

CURS NR. 1

Matematici Speciale, AIA

ELEMENTE DE TEORIA CÂMPURILOR

1. Câmp scalar: suprafețe de nivel, derivată după direcție, gradient

Definiția 1.1. Se numește *câmp scalar* o funcție $\varphi : D \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, unde D este un domeniu din $\mathbb{R}^3$.

a) Se numește *mulțime de nivel* / *suprafață de nivel* / *suprafață echipotențială* a câmpului scalar φ locul geometric al punctelor $(x, y, z) \in D$ care prin φ sunt duse într-o valoare constantă $c_0 \in \mathbb{R}$.

b) *Ecuția suprafeței de nivel* este

$$\varphi(x, y, z) = c_0, (x, y, z) \in D.$$

c) *Ecuția suprafeței de nivel care trece prin punctul* (x_0, y_0, z_0) este

$$\varphi(x, y, z) = \varphi(x_0, y_0, z_0), (x, y, z) \in D.$$

Comentariul 1.1. Condiția ca D să fie domeniu (mulțime deschisă și conexă) se impune pentru definirea riguroasă a unor condiții de regularitate asupra câmpului (de continuitate, de clasă $\mathcal{C}^1$).

Se notează cu P punctul din $D \subseteq \mathbb{R}^3$ de coordonate (x, y, z) și se scrie $\varphi(P)$ în loc de $\varphi(x, y, z)$, mai ales la punerea în evidență a unor interpretări fizice, în care dependența este legată de punct și mai puțin de coordonatele sale. Ecuția suprafeței de nivel devine

$$\varphi(P) = c_0, P \in D \text{ sau, dacă suprafața trece prin } P_0, \varphi(P) = \varphi(P_0), P \in D.$$

Observația 1.1. Din Definiția 1.1 se poate deduce:

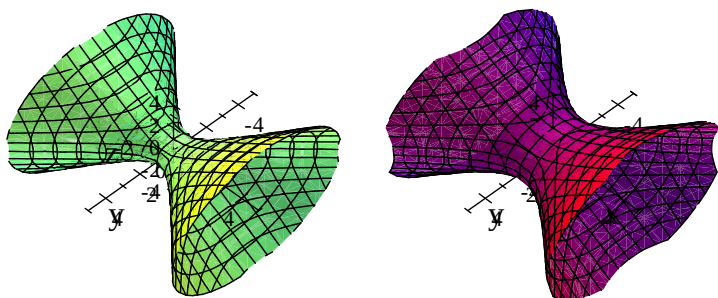
a) Printr-un punct P din D trece o singură suprafață de nivel (un c).

b) Două suprafețe de nivel fie coincid (același c), fie nu se intersectează ($c_1 \neq c_2$).

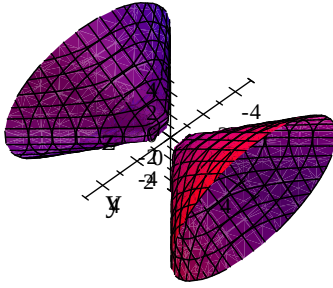
Exemplul 1.1. a) Fie $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $\varphi(P) = \varphi(x, y, z) = x^2 - y^2 + z^2$ un câmp scalar.

Suprafețele de nivel sunt de ecuație $x^2 - y^2 + z^2 = c, c \in \mathbb{R}$.

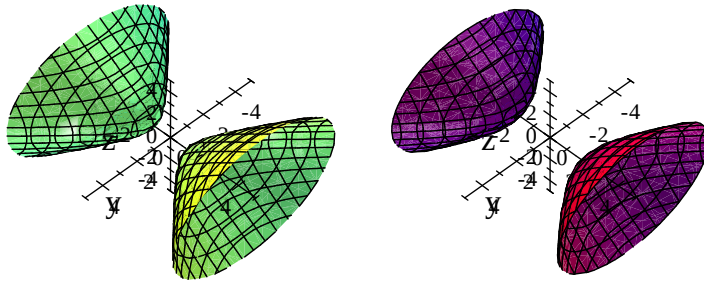
Pentru $c = 1$ și $c = 4$, suprafețele $x^2 - y^2 + z^2 = 1$ și $x^2 - y^2 + z^2 = 4$ sunt hiperboloizii cu o pânză:



Pentru $c = 0$, suprafața $x^2 - y^2 + z^2 = 0$ este conul pătratic:



Pentru $c = -1$ și $c = -4$, suprafețele $x^2 - y^2 + z^2 = -1$ și $x^2 - y^2 + z^2 = -4$ sunt hiperboloizii cu două pânze:



Se observă că au loc afirmațiile din Observația 1.1. ("matrioska", "foi de ceapă")

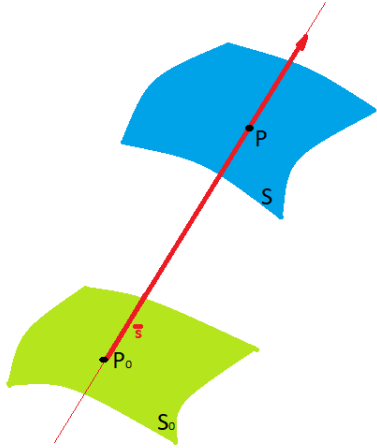
b) Fie P un punct dintr-un domeniu D din spațiu. Se poate defini $\varphi(P)$ drept *temperatura* nevariind în timp (sau *presiunea*, sau *umiditatea*) măsurată în acel punct, într-un sistem de unități convenabil ales. În cazul în care câmpul scalar este al temperaturilor, suprafețele de nivel se numesc *izoterme*; în cazul în care este al presiunilor, se numesc *izobare*.

Se va studia viteza de variație a unui câmp scalar φ după o direcție dată, în vecinătatea unui punct dat, prin similitudine cu viteza de variație a unei funcții $f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, a cărei monotonie se studia pe baza derivatei.

Definiția 1.2. Fie S_0 o suprafață de nivel a câmpului scalar φ care trece prin punctul P_0 și fie un versor liber $\vec{s}$, reprezentat cu originea în P_0 .

Fie S o suprafață de nivel a câmpului scalar φ , vecină cu S_0 . Fie P punctul în care versorul $\vec{s}$ (direcția versorului) intersectează suprafața de nivel S .

Dacă Δ_s este variația lungimii (mărimea deplasării) pe direcția lui $\vec{s}$, considerată cu $+$ în sensul lui $\vec{s}$ și cu $-$ în sensul opus lui $\vec{s}$, atunci $\overrightarrow{P_0P} = \Delta_s \vec{s}$.



Se numește *derivata câmpului scalar φ după direcția versorului $\vec{s}$ în punctul P_0* , numărul

$$\lim_{\Delta_s \rightarrow 0} \frac{\varphi(P) - \varphi(P_0)}{\Delta_s} \stackrel{\text{not.}}{=} \frac{d\varphi}{d\vec{s}}(P_0), \quad (1)$$

ori de câte ori această limită există și este finită.

Observația 1.2.

a) Dacă $\frac{d\varphi}{d\vec{s}}(P_0) > 0$, atunci câmpul scalar φ crește într-o vecinătate a lui P_0 după direcția și sensul lui $\vec{s}$.

b) Dacă $\frac{d\varphi}{d\vec{s}}(P_0) < 0$, atunci câmpul scalar φ descrește într-o vecinătate a lui P_0 după direcția și sensul lui $\vec{s}$.

Observația 1.3. Conform cursului de Analiză Matematică,

-dacă $\vec{s} = \vec{i}$, atunci $\frac{d\varphi}{d\vec{i}}(P_0) = \frac{\partial \varphi}{\partial x}(P_0)$;

-dacă $\vec{s} = \vec{j}$, atunci $\frac{d\varphi}{d\vec{j}}(P_0) = \frac{\partial \varphi}{\partial y}(P_0)$;

-dacă $\vec{s} = \vec{k}$, atunci $\frac{d\varphi}{d\vec{k}}(P_0) = \frac{\partial \varphi}{\partial z}(P_0)$.

Teorema 1.1. (expresia derivatei după o direcție în coordonate carteziene).

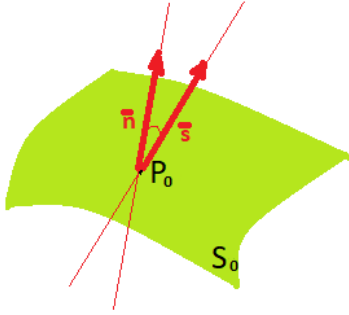
Fie $\varphi : D \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $\varphi \in \mathcal{C}^1(D)$. Atunci φ admite derivate după orice direcție $\vec{s}$ în orice $P_0 \in D$. În plus, dacă $\vec{s} = \alpha \vec{i} + \beta \vec{j} + \gamma \vec{k}$, $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ este versor, atunci

$$\frac{d\varphi}{d\vec{s}}(P_0) = \alpha \frac{\partial \varphi}{\partial x}(P_0) + \beta \frac{\partial \varphi}{\partial y}(P_0) + \gamma \frac{\partial \varphi}{\partial z}(P_0). \quad (2)$$

Teorema 1.2. (expresie a derivatei după o direcție).

Fie $\varphi : D \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $\varphi \in \mathcal{C}^1(D)$ și $P_0 \in D$. Fie $\vec{n}$ versorul normalei la suprafața de nivel S_0 în punctul P_0 . Atunci, pentru orice $\vec{s}$ -un alt versor cu originea în P_0 , cu $\theta = (\widehat{\vec{n}}, \widehat{\vec{s}})$,

$$\frac{d\varphi}{d\vec{s}}(P_0) = \frac{d\varphi}{d\vec{n}}(P_0) \cos \theta \quad (3)$$



Observația 1.4. a) Din Teorema 1.1, expresia derivatei lui φ după direcția lui $\vec{s}$ reprezintă produsul scalar între vectorul

$$\vec{n} = \frac{\partial \varphi}{\partial x}(P_0) \vec{i} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}(P_0) \vec{j} + \frac{\partial \varphi}{\partial z}(P_0) \vec{k},$$

normal la suprafața de nivel a câmpului φ prin punctul P_0 și versorul $\vec{s}$, adică

$$\boxed{\frac{d\varphi}{d\vec{s}}(P_0) = \vec{n} \cdot \vec{s}.}$$

b) Dacă $\vec{I} = \alpha \vec{i} + \beta \vec{j} + \gamma \vec{k}$, $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ nu este versor, atunci, în ipotezele Teoremei 1.1, derivata după direcția versorului lui $\vec{I}$, $\vec{s} = \frac{1}{\|\vec{I}\|} \vec{I}$, este:

$$\frac{d\varphi}{d\vec{s}}(P_0) = \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}} \frac{\partial \varphi}{\partial x}(P_0) + \frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}} \frac{\partial \varphi}{\partial y}(P_0) + \frac{\gamma}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}} \frac{\partial \varphi}{\partial z}(P_0).$$

c) Dintre toate direcțiile cu originea în P_0 , **direcția în raport cu care derivata lui φ este maximă este direcția normalei.**

$$\text{Într-adevăr, } \left\| \frac{d\varphi}{d\vec{s}}(P_0) \right\| = \max \Leftrightarrow |\cos \theta| = \max = 1$$

Pentru că $\vec{n}$ este fixat $\Rightarrow \cos \theta = \pm 1 \Leftrightarrow [\theta = 0 \text{ sau } \theta = \pi] \Leftrightarrow \vec{n}$ și $\vec{s}$ au aceeași direcție.

Exemplul 1.2. Fie

câmpul scalar $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $\varphi(P) = 2x^2 - 4xyz + e^z$,

punctul $P_0(1, 0, -2)$,

vectorul $\vec{I} = \vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k}$.

Să se determine derivata câmpului scalar φ în P_0 după direcția vectorului versor al lui $\vec{I}$, $\frac{d\varphi}{d\vec{s}}(P_0)$.

Să se studieze dacă într-o vecinătate a punctului P_0 , câmpul scalar φ crește sau descrește după direcția și sensul lui $\vec{s}$.

Să se scrie ecuația suprafeței de nivel pe care se află P_0 .

Rezolvare. $\|\vec{I}\| = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 3^2} = \sqrt{14} \Rightarrow \vec{s} = \frac{1}{\sqrt{14}} \vec{i} - \frac{2}{\sqrt{14}} \vec{j} + \frac{3}{\sqrt{14}} \vec{k}$.

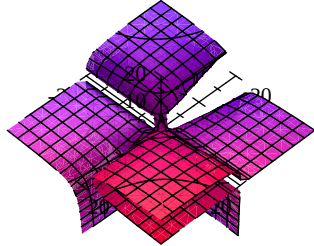
$\varphi \in C^1(\mathbb{R}^3)$, cu $\frac{\partial \varphi}{\partial x}(P) = 4x - 4yz$; $\frac{\partial \varphi}{\partial y}(P) = -4xz$; $\frac{\partial \varphi}{\partial z}(P) = -4xy + e^z$;

Conform (2) $\Rightarrow$

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi}{d\vec{s}}(P_0) &= \frac{1}{\sqrt{14}} \frac{\partial \varphi}{\partial x}(1, 0, -2) - \frac{2}{\sqrt{14}} \frac{\partial \varphi}{\partial y}(1, 0, -2) + \frac{3}{\sqrt{14}} \frac{\partial \varphi}{\partial z}(1, 0, -2) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{14}} (4 \cdot 1 - 4 \cdot 0 \cdot (-2)) - \frac{2}{\sqrt{14}} ((-4) \cdot 1 \cdot (-2)) + \frac{3}{\sqrt{14}} ((-4) \cdot 1 \cdot 0 + e^{-2}) = \\ &= \frac{-12}{\sqrt{14}} + \frac{3e^{-2}}{\sqrt{14}}. \end{aligned}$$

Deoarece $\frac{d\varphi}{d\vec{s}}(P_0) = \frac{-12 + 3e^{-2}}{\sqrt{14}} < 0 \Rightarrow$ câmpul scalar descrește într-o vecinătate a P_0 după direcția și sensul lui $\vec{s}$.

Ecuția suprafeței de nivel pe care se află P_0 este
 $2x^2 - 4xyz + e^z = 2 \cdot 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 0 \cdot (-2) + e^{-2}$.



Definiția 1.3. Fie $\varphi : D \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $\varphi \in \mathcal{C}^1(D)$. Se numește *gradientul câmpului scalar* φ în $P_0 \in D$ vectorul din $\mathbb{V}_3$:

$$\text{grad } \varphi(P_0) = \frac{d\varphi}{d\vec{n}}(P_0) \vec{n}, \quad (4)$$

unde $\vec{n}$ este versorul normalei la suprafața de nivel S_0 în punctul P_0 .

Observația 1.5. a) (gradientul ca vector normal) Gradientul lui φ într-un punct **este ortogonal pe suprafața de nivel a lui φ în acel punct**, putând fi folosit la a construi un vector normal la o suprafață. În ipoteza că $\text{grad } \varphi(P_0) \neq 0$, un versor normal la suprafața de nivel în P_0 este

$$\vec{n} = \frac{1}{\|\text{grad } \varphi(P_0)\|} \text{grad } \varphi(P_0).$$

b) (gradientul proiectat pe un versor) Deoarece

$$\frac{d\varphi}{d\vec{s}}(P_0) = \text{grad } \varphi(P_0) \cdot \vec{s} = \text{pr}_{\vec{s}} \text{grad } \varphi(P_0),$$

rezultă că **derivata după direcția unui versor într-un punct este proiecția scalară a gradientului pe acel versor.**

c) (gradientul și direcția celei mai rapide variații) Deoarece

$$\frac{d\varphi}{d\vec{s}}(P_0) = \text{grad } \varphi(P_0) \cdot \vec{s},$$

calculând derivata după direcția versorului gradientului, $\vec{n} = \frac{1}{\|\text{grad } \varphi(P_0)\|} \text{grad } \varphi(P_0)$, se obține

$$\frac{d\varphi}{d\vec{n}}(P_0) = \text{grad } \varphi(P_0) \cdot \left(\frac{1}{\|\text{grad } \varphi(P_0)\|} \text{grad } \varphi(P_0) \right) = \frac{\|\text{grad } \varphi(P_0)\|^2}{\|\text{grad } \varphi(P_0)\|} = \|\text{grad } \varphi(P_0)\| > 0,$$

adică

$$\frac{d\varphi}{d\vec{n}}(P_0) = \|\text{grad } \varphi(P_0)\| > 0.$$

Se deduce că **direcția gradient este o direcție de creștere a câmpului scalar φ** , iar direcția opusă este una de descreștere. Mai mult este **direcția celei mai rapide creșteri/ descreșteri**, conform Teoremei 1.2 și a Observației 1.4.c).

Fie o sală de curs în care *temperatura* este dată de un câmp scalar $\varphi(P)$, presupunând că temperatura nu variază în timp. Atunci, în fiecare punct din amfiteatru, gradientul va arăta direcția în care temperatura crește cel mai repede. Magnitudinea gradientului va determina cât de

repede crește temperatura în acea direcție.

d) Deși gradientul poate fi dat în termeni de coordonate (vezi Teorema 1.3), el este **invariant în raport cu transformările ortogonale**.

Teorema 1.3. (expresia gradientului unui câmp scalar în coordonate carteziene).

Fie $\varphi : D \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $\varphi \in \mathcal{C}^1(D)$. Atunci φ admite gradient în orice punct $P_0 \in D$ și

$$\text{grad } \varphi(P_0) = \nabla \varphi(P_0) = \frac{\partial \varphi}{\partial x}(P_0) \vec{i} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}(P_0) \vec{j} + \frac{\partial \varphi}{\partial z}(P_0) \vec{k} \quad (5)$$

Notând cu ∇ operatorul Hamilton de derivare parțială

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k},$$

se poate scrie formal

$$\text{grad } \varphi(P) = \nabla \varphi(P), \forall P \in D.$$

Exemplul 1.3. Să se determine gradientul câmpului scalar

$$\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, \varphi(P) = e^{2x-3y+z^2} \cdot (x-y),$$

în punctul arbitrar $P(x, y, z)$ și în $P_0(0, 2, 3)$. Să se scrie ecuația suprafeței de nivel prin P_0 .

Rezolvare. $\varphi \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^3)$, cu

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}(P) = e^{2x-3y+z^2} \cdot 2(x-y) + e^{2x-3y+z^2};$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y}(P) = e^{2x-3y+z^2} \cdot (-3)(x-y) + e^{2x-3y+z^2}(-1);$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z}(P) = e^{2x-3y+z^2} \cdot 2z(x-y);$$

Conform (5) $\Rightarrow$

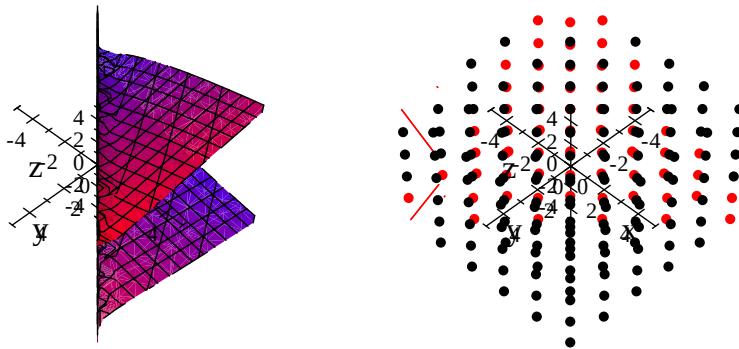
$$\text{grad } \varphi(P) = \nabla \varphi(P) = e^{2x-3y+z^2} \left((2x-2y+1) \vec{i} + (-3x+3y-1) \vec{j} + 2z(x-y) \vec{k} \right).$$

$$\text{grad } \varphi(P_0) = \nabla \varphi(0, 2, 3) = e^3 \left(-3 \vec{i} + 5 \vec{j} - 12 \vec{k} \right).$$

Suprafața de nivel ce trece prin $P_0(0, 2, 3)$, determinată de acest câmp are ecuația:

$$\varphi(P) = \varphi(P_0) \Leftrightarrow e^{2x-3y+z^2} \cdot (x-y) = -e^3.$$

Suprafața de nivel (în P_0) și câmpul de gradienti (în general) au reprezentarea:



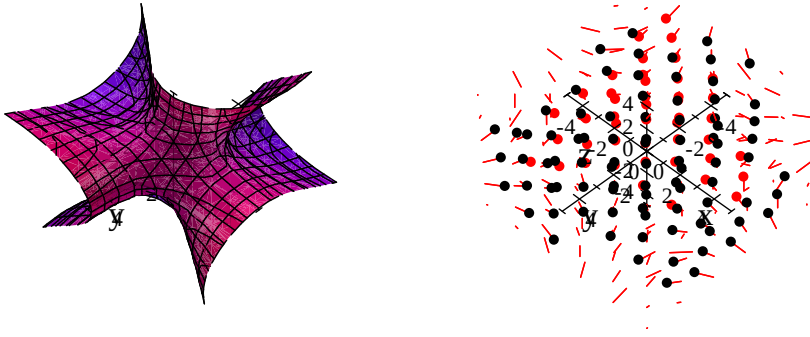
Exemplul 1.4. Se dă câmpul scalar $\varphi(P) = x^2y + y^2z + z^2x$.

a) Să se determine suprafața de nivel ce trece prin $P_0(2, 1, -1)$, determinată de acest câmp.

b) Să se determine un versor director al normalei în punctul P_0 la suprafața de nivel găsită. Să se precizeze dacă φ crește sau scade după direcția acestui versor.

Rezolvare. a) Suprafața de nivel ce trece prin $P_0(2, 1, -1)$, determinată de acest câmp are ecuația:

$\varphi(P) = \varphi(P_0) \Leftrightarrow x^2y + y^2z + z^2x = 2^2 \cdot 1 + 1^2 \cdot (-1) + (-1)^2 \cdot 2 \Leftrightarrow x^2y + y^2z + z^2x = 5$.
Suprafața de nivel (în P_0) și câmpul de gradienti (în general) au reprezentarea:



b) Un versor normal la suprafața de nivel în P_0 este versorul vectorului $\text{grad } \varphi(P_0)$,

$$\vec{n}(P_0) = \frac{1}{\|\text{grad } \varphi(P_0)\|} \text{grad } \varphi(P_0).$$

$\varphi \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^3)$, cu $\frac{\partial \varphi}{\partial x}(P) = 2xy + z^2$; $\frac{\partial \varphi}{\partial y}(P) = x^2 + 2yz$; $\frac{\partial \varphi}{\partial z}(P) = y^2 + 2xz$;

Conform (5) $\Rightarrow \text{grad } \varphi(P) = \nabla \varphi(P) = (2xy + z^2) \vec{i} + (x^2 + 2yz) \vec{j} + (y^2 + 2xz) \vec{k} \Rightarrow$
 $\text{grad } \varphi(P_0) = \nabla \varphi(2, 1, -1) = 5 \vec{i} + 2 \vec{j} - 3 \vec{k}$;

$\|\text{grad } \varphi(P_0)\| = \sqrt{5^2 + 2^2 + (-3)^2} = \sqrt{38}$.

$$\vec{n}(P_0) = \frac{5}{\sqrt{38}} \vec{i} + \frac{2}{\sqrt{38}} \vec{j} - \frac{3}{\sqrt{38}} \vec{k}.$$

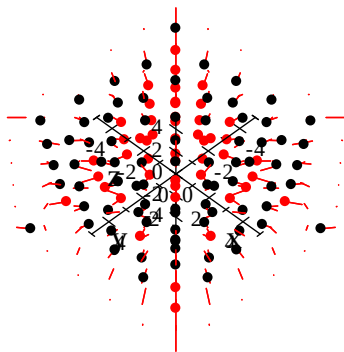
Este versor normal la suprafața de nivel în P_0 . Direcția lui (aceeași cu a gradientului) este una după care câmpul scalar crește într-o vecinătate a lui P_0 , chiar este direcția celei mai rapide creșteri.

Exemplul 1.5. Se dă câmpul scalar $\varphi(P) = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$. În ce puncte ale spațiului direcția vectorului $\text{grad } \varphi$ este paralelă cu axa Oz ?

Rezolvare. $\varphi \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^3)$, cu $\frac{\partial \varphi}{\partial x}(P) = 3x^2 - 3yz$; $\frac{\partial \varphi}{\partial y}(P) = 3y^2 - 3xz$; $\frac{\partial \varphi}{\partial z}(P) = 3z^2 - 3xy$;

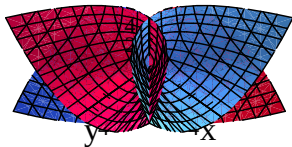
Conform (5) $\Rightarrow \text{grad } \varphi(P) = \nabla \varphi(P) = (3x^2 - 3yz) \vec{i} + (3y^2 - 3xz) \vec{j} + (3z^2 - 3xy) \vec{k}$.

Câmpul de gradienti are reprezentarea:



Direcția vectorului $\text{grad } \varphi$ este paralelă cu axa $Oz \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} 3x^2 - 3yz = 0 \\ 3y^2 - 3xz = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - yz = 0 \\ y^2 - xz = 0 \end{cases} \quad \text{—o curbă în spațiu, obținută ca intersecția a două suprafețe (cea albastră și cea roșie).}$$



Teorema 1.4. (reguli de calcul cu operatorul gradient).

Fie $\varphi_1, \varphi_2 : D \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, \varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{C}^1(D)$ și fie $\alpha \in \mathbb{R}$. Atunci $\varphi_1 + \varphi_2, \alpha\varphi_1, \varphi_1\varphi_2$ admit gradient în orice punct $P \in D$ și

$$\text{grad}(\varphi_1 + \varphi_2)(P) = \text{grad} \varphi_1(P) + \text{grad} \varphi_2(P)$$

$$\text{grad}(\alpha\varphi_1)(P) = \alpha \text{grad} \varphi_1(P)$$

$$\text{grad}(\varphi_1\varphi_2)(P) = \varphi_2(P) (\text{grad} \varphi_1(P)) + \varphi_1(P) (\text{grad} \varphi_2(P)).$$

Dacă $\varphi_2 \neq 0$ pe D , atunci $\frac{\varphi_1}{\varphi_2}$ admite gradient și

$$\text{grad} \left(\frac{\varphi_1}{\varphi_2} \right) (P) = \frac{1}{\varphi_2^2(P)} (\varphi_2(P) (\text{grad} \varphi_1(P)) - \varphi_1(P) (\text{grad} \varphi_2(P)))$$

Dacă $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f \in \mathcal{C}^1(A)$ atunci $\varphi_1 \circ f$ admite gradient și

$$\text{grad}(f(\varphi_1))(P) = f'(\varphi_1(P)) \text{grad} \varphi_1(P).$$

Definiția 1.4. a) Notând cu Δ operatorul Laplace de derivare parțială

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2},$$

se numește laplaceanul câmpului scalar $\varphi : D \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, \varphi \in \mathcal{C}^2(D)$ în $P_0 \in D$ numărul:

$$\Delta\varphi(P_0) = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}(P_0) + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}(P_0) + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}(P_0).$$

b) Un câmp scalar $\varphi : D \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ se numește funcție armonică pe D dacă

$$\Delta\varphi(P) = 0, \forall P \in D.$$

Observația 1.6. Definițiile și teoremele se pot rescrie și pentru câmpuri scalare plane

$\varphi : D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, unde D este un domeniu din $\mathbb{R}^2$,

cu mențiunea că în loc de suprafețe de nivel apar curbe de nivel, gradientul are direcția normalei, ș.a.m.d.

A se vedea profesor Eugene Khutoryansky: "Gradients and Partial Derivatives"

<https://www.youtube.com/watch?v=GkB4vW16QHI>

a) Fie câmpul scalar $\varphi : D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \varphi(P) = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2}$.

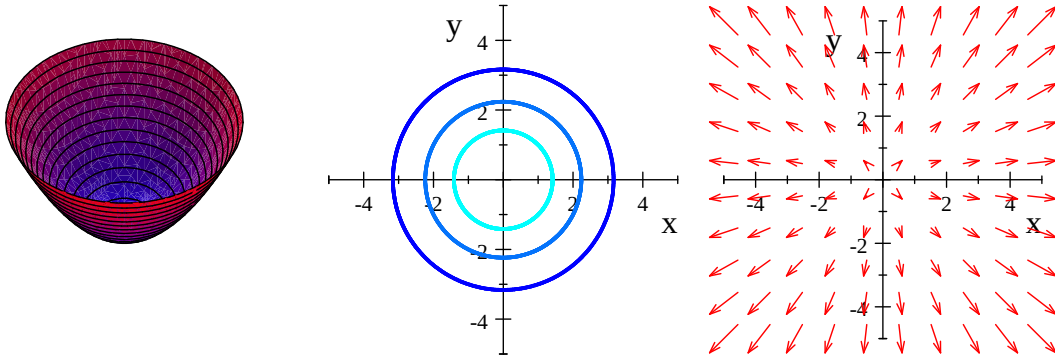
Curbele de nivel ce trec prin $P_1(1, 1)$ și $P_4(-1, 1), P_2(1, 2)$ și $P_5(-1, 2), P_3(1, 3)$ și $P_6(-1, 3)$ sunt cercuri de ecuații:

$$\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} = 1 \text{ (bleu)}, \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} = \frac{5}{2} \text{ (albastru deschis)}, \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} = 5 \text{ (albastru închis)}.$$

$$\varphi \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2), \text{ cu } \frac{\partial\varphi}{\partial x}(x, y) = x; \frac{\partial\varphi}{\partial y}(x, y) = y.$$

$$\text{Conform (5)} \Rightarrow \text{grad} \varphi(P) = \nabla \varphi(P) = x \vec{i} + y \vec{j} = \vec{r}(P).$$

Graficul, curbele de nivel și câmpul de gradienti (în general) au reprezentarea:



Curbele de nivel ale câmpului scalar sunt în nuanțe de albastru, de la deschis la închis reprezentând valori ale câmpului de la mic la mare, iar gradientul corespunzător este reprezentat de săgeți roșii, care au orientarea spre creșterea câmpului.

b) Fie câmpul scalar $\varphi : D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $\varphi(P) = -\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2}$.

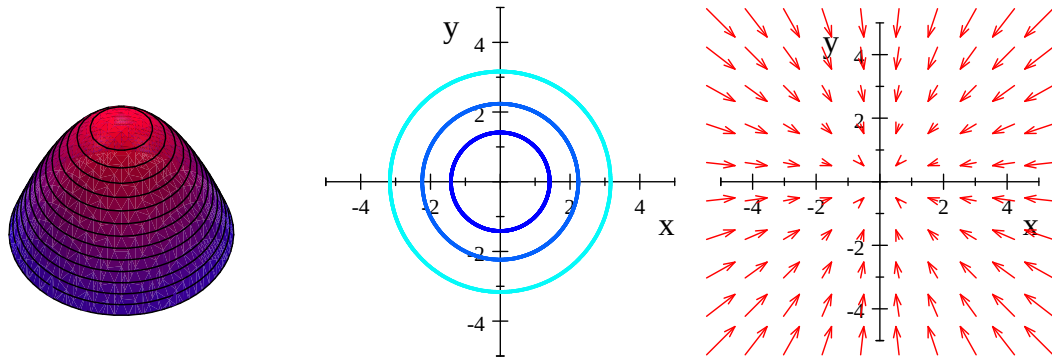
Liniile de nivel ce trec prin $P_1(1, 1)$ și $P_4(-1, 1)$, $P_2(1, 2)$ și $P_5(-1, 2)$, $P_3(1, 3)$ și $P_6(-1, 3)$ sunt cercuri de ecuații:

$$-\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2} = -1 \text{ (albastru închis)}, -\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2} = -\frac{5}{2} \text{ (albastru deschis)}, -\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2} = -5 \text{ (bleu)},$$

$$\varphi \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2), \text{ cu } \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, y) = -x; \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x, y) = -y.$$

$$\text{Conform (5)} \Rightarrow \text{grad } \varphi(P) = \nabla \varphi(P) = -x \vec{i} - y \vec{j} = -\vec{r}(P).$$

Graficul, curbele de nivel și câmpul de gradienti (în general) au reprezentarea:



Curbele de nivel ale câmpului scalar (înălțimea dealului) sunt în nuanțe de albastru, de la deschis la închis reprezentând valori ale câmpului de la mic la mare, iar gradientul corespunzător este reprezentat de săgeți roșii, care au orientarea spre creșterea câmpului.

c) Fie câmpul scalar $\varphi : D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $\varphi(P) = xy$.

Curbele de nivel ce trec prin $P_1(1, 1)$, $P_2(1, 2)$, $P_3(1, 3)$, $P_4(-1, 1)$, $P_5(-1, 2)$, $P_6(-1, 3)$ sunt hiperbole echilatre de ecuații:

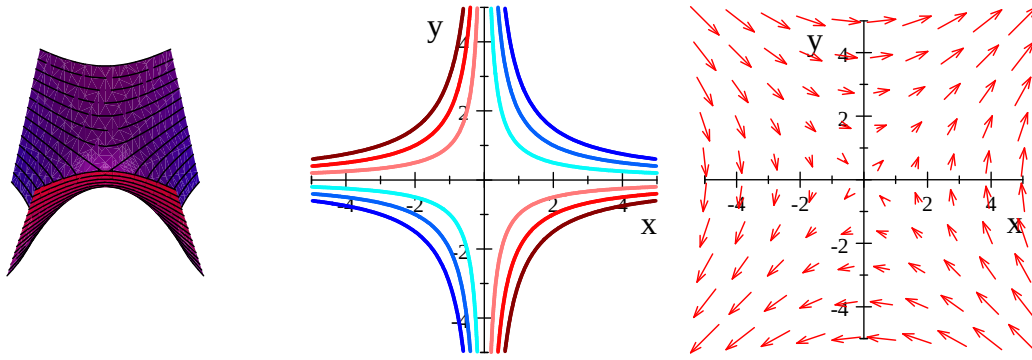
$$xy = 1 \text{ (bleu)}, xy = 2 \text{ (albastru deschis)}, xy = 3 \text{ (albastru închis)},$$

$$xy = -1 \text{ (roșu închis)}, xy = -2 \text{ (roșu)}, xy = -3 \text{ (roz)}$$

$$\varphi \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2), \text{ cu } \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, y) = y; \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x, y) = x.$$

$$\text{Conform (5)} \Rightarrow \text{grad } \varphi(P) = \nabla \varphi(P) = y \vec{i} + x \vec{j}.$$

Graficul, curbele de nivel și câmpul de gradienti (în general) au reprezentarea:



Curbele de nivel ale câmpului scalar sunt în nuanțe de albastru, de la deschis la închis reprezentând valori ale câmpului de la mic la mare și în nuanțe de roșu, de la deschis la închis reprezentând valori de la mic la mare, iar gradientul corespunzător este reprezentat de săgeți roșii, care au orientarea spre creșterea câmpului.

d) Fie un deal a cărui înălțime deasupra nivelului mării într-un punct $P(x, y)$ este $\varphi(P)$. De exemplu, $\varphi(P) = -\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2}$ de la b), cu graficul, curbele de nivel și câmpul de gradienti reprezentat anterior.

Gradientul lui φ într-un punct P_0 este un vector care arată direcția în care panta este cea mai abruptă în acel punct. Cât de abruptă este panta în punctul respectiv este dat de norma vectorului gradient.

Gradientul poate fi folosit și pentru a măsura cât se modifică un câmp scalar în alte direcții, și nu doar direcția în care se schimbă cel mai mult, efectuând un produs scalar. Conform Observației 5, c) și Teoremei 2 $\Rightarrow$

$$\frac{d\varphi}{d\vec{s}}(P_0) = \text{grad } \varphi(P_0) \cdot \vec{s} \text{ și } \frac{d\varphi}{d\vec{s}}(P_0) = \frac{d\varphi}{d\vec{n}}(P_0) \cos \theta$$

Se presupune că cea mai abruptă pantă de pe dealul ales este 44%. Dacă un drum merge direct în sus pe acel deal, atunci cea mai abruptă pantă a drumului va fi chiar 44%, făcându-l greu de utilizat. Dacă drumul ocolește dealul în unghi cu direcția vectorului gradient, atunci panta va fi mai mică. De exemplu, dacă unghiul dintre drum și direcția de pantă maximă, proiectată pe planul orizontal, este 60° , atunci cea mai abruptă pantă pe drum va fi de $22\% = 44\% \cos 60^\circ$. Asta deoarece gradientul funcției înălțime a dealului înmulțită scalar cu un vector unitate dă panta dealului în direcția vectorului, adică derivata după direcția lui $\vec{s}$.