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}}_{\mathbf{v}_2} = \begin{pmatrix} -e^{2t} \\ 2e^{2t} \\ 3e^{2t} \end{pmatrix}$$

$$\bullet\lambda_3 = 5,\ m(\lambda_3) = 1 \rightsquigarrow \underline{\mathbf{x}}_3(t) \overset{\text{notez}}{=} \varphi_3(t) = \begin{pmatrix} x_3(t) \\ y_3(t) \\ z_3(t) \end{pmatrix} = e^{5t} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}}_{\mathbf{v}_2} = \begin{pmatrix} e^{5t} \\ e^{5t} \\ 3e^{5t} \end{pmatrix}$$

<u>modul 1.2.</u> O matrice fundamentală este

-sau $\mathcal{X}(t) = \mathcal{X}(t; \underline{\mathbf{x}}_1, \underline{\mathbf{x}}_2, \underline{\mathbf{x}}_3) = \begin{pmatrix} -e^{1t} & -e^{2t} & e^{5t} \\ -e^{1t} & 2e^{2t} & e^{5t} \\ e^{1t} & 3e^{2t} & 3e^{5t} \end{pmatrix}$.

-sau $\mathcal{X}(t) = e^{tA} = Pe^{tD}P^{-1} =$

$$= \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & e^{2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{5t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}^{-1} =$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & e^{2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{5t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{5}{12} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{4}e^t + \frac{1}{3}e^{2t} + \frac{5}{12}e^{5t} & \frac{1}{2}e^t - \frac{1}{3}e^{2t} - \frac{1}{6}e^{5t} & \frac{1}{4}e^{5t} - \frac{1}{4}e^t \\ \frac{1}{4}e^t - \frac{2}{3}e^{2t} + \frac{5}{12}e^{5t} & \frac{1}{2}e^t + \frac{2}{3}e^{2t} - \frac{1}{6}e^{5t} & \frac{1}{4}e^{5t} - \frac{1}{4}e^t \\ \frac{5}{4}e^{5t} - e^{2t} - \frac{1}{4}e^t & e^{2t} - \frac{1}{2}e^t - \frac{1}{2}e^{5t} & \frac{1}{4}e^t + \frac{3}{4}e^{5t} \end{pmatrix}$$

$\boxed{\text{modul 2.}}$ Pe baza teoriei de la ecuaţii diferenţiale liniare de ordin 3, se caută soluţii particulare liniar independente ale (SO):[...] Se ajunge din nou la modul 1.1- vezi Curs, Exemplul 4.2.2.

<u>Pasul 3.</u> Soluţia generală a SO este:

-sau $\underline{\mathbf{x}}_o(t; \underline{\mathbf{c}}) = \mathcal{X}(t; \underline{\mathbf{x}}_1, \underline{\mathbf{x}}_2, \underline{\mathbf{x}}_3) \cdot \underline{\mathbf{c}} = c_1\underline{\mathbf{x}}_1(t) + c_2\underline{\mathbf{x}}_2(t) + c_3\underline{\mathbf{x}}_3(t),\ t \in \mathbb{R},\ c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$.

$$\begin{pmatrix} x_o(t; c_1, c_2, c_3) \\ y_o(t; c_1, c_2, c_3) \\ z_o(t; c_1, c_2, c_3) \end{pmatrix} = c_1 e^{1t} \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\mathbf{v}_1} + c_2 e^{2t} \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}}_{\mathbf{v}_2} + c_3 e^{5t} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}}_{\mathbf{v}_2}, c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}.$$

-sau $\underline{\mathbf{x}}_o(t; \underline{\mathbf{c}}) = e^{tA} \cdot \underline{\mathbf{c}}, \forall t \in \mathbb{I},\ \underline{\mathbf{c}} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^n$,

$$\begin{pmatrix} x_o(t; c_1, c_2, c_3) \\ y_o(t; c_1, c_2, c_3) \\ z_o(t; c_1, c_2, c_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4}e^t + \frac{1}{3}e^{2t} + \frac{5}{12}e^{5t} & \frac{1}{2}e^t - \frac{1}{3}e^{2t} - \frac{1}{6}e^{5t} & \frac{1}{4}e^{5t} - \frac{1}{4}e^t \\ \frac{1}{4}e^t - \frac{2}{3}e^{2t} + \frac{5}{12}e^{5t} & \frac{1}{2}e^t + \frac{2}{3}e^{2t} - \frac{1}{6}e^{5t} & \frac{1}{4}e^{5t} - \frac{1}{4}e^t \\ \frac{5}{4}e^{5t} - e^{2t} - \frac{1}{4}e^t & e^{2t} - \frac{1}{2}e^t - \frac{1}{2}e^{5t} & \frac{1}{4}e^t + \frac{3}{4}e^{5t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}.$$

$\circ$**<u>Metoda eliminării</u>**- greoaie pentru $n \geq 3$.

Pasul 0: Din prima ecuaţie a $(SO) \Rightarrow$

$$\begin{cases} (1)\ x'(t) = 3x(t) - y(t) + z(t) | \frac{d}{dt}() \\ (1_1)\ x''(t) = 3x'(t) - y'(t) + z'(t) | \frac{d}{dt}() \\ (1_2)\ x'''(t) = 3x''(t) - y''(t) + z''(t) \end{cases}$$

Din a doua şi a treia ecuaţie a $(SO) \Rightarrow$

$$\begin{cases} (2)\ y'(t) = x(t) + y(t) + z(t) | \frac{d}{dt}() \\ (3)\ z'(t) = 4x(t) - y(t) + 4z(t) | \frac{d}{dt}() \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (2_1)\ y''(t) = x'(t) + y'(t) + z'(t) \\ (3_1)\ z''(t) = 4x'(t) - y'(t) + 4z'(t) \end{cases}$$

Folosind SO şi $(2_1), (3_1)$, se elimină y', y'', z', z'' din $(1_1), (1_2) \Rightarrow$

$$\begin{cases} (1_1) \Rightarrow x''(t) = 3(3x(t) - y(t) + z(t)) - (x(t) + y(t) + z(t)) + (4x(t) - y(t) + 4z(t)) \\ \qquad\qquad = 12x(t) - 5y(t) + 6z(t) \\ (1_2) \Rightarrow x'''(t) = 3(3x'(t) - y'(t) + z'(t)) - (x'(t) + y'(t) + z'(t)) + (4x'(t) - y'(t) + 4z'(t)) \\ \qquad\qquad = 12x'(t) - 5y'(t) + 6z'(t) = \\ \qquad\qquad = 12(3x(t) - y(t) + z(t)) - 5(x(t) + y(t) + z(t)) + 6(4x(t) - y(t) + 4z(t)) = \\ \qquad\qquad = 55x(t) - 23y(t) + 31z(t) \end{cases}$$

S-a obţinut $\begin{cases} x'(t) = 3x(t) - y(t) + z(t) \\ x''(t) = 12x(t) - 5y(t) + 6z(t) \\ x'''(t) = 55x(t) - 23y(t) + 31z(t) \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$

Deoarece rang $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -5 & 6 \end{pmatrix} = 2$, din primele două ecuaţii ale sistemului se poate exprima în mod unic y, z în funcţie de x, x', x''

$$\begin{cases} -y(t) + z(t) = x'(t) - 3x(t) \\ -5y(t) + 6z(t) = x''(t) - 12x(t) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (\circ_1)\ y(t) = x''(t) - 6x'(t) + 6x(t) \\ (\circ_2)\ z(t) = x''(t) - 5x'(t) + 3x(t) \end{cases}$$

Se înlocuiesc y, z în din $(\circ_1), (\circ_2)$ în expresia lui $x''' \Rightarrow$

$x'''(t) = 55x(t) - 23(x''(t) - 6x'(t) + 6x(t)) + 31(x''(t) - 5x'(t) + 3x(t)) \Rightarrow$

$(*_{EO})\ x'''(t) - 8x''(t) + 17x'(t) - 10x(t) = 0.$

Ecuaţia $(*_{EO})$ este o ecuaţie diferenţială de ordin 3, liniară, cu coeficienţii constanţi -8, 17, -10, omogenă. Pentru $t \in \mathbb{R}$, variabilă independentă din domeniul de definiţie a soluţiei, se caută $x_o(t; c_1, c_2, c_3)$, soluţia generală pentru ecuaţia $(*_{EO})$.

Pasul 1 : Se ataşează ecuaţiei diferenţiale $(*_{EO})$ ecuaţia ei caracteristică

$$(*_{EC})\ \lambda^3 - 8\lambda^2 + 17\lambda - 10 = 0 \Leftrightarrow (\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda - 5) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 1 \text{ cu } m(\lambda_1) = 1, \\ \lambda_2 = 2 \text{ cu } m(\lambda_2) = 1, \\ \lambda_3 = 5 \text{ cu } m(\lambda_3) = 1. \end{cases}$$

Pasul 2 : Pentru fiecare rădăcină a ecuaţiei caracteristice se găsesc corespunzător soluţii particulare liniar independente ale ecuaţiei omogene $(*_{EO})$, după algoritmul dat

•$\lambda_1 = 1$ cu $m(\lambda_1) = 1 \rightsquigarrow x_1(t) = e^{1t}$,

•$\lambda_2 = 2$ cu $m(\lambda_2) = 1 \rightsquigarrow x_2(t) = e^{2t}$,

•$\lambda_3 = 5$ cu $m(\lambda_3) = 1 \rightsquigarrow x_3(t) = e^{5t}$.

$B = (x_1, x_2, x_3)$ este un sistem fundamental de soluţii pentru $(*_{EO})$.

Pasul 3 : Soluţia generală a ecuaţiei $(*_{EO})$ este

$x_o(t; c_1, c_2, c_3) = c_1 e^{1t} + c_2 e^{2t} + c_3 e^{5t}, \forall t \in \mathbb{R}$ şi $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$

Pasul 4 : Se înlocuiesc x_o, x_o', x_o''.

$x_o(t) = c_1 e^{1t} + c_2 e^{2t} + c_3 e^{5t}$

$x_o'(t) = c_1 e^{1t} \cdot 1 + c_2 e^{2t} \cdot 2 + c_3 e^{5t} \cdot 5 \Rightarrow$

$x_o''(t) = c_1 e^{1t} \cdot 1 + c_2 e^{2t} \cdot 4 + c_3 e^{5t} \cdot 25.$

Atunci

$$\begin{cases} (\circ_1) \Rightarrow y(t) = c_1 e^{1t} \cdot 1 + c_2 e^{2t} \cdot (-2) + c_3 e^{5t} \cdot 1 \\ (\circ_2) \Rightarrow z(t) = c_1 e^{1t} \cdot (-1) + c_2 e^{2t} \cdot (-3) + c_3 e^{5t} \cdot 3 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x_o\left(t;c_1,c_2,c_3\right)=c_1e^{1t}+c_2e^{2t}+c_3e^{5t} \\ y_o\left(t;c_1,c_2,c_3\right)=c_1e^{1t}-2c_2e^{2t}+c_3e^{5t} \\ z_o\left(t;c_1,c_2,c_3\right)=-c_1e^{1t}-3c_2e^{2t}+3c_3e^{5t} \end{cases}, \forall t\in\mathbb{R} \text{ şi } c_1,c_2,c_3\in\mathbb{R}\Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} x_o\left(t;c_1,c_2,c_3\right) \\ y_o\left(t;c_1,c_2,c_3\right) \\ z_o\left(t;c_1,c_2,c_3\right) \end{pmatrix}=c_1e^{1t}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}+c_2e^{2t}\begin{pmatrix}1\\-2\\-3\end{pmatrix}+c_3e^{5t}\begin{pmatrix}1\\1\\3\end{pmatrix}, \forall t\in\mathbb{R} \text{ şi } c_1,c_2,c_3\in\mathbb{R}.$$

b) $\begin{cases} x'=x-2y-z \\ y'=-x+y+z \\ z'=x-z \end{cases}$

Indicaţie. A are valorile proprii $\begin{cases} \lambda_1=0 \text{ cu } m\left(\lambda_1\right)=1, \\ \lambda_2=-1 \text{ cu } m\left(\lambda_2\right)=1, \\ \lambda_3=2 \text{ cu } m\left(\lambda_3\right)=1, \end{cases}$, este diagonalizabilă în $\mathbb{R}$.

c) $\begin{cases} x'=-3x+4y-2z \\ y'=x+z \\ z'=6x-6y+5z \end{cases}$

Indicaţie. A are valorile proprii $\begin{cases} \lambda_1=1 \text{ cu } m\left(\lambda_1\right)=1, \\ \lambda_2=-1 \text{ cu } m\left(\lambda_2\right)=1, \\ \lambda_3=2 \text{ cu } m\left(\lambda_3\right)=1, \end{cases}$, este diagonalizabilă în $\mathbb{R}$.

d) $\begin{cases} x'=x-y+z \\ y'=x+y-z \\ z'=2x-y \end{cases}$

Indicaţie. A are valorile proprii $\begin{cases} \lambda_1=1 \text{ cu } m\left(\lambda_1\right)=1, \\ \lambda_2=-1 \text{ cu } m\left(\lambda_2\right)=1, \\ \lambda_3=2 \text{ cu } m\left(\lambda_3\right)=1, \end{cases}$, este diagonalizabilă în $\mathbb{R}$.

e) $\begin{cases} x'=2x-y+z \\ y'=x+2y-z \\ z'=x-y+2z \end{cases}$

Indicaţie. A are valorile proprii $\begin{cases} \lambda_1=1 \text{ cu } m\left(\lambda_1\right)=1, \\ \lambda_2=2 \text{ cu } m\left(\lambda_2\right)=1, \\ \lambda_3=3 \text{ cu } m\left(\lambda_3\right)=1, \end{cases}$, este diagonalizabilă în $\mathbb{R}$.

f) $\begin{cases} x'=3x-y+z \\ y'=x+y+z \\ z'=4x-y+4z \end{cases}$

Indicaţie. A are valorile proprii $\begin{cases} \lambda_1=1 \text{ cu } m\left(\lambda_1\right)=1, \\ \lambda_2=2 \text{ cu } m\left(\lambda_2\right)=1, \\ \lambda_3=5 \text{ cu } m\left(\lambda_3\right)=1, \end{cases}$, este diagonalizabilă în $\mathbb{R}$.

g) $\begin{cases} x'=y+z \\ y'=x+z \\ z'=x+y; \end{cases}$

Indicaţie. A are valorile proprii $\begin{cases} \lambda_1=-1\in\mathbb{R} \text{ cu } m\left(\lambda_1\right)=2; \\ \lambda_2=2\in\mathbb{R} \text{ cu } m\left(\lambda_2\right)=1. \end{cases}$, este diagonalizabilă în $\mathbb{R}$ - rezolvare în Curs.

h) $\begin{cases} x'=4x-y-z \\ y'=x+2y-z \\ z'=x-y+2z \end{cases}$

Indicaţie. A are valorile proprii$\begin{cases} \lambda_1 = 3 \text{ cu } m(\lambda_1) = 2, \\ \lambda_2 = 2 \text{ cu } m(\lambda_2) = 1 \end{cases}$, este diagonalizabilă în $\mathbb{R}$.

i) $\begin{cases} x' = 3x - 2y - z \\ y' = 3x - 4y - 3z \\ z' = 2x - 4y \end{cases}$

Indicaţie. A are valorile proprii$\begin{cases} \lambda_1 = 2 \text{ cu } m(\lambda_1) = 2, \\ \lambda_2 = -5 \text{ cu } m(\lambda_2) = 1 \end{cases}$, este diagonalizabilă în $\mathbb{R}$.

j) $\begin{cases} x' = -2x + y - 2z \\ y' = x - 2y + 2z \\ z' = 3x - 3y + 5z \end{cases}$

Indicaţie. A are valorile proprii$\begin{cases} \lambda_1 = -1 \text{ cu } m(\lambda_1) = 2, \\ \lambda_2 = 3 \text{ cu } m(\lambda_2) = 1 \end{cases}$, este diagonalizabilă în $\mathbb{R}$.

k) $\begin{cases} x' = x + y + z \\ y' = 2x + 2y + 2z \\ z' = 4x + 4y + 4z \end{cases}$

Indicaţie. A are valorile proprii$\begin{cases} \lambda_1 = 0 \text{ cu } m(\lambda_1) = 2, \\ \lambda_2 = 7 \text{ cu } m(\lambda_2) = 1 \end{cases}$, este diagonalizabilă în $\mathbb{R}$.

l) $\begin{cases} x_1' = x_1 & & & + x_4 \\ x_2' = & x_2 & & \\ x_3' = & & +x_3 & - 2x_4 \\ x_4' = x_1 & & - 2x_3 & + 5x_4 \end{cases}$

Indicaţie. A are valorile proprii$\begin{cases} \lambda_1 = 0 \in \mathbb{R} \text{ cu } m(\lambda_1) = 1; \\ \lambda_2 = 1 \in \mathbb{R} \text{ cu } m(\lambda_2) = 2; \\ \lambda_3 = 6 \in \mathbb{R} \text{ cu } m(\lambda_3) = 1; \end{cases}$, este diagonalizabilă în $\mathbb{R}$ -rezolvare în Curs.

m) $\begin{cases} x' = x - y + z \\ y' = x + y - z \\ z' = \quad -y + 2z \end{cases}$

Indicaţie. A are valorile proprii$\begin{cases} \lambda_1 = 1 \text{ cu } m(\lambda_1) = 2, \\ \lambda_2 = 2 \text{ cu } m(\lambda_2) = 1 \end{cases}$, nu este diagonalizabilă nici în $\mathbb{R}$, nici în $\mathbb{C}$.

n) $\begin{cases} x' = x + 2y - 3z \\ y' = x + y + 2z \\ z' = x - y + 4z; \end{cases}$

Rezolvare: Sistemul $(SO)\begin{cases} x'(t) = x(t) + 2y(t) - 3z(t) \\ y'(t) = x(t) + y(t) + 2z(t) \\ z'(t) = x(t) - y(t) + 4z(t) \end{cases}, t \in \mathbb{R}$,
este sistem de 3 ecuaţii diferenţiale de ordin 1, liniare, cu coeficienţii constanţi, daţi de

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

,omogen, cu $\underline{\mathbf{b}}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Are $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$ =?− funcţii necunoscute.

Metoda cu valori proprii

Pasul 1 Se ataşează ecuaţia caracteristică a matricei A şi se rezolvă. Adică se determină valorile proprii în $\mathbb{C}$ ale matricei A, precum şi multiplicitatea lor algebrică.

•Se determină polinomul caracteristic al matricei $A, P_A(\lambda)$.

$\boxed{P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_3)} = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & -3 \\ 1 & 1-\lambda & 2 \\ 1 & -1 & 4-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 12\lambda + 8$ sau

$\boxed{P_A(\lambda) = (-1)^3 \left(\lambda^3 - \delta_1\lambda^2 + \delta_2\lambda - \delta_3\right)}$, unde δ_i este suma minorilor principali de ordin i ai matricei A, adică

$\boxed{\delta_1 = \operatorname{Tr} A} = 1 + 1 + 4 = 6;$

$\delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}_{1,2} + \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}_{1,3} + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{vmatrix}_{2,3} = 12;$

$\boxed{\delta_3 = \det A} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 8.$

$P_A(\lambda) = -\left(\lambda^3 - 6\lambda^2 + 12\lambda - 8\right).$

•Se rezolvă ecuaţia caracteristică a matricei A,

$P_A(\lambda) = 0 \Leftrightarrow -(\lambda - 2)^3 = 0 \Leftrightarrow \{\ \lambda_1 = 2 \in \mathbb{R}$ cu $m(\lambda_1) = 3;$

Se observă că toate rădăcinile caracteristice sunt din $\mathbb{R}$, adică sunt valori proprii ale matricei A.

Spectrul matricei A este $\sigma(A) = \{2\}$.

Raza spectrală a matricei A este $\rho(A) = \max\{|2|\} = 2$.

Pasul 2. Se determină un sitem fundamental de soluţii ale SO / o matrice fundamentală a SO.

$\boxed{\text{modul 1.}}$- aplicabil dacă $A \sim D$ în $\mathbb{R}$. Se determină subspaţiile proprii ale matricei A, precum şi dimensiunile lor.

$\boxed{\lambda_1 = 2}$ Se caută vectorii proprii corespunzători valorii proprii $\lambda_1 = 2$, adică

$\underline{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times1}(\mathbb{R})$, $\underline{\mathbf{x}} \neq \underline{\boldsymbol{\theta}}_{\mathcal{M}_{3\times1}(\mathbb{R})}$ a.î.$(A - 2I_3)\,\underline{\mathbf{x}} = \underline{\boldsymbol{\theta}}_{\mathcal{M}_{3\times1}(\mathbb{R})}$, adică

$$\begin{cases} (1-2)\,x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0 \\ x_1 + (1-2)\,x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 + (4-2)\,x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -\alpha \\ x_2 = \alpha \\ x_3 = \alpha \in \mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow$$

$S_{\lambda_1}(A) = \{\underline{\mathbf{x}} \in \mathcal{M}_{3\times1}(\mathbb{R})\,;\underline{\mathbf{x}}$ este vect. propriu. pt. A coresp. val. proprii $\lambda_1 = 2\} \cup \left\{\underline{\boldsymbol{\theta}}_{\mathcal{M}_{3\times1}(\mathbb{R})}\right\} =$

$$= \left\{ \underline{\mathbf{x}} \in \mathcal{M}_{3\times1}(\mathbb{R})\,; \underline{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} -\alpha \\ \alpha \\ \alpha \end{pmatrix} = \alpha \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\mathbf{u}_1^1 = \mathbf{v}_1}, \alpha \in \mathbb{R} \right\} =$$

$= \left[\left(\mathbf{u}_1^1\right)\right] \Rightarrow \dim_{\mathbb{R}} S_{\lambda_1}(A) = 1 \neq 3 = m(\lambda_1).$

Conform teoremei Jordan, matricea A nu este diagonalizabilă nici în $\mathbb{R}$, nici în $\mathbb{C}$.

Folosind calculatorul, programul Scientific WorkPlace, se poate scrie forma Jordan $A = PJP^{-1}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -3 & -1 & -1 \\ -2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -3 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

dar nu se continuă în acest material cu modul 1.

$\boxed{\text{modul 2.}}$ Pe baza teoriei de la ecuaţii diferenţiale liniare de ordin 3, se caută soluţii particulare liniar independente ale (SO):

•$\lambda_1 = 2 \in \mathbb{R}$ cu $m(\lambda_1) = 3 \rightsquigarrow$se caută trei soluţii particulare l.i. ale SO de forma

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left(a_1 + ta_2 + t^2 c_3\right) e^{2t} \\ \left(a_4 + ta_5 + t^2 a_6\right) e^{2t} \\ \left(a_7 + ta_8 + t^2 a_9\right) e^{2t} \end{pmatrix}.$$

Se determină $a_1, ..., a_9$ (numere, altele decât constantele de indexare), impunând ca x, y, z să verifice (SO) :

$$\begin{cases} (a_2 + 2tc_3)\, e^{2t} + \left(a_1 + ta_2 + t^2 c_3\right) e^{2t} \cdot 2 = \\ \qquad = \left(a_1 + ta_2 + t^2 c_3\right) e^{2t} + 2\left(a_4 + ta_5 + t^2 a_6\right) e^{2t} - 3\left(a_7 + ta_8 + t^2 a_9\right) e^{2t} \\ (a_5 + 2ta_6)\, e^{2t} + \left(a_4 + ta_5 + t^2 a_6\right) e^{2t} \cdot 2 = \\ \qquad = \left(a_1 + ta_2 + t^2 c_3\right) e^{2t} + \left(a_4 + ta_5 + t^2 a_6\right) e^{2t} + 2\left(a_7 + ta_8 + t^2 a_9\right) e^{2t} \\ (a_8 + 2ta_9)\, e^{2t} + \left(a_7 + ta_8 + t^2 a_9\right) e^{2t} \cdot 2 = \\ \qquad = \left(a_1 + ta_2 + t^2 c_3\right) e^{2t} - \left(a_7 + ta_8 + t^2 a_9\right) e^{2t} + 4\left(a_7 + ta_8 + t^2 a_9\right) e^{2t}; \end{cases}$$

Se împarte fiecare ecuaţie prin e^{2t} şi se identifică coeficienţii:

$$\begin{matrix} t^0: \\ t^1: \\ t^2: \\ t^0: \\ t^1: \\ t^2: \\ t^0: \\ t^1: \\ t^2: \end{matrix} \begin{cases} a_2 + 2a_1 = a_1 + 2a_4 - 3a_7 \\ 2c_3 + 2a_2 = a_2 + 2a_5 - 3a_8 \\ 2c_3 = c_3 + 2a_6 - 3a_9 \\ a_5 + 2a_4 = a_1 + a_4 + 2a_7 \\ 2a_6 + 2a_5 = a_2 + a_5 + 2a_8 \\ 2a_6 = c_3 + a_6 + 2a_9 \\ a_8 + 2a_7 = a_1 - a_4 + 4a_7 \\ 2a_9 + 2a_8 = a_2 - a_5 + 4a_8 \\ 2a_9 = c_3 - a_6 + 4a_9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 + a_2 - 2a_4 + 3a_7 = 0 \\ a_2 + 2c_3 - 2a_5 \quad 3a_8 = 0 \\ c_3 - 2a_6 + 3a_9 = 0 \\ a_1 - a_4 - a_5 + 2a_7 = 0 \\ a_2 - a_5 - 2a_6 + 2a_8 = 0 \\ c_3 - a_6 + 2a_9 = 0 \\ a_1 - a_4 + 2a_7 - a_8 = 0 \\ a_2 - a_5 + 2a_8 - 2a_9 = 0 \\ c_3 - a_6 + 2a_9 = 0 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccccccccc|c} 1 & 1 & 0 & -2 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & -2 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & -2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right) \overset{Gauss}{\sim} \left(\begin{array}{ccccccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} a_1 + \quad a_7 - a_8 - 2a_9 = 0 \\ a_2 + a_8 - 2a_9 = 0 \\ c_3 + a_9 = 0 \\ a_4 - a_7 - 2a_9 = 0 \\ a_5 - a_8 = 0 \\ a_6 - a_9 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = -\alpha + \beta + 2\gamma \\ a_2 = -\beta + 2\gamma \\ c_3 = -\gamma \\ a_4 = \alpha + 2\gamma \\ a_5 = \beta \\ a_6 = \gamma \\ a_7 = \alpha \in \mathbb{R} \\ a_8 = \beta \in \mathbb{R} \\ a_9 = \gamma \in \mathbb{R} \end{cases}.$$

S-a găsit

$$\varphi(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left(-\alpha + \beta + 2\gamma + t(-\beta + 2\gamma) + t^2(-\gamma)\right) e^{2t} \\ \left(\alpha + 2\gamma + t\beta + t^2\gamma\right) e^{2t} \\ \left(\alpha + t\beta + t^2\gamma\right) e^{2t} \end{pmatrix} =$$

$$= \alpha e^{2t} \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\mathbf{v}_1} + \beta e^{2t} \begin{pmatrix} 1-t \\ t \\ t \end{pmatrix} + \gamma e^{2t} \cdot \begin{pmatrix} -t^2 \\ t^2 \\ t^2 \end{pmatrix}.$$

Se caută trei soluţii particulare l.i. ale $(SO) \Rightarrow$

$$\alpha = 1, \beta = 0, \gamma = 0 \rightsquigarrow \underline{\mathbf{x}}_1(t) \overset{\text{notez}}{=} \varphi_1(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ y_1(t) \\ z_1(t) \end{pmatrix} = e^{2t} \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\mathbf{v}_1}.$$

$$\alpha = 0, \beta = 1, \gamma = 0 \rightsquigarrow \underline{\mathbf{x}}_2(t) \overset{\text{notez}}{=} \varphi_2(t) = \begin{pmatrix} x_2(t) \\ y_2(t) \\ z_2(t) \end{pmatrix} = e^{2t} \begin{pmatrix} 1-t \\ t \\ t \end{pmatrix}.$$

$$\alpha = 0, \beta = 0, \gamma = 1 \rightsquigarrow \underline{\mathbf{x}}_3(t) \overset{\text{notez}}{=} \varphi_3(t) = \begin{pmatrix} x_3(t) \\ y_3(t) \\ z_3(t) \end{pmatrix} = e^{2t} \begin{pmatrix} -t^2 \\ t^2 \\ t^2 \end{pmatrix}.$$

Din algoritm se obţin 3 soluţii liniar independente, adică $B = (\underline{\mathbf{x}}_1, \underline{\mathbf{x}}_2, \underline{\mathbf{x}}_3)$ este un sistem fundamental de soluţii ale (SO).

<u>Pasul 3.</u> Soluţia generală a SO este:

$$\underline{\mathbf{x}}_o(t; \underline{\mathbf{c}}) = \mathcal{X}(t; \underline{\mathbf{x}}_1, \underline{\mathbf{x}}_2, \underline{\mathbf{x}}_3) \cdot \underline{\mathbf{c}} = c_1 \underline{\mathbf{x}}_1(t) + c_2 \underline{\mathbf{x}}_2(t) + c_3 \underline{\mathbf{x}}_3(t), t \in \mathbb{R},\ c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}.$$

$$\begin{pmatrix} x_o(t; c_1, c_2, c_3) \\ y_o(t; c_1, c_2, c_3) \\ z_o(t; c_1, c_2, c_3) \end{pmatrix} = c_1 e^{2t} \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\mathbf{v}_1} + c_2 e^{2t} \begin{pmatrix} 1-t \\ t \\ t \end{pmatrix} + c_3 e^{2t} \begin{pmatrix} -t^2 \\ t^2 \\ t^2 \end{pmatrix}, c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}.$$

$\underline{\mathbf{x}}_o(t; \underline{\mathbf{c}}) = e^{tA} \cdot \underline{\mathbf{c}}$–NU.

$\bigcirc$<u>**Metoda eliminării**</u>- greoaie pentru $n \geq 3$.

<u>Pasul 0:</u> Din prima ecuaţie a $(SO) \Rightarrow$

$$\begin{cases} (1)\ x'(t) = x(t) + 2y(t) - 3z(t) | \frac{d}{dt}() \\ (1_1)\ x''(t) = x'(t) + 2y'(t) - 3z'(t) | \frac{d}{dt}() \\ (1_2)\ x'''(t) = x''(t) + 2y''(t) - 3z''(t) \end{cases}$$

Din a doua şi a treia ecuaţie a $(SO) \Rightarrow$

$$\begin{cases} (2)\ y'(t) = x(t) + y(t) + 2z(t) | \frac{d}{dt}() \\ (3)\ z'(t) = x(t) - y(t) + 4z(t) | \frac{d}{dt}() \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (2_1)\ y''(t) = x'(t) + y'(t) + 2z'(t) \\ (3_1)\ z''(t) = x'(t) - y'(t) + 4z'(t) \end{cases}$$

Folosind SO şi $(2_1), (3_1)$, se elimină y', y'', z', z'' din $(1_1), (1_2) \Rightarrow$

$$\begin{cases} (1_1) \Rightarrow x''(t) = (x(t) + 2y(t) - 3z(t)) + 2(x(t) + y(t) + 2z(t)) - 3(x(t) - y(t) + 4z(t)) \\ \qquad = 0 \cdot x(t) + 7y(t) - 11z(t) \\ (1_2) \Rightarrow x'''(t) = (x'(t) + 2y'(t) - 3z'(t)) + 2(x'(t) + y'(t) + 2z'(t)) - 3(x'(t) - y'(t) + 4z'(t)) \\ \qquad = 0 \cdot x'(t) + 7y'(t) - 11z'(t) = \\ \qquad = 0 \cdot (x(t) + 2y(t) - 3z(t)) + 7(x(t) + y(t) + 2z(t)) - 11(x(t) - y(t) + 4z(t)) = \\ \qquad = -4x(t) + 18y(t) - 30z(t) \end{cases}$$

S-a obţinut $\begin{cases} x'(t) = x(t) + 2y(t) - 3z(t) \\ x''(t) = 0 \cdot x(t) + 7y(t) - 11z(t) \\ x'''(t) = -4x(t) + 18y(t) - 30z(t) \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$

Deoarece rang $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 7 & -11 \end{pmatrix} = 2$, din primele două ecuaţii ale sistemului se poate exprima în mod unic y, z în funcţie de x, x', x''

$\begin{cases} 2y(t) - 3z(t) = x'(t) - x(t) \\ 7y(t) - 11z(t) = x''(t) - 0 \cdot x(t) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (\circ_1)\, y(t) = -3x''(t) + 11x'(t) - 11x(t) \\ (\circ_2)\, z(t) = -2x''(t) + 7x'(t) - 7x(t) \end{cases}$

Se înlocuiesc y, z în expresia lui $x''' \Rightarrow$

$x'''(t) = -4x(t) + 18(-3x''(t) + 11x'(t) - 11x(t)) - 30(-2x''(t) + 7x'(t) - 7x(t)) \Rightarrow$

$(*_{EO})\, x'''(t) - 6x''(t) + 12x'(t) - 8x(t) = 0.$

Ecuaţia $(*_{EO})$ este o ecuaţie diferenţială de ordin 3, liniară, cu coeficienţii constanţi $a_1 = -8$, $a_2 = 12$, $a_3 = -8$, omogenă. Pentru $t \in \mathbb{R}$, variabilă independentă din domeniul de definiţie a soluţiei, se caută $x_o(t; c_1, c_2, c_3)$, soluţia generală pentru ecuaţia $(*_{EO})$.

Pasul 1 : Se ataşează ecuaţiei diferenţiale $(*_{EO})$ ecuaţia ei caracteristică

$(*_{EC})\ \lambda^3 - 6\lambda^2 + 12\lambda - 8 = 0 \Leftrightarrow (\lambda - 2)^3 = 0 \Rightarrow \{\lambda_1 = 2 \text{ cu } m(\lambda_1) = 3.$

Pasul 2 : Pentru fiecare rădăcină a ecuaţiei caracteristice se găsesc corespunzător soluţii particulare liniar independente ale ecuaţiei omogene $(*_{EO})$, după algoritmul dat

$\bullet \lambda_1 = 2 \text{ cu } m(\lambda_1) = 3 \rightsquigarrow \begin{cases} x_1(t) = e^{2t} \\ x_2(t) = te^{2t} \\ x_3(t) = t^2e^{2t}. \end{cases}$

Pasul 3 : Conform algoritmului de la Pasul 2, (x_1, x_2, x_3) este un sistem fundamental de soluţii pentru $(*_{EO})$ (sunt soluţii particulare pentru $(*_{EO})$ şi funcţii liniar independente). Atunci soluţia generală a ecuaţiei $(*_{EO})$ este

$x_o(t; c_1, c_2, c_3) = c_1e^{2t} + c_2te^{2t} + c_3t^2e^{2t}, \forall t \in \mathbb{R}$ şi $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$

Pasul 4 : Se înlocuiesc x_o, x_o', x_o''.

$x_o(t) = c_1e^{2t} + c_2te^{2t} + c_3t^2e^{2t}$

$x_o'(t) = c_1e^{2t} \cdot 2 + c_2\left(e^{2t} + 2te^{2t}\right) + c_3\left(2te^{2t} + 2t^2e^{2t}\right)$

$x_o''(t) = c_1e^{2t} \cdot 4 + c_2\left(4e^{2t} + 4te^{2t}\right) + c_3\left(2e^{2t} + 8te^{2t} + 4t^2e^{2t}\right).$

Atunci

$\begin{cases} (\circ_1) \Rightarrow y(t) = c_1e^{2t} \cdot (-1) + c_2\left(-e^{2t} - te^{2t}\right) + c_3\left(-6e^{2t} - 2te^{2t} - t^2e^{2t}\right) \\ (\circ_2) \Rightarrow z(t) = c_1e^{2t} \cdot (-1) + c_2\left(-e^{2t} - te^{2t}\right) + c_3\left(-4e^{2t} - 2te^{2t} - t^2e^{2t}\right) \end{cases} \Rightarrow$

$\begin{cases} x_o(t; c_1, c_2, c_3) = c_1e^{2t} + c_2te^{2t} + c_3t^2e^{2t} \\ y_o(t; c_1, c_2, c_3) = c_1e^{2t} \cdot (-1) + c_2\left(-e^{2t} - te^{2t}\right) + c_3\left(-6e^{2t} - 2te^{2t} - t^2e^{2t}\right) \\ z_o(t; c_1, c_2, c_3) = c_1e^{2t} \cdot (-1) + c_2\left(-e^{2t} - te^{2t}\right) + c_3\left(-4e^{2t} - 2te^{2t} - t^2e^{2t}\right) \end{cases},$

$\forall t \in \mathbb{R}$ şi $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$.

o) $\begin{cases} x' = 2x - y - z \\ y' = 2x - y - 2z \\ z' = 2z - x + y \end{cases}$

Indicaţie. A are valorile proprii$\{\lambda_1 = 1$ cu $m(\lambda_1) = 3$, nu este diagonalizabilă nici în $\mathbb{R}$, nici în $\mathbb{C}$.

p) $\begin{cases} x' = \quad\quad -y \\ y' = -4x + 4y \\ z' = -2x + y + 2z \end{cases}$

Indicaţie. A are valorile proprii$\{\lambda_1 = 1$ cu $m(\lambda_1) = 3$, nu este diagonalizabilă nici în $\mathbb{R}$, nici în $\mathbb{C}$.

q) $\begin{cases} x' = 2x + y \\ y' = x + 3y - z \\ z' = -x + 2y + 3z \end{cases}$

Indicaţie. A are valorile proprii $\begin{cases} \lambda_1 = 2 \in \mathbb{R} \text{ cu } m(\lambda_1) = 1; \\ \lambda_2 = 3 - i \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R} \text{ cu } m(\lambda_2) = 1; \\ \lambda_3 = 3 + i \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R} \text{ cu } m(\lambda_3) = 1; \end{cases}$, nu este diagonalizabilă în $\mathbb{R}$, dar este diagonalizabilă în $\mathbb{C}-$ a se vedea rezolvarea în Curs.

r) $\begin{cases} x' = x - y - z \\ y' = x + y \\ z' = 3x \qquad + z \end{cases}$

Indicaţie. A are valorile proprii $\begin{cases} \lambda_1 = 1 \text{ cu } m(\lambda_1) = 1 \\ \lambda_2 = 1 + 2i \text{ cu } m(\lambda_2) = 1 \\ \lambda_3 = 1 - 2i \text{ cu } m(\lambda_3) = 1 \end{cases}$, nu este diagonalizabilă în $\mathbb{R}$, dar este diagonalizabilă în $\mathbb{C}$.

s) $\begin{cases} x' = x - y + z \\ y' = \quad 2y - z \\ z' = \qquad y + 2z \end{cases}$

Indicaţie. A are valorile proprii $\begin{cases} \lambda_1 = 1 \text{ cu } m(\lambda_1) = 1 \\ \lambda_2 = 2 + i \text{ cu } m(\lambda_2) = 1 \\ \lambda_3 = 2 - i \text{ cu } m(\lambda_3) = 1 \end{cases}$, nu este diagonalizabilă în $\mathbb{R}$, dar este diagonalizabilă în $\mathbb{C}$.