SEMINAR NR. 8, REZOLVĂRI
EDCO, AIA

4.2. Sisteme de ecuaţii diferenţiale liniare cu coeficienţi constanţi

Exerciţiul 3. Să se rezolve următoarele sisteme diferenţiale liniare:
a) $\begin{cases} x' = x - y + e^t \\ y' = 2x - y + \cos t; \end{cases}$

Rezolvare : Sistemul $(SN)\begin{cases} x'(t) = x(t) - y(t) + e^t \\ y'(t) = 2x(t) - y(t) + \cos t \end{cases}, t \in \mathbb{R},$
este sistem de $n = 2$ ecuaţii diferenţiale de ordin 1, liniare, cu coeficienţii constanţi, daţi de
$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, neomogen, cu $\underline{\mathbf{b}}(t) = \begin{pmatrix} e^t \\ \cos t \end{pmatrix}$, cu $n = 2$ necunoscute $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = ?$

I. **Metoda directă, în SN, a eliminării**

Etapa 0: Din prima ecuaţie a $(SN) \Rightarrow$
$\begin{cases} (\circ)\; y(t) = -x'(t) + x(t) + e^t \Big| \frac{d}{dt}() \\ y'(t) = -x''(t) + x'(t) + e^t \end{cases}$

Se înlocuiesc y şi y' în a doua ecuaţie a (SN) (se elimină y, y' din a doua ecuaţie a (SN)) $\Rightarrow$
$-x''(t) + x'(t) + e^t = 2x(t) + x'(t) - x(t) - e^t + \cos t \Rightarrow$
$(*_{EN})\; x''(t) + x(t) = 2e^t - \cos t.$

Ecuaţia $(*_{EN})$ este o ecuaţie diferenţială de ordin 2, liniară, cu coeficienţii constanţi 0, 1, neomogenă cu termenul liber
$f : \mathbb{I} \to \mathbb{R},\; f(t) = 2e^t - \cos t.$

Pentru $t \in \mathbb{I} = \mathbb{R}$, variabilă independentă din domeniul de definiţie a soluţiei, se caută $x(t; c_1, c_2)$, soluţia generală pentru ecuaţia $(*_{EN})$.

Etapa 1: Se ataşează şi se rezolvă EO
$(*_{EO})\; x''(t) + x(t) = 0.$

Pasul 1 : Se ataşează ecuaţiei diferenţiale $(*_{EO})$ ecuaţia ei caracteristică
$(*_{EC})\; \lambda^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow (\lambda - i)(\lambda + i) = 0 \Rightarrow \{\lambda_{1,2} = \pm i$ cu $m(\lambda_{1,2}) = 1.$

Pasul 2 : Pentru fiecare rădăcină a ecuaţiei caracteristice se găsesc corespunzător soluţii particulare liniar independente ale ecuaţiei omogene $(*_{EO})$
$\bullet \lambda_{1,2} = 0 \pm 1 \cdot i$ cu $m(\lambda_{1,2}) = 1 \rightsquigarrow \begin{cases} x_1(t) = e^{0t} \cos 1t, \\ x_2(t) = e^{0t} \sin 1t. \end{cases}$

$B = (x_1, x_2)$ este un sistem fundamental de soluţii pentru $(*_{EO})$.

Pasul 3 : Soluţia generală a ecuaţiei $(*_{EO})$ este
$x_o(t; c_1, c_2) = c_1 \cdot \cos t + c_2 \cdot \sin t, \forall t \in \mathbb{R}$ şi $c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$

Etapa 2 : Se determină o soluţie particulară a ecuaţiei neomogene $(*_{EN}), x_p = ?.$

Metoda variaţiei constantelor pentru EN: Deoarece (x_1, x_2) este un sistem fundamental de soluţii pentru $(*_{EO})$ se caută x_p de forma
$x_p(t) = u_1(t) \underbrace{\cos t}_{x_1(t)} + u_2(t) \underbrace{\sin t}_{x_2(t)}, \forall t \in \mathbb{I},$

unde $u_i' : \mathbb{I} \to \mathbb{R}$, $i \in \{1, 2\}$, sunt soluţii ale sistemului
$\begin{cases} u_1'(t) \cos t + u_2'(t) \sin t = 0 \\ u_1'(t)(-\sin t) + u_2'(t)(\cos t) = 2e^t - \cos t \end{cases}$

$$\Delta(t) = W(t; x_1, x_2) = \begin{vmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{vmatrix} = 1 \neq 0, \forall t \in \mathbb{I}.$$

$$\Delta_1(t) = \begin{vmatrix} 0 & \sin t \\ 2e^t - \cos t & \cos t \end{vmatrix} = \cos t \sin t - 2e^t \sin t, \forall t \in \mathbb{I}.$$

$$\Delta_2(t) = \begin{vmatrix} \cos t & 0 \\ -\sin t & 2e^t - \cos t \end{vmatrix} = 2(\cos t)e^t - \cos^2 t, \forall t \in \mathbb{I}.$$

Atunci

$$\begin{cases} u_1'(t) = \frac{\Delta_1(t)}{\Delta(t)} = \cos t \sin t - 2e^t \sin t, \\ u_2'(t) = \frac{\Delta_2(t)}{\Delta(t)} = 2(\cos t)e^t - \cos^2 t. \end{cases} \Bigg| \int (\cdot)\, dt \Rightarrow \begin{cases} u_1(t) = (\cos t)e^t - \frac{1}{4}\cos 2t - e^t \sin t + k_1, \\ u_2(t) = (\cos t)e^t - \frac{1}{4}\sin 2t - \frac{1}{2}t + e^t \sin t + k_2. \end{cases}$$

Deoarece se caută o soluţie particulară x_p se alege $k_1 = 0$, $k_2 = 0$. S-a obţinut

$$\begin{aligned} x_p(t) &= \left((\cos t)e^t - \tfrac{1}{4}\cos 2t - e^t \sin t\right)\cos t + \left((\cos t)e^t - \tfrac{1}{4}\sin 2t - \tfrac{1}{2}t + e^t \sin t\right)\sin t = \\ &= e^t\left(\cos^2 t - \sin t \cos t + \sin t \cos t + \sin^2 t\right) - \tfrac{1}{4}\cos 2t \cos t - \tfrac{1}{4}\sin 2t \sin t - \tfrac{1}{2}t \sin t = \\ &= e^t - \frac{1}{4}\frac{\cos 3t + \cos t}{2} - \frac{1}{4}\frac{\cos t - \cos 3t}{2} - \tfrac{1}{2}t\sin t = \\ &= e^t - \frac{1}{4}\cos t - \tfrac{1}{2}t \sin t, \forall t \in \mathbb{I}. \end{aligned}$$

Metoda coeficienţilor nedeterminaţi pentru EN: Se observă că ecuaţia $(*_{EN})$ are coeficienţi constanţi, nu are termenul liber un cvasipolinom dar are termenul liber o combinaţie liniară de cvasipolinoame.

$$f(t) = \underbrace{1}_{\overline{c}_1} \cdot \underbrace{2e^t}_{f_1(t)} + \underbrace{(-1)}_{\overline{c}_2} \cdot \underbrace{\cos t}_{f_2(t)}.$$

Pentru fiecare $i \in \{1, 2\}$ se determină soluţii particulare x_{p_i} corespunzătoare pentru

$(*_{ENi})\ x''(t) + x(t) = f_i(t), t \in \mathbb{R} \overset{\text{Teorema 2}}{\Rightarrow}$

$x_p(t) = 1 \cdot x_{p_1}(t) + 1 \cdot x_{p_2}(t), \forall t \in \mathbb{R}$ este soluţie particulară pentru $(*_{ENi})$.

Etapa 2.1 : Fie $(*_{EN1})\ x''(t) + x(t) = 2e^t, t \in \mathbb{R}$,

Se observă că $f_1(t) = 2e^t = e^{1t}\left(\underbrace{2}_{P_1(t)}\cos(0t) + \underbrace{1}_{Q_1(t)}\sin(0t)\right), \forall t \in \mathbb{R}$,

adică f_1 este de forma (7), cu $\alpha = 1$, $\beta = 0$, $P_1(t) = 2$, $Q_1(t) = 1$. Cum $\lambda = 1 + 0i$ nu este rădacină caracteristică$\Rightarrow s = 0 \Rightarrow$ se caută o soluţie particulară pentru $(*_{EN1})$ folosind Teorema 1,

$x_{p_1}(t) = t^0 e^{1t}(A_1(t)\cos(0t) + B_1(t)\sin(0t)) = e^t A_1(t), \forall t \in \mathbb{R}$,

unde A_1 şi B_1 sunt polinoame de grad cel mai mare dintre gradele lui P_1 şi Q_1, adică 0. Se determină coeficienţii μ_0 ai polinomului $A_1(t) = \mu_0$ impunând ca x_{p_1} să fie soluţie particulară a $(*_{EN1})$.

$$\begin{array}{r|l} 1 \ \cdot & x_{p_1}(t) = \mu_0 e^t \\ 0 \ \cdot & x_{p_1}'(t) = \mu_0 e^t \\ 1 \ \cdot & x_{p_1}''(t) = \mu_0 e^t \\ \hline + \text{ în } (*_{EN1}) & 2e^t = 2e^t \mu_0, \forall t \in \mathbb{R} \end{array}$$

Se împarte prin e^t(identificăm coeficienţii puterilor lui t-nu)$\Rightarrow \mu_0 = 1$

S-a obţinut $x_{p_1}(t) = 1e^t, \forall t \in \mathbb{R}$.

Etapa 2.2 : Fie $(*_{EN2})\ x''(t) + x(t) = -\cos t, t \in \mathbb{R}$.

Se observă că $f_2(t) = -\cos t = e^{0t}\left(\underbrace{(-1)}_{P_2(t)}\cos(1t) + \underbrace{0}_{Q_2(t)}\sin(1t)\right), \forall t \in \mathbb{R}$,

adică f_2 este de forma (7), cu $\alpha = 0$, $\beta = 1$, $P_2(t) = -1$, $Q_2(t) = 0$. Cum $\lambda = 0 + 1i$ este rădacină caracteristică de multiplicitate $m(\lambda) = 1 = s \Rightarrow$ se caută o soluţie particulară pentru $(*_{EN2})$ folosind Teorema 1, de forma

$x_{p_2}(t) = t^1 e^{0t} \left(A_2(t)\cos(1t) + B_2(t)\sin(1t)\right), \forall t \in \mathbb{R}$,
unde A_2 şi B_2 sunt polinoame de grad cel mai mare dintre gradele lui P_2 şi Q_2, adică 0. Se determină polinoamele constante $A_2(t) = \mu_0$ şi $B_2(t) = \nu_0$ impunând ca x_{p_2} să fie soluţie particulară a $(*_{EN2})$.

$$\begin{array}{rl|l} 1 & \cdot & x_{p_2}(t) = t(\mu_0 \cos t + \nu_0 \sin t) \\ 0 & \cdot & x'_{p_2}(t) = (\mu_0 \cos t + \nu_0 \sin t) + t(-\mu_0 \sin t + \nu_0 \cos t) \\ 1 & \cdot & x''_{p_2}(t) = 2(-\mu_0 \sin t + \nu_0 \cos t) + t(-\mu_0 \cos t - \nu_0 \sin t) \\ \hline \multicolumn{2}{l|}{+ \text{ în } (*_{EN2})} & -\cos t = (\mu_0 t + 2\nu_0 - \mu_0 t)\cos t + (\nu_0 t - 2\mu_0 - \nu_0 t)\sin t, \forall t \in \mathbb{R} \end{array}$$

Cum $(\cos t, \sin t), \forall t \in \mathbb{R}$ sunt funcţii liniar independente pe $\mathbb{R}$ (au $W = 1$) $\Rightarrow$ identificăm coeficienţii lor$\Rightarrow$

$$\begin{array}{l} \cos t : \\ \sin t : \end{array} \left\{ \begin{array}{l} -1 = 2\nu_0 \\ 0 = -2\mu_0 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \mu_0 = 0 \\ \nu_0 = \frac{-1}{2} \end{array} \right.$$

Se putea ajunge la două egalităţi de polinoame din care să fi identificat şi coeficienţii puterilor lui t. S-a obţinut

$x_{p_2}(t) = t\left(0\cos t + \frac{-1}{2}\sin t\right), \forall t \in \mathbb{R}$.

Atunci o soluţie particulară pentru $(*_{EN})$ este

$x_p(t) = 1 \cdot e^t + 1 \cdot \frac{-1}{2} t \sin t, \forall t \in \mathbb{R}$.

Etapa 3 : Soluţia generală a ecuaţiei neomogene $(*_{EN})$ este dată de

$x(t; c_1, c_2) = x_o(t; c_1, c_2) + x_p(t), \forall t \in \mathbb{I}$ şi $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, adică

$x(t; c_1, c_2) = c_1 \cos t + c_2 \sin t + e^t - \frac{1}{2} t \sin t, \forall t \in \mathbb{I}$ şi $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ sau

$x(t; c_1, c_2) = c_1 \cos t + c_2 \sin t + e^t - \dfrac{1}{4}\cos t - \frac{1}{2} t \sin t, \forall t \in \mathbb{I}$ şi $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Etapa 4 : Se înlocuiesc x, x' în $(\circ)$ $y(t) = -x'(t) + x(t) + e^t \Rightarrow$

$$\begin{aligned} y(t; c_1, c_2) &= c_1(-\sin t) + c_2 \cos t + e^t - \tfrac{1}{2}\sin t - \tfrac{1}{2} t \cos t + \\ &\quad + c_1 \cos t + c_2 \sin t + e^t - \tfrac{1}{2} t \sin t + e^t = \\ &= c_1 \cdot (\cos t - \sin t) + c_2 \cdot (\cos t + \sin t) + 3e^t - \tfrac{1}{2} t \cos t - \tfrac{1}{2} t \sin t \text{ sau} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y(t; c_1, c_2) &= c_1(-\sin t) + c_2 \cos t + e^t + \frac{1}{4}\sin t - \tfrac{1}{2}\sin t - \tfrac{1}{2} t \cos t + \\ &\quad + c_1 \cos t + c_2 \sin t + e^t - \frac{1}{4}\cos t - \tfrac{1}{2} t \sin t + e^t = \\ &= c_1 \cdot (\cos t - \sin t) + c_2 \cdot (\cos t + \sin t) + 3e^t - \frac{1}{4}\sin t - \frac{1}{4}\cos t - \tfrac{1}{2} t \cos t - \tfrac{1}{2} t \sin t. \end{aligned}$$

Concluzie. Soluţia generală a (SN) este

$$\left(\begin{array}{l} x(t; c_1, c_2) \\ y(t; c_1, c_2) \end{array} \right) = \left(\begin{array}{l} x(t; c_1, c_2) = c_1 \cos t + c_2 \sin t + e^t - \frac{1}{2} t \sin t \\ c_1 \cdot (\cos t - \sin t) + c_2 \cdot (\cos t + \sin t) + 3e^t - \frac{1}{2} t \cos t - \frac{1}{2} t \sin t \end{array} \right),$$

$\forall t \in \mathbb{I}$ şi $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

$$\left(\begin{array}{l} x(t; c_1, c_2) \\ y(t; c_1, c_2) \end{array} \right) = \left(\begin{array}{l} c_1 \cos t + c_2 \sin t + e^t - \dfrac{1}{4}\cos t - \frac{1}{2} t \sin t \\ c_1 \cdot (\cos t - \sin t) + c_2 \cdot (\cos t + \sin t) + 3e^t - \dfrac{1}{4}\sin t - \dfrac{1}{4}\cos t - \frac{1}{2} t \cos t - \frac{1}{2} t \sin t \end{array} \right),$$

$\forall t \in \mathbb{I}$ şi $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

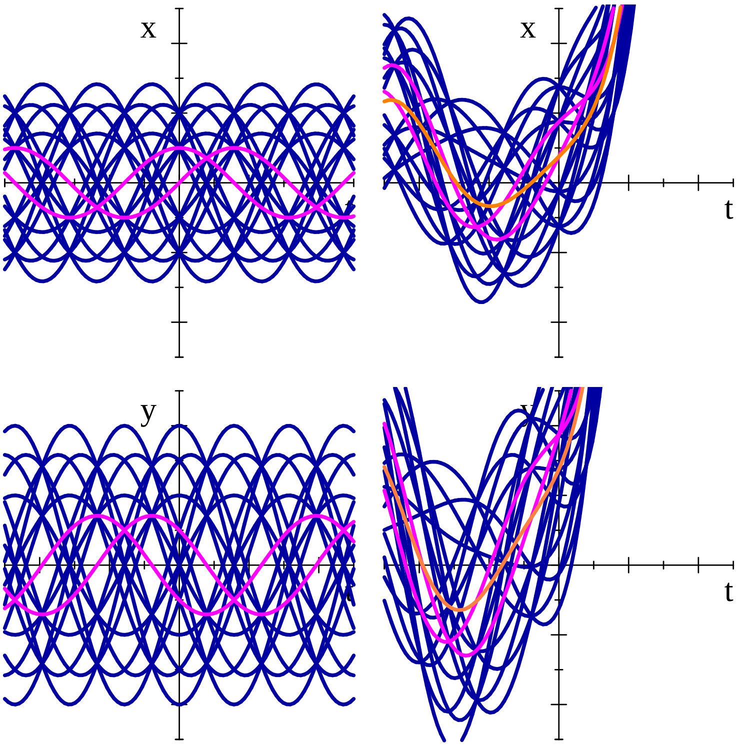
Reprezentând grafic pe x_o şi y_o, alături pe x şi y, pe $\mathbb{I} = \mathbb{R}$ pentru $(c_1, c_2) = (1, 0)$ şi $(c_1, c_2) = (0, 1)$ cu magenta (corespunzătoare soluţiilor particulare din sistemul fundamental) şi pentru

$(c_1, c_2) = (1, 1), (c_1, c_2) = (1, -1), (c_1, c_2) = (-1, 1), (c_1, c_2) = (-1, -1)$,

$(c_1, c_2) = (1, 2), (c_1, c_2) = (2, 1), (c_1, c_2) = (-1, 2), (c_1, c_2) = (-2, 1)$

$(c_1, c_2) = (1, -2), (c_1, c_2) = (2, -1), (c_1, c_2) = (-1, -2), (c_1, c_2) = (-2, -1)$

cu albastru şi pentru $(c_1, c_2) = (0, 0)$ cu portocaliu soluţia particulară obţinută cu metoda variaţiei constantelor, se obţine:



II. **Metoda cu valori proprii pentru SO/SN**

Etapa 1 : Se determină soluţia generală a SO ataşat sistemului SN:

$$(SO)\begin{cases} x'(t) = x(t) - y(t) \\ y'(t) = 2x(t) - y(t) \end{cases}, t \in \mathbb{I} = \mathbb{R}$$

Pasul 1 : Se ataşează ecuaţia caracteristică a matricei A şi se rezolvă. Adică se determină valorile proprii în $\mathbb{C}$ ale matricei A, precum şi multiplicitatea lor algebrică.

•Se determină polinomul caracteristic al matricei $A, P_A(\lambda)$.

$$\boxed{P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_2)} = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 2 & -1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1$$

$$\boxed{P_A(\lambda) = (-1)^2\left(\lambda^2 - \delta_1\lambda + \delta_2\right)}, \text{ unde}$$

$$\boxed{\delta_1 = \operatorname{Tr} A} = 1 - 1 = 0; \boxed{\delta_2 = \det A} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 1.$$

•Se rezolvă ecuaţia caracteristică a matricei A,

$$P_A(\lambda) = 0 \Leftrightarrow (*_{EC})\, \lambda^2 + 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = i \text{ cu } m(\lambda_1) = 1, \\ \lambda_2 = -i \text{ cu } m(\lambda_2) = 1. \end{cases}$$

Se observă că rădăcinile caracteristice sunt din $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$, nu sunt valori proprii ale matricei A în $\mathbb{R}$, ci în $\mathbb{C}$.

Pasul 2. Se determină un sitem fundamental de soluţii ale SO / o matrice fundamentală a SO.

$\boxed{\text{modul 1.}}$- aplicabil dacă $A \sim D$ în $\mathbb{R}$ (pentru $n = 2$ şi rădăcini caracteristice complexe conjugate$\Rightarrow$ $A \sim D$ în $\mathbb{C}$). Aici A nu este diagonalizabilă în $\mathbb{R}$. Se poate diagonaliza în $\mathbb{C}$, ca în Exemplul 4.2.4 din Curs, sau se poate folosi SWP pentru a determina forma Jordan (chiar diagonală) în $\mathbb{C}$.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1+i & 1-i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{2}+\frac{1}{2}i & -\frac{1}{2}i \\ \frac{1}{2}-\frac{1}{2}i & \frac{1}{2}i \end{pmatrix}$$

Nu se va continua rezolvarea cu modul 1.

$\boxed{\text{modul 2.}}$ Pe baza teoriei de la ecuaţii diferenţiale de ordin 2, liniare, omogene, se caută soluţii 2

particulare liniar independente ale SO:
•$\lambda_{1,2} = 0 \pm 1i \in \mathbb{R}$ cu $m(\lambda_{1,2}) = 1 \rightsquigarrow$se caută două soluţii particulare l.i. ale SO de forma

$$\varphi(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 e^{0t}\cos t + a_2 e^{0t}\sin t \\ a_3 e^{0t}\cos t + a_4 e^{0t}\sin t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1\cos t + a_2\sin t \\ a_3\cos t + a_4\sin t \end{pmatrix}.$$

Se determină a_1, a_2, a_3, a_4, impunând ca x, y să verifice SO:

$$\begin{cases} -a_1\sin t + a_2\cos t = (a_1\cos t + a_2\sin t) - (a_3\cos t + a_4\sin t) \\ -a_3\sin t + a_4\cos t = 2(a_1\cos t + a_2\sin t) - (a_3\cos t + a_4\sin t) \end{cases}$$

Se împarte prin $e^{0t} = 1$ şi se identifică coeficienţii funcţiilor liniar independente $(\cos t, \sin t)$ (au $W = 1$) :

$$\begin{array}{l} \cos t: \\ \sin t: \\ \cos t: \\ \sin t: \end{array} \begin{cases} a_2 = a_1 - a_3 \\ -a_1 = a_2 - a_4 \\ a_4 = 2a_1 - a_3 \\ -a_3 = 2a_2 - a_4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 - a_2 - a_3 = 0 \\ a_1 + a_2 - a_4 = 0 \\ 2a_1 - a_3 - a_4 = 0 \\ 2a_2 + a_3 - a_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = \alpha + \beta \\ a_2 = -\alpha + \beta \\ a_3 = 2\alpha \in \mathbb{R} \\ a_4 = 2\beta \in \mathbb{R} \end{cases}.$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \underset{\substack{l_1 \\ l_2 - l_1 \\ l_3 - l_1 \\ l_4}}{\overset{pas1}{\sim}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \underset{\substack{l_1 \\ l_2 \\ l_3 - l_2 \\ l_4 - l_2}}{\overset{pas2}{\sim}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Se poate şi

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 0, \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 25 \neq 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ecuaţiile $1, 2$ principale; a_1, a_2 necunoscute principale şamd.

S-a găsit

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\alpha+\beta)\cos t + (-\alpha+\beta)\sin t \\ 2\alpha\cos t + 2\beta\sin t \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} \cos t - \sin t \\ 2\cos t \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} \cos t + \sin t \\ 2\sin t \end{pmatrix}$$

$$\alpha = 0, \beta = 1 \rightsquigarrow \underline{\mathbf{x}}_1(t) \overset{\text{not.}}{=} \varphi_1(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ y_1(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t + \sin t \\ 2\sin t \end{pmatrix}.$$

$$\alpha = 1, \beta = 0 \rightsquigarrow \underline{\mathbf{x}}_2(t) \overset{\text{not.}}{=} \varphi_2(t) = \begin{pmatrix} x_2(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t - \sin t \\ 2\cos t \end{pmatrix}.$$

Din algoritm, se obţin 2 soluţii liniar independente.

$B = (\underline{\mathbf{x}}_1, \underline{\mathbf{x}}_2)$ este un sistem fundamental de soluţii ale SO.

Pasul 3. Soluţia generală a SO este:

-sau $\underline{\mathbf{x}}_o(t; \underline{\mathbf{c}}) = \mathcal{X}(t; \underline{\mathbf{x}}_1, \underline{\mathbf{x}}_2) \cdot \underline{\mathbf{c}} = c_1\underline{\mathbf{x}}_1(t) + c_2\underline{\mathbf{x}}_2(t), t \in \mathbb{R}, c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$

$$\begin{pmatrix} x_o(t; c_1, c_2) \\ y_o(t; c_1, c_2) \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} \cos t + \sin t \\ 2\sin t \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} \cos t - \sin t \\ 2\cos t \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}, c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

-sau $\underline{\mathbf{x}}_o(t; \underline{\mathbf{c}}) = e^{tA} \cdot \underline{\mathbf{c}}$—Nu

Etapa 2 : Se determină o soluţie particulară a SN, $\underline{\mathbf{x}}_p(t) =?$.

Metoda variaţiei constantelor pentru SN - teoretic, mereu aplicabilă; practic apar dificultăţi în aplicare când sistemul este de ordin mare şi apar de calculat (fără calculator) determinanţi funcţionali de ordinul respectiv, integrale.

Se caută de forma

$\underline{\mathbf{x}}_p(t) = u_1(t)\,\underline{\mathbf{x}}_1(t) + u_2(t)\,\underline{\mathbf{x}}_2(t), \forall t \in \mathbb{R},$

unde $u_i' : \mathbb{I} \to \mathbb{R}$, $i \in \{1, 2\}$, sunt funcţii-soluţii ale sistemului

$$\begin{cases} u_1'(t)(\cos t+\sin t)+u_2'(t)(\cos t-\sin t)=e^t \\ u_1'(t)(2\sin t)+u_2'(t)(2\cos t)=\cos t \end{cases}$$

$$\Delta(t)=W(t;\underline{\mathbf{x}}_1,\underline{\mathbf{x}}_2)=\begin{vmatrix} \cos t+\sin t & \cos t-\sin t \\ 2\sin t & 2\cos t \end{vmatrix}=2\neq 0, \forall t\in\mathbb{R}.$$

$$\Delta_1(t)=\begin{vmatrix} e^t & \cos t-\sin t \\ \cos t & 2\cos t \end{vmatrix}=2e^t\cos t+\cos t\sin t-\cos^2 t, \forall t\in\mathbb{R}.$$

$$\Delta_2(t)=\begin{vmatrix} \cos t+\sin t & e^t \\ 2\sin t & \cos t \end{vmatrix}=\cos^2 t+\sin t\cos t-2e^t\sin t, \forall t\in\mathbb{R}.$$

Atunci

$$\left.\begin{cases} u_1'(t)=\frac{\Delta_1(t)}{\Delta(t)}=\dfrac{2e^t\cos t+\cos t\sin t-\cos^2 t}{2} \\ u_2'(t)=\frac{\Delta_2(t)}{\Delta(t)}=\dfrac{\cos^2 t+\sin t\cos t-2e^t\sin t}{2} \end{cases}\right| \int(\cdot)\,dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases} u_1(t)=\frac{1}{2}e^t\cos t+\frac{1}{2}e^t\sin t-\frac{1}{8}\cos 2t-\frac{1}{8}\sin 2t-\frac{1}{4}t+k_1 \\ u_2(t)=\frac{1}{2}e^t\cos t-\frac{1}{2}e^t\sin t-\frac{1}{8}\cos 2t+\frac{1}{8}\sin 2t+\frac{1}{4}t+k_2 \end{cases}$$

Deoarece se caută o soluţie particulară x_p, se alege $k_1=0$, $k_2=0$. S-a obţinut

$$\begin{pmatrix} x_p(t) \\ y_p(t) \end{pmatrix}=\left(\tfrac{1}{2}e^t\cos t+\tfrac{1}{2}e^t\sin t-\tfrac{1}{8}\cos 2t-\tfrac{1}{8}\sin 2t-\tfrac{1}{4}t\right)\begin{pmatrix} \cos t+\sin t \\ 2\sin t \end{pmatrix}+$$
$$+\left(\tfrac{1}{2}e^t\cos t-\tfrac{1}{2}e^t\sin t-\tfrac{1}{8}\cos 2t+\tfrac{1}{8}\sin 2t+\tfrac{1}{4}t\right)\begin{pmatrix} \cos t-\sin t \\ 2\cos t \end{pmatrix}, \forall t\in\mathbb{R}$$

Metoda coeficienţilor nedeterminaţi pentru SN Deoarece SN are coeficienţi constanţi şi termenul liber având pe coloane combinaţie liniară de cvasipolinoame de acelaşi tip atunci se poate căuta $\underline{\mathbf{x}}_p$ cu Teoremele 4.2.7 şi 4.2.8 din Curs. Într-adevăr,

$$\underline{\mathbf{b}}(t)=\begin{pmatrix} e^t \\ \cos t \end{pmatrix}=1\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ \cos t \end{pmatrix}+1\cdot\begin{pmatrix} e^t \\ 0 \end{pmatrix}=$$
$$=1\cdot\begin{pmatrix} e^{0t}(0\cos t+0\sin t) \\ e^{0t}(1\cos t+0\sin t) \end{pmatrix}+1\cdot\begin{pmatrix} e^{1t}(1\cos(0t)+0\sin(0t)) \\ e^{1t}(0\cos(0t)+0\sin(0t)) \end{pmatrix}.$$

•Fie $(SN_1)\begin{cases} x'(t)=x(t)-y(t)+0 \\ y'(t)=2x(t)-y(t)+\cos t \end{cases}, t\in\mathbb{R}.$

Cum $\lambda=0+i$ este rădacină caracteristică cu $m(i)=1\Rightarrow s=1\Rightarrow$ se caută o soluţie particulară pentru SN_1 de forma

$$\underline{\mathbf{x}}_{p_1}(t)=\begin{pmatrix} x_{p_1}(t) \\ y_{p_1}(t) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} e^{0t}(A_1(t)\cos t+B_1(t)\sin t) \\ e^{0t}(A_2(t)\cos t+B_2(t)\sin t) \end{pmatrix}, \forall t\in\mathbb{R},$$

unde A_i şi B_i sunt polinoame de grad 0+1. Se determină coeficienţii polinoamelor $A_i(t)=\mu_{0,i}+\mu_{1,i}t$ şi $B_i(t)=\nu_{0,i}+\nu_{1,i}t$, $i\in\{1,2\}$, impunând ca

$$\underline{\mathbf{x}}_{p_1}(t)=\begin{pmatrix} (\mu_{0,1}+\mu_{1,1}t)\cos t+(\nu_{0,1}+\nu_{1,1}t)\sin t \\ (\mu_{0,2}+\mu_{1,2}t)\cos t+(\nu_{0,2}+\nu_{1,2}t)\sin t \end{pmatrix} \text{ să fie soluţie particulară a } SN_1.$$

$$\begin{cases} \mu_{1,1}\cos t-(\mu_{0,1}+\mu_{1,1}t)\sin t+\nu_{1,1}\sin t+(\nu_{0,1}+\nu_{1,1}t)\cos t= \\ \quad=\left((\mu_{0,1}+\mu_{1,1}t)\cos t+(\nu_{0,1}+\nu_{1,1}t)\sin t\right)-\left((\mu_{0,2}+\mu_{1,2}t)\cos t+(\nu_{0,2}+\nu_{1,2}t)\sin t\right)+0 \\ \mu_1^2\cos t-(\mu_{0,2}+\mu_{1,2}t)\sin t+\nu_{1,2}\sin t+(\nu_{0,2}+\nu_{1,2}t)\cos t= \\ \quad=2\left((\mu_{0,1}+\mu_{1,1}t)\cos t+(\nu_{0,1}+\nu_{1,1}t)\sin t\right)-\left((\mu_{0,2}+\mu_{1,2}t)\cos t+(\nu_{0,2}+\nu_{1,2}t)\sin t\right)+\cos t \end{cases}$$

Identificăm coeficienţii funcţiilor liniar independente $(\cos t,\sin t)$ (au $W=1$)

$$\begin{array}{l} \cos t: \\ \sin t: \\ \cos t: \\ \sin t: \end{array}\begin{cases} \mu_{1,1}+(\nu_{0,1}+\nu_{1,1}t)=(\mu_{0,1}+\mu_{1,1}t)-(\mu_{0,2}+\mu_{1,2}t) \\ -(\mu_{0,1}+\mu_{1,1}t)+\nu_{1,1}=(\nu_{0,1}+\nu_{1,1}t)-(\nu_{0,2}+\nu_{1,2}t) \\ (\nu_{0,1}+\nu_{1,1}t)=2(\mu_{0,1}+\mu_{1,1}t)-(\mu_{0,2}+\mu_{1,2}t)+1 \\ -(\mu_{0,2}+\mu_{1,2}t)+\nu_{1,2}=2(\nu_{0,1}+\nu_{1,1}t)-(\nu_{0,2}+\nu_{1,2}t) \end{cases}$$

Identificăm coeficienţii puterilor lui $t\Rightarrow$

$$\begin{array}{l} t^0: \\ t^1: \\ t^0: \\ t^1: \\ t^0: \\ t^1: \\ t^0: \\ t^1: \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \mu_{1,1}+\nu_{0,1}=\mu_{0,1}-\mu_{0,2} \\ \nu_{1,1}=\mu_{1,1}-\mu_{1,2} \\ -\mu_{0,1}+\nu_{1,1}=\nu_{0,1}-\nu_{0,2} \\ -\mu_{1,1}=\nu_{1,1}-\nu_{1,2} \\ \nu_{0,1}=2\mu_{0,1}-\mu_{0,2}+1 \\ \nu_{1,1}=2\mu_{1,1}-\mu_{1,2} \\ -\mu_{0,2}+\nu_1^2=2\nu_{0,1}-\nu_{0,2} \\ \mu_{1,2}=2\nu_{1,1}-\nu_{1,2} \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \mu_{0,1}-\mu_{1,1}-\mu_{0,2}-\nu_{0,1}=0 \\ \mu_{1,1}-\mu_{1,2}-\nu_{1,1}=0 \\ \mu_{0,1}+\nu_{0,1}-\nu_{1,1}-\nu_{0,2}=0 \\ \mu_{1,1}+\nu_{1,1}-\nu_{1,2}=0 \\ 2\mu_{0,1}-\mu_{0,2}-\nu_{0,1}=-1 \\ 2\mu_{1,1}-\mu_{1,2}-\nu_{1,1}=0 \\ \mu_{0,2}+2\nu_{0,1}-\nu_{0,2}-\nu_{1,2}=0 \\ \mu_{1,2}-2\nu_{1,1}+\nu_{1,2}=0 \end{array} \right.$$

$$\left(\begin{array}{cccccccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \overset{Gauss}{\sim} \left(\begin{array}{cccccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mu_{0,1}=-1 \\ \mu_{1,1}=0 \\ \mu_{0,2}=-2 \\ \mu_{1,2}=0 \\ \nu_{0,1}=1 \\ \nu_{1,1}=0 \\ \nu_{0,2}=0 \\ \nu_{1,2}=0 \end{array} \right.$$

De menţionat că s-a folosit SWP pentru calcul.

Comentariu. De precizat că, în loc de notaţia universală

$$\underline{\mathbf{x}}_{p_1}(t)=\begin{pmatrix} (\mu_{0,1}+\mu_{1,1}t)\cos t+(\nu_{0,1}+\nu_{1,1}t)\sin t \\ (\mu_{0,2}+\mu_{1,2}t)\cos t+(\nu_{0,2}+\nu_{1,2}t)\sin t \end{pmatrix}$$

se poate folosi orice alt set de litere, precum

$$\underline{\mathbf{x}}_{p_1}(t)=\begin{pmatrix} (a_1+b_1t)\cos t+(c_1+d_1t)\sin t \\ (a_2+b_2t)\cos t+(c_2+d_2t)\sin t \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} (m_1+n_1t)\cos t+(p_1+q_1t)\sin t \\ (m_2+n_2t)\cos t+(p_2+q_2t)\sin t \end{pmatrix} s.a.m.d.$$

S-a obţinut

$$\underline{\mathbf{x}}_{p_1}(t)=\begin{pmatrix} (-1+0t)\cos t+(1+0t)\sin t \\ (-2+0t)\cos t+(0+0t)\sin t \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \sin t-\cos t \\ -2\cos t \end{pmatrix} \text{ soluţie particulară a } SN_1.$$

•Fie $(SN_2)\left\{ \begin{array}{l} x'(t)=x(t)-y(t)+e^t \\ y'(t)=2x(t)-y(t)+0 \end{array} \right., t\in\mathbb{R}.$

Cum $\lambda=1+0i$ nu este rădacină caracteristică$\Rightarrow$ $s=0\Rightarrow$ se caută o soluţie particulară pentru SN_2 de forma

$$\underline{\mathbf{x}}_{p_2}(t)=\begin{pmatrix} x_{p_2}(t) \\ y_{p_2}(t) \end{pmatrix}=t^0\begin{pmatrix} e^{1t}(A_1(t)\cos(0t)+B_1(t)\sin(0t)) \\ e^{1t}(A_2(t)\cos(0t)+B_2(t)\sin(0t)) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} e^tA_1(t) \\ e^tA_2(t) \end{pmatrix}, \forall t\in\mathbb{R},$$

unde A_i şi B_i sunt polinoame de grad 0. Se determină coeficienţii polinoamelor $A_i(t)=\mu_{0,i}$, $i\in\{1,2\}$, impunând ca

$$\underline{\mathbf{x}}_{p_2}(t)=\begin{pmatrix} e^t\mu_{0,1} \\ e^t\mu_{0,2} \end{pmatrix} \text{ să fie soluţie particulară a } SN_2.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} e^t\mu_{0,1}=e^t\mu_{0,1}-e^t\mu_{0,2}+e^t \\ e^t\mu_{0,2}=2e^t\mu_{0,1}-e^t\mu_{0,2}+0 \end{array} \right.$$

Se împarte prin e^t şi identificăm coeficienţii puterilor lui $t\Rightarrow$

$$\begin{cases} \mu_{0,1} = \mu_{0,1} - \mu_{0,2} + 1 \\ \mu_{0,2} = 2\mu_{0,1} - \mu_{0,2} + 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mu_{0,1} = 1 \\ \mu_{0,2} = 1 \end{cases}$$

S-a obţinut

$$\underline{\mathbf{x}}_{p_2}(t) = \begin{pmatrix} e^t \\ e^t \end{pmatrix}, \forall t \in \mathbb{R}.$$

O soluţie particulară a SN este

$\underline{\mathbf{x}}_p(t) = 1 \cdot \underline{\mathbf{x}}_{p_1}(t) + 1 \cdot \underline{\mathbf{x}}_{p_2}(t)$, adică

$$\underline{\mathbf{x}}_p(t) = 1 \cdot \begin{pmatrix} \sin t - \cos t \\ -2\cos t \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} e^t \\ e^t \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}.$$

Etapa 3 : Soluţia generală a sistemului diferenţial neomogen SN este

$\underline{\mathbf{x}}(t; \underline{\mathbf{c}}) = \underline{\mathbf{x}}_o(t; \underline{\mathbf{c}}) + \underline{\mathbf{x}}_p(t), t \in \mathbb{R}, \underline{\mathbf{c}} \in \mathcal{M}_{2\times 1}(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^2$,

unde $\underline{\mathbf{x}}_o(t; \underline{\mathbf{c}})$ este soluţia generală SO şi $\underline{\mathbf{x}}_p(t)$ este o soluţie particulară a SN.

b) $\begin{cases} x' = 3x - y \\ y' = 5x + y + \sin t \end{cases}$

Rezolvare : Sistemul $(SN) \begin{cases} x'(t) = 3x(t) - y(t) + 0 \\ y'(t) = 5x(t) + y(t) + \sin t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$,

este sistem de $n = 2$ ecuaţii diferenţiale de ordin 1, liniare, cu coeficienţii constanţi, daţi de

$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$, neomogen, cu $\underline{\mathbf{b}}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \sin t \end{pmatrix}$. Are $n = 2$ necunoscute $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} =?$

I. **Metoda directă, în SN, a eliminării**

Etapa 0: Din prima ecuaţie a $(SN) \Rightarrow$

$$\begin{cases} (\circ)\ y(t) = -x'(t) + 3x(t) | \frac{d}{dt}() \\ y'(t) = -x''(t) + 3x'(t) \end{cases}$$

Se înlocuiesc y şi y' în a doua ecuaţie a (SN) (se elimină y, y' din a doua ecuaţie a (SN)) $\Rightarrow$

$-x''(t) + 3x'(t) = 5x(t) - x'(t) + 3x(t) + \sin t \Rightarrow$

$(*_{EN})\ x''(t) - 4x'(t) + 8x(t) = -\sin t.$

Ecuaţia $(*_{EN})$ este o ecuaţie diferenţială de ordin 2, liniară, cu coeficienţii constanţi -4, 8, neomogenă cu termenul liber

$f : \mathbb{I} \to \mathbb{R}, f(t) = -\sin t.$

Pentru $t \in \mathbb{I} = \mathbb{R}$, variabilă independentă din domeniul de definiţie a soluţiei, se caută $x(t; c_1, c_2)$, soluţia generală pentru ecuaţia $(*_{EN})$.

Etapa 1: Se ataşează şi se rezolvă:

$(*_{EO})\ x''(t) - 4x'(t) + 8x(t) = 0.$

Pasul 1 : Se ataşează ecuaţiei diferenţiale $(*_{EO})$ ecuaţia ei caracteristică

$(*_{EC})\ \lambda^2 - 4\lambda + 8 = 0 \Rightarrow \{\lambda_{1,2} = 2 \pm 2i$ cu $m(\lambda_{1,2}) = 1.$

Pasul 2 : Pentru fiecare rădăcină a ecuaţiei caracteristice se găsesc corespunzător soluţii particulare liniar independente ale ecuaţiei omogene $(*_{EO})$

$$\bullet \lambda_{1,2} = 2 \pm 2 \cdot i \text{ cu } m(\lambda_{1,2}) = 1 \rightsquigarrow \begin{cases} x_1(t) = e^{2t}\cos 2t, \\ x_2(t) = e^{2t}\sin 2t. \end{cases}$$

Pasul 3 : Conform algoritmului de la Pasul 2, (x_1, x_2) este un sistem fundamental de soluţii pentru $(*_{EO})$ (sunt soluţii particulare pentru $(*_{EO})$ şi funcţii liniar independente). Atunci soluţia generală a ecuaţiei $(*_{EO})$ este

$x_o(t; c_1, c_2) = c_1 \cdot e^{2t}\cos 2t + c_2 \cdot e^{2t}\sin 2t, \forall t \in \mathbb{R}$ şi $c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$

Etapa 2 : Se determină o soluţie particulară a ecuaţiei neomogene $(*_{EN})$.

Metoda coeficienţilor nedeterminaţi pentru EN: Deoarece $(*_{EN})$ are coeficienţi constanţi , iar termenul ei liber este cvasipolinom

$f(t) = e^{0t}(0\cos(1t) + (-1)\sin(1t))$
se poate aplica metoda coeficienţilor nedeterminaţi.

Adică f este de forma (7), cu $\alpha = 0$, $\beta = 1$, $P(t) = 0$, $Q(t) = -1$. Cum $\lambda = 0 + 1i$ nu este rădacină caracteristică $\Rightarrow s = 0 \Rightarrow$ se caută o soluţie particulară pentru $(*_{EN})$ folosind Teorema 1, b) de forma

$x_p(t) = e^{0t}(A(t)\cos(1t) + B(t)\sin(1t)), \forall t \in \mathbb{R}$,

unde A şi B sunt polinoame de grad cel mai mare dintre gradele lui P şi Q, adică 0. Se determină polinoamele constante $A(t) = \mu_{0,1}$ şi $\underline{\mathbf{b}}(t) = \nu_0$ impunând ca x_p să fie soluţie particulară a $(*_{EN})$.

$$\begin{array}{r|l} 8 \quad \cdot & x_p(t) = \mu_0\cos t + \nu_0\sin t \\ -4 \quad \cdot & x_p'(t) = -\mu_0\sin t + \nu_0\cos t \\ 1 \quad \cdot & x_p''(t) = -\mu_0\cos t - \nu_0\sin t \\ \hline + \text{ în } (*_{EN1}) & -\sin t = (8\mu_0 - 4\nu_0 - \mu_0)\cos t + \\ & + (8\nu_0 + 4\mu_0 - \nu_0)\sin t, \forall t \in \mathbb{R} \end{array}$$

Cum $(\cos t, \sin t), \forall t \in \mathbb{R}$ sunt funcţii liniar independente pe $\mathbb{R}$ (au $W = 1$) $\Rightarrow$ identificăm coeficienţii$\Rightarrow$

$$\begin{array}{l} \cos t: \\ \sin t: \end{array} \begin{cases} 0 = 7\mu_0 - 4\nu_0 \\ -1 = 4\mu_0 + 7\nu_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mu_0 = \frac{-4}{65} \\ \nu_0 = \frac{-7}{65} \end{cases}$$

Se putea ajunge la două egalităţi de polinoame din care să fi identificat şi coeficienţii puterilor lui t. S-a obţinut

$x_p(t) = \frac{-4}{65}\cos t + \frac{-7}{65}\sin t, \forall t \in \mathbb{R}$.

Metoda variaţiei constantelor pentru EN : Deoarece (x_1, x_2) este un sistem fundamental de soluţii pentru $(*_{EO})$ se caută x_p de forma

$$x_p(t) = u_1(t)\underbrace{e^{2t}\cos 2t}_{x_1(t)} + u_2(t)\underbrace{e^{2t}\sin 2t}_{x_2(t)}, \forall t \in \mathbb{I},$$

unde $u_i' : \mathbb{I} \to \mathbb{R}$, $i \in \{1, 2\}$, sunt soluţii ale sistemului

$$\begin{cases} u_1'(t)e^{2t}\cos 2t + u_2'(t)e^{2t}\sin 2t = 0 \\ u_1'(t)\left(2e^{2t}\cos 2t - 2e^{2t}\sin 2t\right) + u_2'(t)\left(2e^{2t}\sin 2t + 2e^{2t}\cos 2t\right) = -\sin t \end{cases}$$

$$\Delta(t) = W(t; x_1, x_2) = \begin{vmatrix} e^{2t}\cos 2t & e^{2t}\sin 2t \\ 2e^{2t}\cos 2t - 2e^{2t}\sin 2t & 2e^{2t}\sin 2t + 2e^{2t}\cos 2t \end{vmatrix} = 2e^{4t} \neq 0, \forall t \in \mathbb{I}.$$

$$\Delta_1(t) = \begin{vmatrix} 0 & e^{2t}\sin 2t \\ -\sin t & 2e^{2t}\sin 2t + 2e^{2t}\cos 2t \end{vmatrix} = e^{2t}(\sin 2t)(\sin t), \forall t \in \mathbb{I}.$$

$$\Delta_2(t) = \begin{vmatrix} e^{2t}\cos 2t & 0 \\ 2e^{2t}\cos 2t - 2e^{2t}\sin 2t & -\sin t \end{vmatrix} = -e^{2t}(\cos 2t)(\sin t), \forall t \in \mathbb{I}.$$

Atunci

$$\left\{\begin{array}{l} u_1'(t) = \frac{\Delta_1(t)}{\Delta(t)} = \frac{1}{2}e^{-2t}(\sin 2t)(\sin t), \\ u_2'(t) = \frac{\Delta_2(t)}{\Delta(t)} = \frac{-1}{2}e^{-2t}(\cos 2t)(\sin t). \end{array}\right| \int(\cdot)\,dt \Rightarrow$$

$$\begin{cases} u_1(t) = -\frac{1}{65}e^{-2t}\left(-10\cos^3 t + 8\sin t\cos^2 t + 14\cos t - \frac{21}{4}\sin t + \frac{7}{4}\sin 3t\right) + k_1, \\ u_2(t) = \frac{1}{130}e^{-2t}\left(30\cos^3 t + 2\sin t\cos^2 t - 29\cos t - \frac{27}{2}\sin t + \frac{9}{2}\sin 3t\right) + k_2. \end{cases}$$

Deoarece se caută o soluţie particulară x_p se alege $k_1 = 0$, $k_2 = 0$. S-a obţinut

$$x_p(t) = -\frac{1}{65}\left(-10\cos^3 t + 8\sin t\cos^2 t + 14\cos t - \frac{21}{4}\sin t + \frac{7}{4}\sin 3t\right)(\cos 2t) +$$
$$+\frac{1}{130}\left(30\cos^3 t + 2\sin t\cos^2 t - 29\cos t - \frac{27}{2}\sin t + \frac{9}{2}\sin 3t\right)(\sin 2t) = ..., \forall t \in \mathbb{I}.$$

<u>Etapa 3 :</u> Soluţia generală a ecuaţiei neomogene $(*_{EN})$ este dată de

$x(t; c_1, c_2) = x_o(t; c_1, c_2) + x_p(t), \forall t \in \mathbb{I}$ şi $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, adică

$x(t; c_1, c_2) = c_1 \cdot e^{2t}\cos 2t + c_2 \cdot e^{2t}\sin 2t + \frac{-4}{65}\cos t + \frac{-7}{65}\sin t, \forall t \in \mathbb{I}$ şi $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

<u>Etapa 4 :</u> Se înlocuiesc x, x' în $(\circ)$ $y(t) = -x'(t) + 3x(t) \Rightarrow$

$y_o(t; c_1, c_2) = -c_1 \cdot \left(2e^{2t}\cos 2t - 2e^{2t}\sin 2t\right) - c_2 \cdot \left(2e^{2t}\sin 2t + 2e^{2t}\cos 2t\right) + \frac{-4}{65}\sin t - \frac{-7}{65}\cos t +$

$+3\cdot\left(c_1\cdot e^{2t}\cos 2t+c_2\cdot e^{2t}\sin 2t+\frac{-4}{65}\cos t+\frac{-7}{65}\sin t\right)=$
$=c_1\cdot\left(e^{2t}\cos 2t+2e^{2t}\sin 2t\right)+c_2\cdot\left(e^{2t}\sin 2t-2e^{2t}\cos 2t\right)+\frac{17}{65}\sin t-\frac{1}{13}\cos t.$

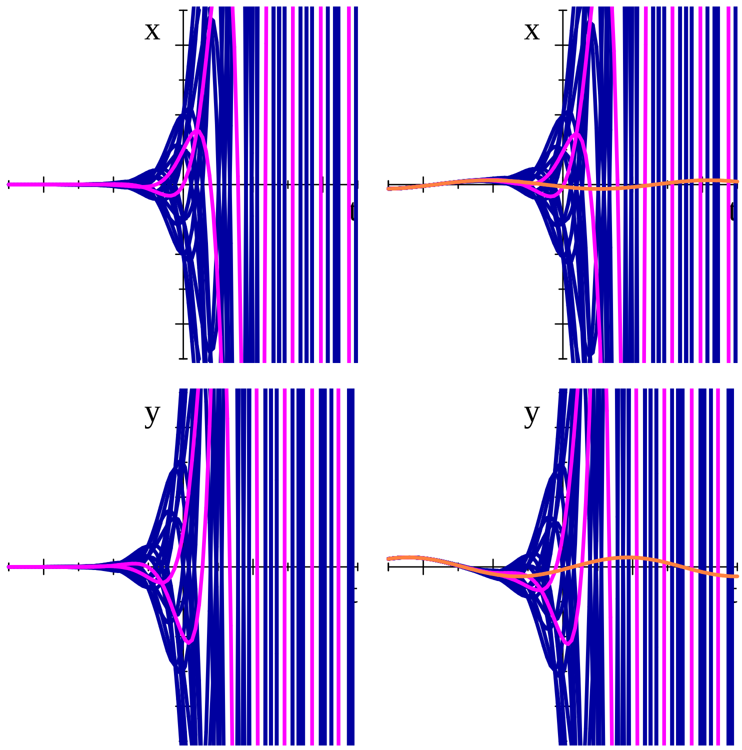
Concluzie: Soluţia generală a (SN) este

$$\begin{pmatrix} x(t;c_1,c_2)\\ y(t;c_1,c_2)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} c_1\cdot e^{2t}\cos 2t+c_2\cdot e^{2t}\sin 2t+\frac{-4}{65}\cos t+\frac{-7}{65}\sin t\\ c_1\cdot\left(e^{2t}\cos 2t+2e^{2t}\sin 2t\right)+c_2\cdot\left(e^{2t}\sin 2t-2e^{2t}\cos 2t\right)+\frac{17}{65}\sin t-\frac{1}{13}\cos t\end{pmatrix}=$$
$$=c_1\cdot e^{2t}\begin{pmatrix}\cos 2t\\ \cos 2t+2\sin 2t\end{pmatrix}+c_2\cdot e^{2t}\begin{pmatrix}\sin 2t\\ \sin 2t-2\cos 2t\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\frac{-4}{65}\cos t+\frac{-7}{65}\sin t\\ \frac{17}{65}\sin t-\frac{1}{13}\cos t\end{pmatrix}.$$

Reprezentând grafic pe x_o şi y_o, alături pe x şi y, pe $\mathbb{I}=\mathbb{R}$ pentru $(c_1,c_2)=(1,0)$ şi $(c_1,c_2)=(0,1)$ cu magenta (corespunzătoare soluţiilor particulare din sistemul fundamental) şi pentru

$(c_1,c_2)=(1,1),(c_1,c_2)=(1,-1),(c_1,c_2)=(-1,1),(c_1,c_2)=(-1,-1),$
$(c_1,c_2)=(1,2),(c_1,c_2)=(2,1),(c_1,c_2)=(-1,2),(c_1,c_2)=(-2,1)$
$(c_1,c_2)=(1,-2),(c_1,c_2)=(2,-1),(c_1,c_2)=(-1,-2),(c_1,c_2)=(-2,-1)$

cu albastru şi pentru $(c_1,c_2)=(0,0)$ cu portocaliu soluţia particulară obţinută cu metoda variaţiei constantelor, se obţine:



II. **Metoda cu valori proprii pentru SO,SN**-temă.

c) $\begin{cases} x'= & y+2e^{2t}\\ y'=x & +t^2e^{2t}\end{cases}$

Rezolvare : Sistemul $(SN)\begin{cases} x'(t)= & y(t)+2e^{2t}\\ y'(t)=x(t) & +t^2e^{2t}\end{cases},t\in\mathbb{R},$

este sistem de $n=2$ ecuaţii diferenţiale de ordin 1, liniare, cu coeficienţii constanţi, daţi de

$A=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$, neomogen, cu $\underline{\mathbf{b}}(t)=\begin{pmatrix}2e^{2t}\\ t^2e^{2t}\end{pmatrix}$.

I. **Metoda directă, în SN, a eliminării**-se poate aplica, temă.

II. **Metoda cu valori proprii**

Etapa 1 : Se determină soluţia generală a SO ataşat sistemului SN:

$$(SO)\begin{cases} x'(t) = \quad\quad y(t)+0 \\ y'(t) = x(t) \quad\quad +0 \end{cases}, t\in\mathbb{I}=\mathbb{R}$$

Pasul 1 : Se ataşează ecuaţia caracteristică a matricei A şi se rezolvă. Adică se determină valorile proprii în $\mathbb{C}$ ale matricei A, precum şi multiplicitatea lor algebrică.

•Se determină polinomul caracteristic al matricei $A, P_A(\lambda)$.

$$\boxed{P_A(\lambda)=\det(A-\lambda I_2)} = \begin{vmatrix} 0-\lambda & 1 \\ 1 & 0-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2-1$$

$$\boxed{P_A(\lambda)=(-1)^2\left(\lambda^2-\delta_1\lambda+\delta_2\right)} = \lambda^2-1, \text{ unde}$$

$$\boxed{\delta_1=\operatorname{Tr}A} = 0+0=0; \boxed{\delta_2=\det A} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1.$$

•Se rezolvă ecuaţia caracteristică a matricei A,

$$P_A(\lambda)=0 \Leftrightarrow (*_{EC})\ \lambda^2-1=0 \Leftrightarrow (\lambda-1)(\lambda+1)=0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1=1 \text{ cu } m(\lambda_1)=1, \\ \lambda_2=-1 \text{ cu } m(\lambda_2)=1. \end{cases}$$

Se observă că toate rădăcinile caracteristice sunt din $\mathbb{R}$, adică sunt valori proprii ale matricei A.

Spectrul matricei A este $\sigma(A)=\{1,-1\}$.

Raza spectrală a matricei A este $\rho(A)=\max\{|1|,|-1|\}=1$.

Pasul 2. Se determină un sitem fundamental de soluţii ale SO / o matrice fundamentală a SO.

$\boxed{\text{modul 1.}}$ - aplicabil dacă $A\sim D$ în $\mathbb{R}$ (pentru $n=2$ şi rădăcini caracteristice reale şi distincte$\Rightarrow$ $A\sim D$ în $\mathbb{R}$). Se determină subspaţiile proprii ale matricei A, precum şi dimensiunile lor.

$\boxed{\lambda_1=1}$ Se caută vectorii proprii corespunzători valorii proprii $\lambda_1=1$, adică

$\underline{\mathbf{x}}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\in\mathcal{M}_{2\times1}(\mathbb{R})$, $\underline{\mathbf{x}}\neq\underline{\boldsymbol{\theta}}_{\mathcal{M}_{2\times1}(\mathbb{R})}$ a.î. $(A-1I_2)\underline{\mathbf{x}}=\underline{\boldsymbol{\theta}}_{\mathcal{M}_{2\times1}(\mathbb{R})}$, adică

$$\begin{cases} (0-1)x_1+x_2=0 \\ x_1+(0-1)x_2=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1=\alpha \\ x_2=\alpha\in\mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow$$

$S_{\lambda_1}(A)=\{\underline{\mathbf{x}}\in\mathcal{M}_{2\times1}(\mathbb{R});\underline{\mathbf{x}}$ este vect. propriu. pt. A coresp. val. proprii $\lambda_1=0\}\cup\left\{\underline{\boldsymbol{\theta}}_{\mathcal{M}_{2\times1}(\mathbb{R})}\right\}=$

$$=\left\{\underline{\mathbf{x}}\in\mathcal{M}_{2\times1}(\mathbb{R});\underline{\mathbf{x}}=\begin{pmatrix}\alpha\\\alpha\end{pmatrix}=\alpha\underbrace{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}}_{\mathbf{u}_1^1=\mathbf{v}_1},\alpha\in\mathbb{R}\right\}=$$

$=\left[\left(\mathbf{u}_1^1\right)\right]\Rightarrow\dim_{\mathbb{R}}S_{\lambda_1}(A)=1=m(\lambda_1)$.

$\boxed{\lambda_2=-1}$ Se caută vectorii proprii corespunzători valorii proprii $\lambda_2=-1$, adică

$\underline{\mathbf{x}}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\in\mathcal{M}_{2\times1}(\mathbb{R})$, $\underline{\mathbf{x}}\neq\boldsymbol{\theta}_{\mathcal{M}_{2\times1}(\mathbb{R})}$ a.î.$(A+1I_2)\underline{\mathbf{x}}=\boldsymbol{\theta}_{\mathcal{M}_{2\times1}(\mathbb{R})}$, adică

$$\begin{cases} (0+1)x_1+x_2=0 \\ x_1+(0+1)x_2=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1=-\beta \\ x_2=\beta\in\mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow$$

$S_{\lambda_2}(A)=\{\underline{\mathbf{x}}\in\mathcal{M}_{2\times1}(\mathbb{R});\underline{\mathbf{x}}$ este vect. propriu. pt. A coresp. val. proprii $\lambda_2=-1\}\cup\left\{\boldsymbol{\theta}_{\mathcal{M}_{2\times1}(\mathbb{R})}\right\}=$

$$=\left\{\underline{\mathbf{x}}\in\mathcal{M}_{2\times1}(\mathbb{R});\underline{\mathbf{x}}=\begin{pmatrix}-\beta\\\beta\end{pmatrix}=\beta\underbrace{\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}}_{\mathbf{u}_2^1=\mathbf{v}_2},\beta\in\mathbb{R}\right\}=$$

$=\left[\left(\mathbf{u}_1^2\right)\right]\Rightarrow\dim_{\mathbb{R}}S_{\lambda_2}(A)=1=m(\lambda_2)$.

Cum toate rădăcinile caracteristice ale matricei A sunt din $\mathbb{R}$ (sunt valori proprii) si cum multiplicităţile geometrice (dimensiunile subspaţiilor proprii) coincid cu multiplicităţile algebrice ale

valorilor proprii, atunci, conform teoremei Jordan, matricea A este diagonalizabilă, adică
$\exists D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ matrice diagonală şi $\exists P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ matrice modală,
astfel încât $A \sim D$, adică $A = P \cdot D \cdot P^{-1}$ sau $D = P^{-1} \cdot A \cdot P$. Matricea modală P este formată din coloanele vectorilor proprii, baze în $S_{\lambda_1}(A)$ respectiv $S_{\lambda_2}(A)$. Mai mult, matricea modală P este nesingulară, deoarece respectivii vectori proprii formează o bază în $\mathcal{M}_{2\times 1}(\mathbb{R})$, cu $P =_C A_S$.
<u>modul 1.1.</u> Deoarece A este diagonalizabilă,

$$\bullet \lambda_1 = 1,\ m(\lambda_1) = 1 \rightsquigarrow \underline{\mathbf{x}}_1(t) \overset{\text{notez}}{=} \varphi_1(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ y_1(t) \end{pmatrix} = e^{1t} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\mathbf{v}_1} = \begin{pmatrix} e^t \\ e^t \end{pmatrix}.$$

$$\bullet \lambda_2 = -1,\ m(\lambda_2) = 1 \rightsquigarrow \underline{\mathbf{x}}_2(t) \overset{\text{notez}}{=} \varphi_2(t) = \begin{pmatrix} x_2(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = e^{-t} \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\mathbf{v}_2} = \begin{pmatrix} -e^{-t} \\ e^{-t} \end{pmatrix}.$$

$B = (\underline{\mathbf{x}}_1, \underline{\mathbf{x}}_2)$ este un sistem fundamental de soluţii ale SO.
<u>modul 1.2.</u> O matrice fundamentală este

-sau $\mathcal{X}(t) = \mathcal{X}(t; \underline{\mathbf{x}}_1, \underline{\mathbf{x}}_2) = \begin{pmatrix} e^t & -e^{-t} \\ e^t & e^{-t} \end{pmatrix}$.

-sau $\mathcal{X}(t) = e^{tA} = P e^{tD} P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} =$
$= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}e^t + \frac{1}{2}e^{-t} & \frac{1}{2}e^t - \frac{1}{2}e^{-t} \\ \frac{1}{2}e^t - \frac{1}{2}e^{-t} & \frac{1}{2}e^t + \frac{1}{2}e^{-t} \end{pmatrix}$.

$\boxed{\text{modul 2.}}$ Pe baza teoriei de la ecuaţii diferenţiale liniare de ordin 2, se caută soluţii particulare liniar independente ale (SO): Este aplicabil, cu rezultatul de la modul 1.1. - temă.
<u>Pasul 3.</u> Soluţia generală a SO este:

-sau $\underline{\mathbf{x}}_o(t; \underline{\mathbf{c}}) = \mathcal{X}(t; \underline{\mathbf{x}}_1, \underline{\mathbf{x}}_2) \cdot \underline{\mathbf{c}} = c_1 \underline{\mathbf{x}}_1(t) + c_2 \underline{\mathbf{x}}_2(t),\ t \in \mathbb{R},\ c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

$$\begin{pmatrix} x_o(t; c_1, c_2) \\ y_o(t; c_1, c_2) \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} e^t \\ e^t \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -e^{-t} \\ e^{-t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 e^t - c_2 e^{-t} \\ c_1 e^t + c_2 e^{-t} \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R},\ c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

-sau $\underline{\mathbf{x}}_o(t; \underline{\mathbf{c}}) = e^{tA} \cdot \underline{\mathbf{c}}, \forall t \in \mathbb{I},\ \underline{\mathbf{c}} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 1}(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^2$,

$$\begin{pmatrix} x_o(t; c_1, c_2) \\ y_o(t; c_1, c_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}e^t + \frac{1}{2}e^{-t} & \frac{1}{2}e^t - \frac{1}{2}e^{-t} \\ \frac{1}{2}e^t - \frac{1}{2}e^{-t} & \frac{1}{2}e^t + \frac{1}{2}e^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}.$$

Se va utiliza în continuare $\mathcal{X}(t; \underline{\mathbf{x}}_1, \underline{\mathbf{x}}_2)$.
<u>Etapa 2 :</u> Se determină o soluţie particulară a SN, notată $\underline{\mathbf{x}}_p(t) =?$
<u>**Metoda variaţiei constantelor pentru SN**</u> - teoretic, mereu aplicabilă; practic apar dificultăţi în aplicare când sistemul este de ordin mare şi apar de calculat (fără calculator) determinanţi funcţionali de ordinul respectiv, integrale.

Se caută de forma

$\underline{\mathbf{x}}_p(t) = u_1(t) \underline{\mathbf{x}}_1(t) + u_2(t) \underline{\mathbf{x}}_2(t), \forall t \in \mathbb{R}$,

unde $u_i' : \mathbb{I} \to \mathbb{R}$, $i \in \{1, 2\}$, sunt funcţii-soluţii ale sistemului

$$\begin{cases} u_1'(t)\left(e^t\right) + u_2'(t)\left(-e^{-t}\right) = 2e^{2t} \\ u_1'(t)\left(e^t\right) + u_2'(t)\left(e^{-t}\right) = t^2 e^{2t} \end{cases}$$

$$\Delta(t) = W(t; \underline{\mathbf{x}}_1, \underline{\mathbf{x}}_2) = \begin{vmatrix} e^t & -e^{-t} \\ e^t & e^{-t} \end{vmatrix} = 2 \neq 0, \forall t \in \mathbb{R}.$$

$$\Delta_1(t) = \begin{vmatrix} 2e^{2t} & -e^{-t} \\ t^2 e^{2t} & e^{-t} \end{vmatrix} = 2e^t + t^2 e^t, \forall t \in \mathbb{R}.$$

$$\Delta_2(t) = \begin{vmatrix} e^t & 2e^{2t} \\ e^t & t^2e^{2t} \end{vmatrix} = t^2e^{3t} - 2e^{3t}, \forall t \in \mathbb{R}.$$

Atunci

$$\left\{ \begin{array}{l} u_1'(t) = \frac{\Delta_1(t)}{\Delta(t)} = \frac{2e^t + t^2e^t}{2} \\ u_2'(t) = \frac{\Delta_2(t)}{\Delta(t)} = \frac{t^2e^{3t} - 2e^{3t}}{2} \end{array} \right. \Bigg| \int(\cdot)\,dt \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} u_1(t) = \frac{1}{2}e^t\left(t^2 - 2t + 4\right) + k_1 \\ u_2(t) = -\frac{1}{54}e^{3t}\left(-9t^2 + 6t + 16\right) + k_2 \end{array} \right.$$

Deoarece se caută o soluţie particulară $\underline{\mathbf{x}}_p$, se alege $k_1 = 0$, $k_2 = 0$.

S-a obţinut

$$\begin{pmatrix} x_p(t) \\ y_p(t) \end{pmatrix} = \frac{1}{2}e^t\left(t^2 - 2t + 4\right)\begin{pmatrix} e^t \\ e^t \end{pmatrix} - \frac{1}{54}e^{3t}\left(-9t^2 + 6t + 16\right)\begin{pmatrix} -e^{-t} \\ e^{-t} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} e^{2t}\left(\frac{1}{3}t^2 - \frac{8}{9}t + \frac{62}{27}\right) \\ e^{2t}\left(\frac{2}{3}t^2 - \frac{10}{9}t + \frac{46}{27}\right) \end{pmatrix}, \forall t \in \mathbb{R}$$

Metoda coeficienţilor nedeterminaţi pentru SN Deoarece SN are coeficienţi constanţi şi termenul liber având pe coloane combinaţie liniară de cvasipolinoame de acelaşi tip atunci se poate căuta $\underline{\mathbf{x}}_p$ cu Teoremele 4.2.7 şi 4.2.8 din Curs. Într-adevăr,

$$\underline{\mathbf{b}}(t) = \begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ t^2e^{2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{2t}\left(2\cos(0t) + 0\sin(0t)\right) \\ e^{2t}\left(t^2\cos(0t) + 0\sin(0t)\right) \end{pmatrix}$$

adică este de forma din teoreme.

Cum $\lambda = 2 + 0i$ nu este rădacină caracteristică$\Rightarrow s = 0 \Rightarrow$ se caută o soluţie particulară pentru SN de forma

$$\underline{\mathbf{x}}_p(t) = \begin{pmatrix} x_p(t) \\ y_p(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{2t}\left(A_1(t)\cos(0t) + B_1(t)\sin(0t)\right) \\ e^{2t}\left(A_2(t)\cos(0t) + B_2(t)\sin(0t)\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{2t}A_1(t) \\ e^{2t}A_2(t) \end{pmatrix}, \forall t \in \mathbb{R},$$

unde A_i şi B_i sunt polinoame de grad 2. Se determină coeficienţii polinoamelor $A_i(t) = \mu_{0,i} + \mu_{1,i}t + \mu_{2,i}t^2$, $i \in \{1, 2\}$, impunând ca

$$\underline{\mathbf{x}}_p(t) = \begin{pmatrix} e^{2t}\left(\mu_{0,1} + \mu_{1,1}t + \mu_{2,1}t^2\right) \\ e^{2t}\left(\mu_{0,2} + \mu_{1,2}t + \mu_{2,2}t^2\right) \end{pmatrix} \text{ să fie soluţie particulară a } SN.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} e^{2t}\cdot 2\left(\mu_{0,1} + \mu_{1,1}t + \mu_{2,1}t^2\right) + e^{2t}\left(\mu_{1,1} + 2\mu_{2,1}t\right) = e^{2t}\left(\mu_{0,2} + \mu_{1,2}t + \mu_{2,2}t^2\right) + 2e^{2t} \\ e^{2t}\cdot 2\left(\mu_{0,2} + \mu_{1,2}t + \mu_{2,2}t^2\right) + e^{2t}\left(\mu_{1,2} + 2\mu_{2,2}t\right) = e^{2t}\left(\mu_{0,1} + \mu_{1,1}t + \mu_{2,1}t^2\right) + t^2e^{2t} \end{array} \right.$$

Se împarte prin e^{2t} şi identificăm coeficienţii puterilor lui $t \Rightarrow$

$$\begin{array}{l} t^0: \\ t^1: \\ t^2: \\ t^0: \\ t^1: \\ t^2: \end{array} \left\{ \begin{array}{l} 2\mu_{0,1} + \mu_{1,1} = \mu_{0,2} + 2 \\ 2\mu_{1,1} + 2\mu_{2,1} = \mu_{1,2} \\ 2\mu_{2,1} = \mu_{2,2} \\ 2\mu_{0,2} + \mu_{1,2} = \mu_{0,1} \\ 2\mu_{1,2} + 2\mu_{2,2} = \mu_{1,1} \\ 2\mu_{2,2} = \mu_{2,1} + 1 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2\mu_{0,1} + \mu_{1,1} - \mu_{0,2} = 2 \\ 2\mu_{1,1} + 2\mu_{2,1} - \mu_{1,2} = 0 \\ 2\mu_{2,1} - \mu_{2,2} = 0 \\ \mu_{0,1} - 2\mu_{0,2} - \mu_{1,2} = 0 \\ \mu_{1,1} - 2\mu_{1,2} - 2\mu_{2,2} = 0 \\ \mu_{2,1} - 2\mu_{2,2} = -1 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \mu_{0,1} = \frac{62}{27} \\ \mu_{1,1} = -\frac{8}{9} \\ \mu_{2,1} = \frac{1}{3} \\ \mu_{0,2} = \frac{46}{27} \\ \mu_{1,2} = -\frac{10}{9} \\ \mu_{2,2} = \frac{2}{3} \end{array} \right.$$

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 2 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & -1 \end{array} \right) \overset{Gauss}{\sim} \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{62}{27} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{8}{9} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{46}{27} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{10}{9} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{2}{3} \end{array} \right)$$

S-a obţinut

$$\underline{\mathbf{x}}_p(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{27}e^{2t}(62t^2 - 24t + 9) \\ \frac{1}{27}e^{2t}(46t^2 - 30t + 18) \end{pmatrix}, \forall t \in \mathbb{R}.$$

De menţionat că polinoamele se pot considera de coeficienţi numerele reale a, b, c, d, e, f sau $u_1, u_2, ..., u_6$, pentru a nu fi dificilă scrierea coeficienţilor.

Etapa 3 : Soluţia generală a sistemului diferenţial neomogen SN este

$\underline{\mathbf{x}}(t;\underline{\mathbf{c}}) = \underline{\mathbf{x}}_o(t;\underline{\mathbf{c}}) + \underline{\mathbf{x}}_p(t), t \in \mathbb{R}, \underline{\mathbf{c}} \in \mathcal{M}_{2\times 1}(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^2,$
unde $\underline{\mathbf{x}}_o(t;\underline{\mathbf{c}})$ este soluţia generală SO şi $\underline{\mathbf{x}}_p(t)$ este o soluţie particulară a SN.

d) $\begin{cases} x' = 3x + 2y + 4e^{5t} \\ y' = x + 2y \end{cases}$

Indicaţie. A are valorile proprii $\begin{cases} \lambda_1 = 1 \text{ cu } m(\lambda_1) = 1, \\ \lambda_2 = 4 \text{ cu } m(\lambda_2) = 1. \end{cases}$, este diagonalizabilă în $\mathbb{R}$.

$$\underline{\mathbf{b}}(t) = \begin{pmatrix} 4e^{5t} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{5t}(4\cos(0t) + 0\sin(0t)) \\ e^{5t}(0\cos(0t) + 0\sin(0t)) \end{pmatrix}$$

e) $\begin{cases} x' = 2x - 4y + 3e^{t} \\ y' = x - 3y + 16te^{t} \end{cases}$

Indicaţie. A are valorile proprii $\begin{cases} \lambda_1 = 1 \text{ cu } m(\lambda_1) = 1, \\ \lambda_2 = -2 \text{ cu } m(\lambda_2) = 1. \end{cases}$, este diagonalizabilă în $\mathbb{R}$.

$$\underline{\mathbf{b}}(t) = \begin{pmatrix} 3e^{t} \\ 16te^{t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{t}(3\cos(0t) + 0\sin(0t)) \\ e^{t}(16t\cos(0t) + 0\sin(0t)) \end{pmatrix}$$

f) $\begin{cases} x' = x + 2y + 16te^{t} \\ y' = 2x - 2y + 2t^2e^{t} \end{cases}$

Indicaţie. A are valorile proprii $\begin{cases} \lambda_1 = -3 \text{ cu } m(\lambda_1) = 1, \\ \lambda_2 = 2 \text{ cu } m(\lambda_2) = 1. \end{cases}$, este diagonalizabilă în $\mathbb{R}$.

$$\underline{\mathbf{b}}(t) = \begin{pmatrix} 16te^{t} \\ 2t^2e^{t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{t}(16t\cos(0t) + 0\sin(0t)) \\ e^{t}\left(2t^2\cos(0t) + 0\sin(0t)\right) \end{pmatrix}$$

g) $\begin{cases} x' = 5x - 3y + 2e^{3t} \\ y' = x + y + 5e^{-t} \end{cases}$

Indicaţie. A are valorile proprii $\begin{cases} \lambda_1 = 2 \text{ cu } m(\lambda_1) = 1, \\ \lambda_2 = 4 \text{ cu } m(\lambda_2) = 1. \end{cases}$, este diagonalizabilă în $\mathbb{R}$.

$$\underline{\mathbf{b}}(t) = \begin{pmatrix} 2e^{3t} \\ 5e^{-t} \end{pmatrix} = 1\cdot\begin{pmatrix} 2e^{3t} \\ 0 \end{pmatrix} + 1\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ 5e^{-t} \end{pmatrix} =$$
$$= 1\cdot\begin{pmatrix} e^{3t}(2\cos(0t) + 0\sin(0t)) \\ e^{3t}(0\cos(0t) + 0\sin(0t)) \end{pmatrix} + 1\cdot\begin{pmatrix} e^{-1t}(0\cos(0t) + 0\sin(0t)) \\ e^{-1t}(5\cos(0t) + 0\sin(0t)) \end{pmatrix}.$$

h) $\begin{cases} x' = \phantom{x+{}} y + 2e^{t} \\ y' = x \phantom{{}+y} + t^2 \end{cases}$

Indicaţie. A are valorile proprii $\begin{cases} \lambda_1 = 1 \text{ cu } m(\lambda_1) = 1, \\ \lambda_2 = -1 \text{ cu } m(\lambda_2) = 1. \end{cases}$, este diagonalizabilă în $\mathbb{R}$.

$$\underline{\mathbf{b}}(t) = \begin{pmatrix} 2e^{t} \\ t^2 \end{pmatrix} = 1\cdot\begin{pmatrix} 2e^{t} \\ 0 \end{pmatrix} + 1\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ t^2 \end{pmatrix} =$$
$$= 1\cdot\begin{pmatrix} e^{t}(2\cos(0t) + 0\sin(0t)) \\ e^{t}(0\cos(0t) + 0\sin(0t)) \end{pmatrix} + 1\cdot\begin{pmatrix} e^{0t}(0\cos(0t) + 0\sin(0t)) \\ e^{0t}\left(t^2\cos(0t) + 0\sin(0t)\right) \end{pmatrix}$$

i) $\begin{cases} x' = 5x - 3y + 2e^{3t} \\ y' = x + y + 5e^{-t} \end{cases}$

Indicaţie. A are valorile proprii $\begin{cases} \lambda_1 = 2 \text{ cu } m(\lambda_1) = 1, \\ \lambda_2 = 4 \text{ cu } m(\lambda_2) = 1. \end{cases}$, este diagonalizabilă în $\mathbb{R}$.

$$\underline{\mathbf{b}}(t) = \begin{pmatrix} 2e^{3t} \\ 5e^{t} \end{pmatrix} = 1\cdot\begin{pmatrix} 2e^{3t} \\ 0 \end{pmatrix} + 1\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ 5e^{t} \end{pmatrix} =$$
$$= 1\cdot\begin{pmatrix} e^{3t}(2\cos(0t) + 0\sin(0t)) \\ e^{3t}(0\cos(0t) + 0\sin(0t)) \end{pmatrix} + 1\cdot\begin{pmatrix} e^{t}(0\cos(0t) + 0\sin(0t)) \\ e^{t}(5\cos(0t) + 0\sin(0t)) \end{pmatrix}$$

j) $\begin{cases} x' = 2x + y + 2e^{t} \\ y' = x + 2y - 3e^{4t} \end{cases}$

Indicaţie. A are valorile proprii$\begin{cases} \lambda_1 = 1 \text{ cu } m(\lambda_1) = 1, \\ \lambda_2 = 3 \text{ cu } m(\lambda_2) = 1. \end{cases}$, este diagonalizabilă în $\mathbb{R}$.

$$\underline{\mathbf{b}}(t) = \begin{pmatrix} 2e^{t} \\ -3e^{4t} \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 2e^{t} \\ 0 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -3e^{4t} \end{pmatrix} =$$

$$= 1 \cdot \begin{pmatrix} e^{1t}(2\cos(0t) + 0\sin(0t)) \\ e^{1t}(0\cos(0t) + 0\sin(0t)) \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} e^{4t}(0\cos(0t) + 0\sin(0t)) \\ e^{4t}(-3\cos(0t) + 0\sin(0t)) \end{pmatrix}$$

k) $\begin{cases} x' = 5x - 3y + 2e^{3t} \\ y' = x + y + 5e^{-t} \end{cases}$

Indicaţie. A are valorile proprii$\begin{cases} \lambda_1 = 2 \text{ cu } m(\lambda_1) = 1, \\ \lambda_2 = 4 \text{ cu } m(\lambda_2) = 1. \end{cases}$, este diagonalizabilă în $\mathbb{R}$.

$$\underline{\mathbf{b}}(t) = \begin{pmatrix} 2e^{3t} \\ 5e^{-t} \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 2e^{3t} \\ 0 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 5e^{-t} \end{pmatrix} =$$

$$= 1 \cdot \begin{pmatrix} e^{3t}(2\cos(0t) + 0\sin(0t)) \\ e^{3t}(0\cos(0t) + 0\sin(0t)) \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} e^{-t}(0\cos(0t) + 0\sin(0t)) \\ e^{-t}(5\cos(0t) + 0\sin(0t)) \end{pmatrix}$$

l) $\begin{cases} x' = \phantom{2x +{}} y - 5\cos t \\ y' = 2x + y + \sin 2t \end{cases}$

Indicaţie. A are valorile proprii$\begin{cases} \lambda_1 = 2 \text{ cu } m(\lambda_1) = 1, \\ \lambda_2 = -1 \text{ cu } m(\lambda_2) = 1. \end{cases}$, este diagonalizabilă în $\mathbb{R}$.

$$\underline{\mathbf{b}}(t) = \begin{pmatrix} -5\cos t \\ \sin 2t \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} -5\cos t \\ 0 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \sin 2t \end{pmatrix} =$$

$$= 1 \cdot \begin{pmatrix} e^{0t}(-5\cos t + 0\sin t) \\ e^{0t}(0\cos t + 0\sin t) \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} e^{0t}(0\cos(2t) + 0\sin(2t)) \\ e^{0t}(0\cos(2t) + 1\sin(2t)) \end{pmatrix}$$

m) $\begin{cases} x' = x - y + 2\sin t \\ y' = 4x + y - 3t\cos t \end{cases}$

Indicaţie. A are valorile proprii$\begin{cases} \lambda_1 = 1 + 2i \text{ cu } m(\lambda_1) = 1, \\ \lambda_2 = 1 - 2i \text{ cu } m(\lambda_2) = 1. \end{cases}$, nu este diagonalizabilă în $\mathbb{R}$, este diagonalizabilă în $\mathbb{C}$.

$$\underline{\mathbf{b}}(t) = \begin{pmatrix} 2\sin t \\ -3t\cos t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{0t}(0\cos t + 2\sin t) \\ e^{0t}(-3t\cos t + 0\sin t) \end{pmatrix}$$

n) $\begin{cases} x' = 2x - y + 2te^{t} \\ y' = x \phantom{{}-y} + 2e^{t} \end{cases}$

Indicaţie. A are valorile proprii$\{\lambda_1 = 1 \text{ cu } m(\lambda_1) = 2$, nu este diagonalizabilă nici în $\mathbb{R}$, nici în $\mathbb{C}$.

$$\underline{\mathbf{b}}(t) = \begin{pmatrix} 2te^{t} \\ 2e^{t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{t}(2t\cos(0t) + 0\sin(0t)) \\ e^{t}(2\cos(0t) + 0\sin(0t)) \end{pmatrix}$$

o) $\begin{cases} x' = 2x + y + e^{t} \\ y' = -x \phantom{{}+y} + 2t \end{cases}$

Indicaţie. A are valorile proprii$\{\lambda_1 = 1 \text{ cu } m(\lambda_1) = 2$, nu este diagonalizabilă nici în $\mathbb{R}$, nici în $\mathbb{C}$.

$$\underline{\mathbf{b}}(t) = \begin{pmatrix} e^{t} \\ 2t \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} e^{t} \\ 0 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2t \end{pmatrix} =$$

$$= 1 \cdot \begin{pmatrix} e^{1t}(1\cos(0t) + 0\sin(0t)) \\ e^{1t}(0\cos(0t) + 0\sin(0t)) \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} e^{0t}(0\cos(0t) + 0\sin(0t)) \\ e^{0t}(2t\cos(0t) + 0\sin(0t)) \end{pmatrix}$$

p) $\begin{cases} x' = 3x - 2y + 2 \\ y' = 2x - y + 15\sqrt{t}e^t \end{cases}$

Rezolvare. Sistemul $(SN)\begin{cases} x'(t) = 3x(t) - 2y(t) + 2 \\ y'(t) = 2x(t) - y(t) + 15\sqrt{t}e^t \end{cases}, t \in \mathbb{I} \subset]0, \infty[$

este sistem de $n = 2$ ecuaţii diferenţiale de ordin 1, liniare, cu coeficienţii constanţi, daţi de $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, neomogen, cu $\underline{\mathbf{b}}(t) = \begin{pmatrix} 2 \\ 15\sqrt{t}e^t \end{pmatrix}$, cu $n = 2$ necunoscute $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = ?$

I. **Metoda directă, în SN, a eliminării**

Etapa 0: Din prima ecuaţie a $(SN) \Rightarrow$

$$\begin{cases} (\circ)\ y(t) = \frac{1}{-2}\left(x'(t) - 3x(t) - 2\right) \Big| \frac{d}{dt}() \\ y'(t) = \frac{1}{-2}\left(x''(t) - 3x'(t)\right) \end{cases}$$

Se înlocuiesc y şi y' în a doua ecuaţie a (SN) (se elimină y, y' din a doua ecuaţie a (SN)) $\Rightarrow$

$\frac{1}{-2}\left(x''(t) - 3x'(t)\right) = 2x(t) - \frac{1}{-2}\left(x'(t) - 3x(t) - 2\right) + 15\sqrt{t}e^t \Rightarrow$

$x''(t) - 3x'(t) = -4x(t) - \left(x'(t) - 3x(t) - 2\right) - 30\sqrt{t}e^t$

$(*_{EN})\ x''(t) - 2x'(t) + x(t) = 2 - 30\sqrt{t}e^t.$

Ecuaţia $(*_{EN})$ este o ecuaţie diferenţială de ordin 2, liniară, cu coeficienţii constanţi $a_1 = -2$, $a_2 = 1$, neomogenă cu termenul liber

$f : \mathbb{I} \to \mathbb{R},\ f(t) = 2 - 30\sqrt{t}e^t.$

Pentru $t \in \mathbb{I}$, variabilă independentă din domeniul de definiţie a soluţiei, se caută $x(t; c_1, c_2)$, soluţia generală pentru ecuaţia $(*_{EN})$.

Etapa 1: Se ataşează şi se rezolvă EO

$(*_{EO})\ x''(t) - 2x'(t) + x(t)\, x''(t) + x(t) = 0.$

Pasul 1 : Se ataşează ecuaţiei diferenţiale $(*_{EO})$ ecuaţia ei caracteristică

$(*_{EC})\ \lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0 \Leftrightarrow (\lambda - 1)^2 = 0 \Rightarrow \{\lambda_1 = 1 \text{ cu } m(\lambda_1) = 2.$

Pasul 2 : Pentru fiecare rădăcină a ecuaţiei caracteristice se găsesc corespunzător soluţii particulare liniar independente ale ecuaţiei omogene $(*_{EO})$

$\bullet \lambda_1 = 1 \text{ cu } m(\lambda_1) = 2 \rightsquigarrow \begin{cases} x_1(t) = e^{1t}, \\ x_2(t) = te^{1t}. \end{cases}$

Pasul 3 : Conform algoritmului de la Pasul 2, (x_1, x_2) este un sistem fundamental de soluţii pentru $(*_{EO})$. Atunci soluţia generală a ecuaţiei $(*_{EO})$ este

$x_o(t; c_1, c_2) = c_1 \cdot e^{1t} + c_2 \cdot te^{1t}, \forall t \in \mathbb{R}$ şi $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Etapa 2 : Se determină o soluţie particulară a ecuaţiei neomogene $(*_{EN})$.

Metoda coeficienţilor nedeterminaţi pentru EN: Se observă că ecuaţia $(*_{EN})$ are coeficienţi constanţi, dar nu are termenul liber un cvasipolinom.

$f(t) = 2 - 30\sqrt{t}e^t,$

deci nu se poate aplica.

Metoda variaţiei constantelor pentru EN: Deoarece (x_1, x_2) este un sistem fundamental de soluţii pentru $(*_{EO})$ se caută x_p de forma

$x_p(t) = u_1(t)\underbrace{e^{1t}}_{x_1(t)} + u_2(t)\underbrace{te^{1t}}_{x_2(t)}, \forall t \in \mathbb{I},$

unde $u_i' : \mathbb{I} \to \mathbb{R}$, $i \in \{1, 2\}$, sunt soluţii ale sistemului

$$\begin{cases} u_1'(t)e^{1t} + u_2'(t)te^{1t} = 0 \\ u_1'(t)\left(e^{1t}\right) + u_2'(t)\left(e^{1t} + te^{1t}\right) = 2 - 30\sqrt{t}e^t \end{cases}$$

$$\Delta(t) = W(t; x_1, x_2) = \begin{vmatrix} e^t & te^t \\ e^t & (1+t)e^t \end{vmatrix} = e^{2t} \neq 0, \forall t \in \mathbb{I}.$$

$$\Delta_1(t) = \begin{vmatrix} 0 & te^t \\ 2-30\sqrt{t}e^t & (1+t)e^t \end{vmatrix} = 30t^{\frac{3}{2}}e^{2t} - 2te^t, \forall t \in \mathbb{I}.$$
$$\Delta_2(t) = \begin{vmatrix} e^t & 0 \\ e^t & 2-30\sqrt{t}e^t \end{vmatrix} = 2e^t - 30\sqrt{t}e^{2t}, \forall t \in \mathbb{I}.$$

Atunci
$$\left\{\begin{array}{l} u_1'(t) = \frac{\Delta_1(t)}{\Delta(t)} = 30t^{\frac{3}{2}} - 2te^{-t}, \\ u_2'(t) = \frac{\Delta_2(t)}{\Delta(t)} = 2e^{-t} - 30\sqrt{t}. \end{array}\right. \Bigg| \int(\cdot)\,dt \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} u_1(t) = 2e^{-t} + 2te^{-t} + 12t^{\frac{5}{2}} + k_1, \\ u_2(t) = -2e^{-t} - 20t^{\frac{3}{2}} + k_2. \end{array}\right.$$

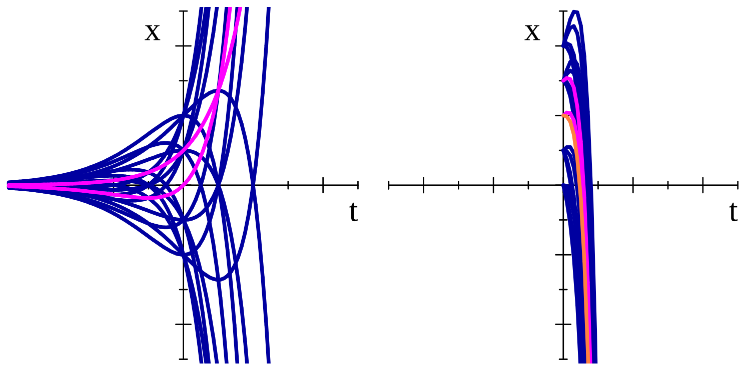
Deoarece se caută o soluţie particulară x_p se alege $k_1 = 0$, $k_2 = 0$. S-a obţinut
$$x_p(t) = \left(2e^{-t} + 2te^{-t} + 12t^{\frac{5}{2}}\right)\cdot e^{1t} + \left(-2e^{-t} - 20t^{\frac{3}{2}}\right)\cdot te^{1t} =$$
$$= 2 + 2t + 12t^{\frac{5}{2}}e^t - 2t - 20t^{\frac{5}{2}}e^t = 2 - 8t^{\frac{5}{2}}e^t, \forall t \in \mathbb{I}.$$

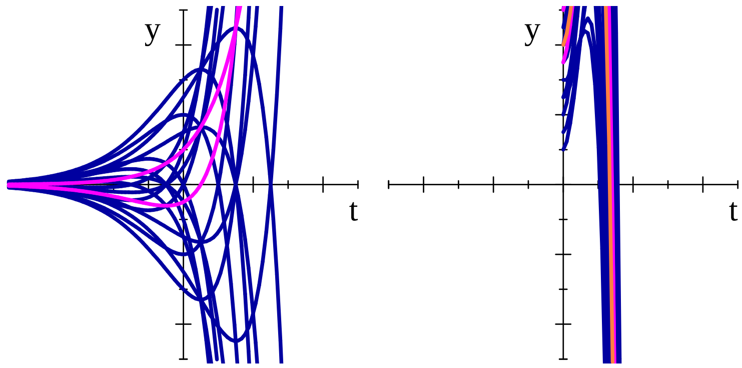
Etapa 3 : Soluţia generală a ecuaţiei neomogene $(*_{EN})$ este dată de
$$x(t;c_1,c_2) = x_o(t;c_1,c_2) + x_p(t), \forall t \in \mathbb{I} \text{ şi } c_1,c_2 \in \mathbb{R}, \text{ adică}$$
$$x(t;c_1,c_2) = c_1\cdot e^{1t} + c_2\cdot te^{1t} + 2 - 8t^{\frac{5}{2}}e^t, \forall t \in \mathbb{I} \text{ şi } c_1,c_2 \in \mathbb{R}.$$

Etapa 4 : Se înlocuiesc x, x' în $(\circ)\, y(t) = \frac{1}{-2}(x'(t) - 3x(t) - 2) \Rightarrow$
$$y(t;c_1,c_2) = \tfrac{1}{-2}\left(c_1e^t + c_2\left(e^t + te^t\right) - 20t^{\frac{3}{2}}e^t - 8t^{\frac{5}{2}}e^t - 3\left(c_1e^t + c_2te^t + 2 - 8t^{\frac{5}{2}}e^t\right) - 2\right) =$$
$$= \tfrac{1}{-2}\left(-2c_1e^t + c_2e^t - 2c_2te^t - 20t^{\frac{3}{2}}e^t + 16t^{\frac{5}{2}}e^t - 8\right) =$$
$$= c_1e^t + c_2\left(-\tfrac{1}{2} + t\right)e^t + 10t^{\frac{3}{2}}e^t - 8t^{\frac{5}{2}}e^t + 4, \forall t \in \mathbb{I} \text{ şi } c_1,c_2 \in \mathbb{R}.$$

Concluzie. Soluţia generală a (SN) este
$$\begin{pmatrix} x(t;c_1,c_2) \\ y(t;c_1,c_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1e^t + c_2te^t + 2 - 8t^{\frac{5}{2}}e^t \\ c_1e^t + c_2\left(-\frac{1}{2}+t\right)e^t + 10t^{\frac{3}{2}}e^t - 8t^{\frac{5}{2}}e^t + 4 \end{pmatrix}, \forall t \in \mathbb{I} \text{ şi } c_1,c_2 \in \mathbb{R}.$$

Reprezentând grafic pe x_o şi y_o, alături pe x şi y, pe $\mathbb{I}$ pentru $(c_1,c_2) = (1,0)$ şi $(c_1,c_2) = (0,1)$ cu magenta (corespunzătoare soluţiilor particulare din sistemul fundamental) şi pentru
$(c_1,c_2) = (1,1), (c_1,c_2) = (1,-1), (c_1,c_2) = (-1,1), (c_1,c_2) = (-1,-1),$
$(c_1,c_2) = (1,2), (c_1,c_2) = (2,1), (c_1,c_2) = (-1,2), (c_1,c_2) = (-2,1)$
$(c_1,c_2) = (1,-2), (c_1,c_2) = (2,-1), (c_1,c_2) = (-1,-2), (c_1,c_2) = (-2,-1)$
cu albastru şi pentru $(c_1,c_2) = (0,0)$ cu portocaliu soluţia particulară obţinută cu metoda variaţiei constantelor, se obţine:





Metoda cu valori proprii

Etapa 1 : Se determină soluţia generală a SO ataşat sistemului SN:

$$(SO)\begin{cases} x'(t) = 3x(t) - 2y(t) \\ y'(t) = 2x(t) - y(t) \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

Pasul 1 : Se ataşează ecuaţia caracteristică a matricei A şi se rezolvă. Adică se determină valorile proprii în $\mathbb{C}$ ale matricei A, precum şi multiplicitatea lor algebrică.

•Se determină polinomul caracteristic al matricei $A, P_A(\lambda)$.

$$\boxed{P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_2)} = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -2 \\ 2 & -1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda + 1$$

$$\boxed{P_A(\lambda) = (-1)^2\left(\lambda^2 - \delta_1\lambda + \delta_2\right)}, \text{ unde}$$

$$\boxed{\delta_1 = \operatorname{Tr} A} = 3 - 1 = 2; \boxed{\delta_2 = \det A} = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 1.$$

•Se rezolvă ecuaţia caracteristică a matricei A,

$P_A(\lambda) = 0 \Leftrightarrow (*_{EC})\,(\lambda - 1)^2 = 0 \Rightarrow \{\lambda_1 = 1 \text{ cu } m(\lambda_1) = 2$

Se observă că toate rădăcinile caracteristice sunt din $\mathbb{R}$, adică sunt valori proprii ale matricei A.

Spectrul matricei A este $\sigma(A) = \{1\}$.

Raza spectrală a matricei A este $\rho(A) = \max\{|1|\} = 1$.

Pasul 2. Se determină un sitem fundamental de soluţii ale SO / o matrice fundamentală a SO.

$\boxed{\text{modul 1.}}$- aplicabil dacă $A \sim D$ în $\mathbb{R}$ (pentru $n = 2$ şi rădăcini caracteristice reale egale$\Rightarrow A \nsim D$ în $\mathbb{R}$, ci $A \sim J$ în $\mathbb{R}$). Se determină subspaţiile proprii ale matricei A, precum şi dimensiunile lor.

$\boxed{\lambda_1 = 1}$ Se caută vectorii proprii corespunzători valorii proprii $\lambda_1 = 0$, adică

$$\underline{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times1}(\mathbb{R}), \underline{\mathbf{x}} \neq \boldsymbol{\theta}_{\mathcal{M}_{2\times1}(\mathbb{R})} \text{ a.î.} (A - 1I_2)\,\underline{\mathbf{x}} = \boldsymbol{\theta}_{\mathcal{M}_{2\times1}(\mathbb{R})}, \text{ adică}$$

$$\begin{cases} (3-1)x_1 - 2x_2 = 0 \\ 2x_1 + (-1-1)x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \alpha \\ x_2 = \alpha \in \mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow$$

$S_{\lambda_1}(A) = \{\underline{\mathbf{x}} \in \mathcal{M}_{2\times1}(\mathbb{R}); \underline{\mathbf{x}}$ este vect. propriu. pt. A coresp. val. proprii $\lambda_1 = 1\} \cup \left\{\boldsymbol{\theta}_{\mathcal{M}_{2\times1}(\mathbb{R})}\right\} =$

$$= \left\{\underline{\mathbf{x}} \in \mathcal{M}_{2\times1}(\mathbb{R}); \underline{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha \end{pmatrix} = \alpha\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\mathbf{u}_1^1 = \mathbf{v}_1}, \alpha \in \mathbb{R}\right\} = \left[\left(\mathbf{u}_1^1\right)\right].$$

$\dim_{\mathbb{R}} S_{\lambda_1}(A) = 1 \neq 2 = m(\lambda_1)$.

Atunci A nu este diagonalizabilă nici în $\mathbb{R}$, nici în $\mathbb{C}$.

Ar fi asemenea cu o matrice Jordan, dar nu se continuă cu acest mod.

$\boxed{\text{modul 2.}}$ Pe baza teoriei de la ecuaţii diferenţiale de ordin 2, liniare, omogene, se caută soluţii 2 particulare liniar independente ale SO:

$\bullet \lambda_1 = 1 \in \mathbb{R}$ cu $m(\lambda_1) = 2 \rightsquigarrow$ se caută două soluţii particulare l.i. ale SO de forma

$$\varphi(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (a_1 + ta_2)e^t \\ (a_3 + ta_4)e^t \end{pmatrix}.$$

Se determină $a_1, ..., a_4$, impunând ca x, y să verifice SO:

$$\begin{cases} a_2e^t + (a_1 + ta_2)e^t = 3(a_1 + ta_2)e^t - 2(a_3 + ta_4)e^t \\ a_4e^t + (a_3 + ta_4)e^t = 2(a_1 + ta_2)e^t - (a_3 + ta_4)e^t \end{cases}, t \in \mathbb{R},$$

Se împarte fiecare ecuaţie prin e^{-t} şi se identifică coeficienţii:

$$\begin{array}{l} t^0: \\ t^1: \\ t^0: \\ t^1: \end{array} \begin{cases} a_2 + a_1 = 3a_1 - 2a_3 \\ a_2 = 3a_2 - 2a_4 \\ a_4 + a_3 = 2a_1 - a_3 \\ a_4 = 2a_2 - a_4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a_1 - a_2 - 2a_3 = 0 \\ 2a_2 - 2a_4 = 0 \\ 2a_1 - 2a_3 - a_4 = 0 \\ 2a_2 - 2a_4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a_1 - a_2 - 2a_3 \quad = 0 \\ \quad a_2 \quad - a_4 = 0 \\ 2a_1 \quad - 2a_3 - a_4 = 0 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -2 & -1 & 0 \end{array}\right) \underset{\substack{l_1 \\ l_2 \\ l_3 - l_1}}{\overset{pas1}{\sim}} \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \underset{\substack{l_1 \\ l_2 \\ l_3 - l_2}}{\overset{pas2}{\sim}} \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} 2a_1 - a_2 - 2a_3 \quad = 0 \\ \quad a_2 \quad - a_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = 2\alpha + \beta \\ a_2 = 2\beta \\ a_3 = 2\alpha \in \mathbb{R} \\ a_4 = 2\beta \in \mathbb{R} \end{cases}.$$

Se poate şi

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 0, \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ecuaţiile $1, 2$ principale; a_1, a_2 necunoscute principale şamd.

S-a găsit

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (2\alpha + \beta + 2\beta t)e^t \\ (2\alpha + 2\beta t)e^t \end{pmatrix} = \alpha e^t \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}}_{2\mathbf{v}_1} + \beta e^t \begin{pmatrix} 1 + 2t \\ 2t \end{pmatrix}.$$

$$\alpha = \tfrac{1}{2}, \beta = 0 \rightsquigarrow \underline{\mathbf{x}}_1(t) \overset{\text{notez}}{=} \varphi_1(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ y_1(t) \end{pmatrix} = e^t \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\mathbf{v}_1} = \begin{pmatrix} e^t \\ e^t \end{pmatrix}$$

$$\alpha = 0, \beta = 1 \rightsquigarrow \underline{\mathbf{x}}_2(t) \overset{\text{notez}}{=} \varphi_2(t) = \begin{pmatrix} x_2(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = e^t \begin{pmatrix} 1 + 2t \\ 2t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1 + 2t)e^t \\ 2te^t \end{pmatrix}$$

$B = (\underline{\mathbf{x}}_1, \underline{\mathbf{x}}_2)$ este un sistem fundamental de soluţii ale SO.

$\mathcal{X}(t; \underline{\mathbf{x}}_1, \underline{\mathbf{x}}_2) = \begin{pmatrix} e^t & (1 + 2t)e^t \\ e^t & 2te^t \end{pmatrix}$ este o matrice fundamentală pentru SO, alta decât $e^{tA}(e^{0A} = I_2)$, deoarece

$$W(t; \underline{\mathbf{x}}_1, \underline{\mathbf{x}}_2) = \begin{vmatrix} e^t & (1 + 2t)e^t \\ e^t & 2te^t \end{vmatrix} = -e^{2t} \neq 0, \forall t$$

<u>Pasul 3.</u> Soluţia generală a SO este:

$$\underline{\mathbf{x}}_o(t; \underline{\mathbf{c}}) = \mathcal{X}(t; \underline{\mathbf{x}}_1, \underline{\mathbf{x}}_2) \cdot \underline{\mathbf{c}} = c_1\underline{\mathbf{x}}_1(t) + c_2\underline{\mathbf{x}}_2(t), t \in \mathbb{R},\ c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

$$\begin{pmatrix} x_o(t; c_1, c_2) \\ y_o(t; c_1, c_2) \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} e^t \\ e^t \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} (1 + 2t)e^t \\ 2te^t \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R},\ c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

<u>Etapa 2 :</u> Se determină o soluţie particulară a SN, notată $\underline{\mathbf{x}}_p(t) =?$.

Metoda variaţiei constantelor pentru SN - teoretic, mereu aplicabilă; practic apar dificultăţi în aplicare când sistemul este de ordin mare şi apar de calculat (fără calculator) determinanţi funcţionali de ordinul respectiv, integrale.

Se caută de forma

$\underline{\mathbf{x}}_p(t) = u_1(t)\,\underline{\mathbf{x}}_1(t) + u_2(t)\,\underline{\mathbf{x}}_2(t), \forall t \in \mathbb{R}$,

unde $u_i' : \mathbb{I} \to \mathbb{R}$, $i \in \{1,2\}$, sunt funcţii-soluţii ale sistemului

$$\begin{cases} u_1'(t)\left(e^t\right) + u_2'(t)\left((1+2t)\,e^t\right) = 2 \\ u_1'(t)\left(e^t\right) + u_2'(t)\left(2te^t\right) = 15\sqrt{t}e^t \end{cases}$$

$$\Delta(t) = W(t;\underline{\mathbf{x}}_1,\underline{\mathbf{x}}_2) = \begin{vmatrix} e^t & (1+2t)\,e^t \\ e^t & 2te^t \end{vmatrix} = -e^{2t} \neq 0, \forall t \in \mathbb{R}.$$

$$\Delta_1(t) = \begin{vmatrix} 2 & (1+2t)\,e^t \\ 15\sqrt{t}e^t & 2te^t \end{vmatrix} = 4te^t - 30t^{\frac{3}{2}}e^{2t} - 15\sqrt{t}e^{2t}, \forall t \in \mathbb{R}.$$

$$\Delta_2(t) = \begin{vmatrix} e^t & 2 \\ e^t & 15\sqrt{t}e^t \end{vmatrix} = 15\sqrt{t}e^{2t} - 2e^t, \forall t \in \mathbb{R}.$$

Atunci

$$\left.\begin{cases} u_1'(t) = \dfrac{\Delta_1(t)}{\Delta(t)} = \dfrac{4te^t - 30t^{\frac{3}{2}}e^{2t} - 15\sqrt{t}e^{2t}}{-e^{2t}} = 15\sqrt{t} + 30t^{\frac{3}{2}} - 4te^{-t} \\ u_2'(t) = \dfrac{\Delta_2(t)}{\Delta(t)} = \dfrac{15\sqrt{t}e^{2t} - 2e^t}{-e^{2t}} = 2e^{-t} - 15\sqrt{t} \end{cases}\right| \int(\cdot)\,dt$$

$$\Rightarrow \begin{cases} u_1(t) = 4e^{-t} + 4te^{-t} + 10t^{\frac{3}{2}} + 12t^{\frac{5}{2}} + k_1 \\ u_2(t) = -2e^{-t} - 10t^{\frac{3}{2}} + k_2 \end{cases}$$

Deoarece se caută o soluţie particulară $\underline{\mathbf{x}}_p$, se alege $k_1 = 0$, $k_2 = 0$. S-a obţinut

$$\begin{pmatrix} x_p(t) \\ y_p(t) \end{pmatrix} = \left(15\sqrt{t} + 30t^{\frac{3}{2}} - 4te^{-t}\right)\begin{pmatrix} e^t \\ e^t \end{pmatrix} + \left(-2e^{-t} - 10t^{\frac{3}{2}}\right)\begin{pmatrix} (1+2t)\,e^t \\ 2te^t \end{pmatrix}, \forall t \in \mathbb{I}$$

Metoda coeficienţilor nedeterminaţi Nu se poate aplica, deoarece sistemul neomogen SN are coeficienţi constanţi, dar nu are termenii liberi cvasipolinoame.

Etapa 3 : Soluţia generală a sistemului diferenţial neomogen SN este

$\underline{\mathbf{x}}(t;\underline{\mathbf{c}}) = \underline{\mathbf{x}}_o(t;\underline{\mathbf{c}}) + \underline{\mathbf{x}}_p(t), t \in \mathbb{R}, \underline{\mathbf{c}} \in \mathcal{M}_{3\times 1}(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^3$,

unde $\underline{\mathbf{x}}_o(t;\underline{\mathbf{c}})$ este soluţia generală SO şi $\underline{\mathbf{x}}_p(t)$ este o soluţie particulară a SN, adică

$$\begin{pmatrix} x(t;c_1,c_2) \\ y(t;c_1,c_2) \end{pmatrix} = c_1\begin{pmatrix} e^t \\ e^t \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} (1+2t)\,e^t \\ 2te^t \end{pmatrix} +$$
$$+\left(15\sqrt{t} + 30t^{\frac{3}{2}} - 4te^{-t}\right)\begin{pmatrix} e^t \\ e^t \end{pmatrix} + \left(-2e^{-t} - 10t^{\frac{3}{2}}\right)\begin{pmatrix} (1+2t)\,e^t \\ 2te^t \end{pmatrix},$$

$\forall t \in \mathbb{I}$, $\underline{\mathbf{c}} \in \mathcal{M}_{2\times 1}(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^2$.

q) $\begin{cases} x' = -x + 2y \\ y' = -3x + 4y + \dfrac{e^{3t}}{e^{2t}+1} \end{cases}$

Indicaţie. A are valorile proprii $\begin{cases} \lambda_1 = 1 \text{ cu } m(\lambda_1) = 1, \\ \lambda_2 = 2 \text{ cu } m(\lambda_2) = 1. \end{cases}$, este diagonalizabilă în $\mathbb{R}$.

$\underline{\mathbf{b}}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \dfrac{e^{3t}}{e^{2t}+1} \end{pmatrix}$ nu are pe coloană cvasipolinoame.

r) $\begin{cases} x' = -4x - 2y + \dfrac{2}{e^t - 1} \\ y' = 6x + 3y - \dfrac{3}{e^t - 1} \end{cases}$

Indicaţie. A are valorile proprii $\begin{cases} \lambda_1 = 0 \text{ cu } m(\lambda_1) = 1, \\ \lambda_2 = -1 \text{ cu } m(\lambda_2) = 1. \end{cases}$, este diagonalizabilă în $\mathbb{R}$.

$\underline{\mathbf{b}}(t) = \begin{pmatrix} \dfrac{2}{e^t - 1} \\ \dfrac{3}{e^t - 1} \end{pmatrix}$ nu are pe coloană cvasipolinoame. A se vedea Curs.

s) $\begin{cases} x' = \quad y + \operatorname{tg}^2 t - 1 \\ y' = -x \quad + \operatorname{tg} t \end{cases}$

Indicaţie. A are valorile proprii $\begin{cases} \lambda_1 = i \text{ cu } m(\lambda_1) = 1, \\ \lambda_2 = -i \text{ cu } m(\lambda_2) = 1. \end{cases}$, nu este diagonalizabilă în $\mathbb{R}$, este diagonalizabilă în $\mathbb{C}$.

$\underline{\mathbf{b}}(t) = \begin{pmatrix} \operatorname{tg}^2 t - 1 \\ \operatorname{tg} t \end{pmatrix}$ nu are pe coloană cvasipolinoame.

t) $\begin{cases} x' = x - y + \frac{1}{\cos t} \\ y' = 2x - y + 1 \end{cases}$

Indicaţie. A are valorile proprii $\begin{cases} \lambda_1 = i \text{ cu } m(\lambda_1) = 1, \\ \lambda_2 = -i \text{ cu } m(\lambda_2) = 1. \end{cases}$, nu este diagonalizabilă în $\mathbb{R}$, este diagonalizabilă în $\mathbb{C}$.

$\underline{\mathbf{b}}(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\cos t} \\ 1 \end{pmatrix}$ nu are pe coloană cvasipolinoame.

u) $\begin{cases} x' = 2x - y \\ y' = -2x + y + 18t \end{cases}$;**v)** $\begin{cases} x' = x + 2y + 16te^t \\ y' = 2x - 2y \end{cases}$;**w)** $\begin{cases} x' = 2x + 4y - 8 \\ y' = 3x + 6y + t \end{cases}$;

x) $\begin{cases} x' = 2x - 3y - t \\ y' = x - 2y + 2\sin t \end{cases}$;**y)** $\begin{cases} x' = x - y + 2\sin t \\ y' = 2x - y \end{cases}$;**z)** $\begin{cases} x' = 2x - y \\ y' = x \quad + 2e^t \end{cases}$;

a$_1$) $\begin{cases} x' = 4x - 3y + 2\cos t \\ y' = 2x - y - \sin t \end{cases}$;**b$_1$)** $\begin{cases} x' = 2x + y + 2e^t \\ y' = x + 2y - 3e^{4t} \end{cases}$;**c$_1$)** $\begin{cases} x' = x - y + 8t \\ y' = 5x - y \end{cases}$;

d$_1$) $\begin{cases} x' = 2x - y \\ y' = -x + 2y - 5e^t \sin t \end{cases}$;**e$_1$)** $\begin{cases} x' = 2x + y + te^t \\ y' = -2x \quad + 1 \end{cases}$.

Exerciţiul 4. Să se rezolve următoarele sisteme diferenţiale liniare:

a) $\begin{cases} x' = 4x - y - z + 2\sin 2t \\ y' = x + 2y - z - 3e^t \\ z' = x - y + 2z + te^t \end{cases}$

Rezolvare: Sistemul (SN) $\begin{cases} x'(t) = 4x(t) - y(t) - z(t) + 2\sin 2t \\ y'(t) = x(t) + 2y(t) - z(t) - 3e^t \\ z'(t) = x(t) - y(t) + 2z(t) + te^t \end{cases}$ $, t \in \mathbb{R},$

este sistem de $n = 3$ ecuaţii diferenţiale de ordin 1, liniare, cu coeficienţii constanţi, daţi de $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, neomogen, cu $\underline{\mathbf{b}}(t) = \begin{pmatrix} 2\sin 2t \\ -3e^t \\ te^t \end{pmatrix}$, cu $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$ =?−funcţii necunoscute.

I. **Metoda cu valori proprii pentru SO, SN**

Etapa 1 : Se determină soluţia generală a SO ataşat sistemului SN:

$$(SO) \begin{cases} x'(t) = 4x(t) - y(t) - z(t) + 0 \\ y'(t) = x(t) + 2y(t) - z(t) + 0 \\ z'(t) = x(t) - y(t) + 2z(t) + 0 \end{cases} , t \in \mathbb{R}.$$

Pasul 1 Se ataşează ecuaţia caracteristică a matricei A şi se rezolvă. Adică se determină valorile

proprii în $\mathbb{C}$ ale matricei A, precum şi multiplicitatea lor algebrică.
•Se determină polinomul caracteristic al matricei $A, P_A(\lambda)$.

$$\boxed{P_A(\lambda)=\det(A-\lambda I_3)}=\begin{vmatrix} 4-\lambda & -1 & -1 \\ 1 & 2-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & 2-\lambda \end{vmatrix}=-\lambda^3+8\lambda^2-21\lambda+18.$$

$\boxed{P_A(\lambda)=(-1)^3\left(\lambda^3-\delta_1\lambda^2+\delta_2\lambda-\delta_3\right)}$, unde δ_i este suma minorilor principali de ordin i ai matricei A...
•Se rezolvă ecuaţia caracteristică a matricei A,

$$P_A(\lambda)=0 \Leftrightarrow -(\lambda-3)^2(\lambda-2)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1=3\in\mathbb{R} \text{ cu } m(\lambda_1)=2; \\ \lambda_2=2\in\mathbb{R} \text{ cu } m(\lambda_2)=1. \end{cases}$$

Se observă că toate rădăcinile caracteristice sunt din $\mathbb{R}$, adică sunt valori proprii ale matricei A.
Spectrul matricei A este $\sigma(A)=\{3,2\}$.
Raza spectrală a matricei A este $\rho(A)=\max\{|3|,|2|\}=3$.
Pasul 2. Se determină un sitem fundamental de soluţii ale SO / o matrice fundamentală a SO.
$\boxed{\text{modul 1.}}$- aplicabil dacă $A\sim D$ în $\mathbb{R}$. Se determină subspaţiile proprii ale matricei A, precum şi dimensiunile lor.
$\lambda_1=3$ Se caută vectorii proprii corespunzători valorii proprii $\lambda_1=3$, adică

$$\underline{\mathbf{x}}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}\in\mathcal{M}_{3\times1}(\mathbb{R}),\ \underline{\mathbf{x}}\neq\boldsymbol{\theta}_{\mathcal{M}_{3\times1}(\mathbb{R})} \text{ a.î.}(A-(-1)\mathbf{I}_3)\underline{\mathbf{x}}=\boldsymbol{\theta}_{\mathcal{M}_{3\times1}(\mathbb{R})}, \text{ adică}$$

$$\begin{cases} (4-3)x_1-x_2-x_3=0 \\ x_1+(2-3)x_2-x_3=0 \\ x_1-x_2+(2-3)x_3=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1=\alpha+\beta \\ x_2=\alpha\in\mathbb{R} \\ x_3=\beta\in\mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow$$

$$S_{\lambda_1}(A)=\{\underline{\mathbf{x}}\in\mathcal{M}_{3\times1}(\mathbb{R});\underline{\mathbf{x}} \text{ este vect. propriu. pt. } A \text{ coresp. val. proprii } \lambda_1=3\}\cup\left\{\boldsymbol{\theta}_{\mathcal{M}_{3\times1}(\mathbb{R})}\right\}=$$

$$=\left\{\underline{\mathbf{x}}\in\mathcal{M}_{3\times1}(\mathbb{R});\underline{\mathbf{x}}=\begin{pmatrix} \alpha+\beta \\ \alpha \\ \beta \end{pmatrix}=\alpha\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\mathbf{u}_1^1=\mathbf{v}_1}+\beta\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\mathbf{u}_2^1=\mathbf{v}_2},\alpha,\beta\in\mathbb{R}\right\}=$$

$$=\left[\left(\mathbf{u}_1^1,\mathbf{u}_2^1\right)\right]\Rightarrow \dim_{\mathbb{R}} S_{\lambda_1}(A)=2=m(\lambda_1).$$

$\lambda_2=2$ Se caută vectorii proprii corespunzători valorii proprii $\lambda_2=2$, adică

$$\underline{\mathbf{x}}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}\in\mathcal{M}_{3\times1}(\mathbb{R}),\ \underline{\mathbf{x}}\neq\boldsymbol{\theta}_{\mathcal{M}_{3\times1}(\mathbb{R})} \text{ a.î.}(A-2\mathbf{I}_3)\underline{\mathbf{x}}=\boldsymbol{\theta}_{\mathcal{M}_{3\times1}(\mathbb{R})}, \text{ adică}$$

$$\begin{cases} (4-2)x_1-x_2-x_3=0 \\ x_1+(2-2)x_2-x_3=0 \\ x_1-x_2+(2-2)x_3=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1=\gamma \\ x_2=\gamma \\ x_3=\gamma\in\mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow$$

$$S_{\lambda_2}(A)=\{\underline{\mathbf{x}}\in\mathcal{M}_{3\times1}(\mathbb{R});\underline{\mathbf{x}} \text{ este vect. propriu. pt. } A \text{ coresp. val. proprii } \lambda_2=2\}\cup\left\{\boldsymbol{\theta}_{\mathcal{M}_{3\times1}(\mathbb{R})}\right\}=$$

$$=\left\{\underline{\mathbf{x}}\in\mathcal{M}_{3\times1}(\mathbb{R});\underline{\mathbf{x}}=\begin{pmatrix} \gamma \\ \gamma \\ \gamma \end{pmatrix}=\gamma\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\mathbf{u}_1^2=\mathbf{v}_3},\gamma\in\mathbb{R}\right\}=$$

$= \left[\left(\mathbf{u}_1^2\right)\right] \Rightarrow \dim_{\mathbb{R}} S_{\lambda_2}(A) = 1 = m(\lambda_2)$.

Cum toate rădăcinile caracteristice ale matricei A sunt din $\mathbb{R}$ (sunt valori proprii) si cum multiplicităţile geometrice (dimensiunile subspaţiilor proprii) coincid cu multiplicităţile algebrice ale valorilor proprii, atunci, conform teoremei Jordan, matricea A este diagonalizabilă, adică $\exists D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ matrice diagonală şi $\exists P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ matrice modală, astfel încât $A \sim D$, adică $A = P \cdot D \cdot P^{-1}$ sau $D = P^{-1} \cdot A \cdot P$. Matricea modală P este formată din coloanele vectorilor proprii, baze în $S_{\lambda_1}(A)$ respectiv $S_{\lambda_2}(A)$. Mai mult, matricea modală P este nesingulară, deoarece respectivii vectori proprii formează o bază în $\mathcal{M}_{3\times 1}(\mathbb{R})$, cu $P =_C A_S$.

modul 1.1. Deoarece A este diagonalizabilă,

$$\bullet \lambda_1 = 3,\ m(\lambda_1) = 2 \rightsquigarrow \underline{\mathbf{x}}_1(t) \overset{\text{notez}}{=} \varphi_1(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ y_1(t) \\ z_1(t) \end{pmatrix} = e^{3t} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\mathbf{v}_1} = \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\underline{\mathbf{x}}_2(t) \overset{\text{notez}}{=} \varphi_2(t) = \begin{pmatrix} x_2(t) \\ y_2(t) \\ z_2(t) \end{pmatrix} = e^{3t} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\mathbf{v}_2} = \begin{pmatrix} e^{3t} \\ 0 \\ e^{3t} \end{pmatrix}.$$

$$\bullet \lambda_2 = 2,\ m(\lambda_2) = 1 \rightsquigarrow \underline{\mathbf{x}}_3(t) \overset{\text{notez}}{=} \varphi_3(t) = \begin{pmatrix} x_3(t) \\ y_3(t) \\ z_3(t) \end{pmatrix} = e^{2t} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\mathbf{v}_3} = \begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}.$$

modul 1.2. O matrice fundamentală este

-sau $\mathcal{X}(t) = \mathcal{X}(t; \underline{\mathbf{x}}_1, \underline{\mathbf{x}}_2, \underline{\mathbf{x}}_3) = \begin{pmatrix} e^{3t} & e^{3t} & e^{2t} \\ e^{3t} & 0 & e^{2t} \\ 0 & e^{3t} & e^{2t} \end{pmatrix}$.

-sau $\mathcal{X}(t) = e^{tA} = Pe^{tD}P^{-1} =$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{3t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{3t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2e^{3t} - e^{2t} & e^{2t} - e^{3t} & e^{2t} - e^{3t} \\ e^{3t} - e^{2t} & e^{2t} & e^{2t} - e^{3t} \\ e^{3t} - e^{2t} & e^{2t} - e^{3t} & e^{2t} \end{pmatrix}$$

$\boxed{\text{modul 2.}}$ Pe baza teoriei de la ecuaţii diferenţiale de ordin 3, liniare şi omogene, se caută 3 soluţii particulare liniar independente ale SO. Se obţine ca la modul 1.1, analog cu Exemplul 4.2.5 din curs.

pasul 3. Soluţia generală a SO este:

-sau $\underline{\mathbf{x}}_o(t; \underline{\mathbf{c}}) = \mathcal{X}(t; \underline{\mathbf{x}}_1, \underline{\mathbf{x}}_2, \underline{\mathbf{x}}_3) \cdot \underline{\mathbf{c}} = c_1 \underline{\mathbf{x}}_1(t) + c_2 \underline{\mathbf{x}}_2(t) + c_3 \underline{\mathbf{x}}_3(t),\ t \in \mathbb{R},\ c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$.

$$\begin{pmatrix} x_o(t; c_1, c_2, c_3) \\ y_o(t; c_1, c_2, c_3) \\ z_o(t; c_1, c_2, c_3) \end{pmatrix} = c_1 e^{3t} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\mathbf{v}_1} + c_2 e^{3t} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\mathbf{v}_2} + c_3 e^{2t} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\mathbf{v}_3}, c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}.$$

-sau $\underline{\mathbf{x}}_o\left(t;\underline{\mathbf{c}}\right) == e^{tA}\cdot\underline{\mathbf{c}}, \forall t\in\mathbb{I}$, $\underline{\mathbf{c}}=\begin{pmatrix} c_1\\ c_2\\ c_3\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{R})\simeq\mathbb{R}^n$,

$$\begin{pmatrix} x_o(t;c_1,c_2,c_3)\\ y_o(t;c_1,c_2,c_3)\\ z_o(t;c_1,c_2,c_3)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2e^{3t}-e^{2t} & e^{2t}-e^{3t} & e^{2t}-e^{3t}\\ e^{3t}-e^{2t} & e^{2t} & e^{2t}-e^{3t}\\ e^{3t}-e^{2t} & e^{2t}-e^{3t} & e^{2t}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1\\ c_2\\ c_3\end{pmatrix}.$$

Se va folosi $\underline{\mathbf{x}}_o\left(t;\underline{\mathbf{c}}\right)=\mathcal{X}\left(t;\underline{\mathbf{x}}_1,\underline{\mathbf{x}}_2,\underline{\mathbf{x}}_3\right)\cdot\underline{\mathbf{c}}$.

Etapa 2 : Se determină o soluţie particulară a SN, notată $\underline{\mathbf{x}}_p(t)=?$.

Metoda variaţiei constantelor – teoretic, mereu aplicabilă; practic apar dificultăţi în aplicare când sistemul este de ordin mare şi apar de calculat (fără calculator) determinanţi funcţionali de ordinul respectiv, integrale.

Se caută de forma

$\underline{\mathbf{x}}_p(t)=u_1(t)\,\underline{\mathbf{x}}_1(t)+u_2(t)\,\underline{\mathbf{x}}_2(t)+u_3(t)\,\underline{\mathbf{x}}_3(t), \forall t\in\mathbb{R}$,

unde $u_i':\mathbb{I}\to\mathbb{R}$, $i\in\{1,2,3\}$, sunt funcţii-soluţii ale sistemului

$$\begin{cases} u_1'(t)\left(e^{3t}\right)+u_1'(t)\left(e^{3t}\right)+u_3'(t)\left(e^{2t}\right)=2\sin 2t\\ u_1'(t)\left(e^{3t}\right)+u_1'(t)(0)+u_3'(t)\left(e^{2t}\right)=-3e^t\\ u_1'(t)(0)+u_1'(t)\left(e^{3t}\right)+u_3'(t)\left(e^{2t}\right)=te^t\end{cases}$$

Se calculează:

$$\Delta(t)=W\left(t;\underline{\mathbf{x}}_1,\underline{\mathbf{x}}_2,\underline{\mathbf{x}}_3\right)=\begin{vmatrix} e^{3t} & e^{3t} & e^{2t}\\ e^{3t} & 0 & e^{2t}\\ 0 & e^{3t} & e^{2t}\end{vmatrix}=-e^{8t}\neq 0, \forall t\in\mathbb{R}.$$

$$\Delta_1(t)=\begin{vmatrix} 2\sin 2t & e^{3t} & e^{2t}\\ -3e^t & 0 & e^{2t}\\ te^t & e^{3t} & e^{2t}\end{vmatrix}=te^{6t}-2e^{5t}\sin 2t, \forall t\in\mathbb{R}.$$

$$\Delta_2(t)=\begin{vmatrix} e^{3t} & 2\sin 2t & e^{2t}\\ e^{3t} & -3e^t & e^{2t}\\ 0 & te^t & e^{2t}\end{vmatrix}=-2e^{5t}\sin 2t-3e^{6t}, \forall t\in\mathbb{R}.$$

$$\Delta_3(t)=\begin{vmatrix} e^{3t} & e^{3t} & 2\sin 2t\\ e^{3t} & 0 & -3e^t\\ 0 & e^{3t} & te^t\end{vmatrix}=2e^{6t}\sin 2t+3e^{7t}-te^{7t}, \forall t\in\mathbb{R}.$$

Atunci

$$\left.\begin{cases} u_1'(t)=\frac{\Delta_1(t)}{\Delta(t)}=\frac{te^{6t}-2e^{5t}\sin 2t}{-e^{8t}}=-te^{-2t}+2e^{-3t}\sin 2t\\ u_2'(t)=\frac{\Delta_2(t)}{\Delta(t)}=\frac{-2e^{5t}\sin 2t-3e^{6t}}{-e^{8t}}=3e^{-2t}+2e^{-3t}\sin 2t\\ u_3'(t)=\frac{\Delta_3(t)}{\Delta(t)}=\frac{2e^{6t}\sin 2t+3e^{7t}-te^{7t}}{-e^{8t}}=-3e^{-t}+te^{-t}-2e^{-2t}\sin 2t\end{cases}\right|\int(\cdot)\,dt$$

$$\Rightarrow\begin{cases} u_1(t)=\frac{1}{52}e^{-2t}\left(26t-16(\cos 2t)\,e^{-t}-24e^{-t}\sin 2t+13\right)+k_1\\ u_2(t)=-e^{-3t}\left(\frac{3}{2}e^t+\frac{4}{13}\cos 2t+\frac{6}{13}\sin 2t\right)+k_2\\ u_3(t)=e^{-2t}\left(2e^t+\frac{1}{2}\cos 2t+\frac{1}{2}\sin 2t-te^t\right)+k_3\end{cases}$$

Deoarece se caută o soluţie particulară $\underline{\mathbf{x}}_p$, se alege $k_1=0$, $k_2=0$, $k_3=0$. S-a obţinut

$$\begin{pmatrix} x^p(t;c_1,c_2,c_3)\\ y^p(t;c_1,c_2,c_3)\\ z^p(t;c_1,c_2,c_3)\end{pmatrix}=$$

$$=\frac{1}{52}e^{-2t}\left(26t-16(\cos 2t)\,e^{-t}-24e^{-t}\sin 2t+13\right)\begin{pmatrix} e^{3t}\\ e^{3t}\\ 0\end{pmatrix}-e^{-3t}\left(\frac{3}{2}e^t+\frac{4}{13}\cos 2t+\frac{6}{13}\sin 2t\right)\begin{pmatrix} e^{3t}\\ 0\\ e^{3t}\end{pmatrix}+$$

$$+e^{-2t}\left(2e^t+\frac{1}{2}\cos 2t+\frac{1}{2}\sin 2t-te^t\right)\begin{pmatrix} e^{2t}\\ e^{2t}\\ e^{2t}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{3}{4}e^t-\frac{3}{26}\cos 2t-\frac{11}{26}\sin 2t-\frac{1}{2}te^t\\ \frac{9}{4}e^t+\frac{5}{26}\cos 2t+\frac{1}{26}\sin 2t-\frac{1}{2}te^t\\ \frac{1}{2}e^t+\frac{5}{26}\cos 2t+\frac{1}{26}\sin 2t-te^t\end{pmatrix},\forall t\in\mathbb{R}$$

Metoda coeficienţilor nedeterminaţi Deoarece SN are coeficienţi constanţi şi termenul liber având pe coloane combinaţie liniară de cvasipolinoame de acelaşi tip atunci se poate căuta $\underline{\mathbf{x}}_p$ cu Teoremele 4.2.7 şi 4.2.8 din Curs. Într-adevăr,

$$\underline{\mathbf{b}}(t)=\begin{pmatrix} 2\sin 2t\\ -3e^t\\ te^t\end{pmatrix}=1\cdot\begin{pmatrix} 2\sin 2t\\ 0\\ 0\end{pmatrix}+1\cdot\begin{pmatrix} 0\\ -3e^t\\ te^t\end{pmatrix}=$$

$$=1\cdot\begin{pmatrix} e^{0t}(0\cos(2t)+2\sin(2t))\\ e^{0t}(0\cos(2t)+0\sin(2t))\\ e^{0t}(0\cos(2t)+0\sin(2t))\end{pmatrix}+1\cdot\begin{pmatrix} e^{1t}(0\cos(0t)+1\sin(0t))\\ e^{1t}(-3\cos(0t)+1\sin(0t))\\ e^{1t}(t\cos(0t)+1\sin(0t))\end{pmatrix}$$

adică este de forma din teoreme.

Fie $(SN_1)\begin{cases} x'(t)=4x(t)-y(t)-z(t)+2\sin 2t\\ y'(t)=x(t)+2y(t)-z(t)+0\\ z'(t)=x(t)-y(t)+2z(t)+0\end{cases},t\in\mathbb{R}.$

Cum $\lambda=0+2i$ nu este rădacină caracteristică$\Rightarrow s=0\Rightarrow$ se caută o soluţie particulară pentru SN_1 de forma

$$\underline{\mathbf{x}}_{p_1}(t)=\begin{pmatrix} x_{p_1}(t)\\ y_{p_1}(t)\\ z_{p_1}(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} e^{0t}(A_1(t)\cos(2t)+B_1(t)\sin(2t))\\ e^{0t}(A_2(t)\cos(2t)+B_2(t)\sin(2t))\\ e^{0t}(A_3(t)\cos(2t)+B_3(t)\sin(2t))\end{pmatrix},\forall t\in\mathbb{R},$$

unde A_i şi B_i sunt polinoame de grad 0, constante. Se determină coeficienţii polinoamelor $A_i(t)=\mu_0^i$ şi $B_i(t)=\nu_0^i$, $i\in\{1,2,3\}$, impunând ca

$$\underline{\mathbf{x}}_{p_1}(t)=\begin{pmatrix} \mu_{0,1}\cos(2t)+\nu_{0,1}\sin(2t)\\ \mu_{0,2}\cos(2t)+\nu_{0,2}\sin(2t)\\ \mu_{0,3}\cos(2t)+\nu_{0,3}\sin(2t)\end{pmatrix}\text{ să fie soluţie particulară a } SN_1.$$

$$\begin{cases} -2\mu_{0,1}\sin(2t)+2\nu_{0,1}\cos(2t)=\\ \quad=4\left(\mu_{0,1}\cos(2t)+\nu_{0,1}\sin(2t)\right)-\left(\mu_{0,2}\cos(2t)+\nu_{0,2}\sin(2t)\right)-\left(\mu_{0,3}\cos(2t)+\nu_{0,3}\sin(2t)\right)+2\sin\\ -2\mu_{0,2}\sin(2t)+2\nu_{0,2}\cos(2t)=\\ \quad=\left(\mu_{0,1}\cos(2t)+\nu_{0,1}\sin(2t)\right)+2\left(\mu_{0,2}\cos(2t)+\nu_{0,2}\sin(2t)\right)-\left(\mu_{0,3}\cos(2t)+\nu_{0,3}\sin(2t)\right)\\ -2\mu_{0,3}\sin(2t)+2\nu_{0,3}\cos(2t)=\\ \quad=\left(\mu_{0,1}\cos(2t)+\nu_{0,1}\sin(2t)\right)-\left(\mu_{0,2}\cos(2t)+\nu_{0,2}\sin(2t)\right)+2\left(\mu_{0,3}\cos(2t)+\nu_{0,3}\sin(2t)\right)\end{cases}$$

Identificăm coeficienţii funcţiilor liniar independente $(\cos 2t,\sin 2t)$ (au $W=2$)

$$\begin{array}{l}\cos 2t:\\ \sin 2t:\\ \cos 2t:\\ \sin 2t:\\ \cos 2t:\\ \sin 2t:\end{array}\begin{cases} 2\nu_{0,1}=4\mu_{0,1}-\mu_{0,2}-\mu_{0,3}\\ -2\mu_{0,1}=4\nu_{0,1}-\nu_{0,2}-\nu_{0,3}+2\\ 2\nu_{0,2}=\mu_{0,1}+2\mu_{0,2}-\mu_{0,3}\\ -2\mu_{0,2}=\nu_{0,1}+2\nu_{0,2}-\nu_{0,3}\\ 2\nu_{0,3}=\mu_{0,1}-\mu_{0,2}+2\mu_{0,3}\\ -2\mu_{0,3}=\nu_{0,1}-\nu_{0,2}+2\nu_{0,3}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} 4\mu_{0,1}-\mu_{0,2}-\mu_{0,3}-2\nu_{0,1}=0\\ 2\mu_{0,1}+4\nu_{0,1}-\nu_{0,2}-\nu_{0,3}=-2\\ \mu_{0,1}+2\mu_{0,2}-\mu_{0,3}-2\nu_{0,2}=0\\ 2\mu_{0,2}+\nu_{0,1}+2\nu_{0,2}-\nu_{0,3}=0\\ \mu_{0,1}-\mu_{0,2}+2\mu_{0,3}-2\nu_{0,3}=0\\ 2\mu_{0,3}+\nu_{0,1}-\nu_{0,2}+2\nu_{0,3}=0\end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 4&-1&-1&-2&0&0&0\\ 2&0&0&4&-1&-1&2\\ 1&2&-1&0&-2&0&0\\ 0&2&0&1&2&-1&0\\ 1&-1&2&0&0&-2&0\\ 0&0&2&1&-1&2&0\end{array}\right)\overset{Gauss}{\sim}\left(\begin{array}{cccccc|c} 1&0&0&0&0&0&\frac{3}{26}\\ 0&1&0&0&0&0&-\frac{5}{26}\\ 0&0&1&0&0&0&-\frac{5}{26}\\ 0&0&0&1&0&0&\frac{11}{26}\\ 0&0&0&0&1&0&-\frac{1}{26}\\ 0&0&0&0&0&1&-\frac{1}{26}\end{array}\right)\Rightarrow\begin{cases}\mu_{0,1}=\frac{3}{26}\\ \mu_{0,2}=-\frac{5}{26}\\ \mu_{0,3}=-\frac{5}{26}\\ \nu_{0,1}=\frac{11}{26}\\ \nu_{0,2}=-\frac{1}{26}\\ \nu_{0,3}=-\frac{1}{26}\end{cases}$$

De menţionat că s-a folosit SWP pentru calcul (row echelon form).

S-a obţinut

$$\underline{\mathbf{x}}_{p_1}(t)=\begin{pmatrix} x_{p_1}(t)\\ y_{p_1}(t)\\ z_{p_1}(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{3}{26}\cos(2t)+\frac{11}{26}\sin(2t)\\ \frac{-5}{26}\cos(2t)+\frac{-1}{26}\sin(2t)\\ \frac{-5}{26}\cos(2t)+\frac{-1}{26}\sin(2t)\end{pmatrix} \text{ soluţie particulară a } SN_1.$$

Fie $(SN_2)\begin{cases} x'(t)=4x(t)-y(t)-z(t)+0\\ y'(t)=x(t)+2y(t)-z(t)-3e^t\\ z'(t)=x(t)-y(t)+2z(t)+te^t\end{cases},t\in\mathbb{R}.$

Cum $\lambda=1+0i$ nu este rădacină caracteristică$\Rightarrow$ $s=0\Rightarrow$ se caută o soluţie particulară pentru SN_2 de forma

$$\underline{\mathbf{x}}_{p_2}(t)=\begin{pmatrix} x_{p_2}(t)\\ y_{p_2}(t)\\ z_{p_2}(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} e^{1t}(A_1(t)\cos(0t)+B_1(t)\sin(0t))\\ e^{1t}(A_2(t)\cos(0t)+B_2(t)\sin(0t))\\ e^{1t}(A_3(t)\cos(0t)+B_3(t)\sin(0t))\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} e^tA_1(t)\\ e^tA_2(t)\\ e^tA_3(t)\end{pmatrix},\forall t\in\mathbb{R},$$

unde A_i şi B_i sunt polinoame de grad 1.

Se determină coeficienţii polinoamelor $A_i(t)=\mu_{0,i}+\mu_{1,i}t,\ i\in\{1,2,3\}$, impunând ca

$$\underline{\mathbf{x}}_{p_2}(t)=\begin{pmatrix} x_{p_2}(t)\\ y_{p_2}(t)\\ z_{p_2}(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} e^t\left(\mu_{0,1}+\mu_{1,1}t\right)\\ e^t\left(\mu_{0,2}+\mu_{1,2}t\right)\\ e^t\left(\mu_{0,3}+\mu_{1,3}t\right)\end{pmatrix} \text{ să fie soluţie particulară a } SN_2.$$

$$\begin{cases} e^t\left(\mu_{0,1}+\mu_{1,1}t\right)+e^t\mu_{1,1}=4e^t\left(\mu_{0,1}+\mu_{1,1}t\right)-e^t\left(\mu_{0,2}+\mu_{1,2}t\right)-e^t\left(\mu_{0,3}+\mu_{1,3}t\right)+0\\ e^t\left(\mu_{0,2}+\mu_{1,2}t\right)+e^t\mu_{1,2}=e^t\left(\mu_{0,1}+\mu_{1,1}t\right)+2e^t\left(\mu_{0,2}+\mu_{1,2}t\right)-e^t\left(\mu_{0,3}+\mu_{1,3}t\right)-3e^t\\ e^t\left(\mu_{0,3}+\mu_{1,3}t\right)+e^t\mu_{1,3}=e^t\left(\mu_{0,1}+\mu_{1,1}t\right)-e^t\left(\mu_{0,2}+\mu_{1,2}t\right)+2e^t\left(\mu_{0,3}+\mu_{1,3}t\right)+te^t\end{cases}$$

Se împarte prin e^t şi identificăm coeficienţii puterilor lui $t\Rightarrow$

$$\begin{matrix} t^0:\\ t^1:\\ t^0:\\ t^1:\\ t^0:\\ t^1:\end{matrix}\begin{cases}\mu_{0,1}+\mu_{1,1}=4\mu_{0,1}-\mu_{0,2}-\mu_{0,3}\\ \mu_{1,1}=4\mu_{1,1}-\mu_{1,2}-\mu_{1,3}\\ \mu_{0,2}+\mu_{1,2}=\mu_{0,1}+2\mu_{0,2}-\mu_{0,3}-3\\ \mu_{1,2}=\mu_{1,1}+2\mu_{1,2}-\mu_{1,3}\\ \mu_{0,3}+\mu_{1,3}=\mu_{0,1}-\mu_{0,2}+2\mu_{0,3}\\ \mu_1^3=\mu_{1,1}-\mu_{1,2}+2\mu_{1,3}+1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-3\mu_{0,1}+\mu_{0,2}+\mu_{0,3}+\mu_{1,1}=0\\ -3\mu_{1,1}+\mu_{1,2}+\mu_{1,3}=0\\ \mu_{0,1}+\mu_{0,2}-\mu_{0,3}-\mu_{1,2}=3\\ \mu_{1,1}+\mu_{1,2}-\mu_{1,3}=0\\ \mu_{0,1}-\mu_{0,2}+\mu_{0,3}-\mu_{1,3}=0\\ \mu_{1,1}-\mu_{1,2}+\mu_{1,3}=-1\end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} -3&1&1&1&0&0&0\\ 0&0&0&-3&1&1&0\\ 1&1&-1&0&-1&0&3\\ 0&0&0&1&1&-1&0\\ 1&-1&1&0&0&-1&0\\ 0&0&0&1&-1&1&-1\end{array}\right)\overset{Gauss}{\sim}\left(\begin{array}{cccccc|c} 1&0&0&0&0&0&\frac34\\ 0&1&0&0&0&0&\frac94\\ 0&0&1&0&0&0&\frac12\\ 0&0&0&1&0&0&-\frac12\\ 0&0&0&0&1&0&-\frac12\\ 0&0&0&0&0&1&-1\end{array}\right)\Rightarrow\begin{cases}\mu_{0,1}=\frac34\\ \mu_{0,2}=\frac94\\ \mu_{0,3}=\frac12\\ \mu_{1,1}=\frac{-1}{2}\\ \mu_{1,2}=\frac{-1}{2}\\ \mu_{1,3}=-1\end{cases}$$

S-a obţinut

$$\underline{\mathbf{x}}_{p_2}(t)=\begin{pmatrix} x_{p_2}(t)\\ y_{p_2}(t)\\ z_{p_2}(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} e^t\left(\frac34+\frac{-1}{2}t\right)\\ e^t\left(\frac94+\frac{-1}{2}t\right)\\ e^t\left(\frac12-t\right)\end{pmatrix},\forall t\in\mathbb{R}.$$

De menţionat că s-a folosit SWP pentru calcul.

Se putea folosi şi împărţirea sistemului în două sisteme, unul din ecuaţiile 1,3,5 şi unul din ecuaţiile 2,4,6.

O soluţie particulară a SN este

$\underline{\mathbf{x}}_p(t)=1\cdot\underline{\mathbf{x}}_{p_1}(t)+1\cdot\underline{\mathbf{x}}_{p_2}(t)$, adică

$$\begin{pmatrix} x_p(t)\\ y_p(t)\\ z_p(t)\end{pmatrix}=1\cdot\begin{pmatrix}\frac{3}{26}\cos(2t)+\frac{11}{26}\sin(2t)\\ \frac{-5}{26}\cos(2t)+\frac{-1}{26}\sin(2t)\\ \frac{-5}{26}\cos(2t)+\frac{-1}{26}\sin(2t)\end{pmatrix}+1\cdot\begin{pmatrix} e^t\left(\frac34+\frac{-1}{2}t\right)\\ e^t\left(\frac94+\frac{-1}{2}t\right)\\ e^t\left(\frac12-t\right)\end{pmatrix},t\in\mathbb{R}.$$

<u>Etapa 3 :</u> Soluţia generală a sistemului diferenţial neomogen SN este

$\underline{\mathbf{x}}(t;\underline{\mathbf{c}}) = \underline{\mathbf{x}}_o(t;\underline{\mathbf{c}}) + \underline{\mathbf{x}}_p(t), t \in \mathbb{R}, \underline{\mathbf{c}} \in \mathcal{M}_{3\times1}(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^3,$
unde $\underline{\mathbf{x}}_o(t;\underline{\mathbf{c}})$ este soluţia generală SO şi $\underline{\mathbf{x}}_p(t)$ este o soluţie particulară a SN.
○**Metoda eliminării pentru rezolvarea** SO- greoaie în acest caz pentru $n \geq 3$.

$$(SO)\begin{cases} x' = 4x - y - z \\ y' = x + 2y - z \\ z' = x - y + 2z \end{cases}$$

Pasul 0: Din prima ecuaţie a $(SO) \Rightarrow$

$$\begin{cases} (1)\; x'(t) = 4x(t) - y(t) - z(t) | \frac{d}{dt}() \\ (1_1)\; x''(t) = 4x'(t) - y'(t) - z'(t) | \frac{d}{dt}() \\ (1_2)\; x'''(t) = 4x''(t) - y''(t) - z''(t) \end{cases}$$

Din a doua şi a treia ecuaţie a $(SO) \Rightarrow$

$$\begin{cases} (2)\; y'(t) = x(t) + 2y(t) - z(t) | \frac{d}{dt}() \\ (3)\; z'(t) = x(t) - y(t) + 2z(t) | \frac{d}{dt}() \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (2_1)\; y''(t) = x'(t) + 2y'(t) - z'(t) \\ (3_1)\; z''(t) = x'(t) - y'(t) + 2z'(t) \end{cases}$$

Folosind (SO) şi $(2_1), (3_1)$, se elimină y', y'', z', z'' din $(1_1), (1_2) \Rightarrow$

$$\begin{cases} (1_1) \Rightarrow x''(t) = 4(4x(t) - y(t) - z(t)) - (x(t) + 2y(t) - z(t)) - (x(t) - y(t) + 2z(t)) \\ \qquad = 14x(t) - 5y(t) - 5z(t) \\ (1_2) \Rightarrow x'''(t) = 4(4x'(t) - y'(t) - z'(t)) - (x'(t) + 2y'(t) - z'(t)) - (x'(t) - y'(t) + 2z'(t)) \\ \qquad = 14x'(t) - 5y'(t) - 5z'(t) = \\ \qquad = 14(4x(t) - y(t) - z(t)) - 5(x(t) + 2y(t) - z(t)) - 5(x(t) - y(t) + 2z(t)) = \\ \qquad = 46x(t) - 19y(t) - 19z(t) \end{cases}$$

S-a obţinut $\begin{cases} x'(t) = 4x(t) - y(t) - z(t) \\ x''(t) = 14x(t) - 5y(t) - 5z(t) \\ x'''(t) = 46x(t) - 19y(t) - 19z(t) \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$

Deoarece rang $\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -5 & -5 \end{pmatrix} = 1 < 2$, din primele două ecuaţii ale sistemului nu se poate exprima în mod unic y, z în funcţie de x, x', x''.

Dar, din primele două ecuaţii$\Rightarrow$

$$\begin{cases} z(t) = -x'(t) + 4x(t) - y(t) \\ x''(t) = 14x(t) - 5y(t) - 5z(t) \end{cases} \Rightarrow$$

$x''(t) = 14x(t) - 5y(t) - 5(-x'(t) + 4x(t) - y(t)) \Rightarrow$
$(*_{EO})\; x''(t) - 5x'(t) + 6x(t) = 0.$

Ecuaţia $(*_{EO})$ este o ecuaţie diferenţială de ordin doar 2, nu 3, liniară, cu coeficienţii constanţi $a_1 = -5$, $a_2 = 6$, omogenă. Pentru $t \in \mathbb{R}$, variabilă independentă din domeniul de definiţie a soluţiei, se caută $x_o(t; c_1, c_2)$, soluţia generală pentru ecuaţia $(*_{EO})$.

Pasul 1, 2, 3 : Se ataşează ecuaţiei diferenţiale $(*_{EO})$ ecuaţia ei caracteristică

$$(*_{EC})\; \lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0 \Leftrightarrow\Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 2 \text{ cu } m(\lambda_1) = 1, \\ \lambda_2 = 3 \text{ cu } m(\lambda_2) = 1, \end{cases}$$

Pentru fiecare rădăcină a ecuaţiei caracteristice se găsesc corespunzător soluţii particulare liniar independente ale ecuaţiei omogene $(*_{EO})$, după algoritmul dat

- $\lambda_1 = 2$ cu $m(\lambda_1) = 1 \rightsquigarrow x_1(t) = e^{2t}$,
- $\lambda_2 = 3$ cu $m(\lambda_2) = 1 \rightsquigarrow x_2(t) = e^{3t}$.

(x_1, x_2) este un sistem fundamental de soluţii pentru $(*_{EO})$. Atunci soluţia generală a ecuaţiei $(*_{EO})$ este

$x_o(t; c_1, c_2) = c_1 e^{2t} + c_2 e^{3t}, \forall t \in \mathbb{R}$ şi $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Pasul 4 :

$x_o(t) = c_1 e^{2t} + c_2 e^{3t} \Rightarrow$

$x_o'(t) = c_1e^{2t} \cdot 2 + c_2e^{3t} \cdot 3 \Rightarrow$
$x_o''(t) = c_1e^{2t} \cdot 4 + c_2e^{3t} \cdot 9.$
Eliminând z din primele două ecuaţii ale $SO \Rightarrow$
$x'(t) - y'(t) = 3x(t) - 3y(t) \Rightarrow$
$\left(c_1e^{2t} \cdot 2 + c_2e^{3t} \cdot 3\right) - y'(t) = 3\left(c_1e^{2t} + c_2e^{3t}\right) - 3y(t) \Rightarrow$
$(*_{EN})\ y'(t) = 3y(t) - c_1e^{2t}.$

Ecuaţia $(*_{EN})$ este o ecuaţie diferenţială de ordin 1, liniară, cu coeficienţii constanţi $a_1 = -3$, neomogenă. Se poate rezolva ca în Capitolul 3 sau ca în Capitolul 1. Adică se înmulţeşte cu factorul integrant

$\mu(t) = e^{-\int 3dt} = e^{-3t+0} \Rightarrow$
$y'(t) \cdot e^{-3t} + y(t) \cdot e^{-3t}(-3) = -c_1e^{2t} \cdot e^{-3t} \Leftrightarrow$
$\frac{d}{dt}\left(y(t) \cdot e^{-3t}\right) = -c_1e^{-t} \mid \int () \, dt$
$y_o(t; c_1, c_3) = c_1e^{2t} + c_3e^{3t}, \forall t \in \mathbb{R}$ şi $c_1, c_3 \in \mathbb{R}$.

Mai mult, din prima ecuaţie a SO,
$z(t) = -x'(t) + 4x(t) - y(t) \Rightarrow$
$$z_o(t; c_1, c_2, c_3) = -\left(c_1e^{2t} \cdot 2 + c_2e^{3t} \cdot 3\right) + 4\left(c_1e^{2t} + c_2e^{3t}\right) - \left(c_1e^{2t} + c_3e^{3t}\right) =$$
$$= c_1e^{2t} + c_2e^{3t} - c_3e^{3t}, \forall t \in \mathbb{R} \text{ şi } c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}.$$

Atunci
$$\begin{cases} x_o(t; c_1, c_2, c_3) = c_1e^{2t} + c_2e^{3t} \\ y_o(t; c_1, c_2, c_3) = c_1e^{2t} \qquad\quad + c_3e^{3t} \\ z_o(t; c_1, c_2, c_3) = c_1e^{2t} + c_2e^{3t} - c_3e^{3t} \end{cases}, \forall t \in \mathbb{R} \text{ şi } c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R} \Rightarrow$$
$$\begin{pmatrix} x_o(t; c_1, c_2, c_3) \\ y_o(t; c_1, c_2, c_3) \\ z_o(t; c_1, c_2, c_3) \end{pmatrix} = c_1e^{2t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2e^{3t}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c_3e^{3t}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \forall t \in \mathbb{R} \text{ şi } c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}.$$

De remarcat că, în acest caz, eliminarea s-a întrerupt după primele două ecuaţii. x_o a fost soluţia unei EO doar de ordin 2, urmând ca y să nu fie obţinut doar prin înlocuire, ci ca soluţie a unei ecuaţii de ordinul 1.

b) $\begin{cases} x' = x \qquad\qquad + 1 \\ y' = x + y \qquad\quad + t \\ z' = x + y + z + 1 + t \end{cases}$; **c)** $\begin{cases} x' = x + y + z - \sin t \\ y' = x + y + z + \sin t \\ z' = x + y + z + \cos t \end{cases}$