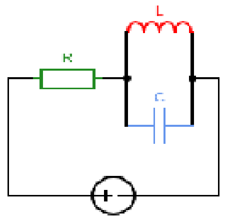
SEMINAR NR. 9, REZOLVĂRI
EDCO, AIA

4.3. Stabilitatea sistemelor de ecuaţii diferenţiale liniare

Noţiunile de stabilitate-a se vedea Curs.
Observaţia 4.3.4 **(legături)**, **Teorema** 4.3.3. (simplu stabil-mărginire)**, Teorema** 4.3.4. (asimpotic stabil- limită), **Teorema** 4.3.7 (cu rădăcinile caracteristice), **Teorema** 4.3.9 (Hurwitz)- a se vedea Curs.

Exerciţiul 1. Fie sistemul (fizic) electric de mai jos, în care tensiunea electromotoare este E.



a) Să se descrie modelul matematic care modelează sistemul.
b) Să se studieze stabilitatea sistemului neperturbat.
c) Să se determine i_L şi u_C ştiind că $R = 2\Omega$, $L = 8H$, $C = 1F$ şi $E(t) = 2\sin t$.
d) Să se determine i_L şi u_C ştiind în plus că $i_L(0) = u_C(0) = 0$.

Rezolvare. a) Notând cu i_R, i_L, i_C intensitatea curentului pe porţiunile de circuit care conţin rezistorul R, bobina L, respectiv condensatorul C, şi cu u_R, u_L, u_C, tensiunile corespunzătoare rezultă, din Legile lui Kirchoff, Ohm, Faraday, următoarele relaţii:

$$\begin{cases} i_R = i_L + i_C \\ u_R + u_L = E \\ u_L = u_C \end{cases} \text{ şi } \begin{cases} u_R = R \cdot i_R \\ u_C = \dfrac{1}{C} \cdot q \Leftrightarrow u_C' = \dfrac{1}{C} \cdot i_C \\ u_L = L \cdot i_L' \end{cases}$$

Notând cu $x = i_L$ şi cu $y = u_C$ (simetric faţă de curs, unde s-a folosit metoda eliminării, cu intenţia de ecuaţie pentru u_C), se obţine

$$\begin{cases} u_L = u_C \Rightarrow L \cdot x' = y \\ u_R + u_L = E \Rightarrow R \cdot (x + Cy') + Lx' = E \end{cases} \Leftrightarrow (SN) \begin{cases} x' = \qquad \dfrac{1}{L} \cdot y \\ y' = -\dfrac{1}{C} x - \dfrac{1}{RC} y + \dfrac{1}{RC} E \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$(SN) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{L} \\ -\frac{1}{C} & -\frac{1}{RC} \end{pmatrix}}_{A} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{RC} E \end{pmatrix}}_{\underline{\mathbf{b}}}$$

b) Fie sistemului neperturbat (absenţa tensiunii electromotoare E), adică sistemul omogen asociat:

$$(SO) \begin{cases} x' = \qquad \dfrac{1}{L} \cdot y \\ y' = -\dfrac{1}{C} x - \dfrac{1}{RC} y \end{cases} \Leftrightarrow (SO) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{L} \\ -\frac{1}{C} & -\frac{1}{RC} \end{pmatrix}}_{A} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

•Se determină polinomul caracteristic al matricei $A, P_A(\lambda)$.

$$\boxed{P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_2)} = \begin{vmatrix} 0 - \lambda & \frac{1}{L} \\ -\frac{1}{C} & -\frac{1}{RC} - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + \frac{1}{RC}\lambda + \frac{1}{LC}$$

$\boxed{P_A(\lambda) = (-1)^2 \left(\lambda^2 - \delta_1 \lambda + \delta_2\right)}$, unde

$\boxed{\delta_1 = \operatorname{Tr} A} = 0 - \frac{1}{RC} = -\frac{1}{RC}; \boxed{\delta_2 = \det A} = \begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{L} \\ -\frac{1}{C} & -\frac{1}{RC} \end{vmatrix} = \frac{1}{LC}.$

<u>modul 1.</u>- cu Teorema 4.3.7, cu rădăcinile ecuaţiei caracteristice, dacă aceasta se poate rezolva.

Se rezolvă ecuaţia caracteristică a matricei A,

$P_A(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 + \frac{1}{RC}\lambda + \frac{1}{LC} = 0 \Rightarrow$

$\left\{ \lambda_{1,2} = \frac{-\frac{1}{RC} \pm \sqrt{\frac{1}{R^2C^2} - \frac{4}{LC}}}{2} = \frac{1}{2RC}\left(-1 \pm \sqrt{1 - 4R^2 \frac{C}{L}}\right) \text{ cu } m(\lambda_{1,2}) = 1 \right. .$

Deoarece

-dacă $\Delta < 0 \Rightarrow$partea reală a rădăcinilor este întotdeauna strict negativă;

-dacă $\Delta = 0 \Rightarrow$rădăcinile sunt strict negative;

-dacă $\Delta > 0 \Rightarrow$rădăcinile sunt strict negative $(1 - 4R^2 \frac{L}{C} < 1)$,

atunci sistemul diferenţial neperturbat este global şi uniform asimptotic stabil.

<u>modul 2.</u> - cu Teorema 4.3.9, Hurwitz, dacă este posibil.

Pentru $n = 2$, se scrie matricea Hurwitz ataşată chiar polinomului caracteristic, $P_A(\lambda)$, care are coeficientul dominant pozitiv. Polinomul caracteristic are

$a_0 = 1 > 0, a_1 = \frac{1}{RC}, a_2 = \frac{1}{LC}.$

Atunci, matricea Hurwitz asociată este

$\boxed{H = \begin{pmatrix} a_1 & a_0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix}} \Rightarrow H = \begin{pmatrix} \frac{1}{RC} & 1 \\ 0 & \frac{1}{LC} \end{pmatrix},$

cu $\Delta_1 = a_1 = \frac{1}{RC} > 0, \Delta_2 = a_1 \cdot a_2 = \frac{1}{RLC^2} > 0.$

Conform criteriului Hurwitz, toate rădăcinile polinomului caracteristic au partea reală strict negativă, deci sistemul diferenţial neperturbat este global şi uniform asimptotic stabil.

c) Se consideră datele fizice $R = 2\Omega$, $L = 8H$, $C = 1F$. Atunci:

$$(SN) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{8} \\ -1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}}_{A} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ \sin t \end{pmatrix}}_{\underline{\mathbf{b}}(t)} \Leftrightarrow \begin{cases} x'(t) = \frac{1}{8} y(t) \\ y'(t) = -x(t) - \frac{1}{2} y(t) + \sin t \end{cases}$$

<u>Etapa 1 :</u> Se determină soluţia generală a SO (sistemul neperturbat) ataşat sistemului SN:

$$(SO) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{8} \\ -\frac{1}{1} & -\frac{1}{1 \cdot 2} \end{pmatrix}}_{A} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x'(t) = 0x(t) + \frac{1}{8} y(t) \\ y'(t) = -x(t) - \frac{1}{2} y(t) \end{cases}$$

<u>Pasul 1 :</u> Se ataşează ecuaţia caracteristică a matricei A şi se rezolvă. Adică se determină valorile proprii în $\mathbb{C}$ ale matricei A, precum şi multiplicitatea lor algebrică.

•Se determină polinomul caracteristic al matricei $A, P_A(\lambda)$.

$\boxed{P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_2)} = \begin{vmatrix} 0 - \lambda & \frac{1}{8} \\ -1 & -\frac{1}{2} - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + \frac{1}{2}\lambda + \frac{1}{8}$

$\boxed{P_A(\lambda) = (-1)^2 \left(\lambda^2 - \delta_1 \lambda + \delta_2\right)}$, unde

$\boxed{\delta_1 = \operatorname{Tr} A} = 0 - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}; \boxed{\delta_2 = \det A} = \begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{8} \\ -1 & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = \frac{1}{8}.$

•Se rezolvă ecuaţia caracteristică a matricei A,

$P_A(\lambda) = 0 \Leftrightarrow (*_{EC})\, \lambda^2 + \frac{1}{2}\lambda + \frac{1}{8} = 0 \Rightarrow$

$\left\{ \lambda_{1,2} = \frac{1}{4}(-1 \pm i) \text{ cu } m(\lambda_{1,2}) = 1 \right. .$

<u>Pasul 2.</u> Se determină un sitem fundamental de soluţii ale SO / o matrice fundamentală a SO.

$\boxed{\text{modul 1.}}$ Nu, deoarece A nu este diagonalizabilă în $\mathbb{R}$.

$\boxed{\text{modul 2.}}$ Pe baza teoriei de la ecuaţii diferenţiale de ordin 2, liniare, omogene, se caută soluţii 2 particulare liniar independente ale SO:

•$\lambda_{1,2} = \frac{-1}{4} \pm \frac{1}{4}i \in \mathbb{R}$ cu $m(\lambda_{1,2}) = 1 \rightsquigarrow$se caută două soluţii particulare l.i. ale SO de forma

O soluţie particulară a SO de forma

$$\varphi(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 e^{-\frac{1}{4}t}\cos\left(\frac{1}{4}t\right) + a_2 e^{-\frac{1}{4}t}\sin\left(\frac{1}{4}t\right) \\ a_3 e^{-\frac{1}{4}t}\cos\left(\frac{1}{4}t\right) + a_4 e^{-\frac{1}{4}t}\sin\left(\frac{1}{4}t\right) \end{pmatrix}.$$

Se determină a_1, a_2, a_3, a_4, impunând ca să se verifice SO

$$\begin{cases} a_1\left(-\frac{1}{4}e^{-\frac{1}{4}t}\cos\frac{1}{4}t - \frac{1}{4}e^{-\frac{1}{4}t}\sin\frac{1}{4}t\right) + a_2\left(-\frac{1}{4}e^{-\frac{1}{4}t}\sin\frac{1}{4}t + \frac{1}{4}e^{-\frac{1}{4}t}\cos\frac{1}{4}t\right) = \\ \qquad = 0\left(a_1 e^{-\frac{1}{4}t}\cos\frac{1}{4}t + a_2 e^{-\frac{1}{4}t}\sin\frac{1}{4}t\right) + \frac{1}{8}\left(a_3 e^{-\frac{1}{4}t}\cos\frac{1}{4}t + a_4 e^{-\frac{1}{4}t}\sin\frac{1}{4}t\right) \\ a_3\left(-\frac{1}{4}e^{-\frac{1}{4}t}\cos\frac{1}{4}t - \frac{1}{4}e^{-\frac{1}{4}t}\sin\frac{1}{4}t\right) + a_4\left(-\frac{1}{4}e^{-\frac{1}{4}t}\sin\frac{1}{4}t + \frac{1}{4}e^{-\frac{1}{4}t}\cos\frac{1}{4}t\right) = \\ \qquad = -\left(a_1 e^{-\frac{1}{4}t}\cos\frac{1}{4}t + a_2 e^{-\frac{1}{4}t}\sin\frac{1}{4}t\right) - \frac{1}{2}\left(a_3 e^{-\frac{1}{4}t}\cos\frac{1}{4}t + a_4 e^{-\frac{1}{4}t}\sin\frac{1}{4}t\right) \end{cases}$$

Se împarte prin $e^{-\frac{1}{4}t}$ şi se identifică coeficienţii funcţiilor liniar independente $\left(\cos\frac{1}{4}t, \sin\frac{1}{4}t\right)$ (au $W = \frac{1}{4}$) :

$$\begin{array}{r} \cos\frac{1}{4}t: \\ \sin\frac{1}{4}t: \\ \cos\frac{1}{4}t: \\ \sin\frac{1}{4}t: \end{array} \begin{cases} -\frac{1}{4}a_1 + \frac{1}{4}a_2 = 0a_1 + \frac{1}{8}a_3 \\ -\frac{1}{4}a_1 - \frac{1}{4}a_2 = 0a_2 + \frac{1}{8}a_4 \\ -\frac{1}{4}a_3 + \frac{1}{4}a_4 = -a_1 - \frac{1}{2}a_3 \\ -\frac{1}{4}a_3 - \frac{1}{4}a_4 = -a_2 - \frac{1}{2}a_4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2a_1 + 2a_2 = a_3 \\ -2a_1 - 2a_2 = a_4 \\ a_3 + a_4 = -4a_1 \\ -a_3 + a_4 = -4a_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = -\alpha - \beta \\ a_2 = \alpha - \beta \\ a_3 = 4\alpha \in \mathbb{R} \\ a_4 = 4\beta \in \mathbb{R} \end{cases}.$$

S-a găsit

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-\alpha - \beta)e^{-\frac{1}{4}t}\cos\frac{1}{4}t + (\alpha - \beta)e^{-\frac{1}{4}t}\sin\frac{1}{4}t \\ 4\alpha e^{-\frac{1}{4}t}\cos\frac{1}{4}t + 4\beta e^{-\frac{1}{4}t}\sin\frac{1}{4}t \end{pmatrix} =$$

$$= \alpha\begin{pmatrix} -e^{-\frac{1}{4}t}\cos\frac{1}{4}t + e^{-\frac{1}{4}t}\sin\frac{1}{4}t \\ 4e^{-\frac{1}{4}t}\cos\frac{1}{4}t \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} -e^{-\frac{1}{4}t}\cos\frac{1}{4}t - e^{-\frac{1}{4}t}\sin\frac{1}{4}t \\ 4e^{-\frac{1}{4}t}\sin\frac{1}{4}t \end{pmatrix}.$$

$$\alpha = 1, \beta = 0 \rightsquigarrow \underline{\mathbf{x}}_1(t) \overset{\text{notez}}{=} \varphi_1(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ y_1(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -e^{-\frac{1}{4}t}\cos\frac{1}{4}t + e^{-\frac{1}{4}t}\sin\frac{1}{4}t \\ 4e^{-\frac{1}{4}t}\cos\frac{1}{4}t \end{pmatrix}.$$

$$\alpha = 0, \beta = 1 \rightsquigarrow \underline{\mathbf{x}}_2(t) \overset{\text{notez}}{=} \varphi_2(t) = \begin{pmatrix} x_2(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -e^{-\frac{1}{4}t}\cos\frac{1}{4}t - e^{-\frac{1}{4}t}\sin\frac{1}{4}t \\ 4e^{-\frac{1}{4}t}\sin\frac{1}{4}t \end{pmatrix}.$$

Din algoritm, se obţin 2 soluţii liniar independente.

$B = (\underline{\mathbf{x}}_1, \underline{\mathbf{x}}_2)$ este un sistem fundamental de soluţii ale SO.

<u>Pasul 3.</u> Soluţia generală a SO este:

-sau $\underline{\mathbf{x}}_o(t; \underline{\mathbf{c}}) = \mathcal{X}(t; \underline{\mathbf{x}}_1, \underline{\mathbf{x}}_2) \cdot \underline{\mathbf{c}} = c_1\underline{\mathbf{x}}_1(t) + c_2\underline{\mathbf{x}}_2(t), t \in \mathbb{R}, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

$$\begin{pmatrix} x_o(t; c_1, c_2) \\ y_o(t; c_1, c_2) \end{pmatrix} = c_1\begin{pmatrix} -e^{-\frac{1}{4}t}\cos\frac{1}{4}t + e^{-\frac{1}{4}t}\sin\frac{1}{4}t \\ 4e^{-\frac{1}{4}t}\cos\frac{1}{4}t \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} -e^{-\frac{1}{4}t}\cos\frac{1}{4}t - e^{-\frac{1}{4}t}\sin\frac{1}{4}t \\ 4e^{-\frac{1}{4}t}\sin\frac{1}{4}t \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} c_1\left(-e^{-\frac{1}{4}t}\cos\frac{1}{4}t + e^{-\frac{1}{4}t}\sin\frac{1}{4}t\right) + c_2\left(e^{-\frac{1}{4}t}\cos\frac{1}{4}t - e^{-\frac{1}{4}t}\sin\frac{1}{4}t\right) \\ c_1\left(4e^{-\frac{1}{4}t}\cos\frac{1}{4}t\right) + c_2\left(4e^{-\frac{1}{4}t}\sin\frac{1}{4}t\right) \end{pmatrix},$$

$t \in \mathbb{R}$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

-sau $\underline{\mathbf{x}}_o(t; \underline{\mathbf{c}}) = e^{tA} \cdot \underline{\mathbf{c}}$−Nu

Se va utiliza în continuare $\mathcal{X}(t; \underline{\mathbf{x}}_1, \underline{\mathbf{x}}_2)$.

<u>Etapa 2 :</u> Se determină o soluţie particulară a SN, notată $\underline{\mathbf{x}}_p(t) = ?$.

<u>**Metoda coeficienţilor nedeterminaţi pentru SN**</u> Deoarece SN are coeficienţi <u>constanţi</u> şi termenul liber având pe coloane combinaţie liniară de <u>cvasipolinoame</u> de acelaşi tip atunci se poate căuta $\underline{\mathbf{x}}_p$ cu Teoremele 4.2.7 şi 4.2.8 din Curs. Într-adevăr,

$\underline{\mathbf{b}}(t)=\begin{pmatrix}0\\ \sin t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}e^{0t}(0\cos t+0\sin t)\\ e^{0t}(0\cos t+1\sin t)\end{pmatrix}.$

Cum $\lambda=0+i$ nu este rădacină caracteristică$\Rightarrow$ $s=0\Rightarrow$ se caută o soluţie particulară pentru SN de forma

$\underline{\mathbf{x}}_p(t)=\begin{pmatrix}x_p(t)\\ y_p(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}e^{0t}(A_1(t)\cos t+B_1(t)\sin t)\\ e^{0t}(A_2(t)\cos t+B_2(t)\sin t)\end{pmatrix},\forall t\in\mathbb{R},$

unde A_i şi B_i sunt polinoame de grad 0. Se determină coeficienţii polinoamelor $A_i(t)=\mu_{0,i}$ şi $B_i(t)=\nu_{0,i}$, $i\in\{1,2\}$, impunând ca, după renotare

$\underline{\mathbf{x}}_p(t)=\begin{pmatrix}x_p(t)\\ y_p(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\cos t+b\sin t\\ c\cos t+d\sin t\end{pmatrix}$ să fie soluţie particulară a SN.

$$\begin{cases}-a\sin t+b\cos t=0(a\cos t+b\sin t)+\frac{1}{8}(c\cos t+d\sin t)+0\\ -c\sin t+d\cos t=-(a\cos t+b\sin t)-\frac{1}{2}(c\cos t+d\sin t)+\sin t\end{cases}$$

Identificăm coeficienţii funcţiilor liniar independente $(\cos t,\sin t)$ (au $W=1$)

$$\begin{array}{l}\cos t:\\ \sin t:\\ \cos t:\\ \sin t:\end{array}\begin{cases}b=\frac{1}{8}c\\ -a=\frac{1}{8}d\\ d=-a-\frac{1}{2}c\\ -c=-b-\frac{1}{2}d+1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b-\frac{1}{8}c=0\\ a+\frac{1}{8}d=0\\ a+\frac{1}{2}c+d=0\\ b-c+\frac{1}{2}d=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-\frac{4}{65}\\ b=-\frac{7}{65}\\ c=-\frac{56}{65}\\ d=\frac{32}{65}\end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c}0&1&-\frac{1}{8}&0&0\\ 1&0&0&\frac{1}{8}&0\\ 1&0&\frac{1}{2}&1&0\\ 0&1&-1&\frac{1}{2}&1\end{array}\right)\overset{Gauss}{\sim}\left(\begin{array}{cccc|c}1&0&0&0&-\frac{4}{65}\\ 0&1&0&0&-\frac{7}{65}\\ 0&0&1&0&-\frac{56}{65}\\ 0&0&0&1&\frac{32}{65}\end{array}\right)$$

De menţionat că s-a folosit SWP pentru calcul. S-a obţinut

$\underline{\mathbf{x}}_p(t)=\begin{pmatrix}\left(-\frac{4}{65}\right)\cos t+\left(-\frac{7}{65}\right)\sin t\\ \left(-\frac{56}{65}\right)\cos t+\left(\frac{32}{65}\right)\sin t\end{pmatrix}$ soluţie particulară a SN.

Etapa 3 : Soluţia generală a sistemului diferenţial neomogen SN este

$\underline{\mathbf{x}}(t;\underline{\mathbf{c}})=\underline{\mathbf{x}}_o(t;\underline{\mathbf{c}})+\underline{\mathbf{x}}_p(t),t\in\mathbb{R},\ \underline{\mathbf{c}}\in\mathcal{M}_{3\times1}(\mathbb{R})\simeq\mathbb{R}^3,$

unde $\underline{\mathbf{x}}_o(t;\underline{\mathbf{c}})$ este soluţia generală SO şi $\underline{\mathbf{x}}_p(t)$ este o soluţie particulară a SN.

Fără condiţii iniţiale, circuitul este descris de:

$$\begin{pmatrix}x(t;c_1,c_2)\\ y(t;c_1,c_2)\end{pmatrix}=$$

$$=c_1\begin{pmatrix}-e^{-\frac{1}{4}t}\cos\frac{1}{4}t+e^{-\frac{1}{4}t}\sin\frac{1}{4}t\\ 4e^{-\frac{1}{4}t}\cos\frac{1}{4}t\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}-e^{-\frac{1}{4}t}\cos\frac{1}{4}t-e^{-\frac{1}{4}t}\sin\frac{1}{4}t\\ 4e^{-\frac{1}{4}t}\sin\frac{1}{4}t\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\left(-\frac{4}{65}\right)\cos t+\left(-\frac{7}{65}\right)\sin t\\ \left(-\frac{56}{65}\right)\cos t+\left(\frac{32}{65}\right)\sin t\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}c_1\left(-e^{-\frac{1}{4}t}\cos\frac{1}{4}t+e^{-\frac{1}{4}t}\sin\frac{1}{4}t\right)+c_2\left(e^{-\frac{1}{4}t}\cos\frac{1}{4}t-e^{-\frac{1}{4}t}\sin\frac{1}{4}t\right)+\left(-\frac{4}{65}\right)\cos t+\left(-\frac{7}{65}\right)\sin t\\ c_1\left(4e^{-\frac{1}{4}t}\cos\frac{1}{4}t\right)+c_2\left(4e^{-\frac{1}{4}t}\sin\frac{1}{4}t\right)+\left(-\frac{56}{65}\right)\cos t+\left(\frac{32}{65}\right)\sin t\end{pmatrix},$$

$t\in\mathbb{R}$, $c_1,c_2\in\mathbb{R}$.

d) Se impun CI: $x(0)=y(0)=0$.în soluţia generală a $SN\Rightarrow$

$$\begin{pmatrix}c_1(1\cdot1+1\cdot0)+c_2(1\cdot1-1\cdot0)+\left(-\frac{4}{65}\right)\cdot1+\left(-\frac{7}{65}\right)\cdot0\\ c_1(4\cdot1\cdot1)+c_2(4\cdot1\cdot0)+\left(-\frac{56}{65}\right)\cdot1+\left(\frac{32}{65}\right)\cdot0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}c_1+c_2-\frac{4}{65}=0\\ 4c_1-\frac{56}{65}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}c_1=-\frac{10}{65}=-\frac{2}{13}\\ c_2=\frac{4}{65}\end{cases}$$

Deci soluţia problemei Cauchy $SN+CI$ este

$$\begin{pmatrix}x(t;c_1,c_2)\\ y(t;c_1,c_2)\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}\frac{14}{65}\left(-e^{-\frac{1}{4}t}\cos\frac{1}{4}t+e^{-\frac{1}{4}t}\sin\frac{1}{4}t\right)+\frac{4}{65}\left(e^{-\frac{1}{4}t}\cos\frac{1}{4}t-e^{-\frac{1}{4}t}\sin\frac{1}{4}t\right)+\left(-\frac{4}{65}\right)\cos t+\left(-\frac{7}{65}\right)\sin t\\ -\frac{10}{65}\left(4e^{-\frac{1}{4}t}\cos\frac{1}{4}t\right)+\frac{4}{65}\left(4e^{-\frac{1}{4}t}\sin\frac{1}{4}t\right)+\left(-\frac{56}{65}\right)\cos t+\left(\frac{32}{65}\right)\sin t\end{pmatrix}=$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{10}{65}e^{-\frac{1}{4}t}\left(\cos\frac{1}{4}t - \sin\frac{1}{4}t\right) - \frac{4}{65}\cos t - \frac{7}{65}\sin t \\ \frac{1}{65}e^{-\frac{1}{4}t}\left(-40\cos\frac{1}{4}t + 16\sin\frac{1}{4}t\right) - \frac{56}{65}\cos t + \frac{32}{65}\sin t \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}$$

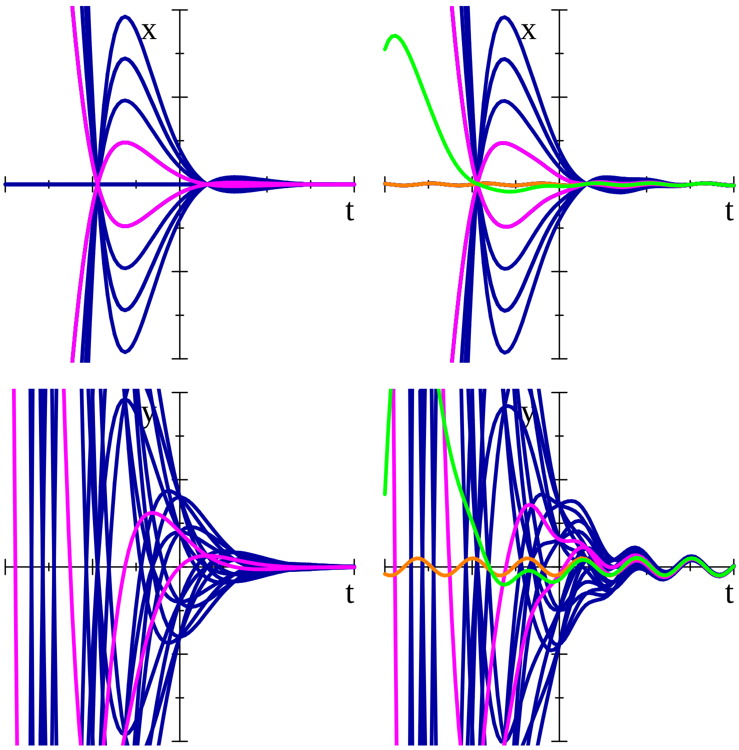
Reprezentând grafic pe x_o şi y_o, alături pe x şi y, pe $\mathbb{I} = \mathbb{R}$ pentru $(c_1, c_2) = (1, 0)$ şi $(c_1, c_2) = (0, 1)$ cu magenta (corespunzătoare soluţiilor particulare din sistemul fundamental) şi pentru

$(c_1, c_2) = (1, 1), (c_1, c_2) = (1, -1), (c_1, c_2) = (-1, 1), (c_1, c_2) = (-1, -1),$

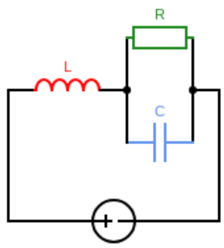
$(c_1, c_2) = (1, 2), (c_1, c_2) = (2, 1), (c_1, c_2) = (-1, 2), (c_1, c_2) = (-2, 1)$

$(c_1, c_2) = (1, -2), (c_1, c_2) = (2, -1), (c_1, c_2) = (-1, -2), (c_1, c_2) = (-2, -1)$

cu albastru, pentru $(c_1, c_2) = (0, 0)$ cu portocaliu soluţia particulară obţinută cu metoda coeficienţilor nedeterminaţi, şi pentru $(c_1, c_2) = \left(-\frac{2}{13}, \frac{4}{65}\right)$ cu verde soluţia problemei Cauchy se obţine:



Exerciţiul 2. Fie sistemul (fizic) electric de mai jos, în care tensiunea electromotoare este E.



a) Să se descrie modelul matematic care modelează sistemul.
b) Să se studieze stabilitatea sistemului neperturbat.
c) Să se determine i_L şi u_C ştiind că $R = 2\Omega$, $L = 16H$, $C = 1F$ şi $E(t) = 2\sin t$.
d) Să se determine i_L şi u_C ştiind în plus că $i_L(0) = u_C(0) = 0$.

Rezolvare. a) Notând cu i_R, i_L, i_C intensitatea curentului pe porţiunile de circuit care conţin rezistorul R, bobina L, respectiv condensatorul C, şi cu u_R, u_L, u_C, tensiunile corespunzătoare rezultă, din Legile lui Kirchoff, Ohm, Faraday, următoarele relaţii:

$$\begin{cases} i_L = i_R + i_C \\ u_R + u_L = u_C + u_L = E \\ u_R = u_C \end{cases} \text{ şi } \begin{cases} u_R = R \cdot i_R \\ u_C = \frac{1}{C} \cdot q \Leftrightarrow u_C' = \frac{1}{C} \cdot i_C \\ u_L = L \cdot i_L' \end{cases}$$

Notând cu $x = i_L$ şi cu $y = u_C$ (simetric faţă de curs, unde s-a folosit metoda eliminării, cu intenţia de ecuaţie pentru u_C), se obţine

$$\begin{cases} i_R = x - Cy' \\ R \cdot (x - Cy') + L \cdot x' = E \\ R \cdot (x - Cy') = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y + Lx' = E \\ RCy' = Rx - y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = \quad -\frac{1}{L}y + \frac{1}{L}E \\ y' = \frac{1}{C}x - \frac{1}{RC}y \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$(SN) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & -\frac{1}{RC} \end{pmatrix}}_{A} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{L}E \\ 0 \end{pmatrix}}_{\underline{\mathbf{b}}}.$$

b) Fie sistemului neperturbat (absenţa tensiunii electromotoare E), adică sistemul omogen asociat:

$$(SO) \begin{cases} x' = \quad -\frac{1}{L}y \\ y' = \frac{1}{C}x - \frac{1}{RC}y \end{cases} \Leftrightarrow (SO) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & -\frac{1}{RC} \end{pmatrix}}_{A} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Este un sistem diferenţial SO care are acelaşi polinom caracteristic ca la Exerciţiul 1, cu aceeaşi concluzie: sistemul diferenţial neperturbat este global şi uniform asimptotic stabil.

c) Se consideră datele fizice $R = 2\Omega$, $L = 16H$, $C = 1F$. Atunci:

$$(SN) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & \frac{-1}{16} \\ \frac{1}{1} & -\frac{1}{2 \cdot 1} \end{pmatrix}}_{A} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{8}\sin t \\ 0 \end{pmatrix}}_{\underline{\mathbf{b}}} \Leftrightarrow \begin{cases} x'(t) = 0x(t) - \frac{1}{16}y(t) + \frac{1}{8}\sin t \\ y'(t) = x(t) - \frac{1}{2}y(t) + 0 \end{cases}.$$

<u>Etapa 1 :</u> Se determină soluţia generală a SO (sistemul neperturbat) ataşat sistemului SN:

$$(SO) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & \frac{-1}{16} \\ \frac{1}{1} & -\frac{1}{2 \cdot 1} \end{pmatrix}}_{A} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x'(t) = 0x(t) - \frac{1}{16}y(t) \\ y'(t) = x(t) - \frac{1}{2}y(t) \end{cases}$$

<u>Pasul 1 :</u> Se ataşează ecuaţia caracteristică a matricei A şi se rezolvă. Adică se determină valorile proprii în $\mathbb{C}$ ale matricei A, precum şi multiplicitatea lor algebrică.

•Se determină polinomul caracteristic al matricei $A, P_A(\lambda)$.

$$\boxed{P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_2)} = \begin{vmatrix} 0 - \lambda & \frac{-1}{16} \\ 1 & -\frac{1}{2} - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + \frac{1}{2}\lambda + \frac{1}{16}$$

$\boxed{P_A(\lambda) = (-1)^2 \left(\lambda^2 - \delta_1\lambda + \delta_2\right)}$, unde

$$\boxed{\delta_1 = \operatorname{Tr} A} = 0 - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}; \boxed{\delta_2 = \det A} = \begin{vmatrix} 0 & \frac{-1}{16} \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = \frac{1}{16}.$$

•Se rezolvă ecuaţia caracteristică a matricei A,

$P_A(\lambda) = 0 \Leftrightarrow (*_{EC})\ \lambda^2 + \frac{1}{2}\lambda + \frac{1}{16} = 0 \Rightarrow$

$\left\{ \lambda_{1,2} = \frac{1}{4}(-1 \pm 0) \text{ cu } m(\lambda_{1,2}) = 1 \right. \Rightarrow \left\{ \lambda_1 = \frac{-1}{4} \text{ cu } m(\lambda_1) = 2 \right.$.

<u>Pasul 2.</u> Se determină un sitem fundamental de soluţii ale SO / o matrice fundamentală a SO.

$\boxed{\text{modul 1.}}$ Nu, deoarece A nu este diagonalizabilă în $\mathbb{R}$.

$\boxed{\text{modul 2.}}$ Pe baza teoriei de la ecuaţii diferenţiale de ordin 2, liniare, omogene, se caută soluţii 2 particulare liniar independente ale SO:

•$\lambda_1 = \frac{-1}{4}$ cu $m(\lambda_1) = 2 \rightsquigarrow$se caută două soluţii particulare l.i. ale SO de forma:

$$\varphi(t)=\begin{pmatrix} x(t)\\ y(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_1e^{-\frac14 t}+a_2te^{-\frac14 t}\\ a_3e^{-\frac14 t}+a_4te^{-\frac14 t}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} (a_1+a_2t)\,e^{-\frac14 t}\\ (a_3+a_4t)\,e^{-\frac14 t}\end{pmatrix}.$$

Se determină a_1,a_2,a_3,a_4, impunând ca x,y să se verifice SO

$$\begin{cases} a_1\left(-\frac14 e^{-\frac14 t}\right)+a_2\left(e^{-\frac14 t}-\frac14 te^{-\frac14 t}\right)=\\ \qquad =0\left(a_1e^{-\frac14 t}+a_2te^{-\frac14 t}\right)-\frac{1}{16}\left(a_3e^{-\frac14 t}+a_4te^{-\frac14 t}\right)\\ a_3\left(-\frac14 e^{-\frac14 t}\right)+a_4\left(e^{-\frac14 t}-\frac14 te^{-\frac14 t}\right)=\\ \qquad =\left(a_1e^{-\frac14 t}+a_2te^{-\frac14 t}\right)-\frac12\left(a_3e^{-\frac14 t}+a_4te^{-\frac14 t}\right)\end{cases}$$

Se împarte prin $e^{-\frac14 t}$ şi se identifică coeficienţii puterilor lui t :

$$\begin{array}{l} t^0:\\ t^1:\\ t^0:\\ t^1:\end{array}\begin{cases} -\frac14 a_1+a_2=0a_1-\frac{1}{16}a_3\\ -\frac14 a_2=0a_2-\frac{1}{16}a_4\\ -\frac14 a_3+a_4=a_1-\frac12 a_3\\ -\frac14 a_4=a_2-\frac12 a_4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} -a_1+4a_2=-\frac14 a_3\\ a_4=4a_2\\ 4a_1-16a_2-a_3=0\\ a_4=4a_2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases} a_1=\alpha+4\beta\\ a_2=\beta\\ a_3=4\alpha\in\mathbb{R}\\ a_4=4\beta\in\mathbb{R}\end{cases}.$$

S-a găsit

$$\begin{pmatrix} x(t)\\ y(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} (\alpha+4\beta)\,e^{-\frac14 t}+(\beta)\,te^{-\frac14 t}\\ (4\alpha)\,e^{-\frac14 t}+(4\beta)\,te^{-\frac14 t}\end{pmatrix}=\alpha\begin{pmatrix} e^{-\frac14 t}\\ 4e^{-\frac14 t}\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix} 4e^{-\frac14 t}+te^{-\frac14 t}\\ 4te^{-\frac14 t}\end{pmatrix}.$$

$$\alpha=0,\beta=1\rightsquigarrow \underline{\mathbf{x}}_1(t)\overset{\text{notez}}{=}\varphi_1(t)=\begin{pmatrix} x_1(t)\\ y_1(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4e^{-\frac14 t}+te^{-\frac14 t}\\ 4te^{-\frac14 t}\end{pmatrix}.$$

$$\alpha=1,\beta=0\rightsquigarrow \underline{\mathbf{x}}_2(t)\overset{\text{notez}}{=}\varphi_2(t)=\begin{pmatrix} x_2(t)\\ y_2(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} e^{-\frac14 t}\\ 4e^{-\frac14 t}\end{pmatrix}.$$

$B=(\underline{\mathbf{x}}_1,\underline{\mathbf{x}}_2)$ este un sistem fundamental de soluţii ale SO.

Pasul 3. Soluţia generală a SO este:

-sau $\underline{\mathbf{x}}_o(t;\underline{\mathbf{c}})=\mathcal{X}(t;\underline{\mathbf{x}}_1,\underline{\mathbf{x}}_2)\cdot\underline{\mathbf{c}}=c_1\underline{\mathbf{x}}_1(t)+c_2\underline{\mathbf{x}}_2(t),t\in\mathbb{R},\ c_1,c_2\in\mathbb{R}.$

$$\begin{pmatrix} x_o(t;c_1,c_2)\\ y_o(t;c_1,c_2)\end{pmatrix}=c_1\begin{pmatrix} 4e^{-\frac14 t}+te^{-\frac14 t}\\ 4te^{-\frac14 t}\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix} e^{-\frac14 t}\\ 4e^{-\frac14 t}\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} c_1\left(4e^{-\frac14 t}+te^{-\frac14 t}\right)+c_2\left(e^{-\frac14 t}\right)\\ c_1\left(4te^{-\frac14 t}\right)+c_2\left(4e^{-\frac14 t}\right)\end{pmatrix},t\in\mathbb{R},\ c_1,c_2\in\mathbb{R}.$$

-sau $\underline{\mathbf{x}}^o(t;\underline{\mathbf{c}})=e^{tA}\cdot\underline{\mathbf{c}}$–Nu

Etapa 2 : Se determină o soluţie particulară a SN, notată $\underline{\mathbf{x}}_p(t)=?$

Metoda coeficienţilor nedeterminaţi pentru SN Deoarece SN are coeficienţi constanţi şi termenul liber având pe coloane combinaţie liniară de cvasipolinoame de acelaşi tip atunci se poate căuta $\underline{\mathbf{x}}_p$ cu Teoremele 4.2.7 şi 4.2.8 din Curs. Într-adevăr,

$$\underline{\mathbf{b}}(t)=\begin{pmatrix} \frac18\sin t\\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} e^{0t}\left(0\cos t+\frac18\sin t\right)\\ e^{0t}\left(0\cos t+0\sin t\right)\end{pmatrix}.$$

Cum $\lambda=0+i$ nu este rădacină caracteristică$\Rightarrow s=0\Rightarrow$ se caută o soluţie particulară pentru SN de forma

$$\underline{\mathbf{x}}_p(t)=\begin{pmatrix} x_p(t)\\ y_p(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} e^{0t}\left(A_1(t)\cos t+B_1(t)\sin t\right)\\ e^{0t}\left(A_2(t)\cos t+B_2(t)\sin t\right)\end{pmatrix},\forall t\in\mathbb{R},$$

unde A_i şi B_i sunt polinoame de grad 0. Se determină coeficienţii polinoamelor $A_i(t)=\mu_{0,i}$ şi $B_i(t)=\nu_{0,i}$, $i\in\{1,2\}$, impunând ca, după renotare

$$\underline{\mathbf{x}}_p(t)=\begin{pmatrix} a\cos t+b\sin t\\ c\cos t+d\sin t\end{pmatrix}\text{ să fie soluţie particulară a } SN.$$

$$\begin{cases} -a\sin t + b\cos t = 0\,(a\cos t + b\sin t) - \frac{1}{16}\,(c\cos t + d\sin t) + \frac{1}{8}\sin t \\ -c\sin t + d\cos t = 1\,(a\cos t + b\sin t) - \frac{1}{2}\,(c\cos t + d\sin t) + 0 \end{cases}$$

Identificăm coeficienţii funcţiilor liniar independente $(\cos t, \sin t)$ (au $W = 1$)

$$\begin{array}{l} \cos t: \\ \sin t: \\ \cos t: \\ \sin t: \end{array} \begin{cases} b = \frac{-1}{16}c \\ -a = \frac{-1}{16}d + \frac{1}{8} \\ d = a - \frac{1}{2}c \\ -c = b - \frac{1}{2}d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \quad b + \frac{1}{16}c \quad = 0 \\ a \quad + \frac{-1}{16}d = \frac{-1}{8} \\ a \quad - \frac{1}{2}c - d = 0 \\ \quad b + c + \frac{-1}{2}d = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{38}{289} \\ b = \frac{1}{289} \\ c = -\frac{16}{289} \\ d = -\frac{30}{289} \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & \frac{1}{16} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \frac{-1}{16} & \frac{-1}{8} \\ 1 & 0 & \frac{-1}{2} & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \frac{-1}{2} & 0 \end{array}\right) \overset{Gauss}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{38}{289} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{289} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{16}{289} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{30}{289} \end{array}\right)$$

De menţionat că s-a folosit SWP pentru calcul. S-a obţinut

$\underline{\mathbf{x}}_p(t) = \begin{pmatrix} \left(-\frac{38}{289}\right)\cos t + \left(\frac{1}{289}\right)\sin t \\ \left(-\frac{16}{289}\right)\cos t + \left(-\frac{30}{289}\right)\sin t \end{pmatrix}$ soluţie particulară a SN.

Etapa 3 : Soluţia generală a sistemului diferenţial neomogen SN este

$\underline{\mathbf{x}}(t;\underline{\mathbf{c}}) = \underline{\mathbf{x}}_o(t;\underline{\mathbf{c}}) + \underline{\mathbf{x}}_p(t)$, $t \in \mathbb{R}$, $\underline{\mathbf{c}} \in \mathcal{M}_{2\times 1}(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^2$,

unde $\underline{\mathbf{x}}_o(t;\underline{\mathbf{c}})$ este soluţia generală SO şi $\underline{\mathbf{x}}_p(t)$ este o soluţie particulară a SN.

Fără condiţii iniţiale, circuitul este descris de

$$\begin{pmatrix} x(t;c_1,c_2) \\ y(t;c_1,c_2) \end{pmatrix} =$$

$$= c_1 \begin{pmatrix} 4e^{-\frac{1}{4}t} + te^{-\frac{1}{4}t} \\ 4te^{-\frac{1}{4}t} \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} e^{-\frac{1}{4}t} \\ 4e^{-\frac{1}{4}t} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \left(-\frac{38}{289}\right)\cos t + \left(\frac{1}{289}\right)\sin t \\ \left(-\frac{16}{289}\right)\cos t + \left(-\frac{30}{289}\right)\sin t \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} c_1\left(4e^{-\frac{1}{4}t} + te^{-\frac{1}{4}t}\right) + c_2\left(e^{-\frac{1}{4}t}\right) + \left(-\frac{38}{289}\right)\cos t + \left(\frac{1}{289}\right)\sin t \\ c_1\left(4te^{-\frac{1}{4}t}\right) + c_2\left(4e^{-\frac{1}{4}t}\right) + \left(-\frac{16}{289}\right)\cos t + \left(-\frac{30}{289}\right)\sin t \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R},\ c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

d) Se impun CI: $x(0) = y(0) = 0$.în soluţia generală a $SN \Rightarrow$

$$\begin{pmatrix} c_1(4\cdot 1 + 0\cdot 1) + c_2(1) + \left(-\frac{38}{289}\right)\cdot 1 + \left(\frac{1}{289}\right)\cdot 0 \\ c_1(4\cdot 0\cdot 1) + c_2(4\cdot 1) + \left(-\frac{16}{289}\right)\cdot 1 + \left(-\frac{30}{289}\right)\cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 4c_1 + c_2 - \frac{38}{289} = 0 \\ 4c_2 - \frac{16}{289} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = \frac{34}{4\cdot 289} \\ c_2 = \frac{4}{289} \end{cases}$$

Deci soluţia problemei Cauchy $SN + CI$ este

$$\begin{pmatrix} x(t;c_1,c_2) \\ y(t;c_1,c_2) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{34}{4\cdot 289}\left(4e^{-\frac{1}{4}t} + te^{-\frac{1}{4}t}\right) + \frac{4}{289}\left(e^{-\frac{1}{4}t}\right) + \left(-\frac{38}{289}\right)\cos t + \left(\frac{1}{289}\right)\sin t \\ \frac{34}{4\cdot 289}\left(4te^{-\frac{1}{4}t}\right) + \frac{4}{289}\left(4e^{-\frac{1}{4}t}\right) + \left(-\frac{16}{289}\right)\cos t + \left(-\frac{30}{289}\right)\sin t \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{38}{289}e^{-\frac{1}{4}t} + \frac{1}{34}te^{-\frac{1}{4}t} - \frac{38}{289}\cos t + \frac{1}{289}\sin t \\ \frac{16}{289}e^{-\frac{1}{4}t} + \frac{2}{17}te^{-\frac{1}{4}t} - \frac{16}{289}\cos t - \frac{30}{289}\sin t \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}$$

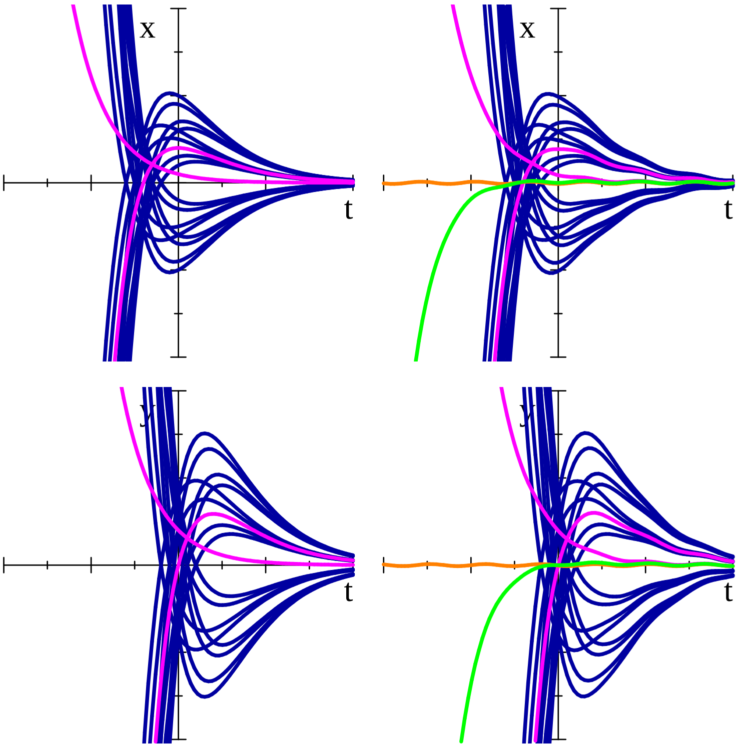
Reprezentând grafic pe x_o şi y_o, alături pe x şi y, pe $\mathbb{I} = \mathbb{R}$ pentru $(c_1, c_2) = (1, 0)$ şi $(c_1, c_2) = (0, 1)$ cu magenta (corespunzătoare soluţiilor particulare din sistemul fundamental) şi pentru

$(c_1, c_2) = (1, 1), (c_1, c_2) = (1, -1), (c_1, c_2) = (-1, 1), (c_1, c_2) = (-1, -1),$

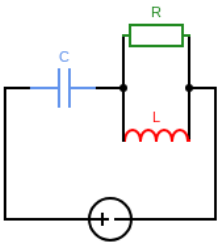
$(c_1, c_2) = (1, 2), (c_1, c_2) = (2, 1), (c_1, c_2) = (-1, 2), (c_1, c_2) = (-2, 1)$

$(c_1, c_2) = (1, -2), (c_1, c_2) = (2, -1), (c_1, c_2) = (-1, -2), (c_1, c_2) = (-2, -1)$

cu albastru, pentru $(c_1, c_2) = (0, 0)$ cu portocaliu soluţia particulară obţinută cu metoda coeficienţilor nedeterminaţi, şi pentru $(c_1, c_2) = \left(\frac{34}{4\cdot 289}, \frac{4}{289}\right)$ cu verde soluţia problemei Cauchy se obţine:



Exerciţiul 3. Fie sistemul (fizic) electric de mai jos, în care tensiunea electromotoare este E.



a) Să se descrie modelul matematic care modelează sistemul.
b) Să se studieze stabilitatea sistemului neperturbat.
c) Să se determine i_L şi u_C ştiind că $R = 2\Omega$, $L = \dfrac{64}{3}H$, $C = 1F$ şi $E(t) = 2\sin t$.
d) Să se determine i_L şi u_C ştiind în plus că $i_L(0) = u_C(0) = 0$.

Rezolvare. **a)** Notând cu i_R, i_L, i_C intensitatea curentului pe porţiunile de circuit care conţin rezistorul R, bobina L, respectiv condensatorul C, şi cu u_R, u_L, u_C, tensiunile corespunzătoare rezultă, din Legile lui Kirchoff, Ohm, Faraday, următoarele relaţii:

$$\begin{cases} i_C = i_R + i_L \\ u_R + u_C = u_C + u_L = E \\ u_R = u_L \end{cases} \text{ şi } \begin{cases} u_R = R \cdot i_R \\ u_C = \frac{1}{C} \cdot q \Leftrightarrow u_C' = \frac{1}{C} \cdot i_C \\ u_L = L \cdot i_L' \end{cases}$$

Notând cu $x = i_L$ şi cu $y = u_C$ (simetric faţă de curs, unde s-a folosit metoda eliminării, cu intenţia de ecuaţie pentru u_C), se obţine

$$\left\{\begin{array}{l} i_R=-x+Cy' \\ y+L\cdot x'=E \\ R\cdot(-x+Cy')=L\cdot x' \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x'=-\frac{1}{L}y+E \\ RCy'=Rx-y+E \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ll} x'= & -\dfrac{1}{L}y+\dfrac{1}{L}E \\ y'=\dfrac{1}{C}x- & \dfrac{1}{RC}y+\dfrac{1}{RC}E \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$(SN)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}'=\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & -\frac{1}{RC} \end{pmatrix}}_{A}\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}+\underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{L}E \\ \dfrac{1}{RC}E \end{pmatrix}}_{\underline{\mathbf{b}}}$$

b) Fie sistemului neperturbat (absenţa tensiunii electromotoare E), adică sistemul omogen asociat:

$$(SO)\left\{\begin{array}{ll} x'= & -\dfrac{1}{L}y \\ y'=\dfrac{1}{C}x- & \dfrac{1}{RC}y \end{array}\right. \Leftrightarrow (SO)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}'=\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & -\frac{1}{RC} \end{pmatrix}}_{A}\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Este un sistem diferenţial SO care are acelaşi polinom caracteristic ca la Exerciţiul 1, cu aceeaşi concluzie: sistemul diferenţial neperturbat este global şi uniform asimptotic stabil.

c) Se consideră datele fizice $R=2\Omega$, $L=\dfrac{64}{3}H$, $C=1F$. Atunci:

$$(SN)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}'=\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & \frac{-3}{64} \\ \frac{1}{1} & -\frac{1}{2\cdot 1} \end{pmatrix}}_{A}\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}+\underbrace{\begin{pmatrix} \frac{3}{32}\sin t \\ \sin t \end{pmatrix}}_{\underline{\mathbf{b}}(t)} \Leftrightarrow (SN)\left\{\begin{array}{ll} x'(t)= & -\frac{3}{64}y(t)+\frac{3}{32}\sin t \\ y'(t)=x(t)- & \frac{1}{2}y(t)+\sin t \end{array}\right.$$

<u>Etapa 1 :</u> Se determină soluţia generală a SO (sistemul neperturbat) ataşat sistemului SN:

$$(SO)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}'=\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & \frac{-3}{64} \\ \frac{1}{1} & -\frac{1}{2\cdot 1} \end{pmatrix}}_{A}\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x'(t)=0x(t)-\frac{3}{64}y(t) \\ y'(t)=x(t)-\frac{1}{2}y(t) \end{array}\right.$$

<u>Pasul 1 :</u> Se ataşează ecuaţia caracteristică a matricei A şi se rezolvă. Adică se determină valorile proprii în $\mathbb{C}$ ale matricei A, precum şi multiplicitatea lor algebrică.

•Se determină polinomul caracteristic al matricei $A, P_A(\lambda)$.

$$\boxed{P_A(\lambda)=\det(A-\lambda I_2)}=\begin{vmatrix} 0-\lambda & \frac{-3}{64} \\ 1 & -\frac{1}{2}-\lambda \end{vmatrix}=\lambda^2+\frac{1}{2}\lambda+\frac{3}{64}$$

$$\boxed{P_A(\lambda)=(-1)^2\left(\lambda^2-\delta_1\lambda+\delta_2\right)}, \text{ unde}$$

$$\boxed{\delta_1=\operatorname{Tr}A}=0-\frac{1}{2}=-\frac{1}{2};\ \boxed{\delta_2=\det A}=\begin{vmatrix} 0 & \frac{-3}{64} \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{vmatrix}=\frac{3}{64}.$$

•Se rezolvă ecuaţia caracteristică a matricei A,

$$P_A(\lambda)=0 \Leftrightarrow (*_{EC})\ \lambda^2+\frac{1}{2}\lambda+\frac{3}{64}=0 \Rightarrow$$

$$\left\{\ \lambda_{1,2}=\frac{1}{4}\left(-1\pm\frac{1}{2}\right)\text{ cu } m(\lambda_{1,2})=1\right. \ \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \lambda_1=\frac{-1}{8}\text{ cu } m(\lambda_1)=1 \\ \lambda_2=\frac{-3}{8}\text{ cu } m(\lambda_2)=1 \end{array}\right..$$

<u>Pasul 2.</u> Se determină un sitem fundamental de soluţii ale SO / o matrice fundamentală a SO.

<u>modul 1.</u> A este diagonalizabilă în $\mathbb{R}$. -temă; se poate chiar şi cu metoda eliminării.

<u>modul 2.</u> Pe baza teoriei de la ecuaţii diferenţiale de ordin 2, liniare, omogene, se caută soluţii 2 particulare liniar independente ale SO:

• $\left\{\begin{array}{l} \lambda_1=\frac{-1}{8}\text{ cu } m(\lambda_1)=1 \\ \lambda_2=\frac{-3}{8}\text{ cu } m(\lambda_2)=1 \end{array}\right.$ $\rightsquigarrow$se caută două soluţii particulare l.i. ale SO de forma:

$$\varphi(t)=\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_1e^{-\frac{1}{8}t}+a_2e^{-\frac{3}{8}t} \\ a_3e^{-\frac{1}{8}t}+a_4e^{-\frac{3}{8}t} \end{pmatrix}.$$

Se determină a_1,a_2,a_3,a_4 (numere, altele decât constantele de indexare), impunând ca să se verifice SO

$$\begin{cases} a_1\left(-\frac{1}{8}e^{-\frac{1}{8}t}\right)+a_2\left(-\frac{3}{8}e^{-\frac{3}{8}t}\right)= \\ \qquad =0\left(a_1e^{-\frac{1}{8}t}+a_2e^{-\frac{3}{8}t}\right)+\frac{-3}{64}\left(a_3e^{-\frac{1}{8}t}+a_4e^{-\frac{3}{8}t}\right) \\ a_3\left(-\frac{1}{8}e^{-\frac{1}{8}t}\right)+a_4\left(-\frac{3}{8}e^{-\frac{3}{8}t}\right)= \\ \qquad =\left(a_1e^{-\frac{1}{8}t}+a_2e^{-\frac{3}{8}t}\right)-\frac{1}{2}\left(a_3e^{-\frac{1}{8}t}+a_4e^{-\frac{3}{8}t}\right) \end{cases}$$

Se identifică coeficienţii funcţiilor liniar independente $e^{-\frac{1}{8}t}$ şi $e^{-\frac{3}{8}t}$

$$\begin{array}{l} e^{-\frac{1}{8}t}: \\ e^{-\frac{3}{8}t}: \\ e^{-\frac{1}{8}t}: \\ e^{-\frac{3}{8}t}: \end{array}\begin{cases} -\frac{1}{8}a_1=0a_1+\frac{-3}{64}a_3 \\ -\frac{3}{8}a_2=0a_2+\frac{-3}{64}a_4 \\ -\frac{1}{8}a_3=a_1-\frac{1}{2}a_3 \\ -\frac{3}{8}a_4=a_2-\frac{1}{2}a_4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8a_1=3a_3 \\ a_4=8a_2 \\ 3a_3=8a_1 \\ a_4=8a_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1=3\alpha \\ a_2=\beta \\ a_3=8\alpha\in\mathbb{R} \\ a_4=8\beta\in\mathbb{R} \end{cases}.$$

S-a găsit

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} (3\alpha)e^{-\frac{1}{8}t}+(\beta)e^{-\frac{3}{8}t} \\ (8\alpha)e^{-\frac{1}{8}t}+(8\beta)e^{-\frac{3}{8}t} \end{pmatrix}=\alpha\begin{pmatrix} 3e^{-\frac{1}{8}t} \\ 8e^{-\frac{1}{8}t} \end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix} 1e^{-\frac{3}{8}t} \\ 8e^{-\frac{3}{8}t} \end{pmatrix}.$$

$$\alpha=1,\beta=0 \rightsquigarrow \underline{\mathbf{x}}_1(t)\overset{\text{notez}}{=}\varphi_1(t)=\begin{pmatrix} x_1(t) \\ y_1(t) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3e^{-\frac{1}{8}t} \\ 8e^{-\frac{1}{8}t} \end{pmatrix}.$$

$$\alpha=0,\beta=1 \rightsquigarrow \underline{\mathbf{x}}_2(t)\overset{\text{notez}}{=}\varphi_2(t)=\begin{pmatrix} x_2(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1e^{-\frac{3}{8}t} \\ 8e^{-\frac{3}{8}t} \end{pmatrix}.$$

Din algoritm, se obţin 2 soluţii liniar independente.

$B=(\underline{\mathbf{x}}_1,\underline{\mathbf{x}}_2)$ este un sistem fundamental de soluţii ale SO.

Pasul 3. Soluţia generală a SO este:

-sau $\underline{\mathbf{x}}_o(t;\underline{\mathbf{c}})=\mathcal{X}(t;\underline{\mathbf{x}}_1,\underline{\mathbf{x}}_2)\cdot\underline{\mathbf{c}}=c_1\underline{\mathbf{x}}_1(t)+c_2\underline{\mathbf{x}}_2(t), t\in\mathbb{R},\ c_1,c_2\in\mathbb{R}$.

$$\begin{pmatrix} x_o(t;c_1,c_2) \\ y_o(t;c_1,c_2) \end{pmatrix}=c_1\begin{pmatrix} 3e^{-\frac{1}{8}t} \\ 8e^{-\frac{1}{8}t} \end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix} 1e^{-\frac{3}{8}t} \\ 8e^{-\frac{3}{8}t} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} c_1\left(3e^{-\frac{1}{8}t}\right)+c_2\left(e^{-\frac{3}{8}t}\right) \\ c_1\left(8e^{-\frac{1}{8}t}\right)+c_2\left(8e^{-\frac{3}{8}t}\right) \end{pmatrix},$$

$t\in\mathbb{R}$, $c_1,c_2\in\mathbb{R}$.

-sau $\underline{\mathbf{x}}_o(t;\underline{\mathbf{c}})=e^{tA}\cdot\underline{\mathbf{c}}$–se poate, temă.

Etapa 2 : Se determină o soluţie particulară a SN, notată $\underline{\mathbf{x}}_p(t)=?$.

$$(SN)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}'=\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & \frac{-3}{64} \\ \frac{1}{1} & -\frac{1}{2\cdot 1} \end{pmatrix}}_{A}\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}+\underbrace{\begin{pmatrix} \frac{3}{32}\sin t \\ \sin t \end{pmatrix}}_{\underline{\mathbf{b}}(t)} \Leftrightarrow (SN)\begin{cases} x'(t)= & -\frac{3}{64}y(t)+\frac{3}{32}\sin t \\ y'(t)=x(t)-\frac{1}{2}y(t)+\sin t \end{cases}$$

Metoda coeficienţilor nedeterminaţi pentru SN Deoarece SN are coeficienţi constanţi şi termenul liber având pe coloane combinaţie liniară de cvasipolinoame de acelaşi tip atunci se poate căuta $\underline{\mathbf{x}}_p$ cu Teoremele 4.2.7 şi 4.2.8 din Curs. Într-adevăr,

$$\underline{\mathbf{b}}(t)=\begin{pmatrix} \frac{3}{64}\sin t \\ \frac{1}{2}\sin t \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} e^{0t}\left(0\cos t+\frac{3}{64}\sin t\right) \\ e^{0t}\left(0\cos t+\frac{1}{2}\sin t\right) \end{pmatrix}.$$

Cum $\lambda=0+i$ nu este rădacină caracteristică$\Rightarrow$ $s=0\Rightarrow$ se caută o soluţie particulară pentru SN de forma

$$\underline{\mathbf{x}}_p(t)=\begin{pmatrix} x_p(t) \\ y_p(t) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} e^{0t}(A_1(t)\cos t+B_1(t)\sin t) \\ e^{0t}(A_2(t)\cos t+B_2(t)\sin t) \end{pmatrix}, \forall t\in\mathbb{R},$$

unde A_i şi B_i sunt polinoame de grad 0. Se determină coeficienţii polinoamelor $A_i(t)=\mu_{0,i}$ şi $B_i(t)=\nu_{0,i}$, $i\in\{1,2\}$, impunând ca,după renotare

$$\underline{\mathbf{x}}_p(t)=\begin{pmatrix} a\cos t+b\sin t \\ c\cos t+d\sin t \end{pmatrix} \text{ să fie soluţie particulară a } SN.$$

$$\begin{cases} -a\sin t + b\cos t = 0\,(a\cos t + b\sin t) + \frac{-3}{64}\,(c\cos t + d\sin t) + \frac{3}{32}\sin t \\ -c\sin t + d\cos t = 1\,(a\cos t + b\sin t) - \frac{1}{2}\,(c\cos t + d\sin t) + \sin t \end{cases}$$

Identificăm coeficienţii funcţiilor liniar independente $(\cos t, \sin t)$ (au $W = 1$)

$$\begin{array}{l} \cos t: \\ \sin t: \\ \cos t: \\ \sin t: \end{array}\begin{cases} b = \frac{-3}{64}c \\ -a = \frac{-3}{64}d + \frac{3}{32} \\ d = a - \frac{1}{2}c \\ -c = b - \frac{1}{2}d + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b + \frac{3}{64}c = 0 \\ a + \frac{-3}{64}d = \frac{-3}{32} \\ a - \frac{1}{2}c - d = 0 \\ b + c + \frac{-1}{2}d = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{366}{4745} \\ b = \frac{192}{4745} \\ c = -\frac{4096}{4745} \\ d = \frac{1682}{4745} \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & \frac{3}{64} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \frac{-3}{64} & \frac{-3}{32} \\ 1 & 0 & \frac{-1}{2} & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \frac{-1}{2} & -1 \end{array}\right) \overset{Gauss}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{366}{4745} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{192}{4745} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{4096}{4745} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1682}{4745} \end{array}\right)$$

De menţionat că s-a folosit SWP pentru calcul. S-a obţinut

$$\underline{\mathbf{x}}_p(t) = \begin{pmatrix} \left(-\frac{366}{4745}\right)\cos t + \left(\frac{192}{4745}\right)\sin t \\ \left(-\frac{4096}{4745}\right)\cos t + \left(\frac{1682}{4745}\right)\sin t \end{pmatrix} \text{ soluţie particulară a } SN.$$

<u>Etapa 3</u> : Soluţia generală a sistemului diferenţial neomogen SN este

$$\underline{\mathbf{x}}(t;\underline{\mathbf{c}}) = \underline{\mathbf{x}}_o(t;\underline{\mathbf{c}}) + \underline{\mathbf{x}}_p(t),\, t \in \mathbb{R},\, \underline{\mathbf{c}} \in \mathcal{M}_{2\times 1}(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^2,$$

unde $\underline{\mathbf{x}}_o(t;\underline{\mathbf{c}})$ este soluţia generală SO şi $\underline{\mathbf{x}}_p(t)$ este o soluţie particulară a SN.

Fără condiţii iniţiale, circuitul este descris de

$$\begin{pmatrix} x(t;c_1,c_2) \\ y(t;c_1,c_2) \end{pmatrix} =$$

$$= c_1\begin{pmatrix} 3e^{-\frac{1}{8}t} \\ 8e^{-\frac{1}{8}t} \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} 1e^{-\frac{3}{8}t} \\ 8e^{-\frac{3}{8}t} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \left(-\frac{366}{4745}\right)\cos t + \left(\frac{192}{4745}\right)\sin t \\ \left(-\frac{4096}{4745}\right)\cos t + \left(\frac{1682}{4745}\right)\sin t \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} c_1\left(3e^{-\frac{1}{8}t}\right) + c_2\left(e^{-\frac{3}{8}t}\right) + \left(-\frac{366}{4745}\right)\cos t + \left(\frac{192}{4745}\right)\sin t \\ c_1\left(8e^{-\frac{1}{8}t}\right) + c_2\left(8e^{-\frac{3}{8}t}\right) + \left(-\frac{4096}{4745}\right)\cos t + \left(\frac{1682}{4745}\right)\sin t \end{pmatrix},\, t \in \mathbb{R},\, c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

d) Se impun CI: $x(0) = y(0) = 0$.în soluţia generală a $SN \Rightarrow$

$$\begin{pmatrix} c_1(3\cdot 1) + c_2(1) + \left(-\frac{366}{4745}\right)\cdot 1 + \left(\frac{192}{4745}\right)\cdot 0 \\ c_1(8\cdot 1) + c_2(8\cdot 1) + \left(-\frac{4096}{4745}\right)\cdot 1 + \left(\frac{1682}{4745}\right)\cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 3c_1 + c_2 - \frac{366}{4745} = 0 \\ 8c_1 + 8c_2 - \frac{4096}{4745} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = -\frac{1}{65} \\ c_2 = \frac{9}{73} \end{cases}$$

Deci soluţia problemei Cauchy $SN + CI$ este

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{65}\cdot\left(3e^{-\frac{1}{8}t}\right) + \frac{9}{73}\cdot\left(e^{-\frac{3}{8}t}\right) + \left(-\frac{366}{4745}\right)\cos t + \left(\frac{192}{4745}\right)\sin t \\ -\frac{1}{65}\cdot\left(8e^{-\frac{1}{8}t}\right) + \frac{9}{73}\cdot\left(8e^{-\frac{3}{8}t}\right) + \left(-\frac{4096}{4745}\right)\cos t + \left(\frac{1682}{4745}\right)\sin t \end{pmatrix}$$

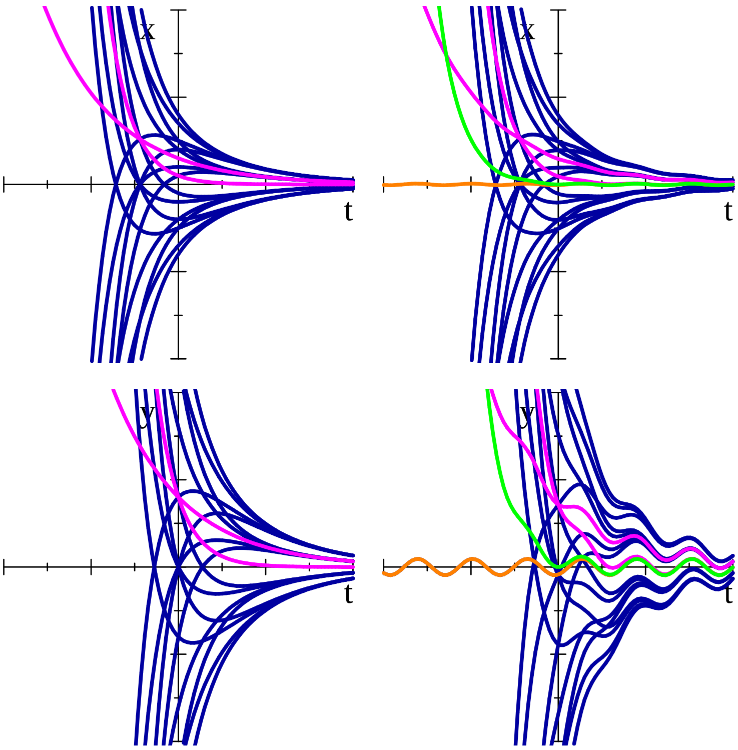
Reprezentând grafic pe x_o şi y_o, alături pe x şi y, pe $\mathbb{I} = \mathbb{R}$ pentru $(c_1, c_2) = (1, 0)$ şi $(c_1, c_2) = (0, 1)$ cu magenta (corespunzătoare soluţiilor particulare din sistemul fundamental) şi pentru

$(c_1, c_2) = (1, 1), (c_1, c_2) = (1, -1), (c_1, c_2) = (-1, 1), (c_1, c_2) = (-1, -1),$

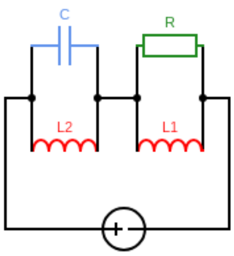
$(c_1, c_2) = (1, 2), (c_1, c_2) = (2, 1), (c_1, c_2) = (-1, 2), (c_1, c_2) = (-2, 1)$

$(c_1, c_2) = (1, -2), (c_1, c_2) = (2, -1), (c_1, c_2) = (-1, -2), (c_1, c_2) = (-2, -1)$

cu albastru, pentru $(c_1, c_2) = (0, 0)$ cu portocaliu soluţia particulară obţinută cu metoda coeficienţilor nedeterminaţi, şi pentru $(c_1, c_2) = \left(-\frac{1}{65}, \frac{9}{73}\right)$ cu verde soluţia problemei Cauchy se obţine:



Exerciţiul 4. Fie sistemul (fizic) electric de mai jos, în care tensiunea electromotoare este E.



a) Să se descrie modelul matematic care modelează sistemul.
b) Să se studieze stabilitatea sistemului neperturbat.
c) Să se determine i_{L_1}, i_{L_2} şi u_C ştiind că $R = \frac{1}{4}\Omega$, $L_1 = \frac{1}{2}H$, $L_2 = \frac{1}{6}H$, $C = 1F$ şi $E(t) = 2\sin t$.
d) Să se determine i_{L_1}, i_{L_2} şi u_C ştiind în plus că $i_{L_1}(0) = i_{L_2}(0) = u_C(0) = 0$.

Rezolvare. a) Notând cu i_R, $i_{L_{1,2}}$, i_C intensitatea curentului pe porţiunile de circuit care conţin rezistorul R, bobina $L_{1,2}$, respectiv condensatorul C, şi cu u_R, $u_{L_{1,2}}$, u_C, tensiunile corespunzătoare rezultă, din Legile lui Kirchoff, Ohm, Faraday, următoarele relaţii:

$$\begin{cases} i_C + i_{L_2} = i_R + i_{L_1} \\ u_C = u_{L_2} \\ u_R = u_{L_1} \\ u_{L_1} + u_{L_2} = E \end{cases} \text{ şi } \begin{cases} u_R = R \cdot i_R \\ u_C = \frac{1}{C} \cdot q \Leftrightarrow u'_C = \frac{1}{C} \cdot i_C \\ u_{L_1} = L \cdot i'_{L_1} \\ u_{L_2} = L \cdot i'_{L_2} \end{cases}$$

Notând cu $x = i_{L_1}, y = i_{L_2}$ şi cu $z = u_C$, se obţine

$$\begin{cases} Cz' + y = i_R + x \\ z = L_2 \cdot y' \\ R \cdot (Cz' + y - x) = L_1 \cdot x' \\ L_1 x' + L_2 y' = E \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} L_1 x' + z = E \\ L_2 \cdot y' = z \\ R \cdot (Cz' + y - x) = E - z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = & -\dfrac{1}{L_1} z + \dfrac{1}{L_1} E \\ y' = & \dfrac{1}{L_2} z \\ z' = \dfrac{1}{C} x - \dfrac{1}{C} y - \dfrac{1}{CR} z + \dfrac{1}{CR} E \end{cases}$$

$$(SN) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}' = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & -\dfrac{1}{L_1} \\ 0 & 0 & \dfrac{1}{L_2} \\ \dfrac{1}{C} & -\dfrac{1}{C} & -\dfrac{1}{CR} \end{pmatrix}}_{A} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} \dfrac{1}{L_1} E \\ 0 \\ \dfrac{1}{CR} E \end{pmatrix}}_{\mathbf{b}}.$$

b) Fie sistemului neperturbat (absenţa tensiunii electromotoare E), adică sistemul omogen asociat:

$$(SO) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}' = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & -\dfrac{1}{L_1} \\ 0 & 0 & \dfrac{1}{L_2} \\ \dfrac{1}{C} & -\dfrac{1}{C} & -\dfrac{1}{CR} \end{pmatrix}}_{A} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = & -\dfrac{1}{L_1} z \\ y' = & \dfrac{1}{L_2} z \\ z' = \dfrac{1}{C} x - \dfrac{1}{C} y - \dfrac{1}{CR} z \end{cases}$$

•Se determină polinomul caracteristic al matricei $A, P_A(\lambda)$.

$$\boxed{P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_3)} = \begin{vmatrix} 0-\lambda & 0 & -\dfrac{1}{L_1} \\ 0 & 0-\lambda & \dfrac{1}{L_2} \\ \dfrac{1}{C} & -\dfrac{1}{C} & -\dfrac{1}{CR} - \lambda \end{vmatrix} = -\left(\lambda^3 + \tfrac{1}{CR}\lambda^2 + \left(\tfrac{1}{CL_1} + \tfrac{1}{CL_2}\right)\lambda\right)$$

$\boxed{P_A(\lambda) = (-1)^3 \left(\lambda^3 - \delta_1 \lambda^2 + \delta_2 \lambda - \delta_3\right)}$, unde δ_i este suma minorilor principali de ordin i ai matricei A, adică

$\boxed{\delta_1 = \operatorname{Tr} A} = 0 + 0 - \frac{1}{RC} = -\frac{1}{RC}$;

$$\delta_2 = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & -\dfrac{1}{L_1} \\ \dfrac{1}{C} & -\dfrac{1}{CR} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & \dfrac{1}{L_2} \\ -\dfrac{1}{C} & -\dfrac{1}{CR} \end{vmatrix} = \tfrac{1}{CL_1} + \tfrac{1}{CL_2}$$

$$\boxed{\delta_3 = \det A} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -\dfrac{1}{L_1} \\ 0 & 0 & \dfrac{1}{L_2} \\ \dfrac{1}{C} & -\dfrac{1}{C} & -\dfrac{1}{CR} \end{vmatrix} = 0.$$

<u>modul 1.</u>- cu Teorema 4.3.7, cu rădăcinile ecuaţiei caracteristice, dacă aceasta se poate rezolva.

Se rezolvă ecuaţia caracteristică a matricei A,

$P_A(\lambda) = 0 \Leftrightarrow -\left(\lambda^3 + \frac{1}{CR}\lambda^2 + \left(\frac{1}{CL_1} + \frac{1}{CL_2}\right)\lambda\right) \Rightarrow$

$$\begin{cases} \lambda_1 = 0 \text{ cu } m(\lambda_1) = 1 \\ \lambda_{2,3} = \dfrac{-\frac{1}{RC} \pm \sqrt{\frac{1}{R^2C^2} - 4\left(\frac{1}{CL_1} + \frac{1}{CL_2}\right)}}{2} = \frac{1}{2RC}\left(-1 \pm \sqrt{1 - 4R^2C\left(\frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2}\right)}\right) \text{ cu } m(\lambda_{2,3}) = 1 \end{cases}.$$

Deoarece

-dacă $\Delta < 0 \Rightarrow$partea reală a rădăcinilor $\lambda_{2,3}$ este întotdeauna strict negativă;

-dacă $\Delta = 0 \Rightarrow$rădăcinile $\lambda_{2,3}$ sunt strict negative;

-dacă $\Delta > 0 \Rightarrow$rădăcinile $\lambda_{2,3}$ sunt strict negative $(1 - 4R^2C\left(\frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2}\right) < 1)$,
atunci, având şi rădăcina $\lambda_1 = 0$, sistemul diferenţial neperturbat este doar uniform stabil.
modul 2. - cu Teorema 4.3.9, Hurwitz, dacă este posibil.

Pentru $n = 3$, se scrie matricea Hurwitz ataşată polinomului caracteristic, de fapt lui $-P_A(\lambda)$, care are aceleaşi rădăcini dar are coeficientul dominant pozitiv, adică

$a_0 = 1 > 0, a_1 = \frac{1}{CR}, a_2 = \frac{1}{CL_1} + \frac{1}{CL_2}, a_3 = 0.$

Atunci, matricea Hurwitz asociată este

$$\boxed{H = \begin{pmatrix} a_1 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ 0 & 0 & a_3 \end{pmatrix}} \Rightarrow H = \begin{pmatrix} \frac{1}{CR} & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{CL_2} + \frac{1}{CL_1} & \frac{1}{CR} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

cu $\Delta_1 = \frac{1}{CR} > 0, \Delta_2 = \begin{vmatrix} \frac{1}{CR} & 1 \\ 0 & \frac{1}{CL_2} + \frac{1}{CL_1} \end{vmatrix} = \frac{1}{CR}\left(\frac{1}{CL_2} + \frac{1}{CL_1}\right) > 0, \Delta_3 = \det H = 0\,(\not> 0)$.

Deci sistemul nu este global şi asimptotic stabil.

c) Se consideră datele fizice $R = \frac{1}{4}\Omega$, $L_1 = \dfrac{1}{2}H, L_2 = \dfrac{1}{6}H$, $C = 1F$. Atunci:

$$(SN)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}' = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 6 \\ 1 & -1 & -4 \end{pmatrix}}_{A} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} 4\sin t \\ 0 \\ 8\sin t \end{pmatrix}}_{\underline{\mathbf{b}}(t)} \Leftrightarrow \begin{cases} x'(t) = & -2z(t) + 4\sin t \\ y'(t) = & 6z(t) \\ z'(t) = x(t) - y(t) - 4z(t) + 8\sin t \end{cases}$$

Etapa 1 : Se determină soluţia generală a SO (sistemul neperturbat) ataşat sistemului SN:

$$(SO)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}' = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 6 \\ 1 & -1 & -4 \end{pmatrix}}_{A} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x'(t) = 0x(t) + 0y(t) - 2z(t) \\ y'(t) = 0x(t) + 0y(t) + 6z(t) \\ z'(t) = 1x(t) - 1y(t) - 4z(t) \end{cases}$$

Pasul 1 : Se ataşează ecuaţia caracteristică a matricei A şi se rezolvă. Adică se determină valorile proprii în $\mathbb{C}$ ale matricei A, precum şi multiplicitatea lor algebrică.

•Se determină polinomul caracteristic al matricei $A, P_A(\lambda)$.

$$\boxed{P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_3)} = \begin{vmatrix} 0-\lambda & 0 & -2 \\ 0 & 0-\lambda & 6 \\ 1 & -1 & -4-\lambda \end{vmatrix} = -\left(\lambda^3 + 4\lambda^2 + 8\lambda\right).$$

$\boxed{P_A(\lambda) = (-1)^3\left(\lambda^3 - \delta_1\lambda^2 + \delta_2\lambda - \delta_3\right)}$, unde δ_i este suma minorilor principali de ordin i ai matricei A, adică

$$\boxed{\delta_1 = \operatorname{Tr} A} = 0 + 0 - 4 = -4; \delta_2 = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 6 \\ -1 & -4 \end{vmatrix} = 8;$$

$$\boxed{\delta_3 = \det A} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 6 \\ 1 & -1 & -4 \end{vmatrix} = 0.$$

•Se rezolvă ecuaţia caracteristică a matricei A,

$P_A(\lambda) = 0 \Leftrightarrow (*_{EC}) - \left(\lambda^3 + 4\lambda^2 + 8\lambda\right) \Rightarrow$

$$\begin{cases} \lambda_1 = 0 \text{ cu cu } m(\lambda_1) = 1 \\ \lambda_{2,3} = \dfrac{-4 \pm \sqrt{16 - 4(6+2)}}{2} = -2 \pm 2i \text{ cu } m(\lambda_{2,3}) = 1 \end{cases}$$

Pasul 2. Se determină un sitem fundamental de soluţii ale SO / o matrice fundamentală a SO.

A nu este diagonalizabilă în $\mathbb{R}$, ci doar în $\mathbb{C}$. Ar fi de utilizat, pentru Metoda cu valori proprii, modul 2, cu mult calcul.

Se rezolvă SO cu metoda eliminării. Se derivează ecuaţia a 3-a din SO şi se înlocuiesc x' şi y' din primele două ecuaţii:

$$\begin{cases} z''(t) = x'(t) - y'(t) - 4z'(t) \Rightarrow \\ z''(t) = (-2z(t)) - (6z(t)) - 4z'(t) \end{cases}$$

S-a obţinut

$(EO)\ z''(t) + 4z'(t) + 8z(t) = 0.$

Deoarece EO are EC $\lambda^2 + 4\lambda + 8 = 0$ cu soluţiile $-2 \pm 2i$ de multiplicitate $1 \Rightarrow$

$z_o(t; c_1, c_2) = c_1 e^{-2t}\cos 2t + c_2 e^{-2t}\sin 2t, t \in \mathbb{R},\ c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$

Dar

$$\begin{cases} x'(t) = -2\left(c_1 e^{-2t}\cos 2t + c_2 e^{-2t}\sin 2t\right) \\ y'(t) = 6\left(c_1 e^{-2t}\cos 2t + c_2 e^{-2t}\sin 2t\right) \end{cases} \mid \int ()\,dt \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x(t) = -2\left(c_1 \frac{-1}{4} e^{-2t}(\cos 2t - \sin 2t) + c_2 \frac{-1}{4} e^{-2t}(\cos 2t + \sin 2t)\right) + c_3 \\ y(t) = 6\left(c_1 \frac{-1}{4} e^{-2t}(\cos 2t - \sin 2t) + c_2 \frac{-1}{4} e^{-2t}(\cos 2t + \sin 2t)\right) + c_3 \end{cases}, t \in \mathbb{R},\ c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}.$$

Soluţia generală a SO este:

$$\begin{pmatrix} x_o(t; c_1, c_2, c_3) \\ y_o(t; c_1, c_2, c_3) \\ z_o(t; c_1, c_2, c_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\left(c_1 \frac{-1}{4} e^{-2t}(\cos 2t - \sin 2t) + c_2 \frac{-1}{4} e^{-2t}(\cos 2t + \sin 2t)\right) + c_3 \\ 6\left(c_1 \frac{-1}{4} e^{-2t}(\cos 2t - \sin 2t) + c_2 \frac{-1}{4} e^{-2t}(\cos 2t + \sin 2t)\right) + c_3 \\ c_1 e^{-2t}\cos 2t + c_2 e^{-2t}\sin 2t \end{pmatrix} =$$

$$= c_1 \begin{pmatrix} -2\left(\frac{-1}{4} e^{-2t}(\cos 2t - \sin 2t)\right) \\ 6\left(\frac{-1}{4} e^{-2t}(\cos 2t - \sin 2t)\right) \\ e^{-2t}\cos 2t \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -2\left(\frac{-1}{4} e^{-2t}(\cos 2t + \sin 2t)\right) \\ 6\left(\frac{-1}{4} e^{-2t}(\cos 2t + \sin 2t)\right) \\ e^{-2t}\sin 2t \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$t \in \mathbb{R},\ c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}.$

Etapa 2 : Se determină o soluţie particulară a SN, notată $\underline{\mathbf{x}}_p(t) = ?$.

Metoda coeficienţilor nedeterminaţi pentru SN Deoarece SN are coeficienţi constanţi şi termenul liber având pe coloane combinaţie liniară de cvasipolinoame de acelaşi tip atunci se poate căuta $\underline{\mathbf{x}}_p$ cu Teoremele 4.2.7 şi 4.2.8 din Curs. Într-adevăr,

$$\underline{\mathbf{b}}(t) = \begin{pmatrix} 4\sin t \\ 0 \\ 8\sin t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{0t}(0\cos t + 4\sin t) \\ e^{0t}(0\cos t + 0\sin t) \\ e^{0t}(0\cos t + 8\sin t) \end{pmatrix}.$$

Cum $\lambda = 0 + i$ nu este rădacină caracteristică$\Rightarrow$ $s = 0 \Rightarrow$ se caută o soluţie particulară pentru SN de forma

$$\underline{\mathbf{x}}_p(t) = \begin{pmatrix} x_p(t) \\ y_p(t) \\ z_p(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{0t}(A_1(t)\cos t + B_1(t)\sin t) \\ e^{0t}(A_2(t)\cos t + B_2(t)\sin t) \\ e^{0t}(A_3(t)\cos t + B_3(t)\sin t) \end{pmatrix}, \forall t \in \mathbb{R},$$

unde A_i şi B_i sunt polinoame de grad 0. Se determină coeficienţii polinoamelor $A_i(t) = \mu_{0,i}$ şi $B_i(t) = \nu_{0,i}$, $i \in \{1, 2, 3\}$, impunând ca, după renotare

$$\underline{\mathbf{x}}_p(t) = \begin{pmatrix} a\cos t + b\sin t \\ c\cos t + d\sin t \\ e\cos t + f\sin t \end{pmatrix}$$ să fie soluţie particulară a SN.

$$\begin{cases} -a\sin t + b\cos t = 0(a\cos t + b\sin t) + 0(c\cos t + d\sin t) - 2(e\cos t + f\sin t) + 4\sin t \\ -c\sin t + d\cos t = 0(a\cos t + b\sin t) + 0(c\cos t + d\sin t) + 6(e\cos t + f\sin t) + 0 \\ -e\sin t + f\cos t = 1(a\cos t + b\sin t) - 1(c\cos t + d\sin t) - 4(e\cos t + f\sin t) + 8\sin t \end{cases}$$

Identificăm coeficienţii funcţiilor liniar independente $(\cos t, \sin t)$ (au $W = 1$)

$$\begin{array}{l}\cos t: \\ \sin t: \\ \cos t: \\ \sin t: \\ \cos t: \\ \sin t:\end{array}\left\{\begin{array}{l} b=-2e \\ -a=-2f+4 \\ d=6e \\ -c=6f \\ f=a-c-4e \\ -e=b-d-4f+8\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} b+2e=0 \\ a-2f=-4 \\ d-6e=0 \\ c+6f=0 \\ a-c-4e-f=0 \\ b-d+e-4f=-8\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} a=-\frac{28}{13} \\ b=-\frac{16}{13} \\ c=-\frac{72}{13} \\ d=\frac{48}{13} \\ e=\frac{8}{13} \\ f=\frac{12}{13}\end{array}\right.$$

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 6 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & -4 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & -4 & -8 \end{array}\right) \overset{Gauss}{\sim} \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{28}{13} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{16}{13} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{72}{13} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{48}{13} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{8}{13} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{12}{13} \end{array}\right)$$

De menţionat că s-a folosit SWP pentru calcul. S-a obţinut

$$\underline{\mathbf{x}}_p(t) = \left(\begin{array}{c} \left(-\frac{28}{13}\right)\cos t + \left(-\frac{16}{13}\right)\sin t \\ \left(-\frac{72}{13}\right)\cos t + \left(\frac{48}{13}\right)\sin t \\ \left(\frac{8}{13}\right)\cos t + \left(\frac{12}{13}\right)\sin t \end{array}\right) \text{ soluţie particulară a } SN.$$

Etapa 3 : Soluţia generală a sistemului diferenţial neomogen SN este

$\underline{\mathbf{x}}(t;\underline{\mathbf{c}}) = \underline{\mathbf{x}}_o(t;\underline{\mathbf{c}}) + \underline{\mathbf{x}}_p(t),\ t\in\mathbb{R},\ \underline{\mathbf{c}}\in\mathcal{M}_{3\times1}(\mathbb{R})\simeq\mathbb{R}^3$,

unde $\underline{\mathbf{x}}_o(t;\underline{\mathbf{c}})$ este soluţia generală SO şi $\underline{\mathbf{x}}_p(t)$ este o soluţie particulară a SN.

Fără condiţii iniţiale, circuitul este descris de:

$$\left(\begin{array}{c} x(t;c_1,c_2,c_3) \\ y(t;c_1,c_2,c_3) \\ z(t;c_1,c_2,c_3) \end{array}\right) =$$

$$= \left(\begin{array}{l} -2\left(c_1\frac{-1}{4}e^{-2t}(\cos 2t-\sin 2t) + c_2\frac{-1}{4}e^{-2t}(\cos 2t+\sin 2t)\right)+c_3 \\ 6\left(c_1\frac{-1}{4}e^{-2t}(\cos 2t-\sin 2t) + c_2\frac{-1}{4}e^{-2t}(\cos 2t+\sin 2t)\right)+c_3 \\ c_1e^{-2t}\cos 2t + c_2e^{-2t}\sin 2t \end{array}\right) + \left(\begin{array}{c} \left(-\frac{28}{13}\right)\cos t + \left(-\frac{16}{13}\right)\sin t \\ \left(-\frac{72}{13}\right)\cos t + \left(\frac{48}{13}\right)\sin t \\ \left(\frac{8}{13}\right)\cos t + \left(\frac{12}{13}\right)\sin t \end{array}\right),$$

$t\in\mathbb{R},\ c_1,c_2,c_3\in\mathbb{R}$.

d) Se impun CI: $x(0)=y(0)=z(0)=0$.în soluţia generală a $SN \Rightarrow$

$$\left(\begin{array}{l} -2\left(c_1\frac{-1}{4}1(1-0)+c_2\frac{-1}{4}1(1+0)\right)+c_3 \\ 6\left(c_1\frac{-1}{4}1(1-0)+c_2\frac{-1}{4}1(1+0)\right)+c_3 \\ c_1 1\cdot 1 + c_2 1\cdot 0 \end{array}\right) + \left(\begin{array}{c} \left(-\frac{28}{13}\right)1+\left(-\frac{16}{13}\right)0 \\ \left(-\frac{72}{13}\right)1+\left(\frac{48}{13}\right)0 \\ \left(\frac{8}{13}\right)1+\left(\frac{12}{13}\right)0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \end{array}\right)$$

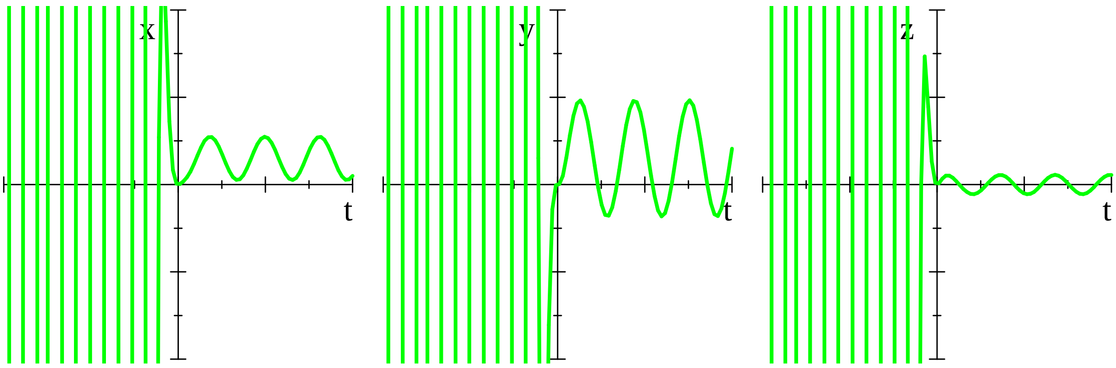
$$\left\{\begin{array}{l} \frac{1}{2}c_1+\frac{1}{2}c_2+c_3-\frac{28}{13}=0 \\ -\frac{3}{2}c_1-\frac{3}{2}c_2+c_3-\frac{72}{13}=0 \\ c_1+\frac{8}{13}=0 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} c_1=-\frac{8}{13} \\ c_2=-\frac{14}{13} \\ c_3=3 \end{array}\right.$$

Deci soluţia problemei Cauchy $SN+CI$ este

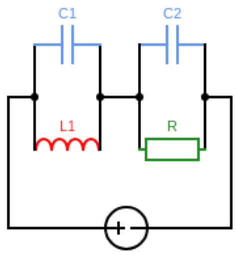
$$\left(\begin{array}{c} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{array}\right) = \left(\begin{array}{l} -2\left(-\frac{8}{13}\frac{-1}{4}e^{-2t}(\cos 2t-\sin 2t) - \frac{14}{13}\frac{-1}{4}e^{-2t}(\cos 2t+\sin 2t)\right)+3 \\ 6\left(-\frac{8}{13}\frac{-1}{4}e^{-2t}(\cos 2t-\sin 2t) - \frac{14}{13}\frac{-1}{4}e^{-2t}(\cos 2t+\sin 2t)\right)+3 \\ -\frac{8}{13}e^{-2t}\cos 2t - \frac{14}{13}e^{-2t}\sin 2t \end{array}\right) +$$

$$+\left(\begin{array}{c} \left(-\frac{28}{13}\right)\cos t + \left(-\frac{16}{13}\right)\sin t \\ \left(-\frac{72}{13}\right)\cos t + \left(\frac{48}{13}\right)\sin t \\ \left(\frac{8}{13}\right)\cos t + \left(\frac{12}{13}\right)\sin t \end{array}\right) =$$

$$= \left(\begin{array}{c} 3-\frac{16}{13}\sin t - \frac{4}{13}e^{-2t}(\cos 2t-\sin 2t) - \frac{7}{13}e^{-2t}(\cos 2t+\sin 2t) - \frac{28}{13}\cos t \\ 3+\frac{48}{13}\sin t - \frac{72}{13}\cos t + \frac{12}{13}e^{-2t}(\cos 2t-\sin 2t) + \frac{21}{13}e^{-2t}(\cos 2t+\sin 2t) \\ \frac{8}{13}\cos t + \frac{12}{13}\sin t - \frac{8}{13}(\cos 2t)e^{-2t} - \frac{14}{13}e^{-2t}\sin 2t \end{array}\right)$$



Exerciţiul 5. Fie sistemul (fizic) electric de mai jos, în care tensiunea electromotoare este E.



a) Să se descrie modelul matematic care modelează sistemul.
b) Să se studieze stabilitatea sistemului neperturbat.

Rezolvare. **a)** Notând cu $i_R, u_R, i_{L_1}, u_{L_1}, i_{L_2}, u_{L_2} i_C, u_C$ intensitatea curentului şi tensiunea pe fiecare ramură a circuitului rezultă, din Legile lui Kirchoff, Ohm, Faraday, următoarele relaţii:

$$\begin{cases} i_{C_1} + i_{L_1} = i_{C_2} + i_R \\ u_{C_1} = u_{L_1} \\ u_{C_2} = u_R \\ u_{L_1} + u_R = u_{C_1} + u_{C_2} = E \end{cases} \quad \text{şi} \quad \begin{cases} u_R = R \cdot i_R \\ u_C = \frac{1}{C} \cdot q \Leftrightarrow u'_C = \frac{1}{C} \cdot i_C \\ u_L = L \cdot i'_L \end{cases}$$

Notând cu $x = u_{C_1}, y = u_{C_2}$ şi cu $z = i_{L_1} = i_L$, se obţine

$$\begin{cases} x = L \cdot z' \\ y = R \cdot (C_1 \cdot x' + z - C_2 y') \\ Lz' + y = x + y = E \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y' = E' - x' \\ y = R \cdot (C_1 \cdot x' + z - C_2 y') \\ z' = \frac{1}{L} \cdot x \end{cases}$$

Din $x + y = E \Rightarrow x' + y' = E'$ şi atunci

$$y = R \cdot (C_1 \cdot x' + z - C_2 (E' - x'))$$
$$y = C_1 R x' + Rz - C_2 R E' + C_2 R x'$$
$$x' = \frac{1}{R(C_1+C_2)} y - \frac{1}{C_1+C_2} z + \frac{C_2}{C_1+C_2} E'$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x' = & \frac{1}{R(C_1+C_2)} y - \frac{1}{C_1+C_2} z + \frac{C_2}{C_1+C_2} E' \\ y' = & -\frac{1}{R(C_1+C_2)} y + \frac{1}{C_1+C_2} z + \frac{C_1}{C_1+C_2} E' \\ z' = \frac{1}{L} \cdot x \end{cases}$$

$$(SN) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}' = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{R(C_1+C_2)} & -\frac{1}{C_1+C_2} \\ 0 & -\frac{1}{R(C_1+C_2)} & +\frac{1}{C_1+C_2} \\ \frac{1}{L} & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{A} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{C_2}{C_1+C_2} E' \\ \frac{C_1}{C_1+C_2} E' \\ 0 \end{pmatrix}}_{\underline{\mathbf{b}}}.$$

b) Fie sistemului neperturbat (absenţa tensiunii electromotoare E), adică sistemul omogen asociat:

$$(SO)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}' = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{R(C_1+C_2)} & -\frac{1}{C_1+C_2} \\ 0 & -\frac{1}{R(C_1+C_2)} & +\frac{1}{C_1+C_2} \\ \dfrac{1}{L} & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{A} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

•Se determină polinomul caracteristic al matricei $A, P_A(\lambda)$.

$$\boxed{P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_3)} = \begin{vmatrix} 0-\lambda & \frac{1}{R(C_1+C_2)} & -\frac{1}{C_1+C_2} \\ 0 & -\frac{1}{R(C_1+C_2)} - \lambda & +\frac{1}{C_1+C_2} \\ \dfrac{1}{L} & 0 & 0-\lambda \end{vmatrix} = -\left(\lambda^3 + \frac{1}{R(C_1+C_2)}\lambda^2 + \frac{1}{L(C_1+C_2)}\lambda\right)$$

$\boxed{P_A(\lambda) = (-1)^3\left(\lambda^3 - \delta_1\lambda^2 + \delta_2\lambda - \delta_3\right)}$, unde δ_i este suma minorilor principali de ordin i ai matricei A, adică

$\boxed{\delta_1 = \operatorname{Tr} A} = 0 - \frac{1}{R(C_1+C_2)} + 0 = -\frac{1}{R(C_1+C_2)}$;

$$\delta_2 = \begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{R(C_1+C_2)} \\ 0 & -\frac{1}{R(C_1+C_2)} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & -\frac{1}{C_1+C_2} \\ \dfrac{1}{L} & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -\frac{1}{R(C_1+C_2)} & +\frac{1}{C_1+C_2} \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{L(C_1+C_2)}$$

$$\boxed{\delta_3 = \det A} = \begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{R(C_1+C_2)} & -\frac{1}{C_1+C_2} \\ 0 & -\frac{1}{R(C_1+C_2)} & +\frac{1}{C_1+C_2} \\ \dfrac{1}{L} & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

<u>modul 1.</u>- cu Teorema 4.3.7, cu rădăcinile ecuaţiei caracteristice, dacă aceasta se poate rezolva.

Se rezolvă ecuaţia caracteristică a matricei A,

$P_A(\lambda) = 0 \Leftrightarrow -\left(\lambda^3 + \frac{1}{R(C_1+C_2)}\lambda^2 + \frac{1}{L(C_1+C_2)}\lambda\right) \Rightarrow$

$$\begin{cases} \lambda_1 = 0 \text{ cu } m(\lambda_1) = 1 \\ \lambda_{2,3} = \dfrac{-\frac{1}{R(C_1+C_2)} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{R(C_1+C_2)}\right)^2 - 4\left(\frac{1}{L(C_1+C_2)}\right)}}{2} = \dfrac{1}{2R(C_1+C_2)}\left(-1 \pm \sqrt{1 - \frac{4R^2(C_1+C_2)}{L}}\right) \text{ cu } m(\lambda_{2,3}) = 1 \end{cases}.$$

Deoarece

-dacă $\Delta < 0 \Rightarrow$partea reală a rădăcinilor $\lambda_{2,3}$ este întotdeauna strict negativă;

-dacă $\Delta = 0 \Rightarrow$rădăcinile $\lambda_{2,3}$ sunt strict negative;

-dacă $\Delta > 0 \Rightarrow$rădăcinile $\lambda_{2,3}$ sunt strict negative $(1 - \frac{4R^2(C_1+C_2)}{L} < 1)$,

atunci, având şi rădăcina $\lambda_1 = 0$, sistemul diferenţial neperturbat este doar uniform stabil.

<u>modul 2.</u> - cu Teorema 4.3.9, Hurwitz, dacă este posibil.

Pentru $n = 3$, se scrie matricea Hurwitz ataşată polinomului caracteristic, de fapt lui $-P_A(\lambda)$, care are aceleaşi rădăcini dar are coeficientul dominant pozitiv, adică

$a_0 = 1 > 0, a_1 = \frac{1}{R(C_1+C_2)}, a_2 = \frac{1}{L(C_1+C_2)}, a_3 = 0.$

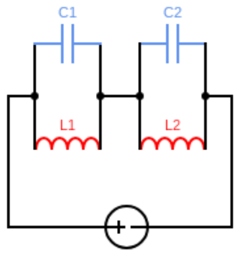
Atunci, matricea Hurwitz asociată este

$$\boxed{H = \begin{pmatrix} a_1 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ 0 & 0 & a_3 \end{pmatrix}} \Rightarrow H = \begin{pmatrix} \frac{1}{R(C_1+C_2)} & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{L(C_1+C_2)} & \frac{1}{R(C_1+C_2)} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

cu $\Delta_1 = \frac{1}{R(C_1+C_2)} > 0, \Delta_2 = \begin{vmatrix} \frac{1}{R(C_1+C_2)} & 1 \\ 0 & \frac{1}{L(C_1+C_2)} \end{vmatrix} = \frac{1}{R(C_1+C_2)}\frac{1}{L(C_1+C_2)} > 0, \Delta_3 = \det H = 0.$

Deci sistemul nu este global şi asimptotic stabil.

Exerciţiul 6. Fie sistemul (fizic) electric de mai jos, în care tensiunea electromotoare este E.



a) Să se descrie modelul matematic care modelează sistemul.
b) Să se studieze stabilitatea sistemului neperturbat.

Rezolvare. a) Notând cu $i_R, u_R, i_L, u_L, i_C, u_C$ intensitatea curentului şi tensiunea pe fiecare ramură a circuitului rezultă, din Legile lui Kirchoff, Ohm, Faraday, următoarele relaţii:

$$\begin{cases} i_C = i_R = i_L = x \\ u_R + u_C + u_L = E \end{cases} \text{ şi } \begin{cases} u_R = R \cdot i_R \\ u_C = \frac{1}{C} \cdot q \Leftrightarrow u_C' = \frac{1}{C} \cdot i_C \\ u_L = L \cdot i_L' \end{cases}$$

Notând cu $x = i_L$ şi cu $y = u_C$, se obţine

$$\begin{cases} x = cy' \\ Rx + y + Lx' = E \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = -\dfrac{R}{L}x - \dfrac{1}{L}y + \dfrac{E}{L} \\ y' = \dfrac{1}{C}x \end{cases}$$

$$(SN) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \underbrace{\begin{pmatrix} -\frac{R}{L} & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & 0 \end{pmatrix}}_{A} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{E}{L} \\ 0 \end{pmatrix}}_{\underline{\mathbf{b}}}.$$

b) Fie sistemului neperturbat (absenţa tensiunii electromotoare E), adică sistemul omogen asociat:

$$(SO) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \underbrace{\begin{pmatrix} -\frac{R}{L} & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & 0 \end{pmatrix}}_{A} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

•Se determină polinomul caracteristic al matricei $A, P_A(\lambda)$.

$$\boxed{P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_2)} = \begin{vmatrix} -\frac{R}{L} - \lambda & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & 0 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + \frac{R}{L}\lambda + \frac{1}{LC}.$$

$$\boxed{P_A(\lambda) = (-1)^2 \left(\lambda^2 - \delta_1 \lambda + \delta_2\right)}, \text{ unde}$$

$$\boxed{\delta_1 = \operatorname{Tr} A} = -\frac{R}{L} + 0 = -\frac{R}{L}; \boxed{\delta_2 = \det A} = \begin{vmatrix} -\frac{R}{L} & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{LC}.$$

<u>modul 1.</u>- cu Teorema 4.3.7, cu rădăcinile ecuaţiei caracteristice, dacă aceasta se poate rezolva.

Se rezolvă ecuaţia caracteristică a matricei A,

$P_A(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 + \frac{R}{L}\lambda + \frac{1}{LC} = 0 \Rightarrow$

$$\left\{ \lambda_{1,2} = \frac{-\frac{R}{L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{L}\right)^2 - 4\frac{1}{LC}}}{2} = \frac{R}{2L}\left(-1 \pm \sqrt{1 - \frac{4L}{R^2C}}\right) \text{ cu } m(\lambda_{1,2}) = 1 \right..$$

Deoarece

-dacă $\Delta < 0 \Rightarrow$partea reală a rădăcinilor este întotdeauna strict negativă;

-dacă $\Delta = 0 \Rightarrow$rădăcinile sunt strict negative;

-dacă $\Delta > 0 \Rightarrow$rădăcinile sunt strict negative $(1 - \frac{4L}{R^2C} < 1)$,

atunci sistemul diferenţial neperturbat este global şi uniform asimptotic stabil.

modul 2. - cu Teorema 4.3.9, Hurwitz, dacă este posibil.

Pentru $n = 2$, se scrie matricea Hurwitz ataşată chiar polinomului caracteristic, $P_A(\lambda)$, care are coeficientul dominant pozitiv. Polinomul caracteristic are

$a_0 = 1 > 0, a_1 = \frac{R}{L}, a_2 = \frac{1}{LC}$.

Atunci, matricea Hurwitz asociată este

$$\boxed{H = \begin{pmatrix} a_1 & a_0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix}} \Rightarrow H = \begin{pmatrix} \frac{R}{L} & 1 \\ 0 & \frac{1}{LC} \end{pmatrix},$$

cu $\Delta_1 = a_1 = \frac{R}{L} > 0, \Delta_2 = a_1 \cdot a_2 = \frac{R}{L}\frac{1}{LC} > 0$.

Conform criteriului Hurwitz, toate rădăcinile polinomului caracteristic au partea reală strict negativă, deci sistemul diferenţial neperturbat este global şi uniform asimptotic stabil.