

CURS NR. 3

Matematici Speciale, AIA

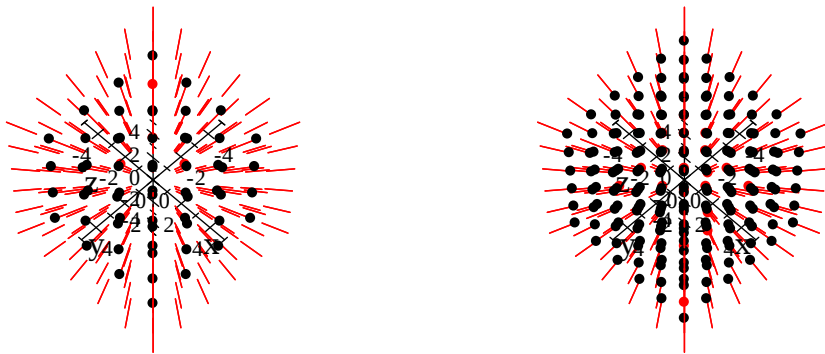
2.2. Câmp vectorial: flux, divergență, circulație, rotor

Euristica 2.2.1. Se caracterizează "emisia-absorbția" și "rotația" unui câmp vectorial, folosind operatori specifici.

Se consideră câmpuri vectoriale ce ar modela mișcarea unui fluid. Fie

$\vec{v} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{V}_3, \vec{v}(x, y, z) = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, adică $\vec{v}(P) = \vec{r}(P)$ -vectorul de poziție a punctului P și

$\vec{v} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{V}_3, \vec{v}(x, y, z) = -x\vec{i} - y\vec{j} - z\vec{k}$, adică $\vec{v}(P) = -\vec{r}(P)$,
reprezentate spațial prin

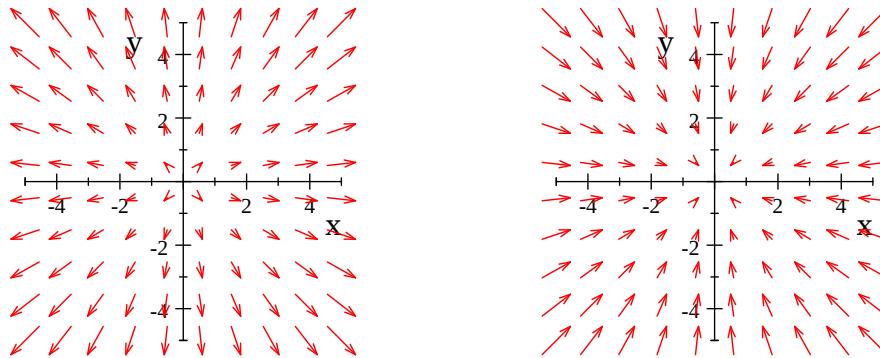


Corespondentele lor plane ar putea fi

$\vec{v} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{V}_2, \vec{v}(x, y) = x\vec{i} + y\vec{j}$, adică $\vec{v}(P) = \vec{r}(P)$, și

$\vec{v} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{V}_2, \vec{v}(x, y) = -x\vec{i} - y\vec{j}$, adică $\vec{v}(P) = -\vec{r}(P)$,

reprezentate plan prin



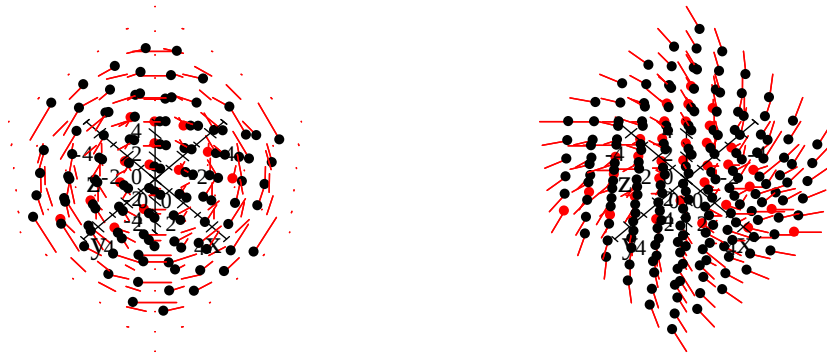
În figurile din stânga, câmpurile vectoriale par în expansiune, originea/ orice punct pare că emite/ generează câmpul vectorial, iar în figurile din dreapta, câmpurile vectoriale par a fi în contracție, originea/ orice punct pare că absoarbe câmpul vectorial.

Fie

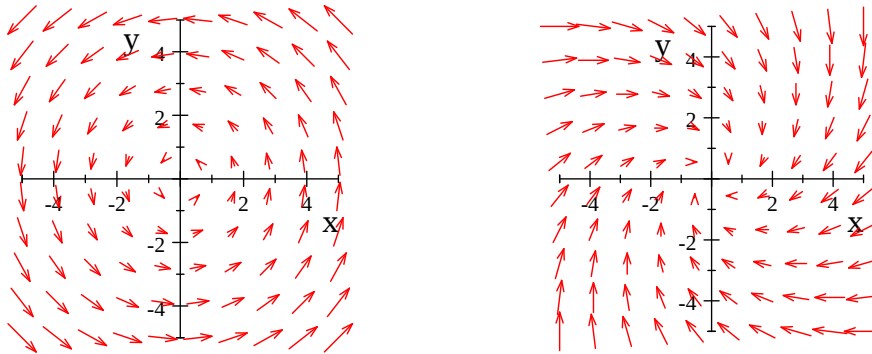
$\vec{v} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{V}_3, \vec{v}(x, y, z) = \vec{v}(P) = (y - z)\vec{i} + (z - x)\vec{j} + (x - y)\vec{k}$,

$\vec{v} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{V}_3, \vec{v}(x, y, z) = \vec{v}(P) = (y - x)\vec{i} + (z - y)\vec{j} + (x - z)\vec{k}$,

reprezentate spațial prin



În plan, fie
 $\vec{v} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{V}_2, \vec{v}(x, y) = -y \vec{i} + x \vec{j}$ și
 $\vec{v} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{V}_2, \vec{v}(x, y) = (y - x) \vec{i} - (x + y) \vec{j}$,
 reprezentate plan prin



În figurile din stânga, câmpurile vectoriale par a executa o mișcare de rotație în jurul originii, iar în figurile din dreapta, câmpurile vectoriale par a executa o mișcare mixtă, de rotație în jurul originii și de absorbție-emisie de către aceasta.

Emisia-absorbția și rotația se vor studia făcând apel la operatorii divergență și rotor.

Comentariul 2.2.1. Definirea noțiunilor de flux și divergență pentru un câmp vectorial implică noțiunea de integrală de suprafață; se vor defini la disciplinele de specialitate:

-*fluxul* unui câmp vectorial $\vec{v}$ într-un punct P_0 este numărul

$$\Phi(\vec{v})(P_0) = \iint_S \vec{v}(P_0) \cdot \vec{n}(P_0) ds;$$

-*divergența* unui câmp vectorial $\vec{v}$ într-un punct P_0 este numărul

$$\text{div}(\vec{v})(P_0) = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Phi(\vec{v})(P_0)}{\Delta V}.$$

A se vedea profesor Eugene Khutoryansky, "Divergence and Curl",

<https://www.youtube.com/watch?v=qOcFJKQPZfo>,

minutele 0 – 11.40, pentru a observa fluxul de particule emise-absorbite prin suprafața de intrare-ieșire într-un volum mic.

Teorema 2.2.1. (expresia divergenței în coordonate carteziane). Fie $\vec{v} : D \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{V}_3$,

$$\vec{v}(x, y, z) = \vec{v}(P) = v_1(x, y, z) \vec{i} + v_2(x, y, z) \vec{j} + v_3(x, y, z) \vec{k}$$

un câmp vectorial de clasă $\mathcal{C}^1$ pe un domeniu D și $P_0 \in D$. Atunci

$$\boxed{\operatorname{div} \vec{\nabla} (P_0) = \frac{\partial v_1}{\partial x} (P_0) + \frac{\partial v_2}{\partial y} (P_0) + \frac{\partial v_3}{\partial z} (P_0).} \quad (1)$$

Observația 2.2.1. Notând cu $\vec{\nabla}$ operatorul *Hamilton* de derivare parțială

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x} \vec{\mathbf{i}} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{\mathbf{j}} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{\mathbf{k}},$$

se poate scrie formal

$$\boxed{\operatorname{div} \vec{\nabla} (P) = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} (P), \forall P \in D}$$

Definiția 2.2.1. Un câmp vectorial $\vec{\nabla} : D \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{V}_3$,

$$\vec{\nabla} (x, y, z) = \vec{\nabla} (P) = v_1 (x, y, z) \vec{\mathbf{i}} + v_2 (x, y, z) \vec{\mathbf{j}} + v_3 (x, y, z) \vec{\mathbf{k}}$$

de clasă $\mathcal{C}^1$ pe un domeniu D se numește *câmp solenoidal* dacă

$$\operatorname{div} \vec{\nabla} (P) = 0, \forall P \in D.$$

Exemplul 2.2.1. Să se determine $\operatorname{div} \vec{\nabla} (P)$, unde

a) $\vec{\nabla} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{V}_3$, $\vec{\nabla} (x, y, z) = \vec{\nabla} (P) = x \vec{\mathbf{i}} + y \vec{\mathbf{j}} + z \vec{\mathbf{k}}$, adică $\vec{\nabla} (P) = \vec{\mathbf{r}} (P)$;

b) $\vec{\nabla} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{V}_3$, $\vec{\nabla} (x, y, z) = \vec{\nabla} (P) = -x \vec{\mathbf{i}} - y \vec{\mathbf{j}} - z \vec{\mathbf{k}}$, adică $\vec{\nabla} (P) = -\vec{\mathbf{r}} (P)$;

c) $\vec{\nabla} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{V}_3$, $\vec{\nabla} (x, y, z) = \vec{\nabla} (P) = (y - z) \vec{\mathbf{i}} + (z - x) \vec{\mathbf{j}} + (x - y) \vec{\mathbf{k}}$;

d) $\vec{\nabla} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{V}_3$, $\vec{\nabla} (x, y, z) = \vec{\nabla} (P) = (y - x) \vec{\mathbf{i}} + (z - y) \vec{\mathbf{j}} + (x - z) \vec{\mathbf{k}}$,

Rezolvare. a) Conform (1) $\Rightarrow$

$$\operatorname{div} \vec{\nabla} (P) = 1 + 1 + 1 = 3 > 0, \forall P \in D.$$

Deci $\boxed{\operatorname{div} \vec{\mathbf{r}} = 3}$

b) Conform (1) $\Rightarrow$

$$\operatorname{div} \vec{\nabla} (P) = -1 - 1 - 1 = -3 < 0, \forall P \in D.$$

Studiind figurile din euristică se deduce că $\operatorname{div} \vec{\nabla} (P) > 0$ este asociată câmpurilor cu emisie în punctul P , iar $\operatorname{div} \vec{\nabla} (P) < 0$ este asociată câmpurilor cu absorbție în punctul P . Nu numai originea O emite-absoarbe în exemplele a)-b), ci și punctul $P(1, 1, 1)$, de exemplu.

c) Conform (1) $\Rightarrow$

$$\operatorname{div} \vec{\nabla} (P) = 0 + 0 + 0 = 0.$$

Studiind figura din euristică se deduce că $\operatorname{div} \vec{\nabla} (P) = 0$ este asociată câmpurilor fără emisie-absorbție în P . Conform definiției se observă că $\vec{\nabla}$ este câmp solenoidal, fără emisie-absorbție în niciun punct P , fără surse sau cosurse.

d) Conform (1) $\Rightarrow$

$$\operatorname{div} \vec{\nabla} (P) = -1 - 1 - 1 = -3 < 0, \forall P \in D.$$

Teorema 2.2.2. (reguli de calcul cu divergență).

Fie $\vec{\nabla}, \vec{\mathbf{w}} : D \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{V}_3$, $\vec{\nabla}, \vec{\mathbf{w}} \in \mathcal{C}^1(D)$, $\alpha \in \mathbb{R}$ și $\varphi : D \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $\varphi \in \mathcal{C}^1(D)$. Atunci $\vec{\nabla} + \vec{\mathbf{w}}, \alpha \vec{\nabla}, \varphi \vec{\nabla}$ admit divergență în orice punct $P \in D$ și

$$\boxed{\operatorname{div} (\vec{\nabla} + \vec{\mathbf{w}}) (P) = \operatorname{div} (\vec{\nabla}) (P) + \operatorname{div} (\vec{\mathbf{w}}) (P);}$$

$$\boxed{\operatorname{div} (\alpha \vec{\nabla}) (P) = \alpha \operatorname{div} \vec{\nabla} (P);}$$

$$\boxed{\operatorname{div} (\varphi \vec{\nabla}) (P) = \varphi (P) (\operatorname{div} \vec{\nabla} (P)) + (\operatorname{grad} \varphi (P)) \cdot \vec{\nabla} (P).}$$

Observația 2.2.2. Definițiile și teoremele se pot rescrie și pentru câmpuri vectoriale plane $\vec{\nabla} : D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{V}_2$, unde D este un domeniu din $\mathbb{R}^2$, cu mențiunea că

$$\boxed{\operatorname{div} \vec{\nabla} (P) = \frac{\partial v_1}{\partial x} (P) + \frac{\partial v_2}{\partial y} (P).}$$

Comentariul 2.2.2. Definirea noțiunilor de circulație și rotor pentru un câmp vectorial implică noțiunea de integrală curbilinie; se vor defini la disciplinele de specialitate:

-*circulația* unui câmp vectorial $\vec{v}$ într-un punct P_0 este numărul

$$\text{circulația}(\vec{v})(P_0) = \int_{\gamma} \vec{v}(P_0) \cdot d\vec{r}(P_0);$$

-*rotorul* unui câmp vectorial $\vec{v}$ într-un punct P_0 este vectorul $\text{rot } \vec{v} \stackrel{\text{not.}}{=} \text{curl } \vec{v}$ dat de formula

$$\vec{n}(P_0) \cdot \text{rot}(\vec{v})(P_0) = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\text{circulația}(\vec{v})(P_0)}{\Delta S}.$$

A se vedea profesor Eugene Khutoryansky, "Divergence and Curl",

<https://www.youtube.com/watch?v=qOcFJKQPZfo>,

minutele 11.40 – 25.30, pentru a observa circulația particulelor care se rotesc în jurul unui contur ce delimitează o suprafață mică.

Observația 2.2.3. Fie câmpul vectorial $\vec{v} : D \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{V}_3$,

$$\vec{v}(P) = \vec{v}(x, y, z) = v_1(x, y, z) \vec{i} + v_2(x, y, z) \vec{j} + v_3(x, y, z) \vec{k}.$$

Circulația câmpului vectorial de-a lungul curbei γ este

$$\text{circulația}(\vec{v})(P) = \int_{\gamma} (v_1(x, y, z) dx + v_2(x, y, z) dy + v_3(x, y, z) dz), \quad (2)$$

dacă integrala curbilinie de speța a doua există.

Teorema 2.2.3. (expresia rotorului în coordonate carteziene). Fie $\vec{v} : D \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{V}_3$,

$$\vec{v}(x, y, z) = \vec{v}(P) = v_1(x, y, z) \vec{i} + v_2(x, y, z) \vec{j} + v_3(x, y, z) \vec{k}$$

un câmp vectorial de clasă $\mathcal{C}^1$ pe un domeniu D și $P_0 \in D$. Atunci

$$\begin{aligned} \text{rot } \vec{v}(P_0) \stackrel{\text{not.}}{=} \text{curl } \vec{v}(P_0) &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}_{\text{formal}}(P_0) = \\ &= \left(\frac{\partial v_3}{\partial y}(P_0) - \frac{\partial v_2}{\partial z}(P_0) \right) \vec{i} - \left(\frac{\partial v_3}{\partial x}(P_0) - \frac{\partial v_1}{\partial z}(P_0) \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial v_2}{\partial x}(P_0) - \frac{\partial v_1}{\partial y}(P_0) \right) \vec{k} \end{aligned} \quad (3)$$

Observația 2.2.4. Notând cu ∇ *operatorul Hamilton* de derivare parțială

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k},$$

se poate scrie

$$\text{rot } \vec{v}(P) = \nabla \times \vec{v}(P), \forall P \in D.$$

Definiția 2.2.2. Un câmp vectorial $\vec{v} : D \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{V}_3$,

$$\vec{v}(x, y, z) = \vec{v}(P) = v_1(x, y, z) \vec{i} + v_2(x, y, z) \vec{j} + v_3(x, y, z) \vec{k}$$

de clasă $\mathcal{C}^1$ pe un domeniu D se numește *câmp irotational* dacă

$$\text{rot } \vec{v}(P) = \vec{0}, \forall P \in D.$$

Definiția 2.2.3. Un câmp vectorial $\vec{v} : D \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{V}_3$,

$$\vec{v}(x, y, z) = \vec{v}(P) = v_1(x, y, z) \vec{i} + v_2(x, y, z) \vec{j} + v_3(x, y, z) \vec{k}$$

de clasă $\mathcal{C}^1$ pe un domeniu D se numește *câmp armonice* dacă este simultan solenoidal și irotational, adică:

$$\text{div } \vec{v}(P) = 0, \forall P \in D \text{ și } \text{rot } \vec{v}(P) = \vec{0}, \forall P \in D.$$

Teorema 2.2.4. (reguli de calcul cu rotor).

Fie $\vec{v}, \vec{w} : D \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{V}_3$, $\vec{v}, \vec{w} \in \mathcal{C}^1(D)$, $\alpha \in \mathbb{R}$ și $\varphi : D \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, \varphi \in \mathcal{C}^1(D)$. Atunci $\vec{v} + \vec{w}, \alpha \vec{v}, \varphi \vec{v}$ admit rotor în orice punct $P \in D$ și

$$\operatorname{rot}(\vec{v} + \vec{w})(P) = \operatorname{rot}(\vec{v})(P) + \operatorname{rot}(\vec{w})(P);$$

$$\operatorname{rot}(\alpha \vec{v})(P) = \alpha \operatorname{rot} \vec{v}(P);$$

$$\operatorname{rot}(\varphi \vec{v})(P) = \varphi(P) (\operatorname{rot} \vec{v}(P)) + (\operatorname{grad} \varphi(P)) \times \vec{v}(P).$$

Dacă, în plus $\varphi \in \mathcal{C}^2(D)$, atunci

$$\operatorname{rot}(\operatorname{grad} \varphi) = \vec{0}.$$

Observația 2.2.5. Definițiile și teoremele se pot rescrie și pentru câmpuri vectoriale plane $\vec{v} : D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{V}_2$, unde D este un domeniu din $\mathbb{R}^2$, cu mențiunea că

$$\operatorname{rot} \vec{v}(P) = \left(\frac{\partial v_2}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial v_1}{\partial y}(x, y) \right) (\vec{i} \times \vec{j}).$$

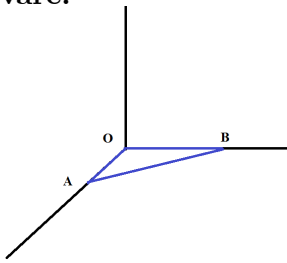
Observația 2.2.6. Pentru orice câmp vectorial $\vec{v}$ de clasă $\mathcal{C}^1$ pe un domeniu D **divergența și rotorul nu depind de alegerea reperului ortogonal** în care se determină coordonatele carteziene, ci doar de punctul P .

○ **Exemplul 2.2.2.** Să se calculeze circulația câmpului vectorial

$$\vec{v}(P) = (y - z) \vec{i} + (z - x) \vec{j} + (x - y) \vec{k}$$

pe conturul închis $OABO$ format din laturile triunghiului cu vârfurile $O(0, 0, 0)$, $A(1, 0, 0)$, $B(0, 2, 0)$ (parcurs direct, trigonometric).

Rezolvare.



Ecuatiile parametrice ale segmentului $[\overrightarrow{M_1 M_2}]$, cu $M_1(x_1, y_1, z_1)$ și $M_2(x_2, y_2, z_2)$, sunt

$$[\overrightarrow{M_1 M_2}] : \begin{cases} x(t) = x_1 + t(x_2 - x_1) \\ y(t) = y_1 + t(y_2 - y_1) \\ z(t) = z_1 + t(z_2 - z_1) \end{cases}, t \in [0, 1] \Rightarrow$$

$$[\overrightarrow{OA}] : \begin{cases} x(t) = 0 + t(1 - 0) = t \\ y(t) = 0 + t(0 - 0) = 0 \\ z(t) = 0 + t(0 - 0) = 0 \end{cases}, t \in [0, 1]; \begin{cases} dx(t) = 1dt \\ dy(t) = 0dt \\ dz(t) = 0dt \end{cases}, t \in [0, 1]$$

$$[\overrightarrow{AB}] : \begin{cases} x(t) = 1 + t(0 - 1) = 1 - t \\ y(t) = 0 + t(2 - 0) = 2t \\ z(t) = 0 + t(0 - 0) = 0 \end{cases}, t \in [0, 1]; \begin{cases} dx(t) = -dt \\ dy(t) = 2dt \\ dz(t) = 0dt \end{cases}, t \in [0, 1]$$

$$[\overrightarrow{BO}] : \begin{cases} x(t) = 0 + t(0 - 0) = 0 \\ y(t) = 2 + t(0 - 2) = 2 - 2t \\ z(t) = 0 + t(0 - 0) = 0 \end{cases}, t \in [0, 1]; \begin{cases} x(t) = 0dt \\ y(t) = -dt \\ z(t) = 0dt \end{cases}, t \in [0, 1]$$

Circulația câmpului vectorial de-a lungul conturului (în sensul $OABO$) este

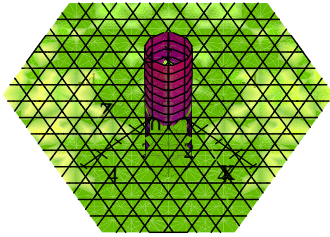
$$\begin{aligned} \int_{[\overrightarrow{OA}] \cup [\overrightarrow{AB}] \cup [\overrightarrow{BO}]} (v_1(x, y, z) dx + v_2(x, y, z) dy + v_3(x, y, z) dz) = \\ = \int_{[\overrightarrow{OA}]} ((y - z) dx + (z - x) dy + (x - y) dz) + \int_{[\overrightarrow{AB}]} ((y - z) dx + (z - x) dy + (x - y) dz) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \int_{\overrightarrow{BO}} ((y-z)dx + (z-x)dy + (x-y)dz) = \\
& = \int_0^1 (0 \cdot 1 + (-t) \cdot 0 + t \cdot 0) dt + \int_0^1 (2t \cdot (-1) + (-1+t) \cdot 2 + (1-3t) \cdot 0) dt + \\
& + \int_0^1 ((2-2t) \cdot 0 + 0 \cdot (-1) + (-2+2t) \cdot 0) dt = 0 - 2 + 0 = -2.
\end{aligned}$$

○ **Exemplul 2.2.3.** Să se determine circulația câmpului vectorial

$$\vec{v}(P) = xy \vec{i} + yz \vec{j} + xz \vec{k}$$

pe curba $(\Gamma) : \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$ (cilindru $\cap$ plan)



Exemplul 2.2.4. Să se determine rotorul următoarelor câmpuri vectoriale:

- a) $\vec{v} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{V}_3$, $\vec{v}(x, y, z) = \vec{v}(P) = x \vec{i} + y \vec{j} + z \vec{k}$, adică $\vec{v}(P) = \vec{r}$,
b) $\vec{v} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{V}_3$, $\vec{v}(x, y, z) = \vec{v}(P) = -x \vec{i} - y \vec{j} - z \vec{k}$, adică $\vec{v}(P) = -\vec{r}$.
c) $\vec{v} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{V}_3$, $\vec{v}(x, y, z) = \vec{v}(P) = (y-z) \vec{i} + (z-x) \vec{j} + (x-y) \vec{k}$,
d) $\vec{v} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{V}_3$, $\vec{v}(x, y, z) = \vec{v}(P) = yz \vec{i} + xz \vec{j} + xy \vec{k}$,

Rezolvare. a) Conform (3) $\Rightarrow$

$$\begin{aligned}
\text{rot } \vec{v}(P) &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x & y & z \end{vmatrix} = \\
&= \left(\frac{\partial}{\partial y}(z) - \frac{\partial}{\partial z}(y) \right) \vec{i} - \left(\frac{\partial}{\partial x}(z) - \frac{\partial}{\partial z}(x) \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial}{\partial x}(y) - \frac{\partial}{\partial y}(x) \right) \vec{k} = \\
&= 0 \vec{i} - 0 \vec{j} + 0 \vec{k} = \vec{0}.
\end{aligned}$$

Se poate scrie: $\boxed{\text{rot } \vec{r} = \vec{0}}$

b) Conform (3) $\Rightarrow$

$$\begin{aligned}
\text{rot } \vec{v}(P) &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -x & -y & -z \end{vmatrix} = \\
&= \left(\frac{\partial}{\partial y}(-z) - \frac{\partial}{\partial z}(-y) \right) \vec{i} - \left(\frac{\partial}{\partial x}(-z) - \frac{\partial}{\partial z}(-x) \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial}{\partial x}(-y) - \frac{\partial}{\partial y}(-x) \right) \vec{k} = \\
&= 0 \vec{i} - 0 \vec{j} + 0 \vec{k} = \vec{0}, \forall P.
\end{aligned}$$

Studiind figurile din euristică deducem că $\text{rot } \vec{v}(P) = \vec{0}$ este asociată câmpurilor fără rotație în jurul punctului P . Deci câmpurile de la exemplele a)-b) sunt irotaționale.

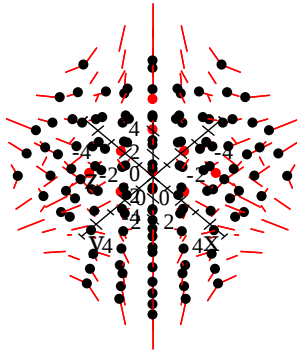
c) Conform (3) $\Rightarrow$

$$\begin{aligned}
 \operatorname{rot} \vec{v}(P) &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y-z & z-x & x-y \end{vmatrix} = \\
 &= \left(\frac{\partial}{\partial y}(x-y) - \frac{\partial}{\partial z}(z-x) \right) \vec{i} - \left(\frac{\partial}{\partial x}(x-y) - \frac{\partial}{\partial z}(y-z) \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial}{\partial x}(z-x) - \frac{\partial}{\partial y}(y-z) \right) \vec{k} = \\
 &= -2\vec{i} - 2\vec{j} - 2\vec{k}, \forall P.
 \end{aligned}$$

Studiind figura din euristică deducem că $\operatorname{rot} \vec{v}(P) \neq \vec{0}$ este asociată câmpurilor cu rotație în P .

Direcția și sensul de rotație sunt date de vectorul $-2\vec{i} - 2\vec{j} - 2\vec{k}$.

d) $\vec{v} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{V}_3$, $\vec{v}(x, y, z) = \vec{v}(P) = (yz)\vec{i} + (zx)\vec{j} + (xy)\vec{k}$ are reprezentarea spațială



Conform (3) $\Rightarrow$

$$\begin{aligned}
 \operatorname{rot} \vec{v}(P) &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ yz & zx & xy \end{vmatrix} = \\
 &= \left(\frac{\partial}{\partial y}(xy) - \frac{\partial}{\partial z}(zx) \right) \vec{i} - \left(\frac{\partial}{\partial x}(xy) - \frac{\partial}{\partial z}(yz) \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial}{\partial x}(zx) - \frac{\partial}{\partial y}(yz) \right) \vec{k} = \\
 &= 0\vec{i} - 0\vec{j} + 0\vec{k} = \vec{0}, \forall P.
 \end{aligned}$$

Studiind figura deducem că $\operatorname{rot} \vec{v}(P) = 0$ este asociată câmpurilor fără rotație în P . Este câmp irotațional.

Comentariul 2.2.3.

A se vedea 3Blue1Brown, "Divergence and curl: The language of Maxwell's equations, fluid flow, and more",

<https://www.youtube.com/watch?v=rB83DpBJQsE&t=699s>.

A se observa utilizarea operatorilor diferențiali div, rot, grad în scrierea ecuațiilor fizicii matematice. De exemplu, Ecuațiile Maxwell ale câmpului electromagnetic:

$\operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$	$\operatorname{curl} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$
$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$	$\operatorname{curl} \mathbf{B} = \mu_0 \left(\mathbf{J} + \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right)$

Tot în film apare și modelul pradă-prădător (iepure-vulpe), precum și interpretări legate de

emisie-absorbție și rotație.

Definiția 2.2.4. Un câmp vectorial $\vec{v} : D \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{V}_3$,

$$\vec{v}(x, y, z) = \vec{v}(P) = v_1(x, y, z) \vec{i} + v_2(x, y, z) \vec{j} + v_3(x, y, z) \vec{k}$$

de clasă $\mathcal{C}^1$ pe un domeniu D se numește *câmp de gradienti* (sau *câmp derivând dintr-un potențial*) dacă există un câmp scalar $\varphi : D \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ de clasă $\mathcal{C}^1$ pe D , numit *potențial scalar* al lui $\vec{v}$, astfel încât

$$\vec{v}(P) = \text{grad } \varphi(P), \forall P \in D.$$

Observația 2.2.7. Un câmp de gradienti este câmp irotațional,

$$\boxed{\text{rot}(\text{grad } \varphi(P)) = \vec{0}, \forall P \in D.}$$

Într-adevăr,

$$\text{rot } \vec{v}(P) = \text{rot}(\text{grad } \varphi(P)) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, y, z) & \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x, y, z) & \frac{\partial \varphi}{\partial z}(x, y, z) \end{vmatrix} = \vec{0}, \forall P \in D.$$

Mai mult,

$$\boxed{\text{div}(\text{grad } \varphi(P)) = \Delta \varphi(P), \forall P \in D.}$$

Într-adevăr,

$$\begin{aligned} \text{div } \vec{v}(P) &= \text{div}(\text{grad } \varphi(P)) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}(P) \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}(P) \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}(P) \right) = \\ &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(P) + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}(P) + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}(P) = \Delta \varphi(P), \forall P \in D. \end{aligned}$$

Exemplul 2.2.5. a) Orice câmp vectorial constant este un câmp de gradienti.

Într-adevăr, fie

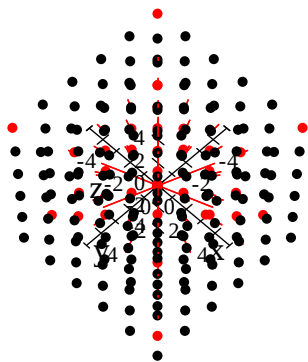
$$\vec{v}(P) = \vec{c}, \text{ unde } \vec{c} = c_1 \vec{i} + c_2 \vec{j} + c_3 \vec{k} \text{ este un vector constant.}$$

Atunci există $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $\varphi(P) = c_1 x + c_2 y + c_3 z$ astfel încât $\vec{v} = \text{grad } \varphi$.

b) •Câmpul vectorial spațial al atracțiilor newtoniene realizate de O

$$\begin{aligned} \vec{v} : D \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{V}_3, \vec{v}(P) &= -\frac{k}{r^3(P)} \vec{r}(P) = \\ &= \frac{-kx}{(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})^3} \vec{i} + \frac{-ky}{(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})^3} \vec{j} + \frac{-kz}{(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})^3} \vec{k}, \end{aligned}$$

unde $\vec{r}$ este vectorul de poziție al lui P și $r = \|\vec{r}\|$ este un câmp pentru care:



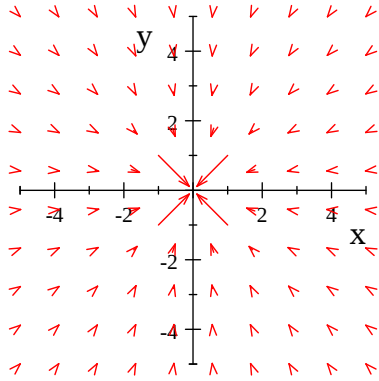
$$\begin{aligned}
\operatorname{div} \vec{v}(P) &= -k \left(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \right)^{-3} - kx \left(\frac{-3}{2} \right) (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{-5}{2}} \cdot 2x - \\
&\quad - k \left(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \right)^{-3} - ky \left(\frac{-3}{2} \right) (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{-5}{2}} \cdot 2y - \\
&\quad - k \left(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \right)^{-3} - kz \left(\frac{-3}{2} \right) (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{-5}{2}} \cdot 2z = \\
&= -3k \left(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \right)^{-3} + 3k (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{-3}{2}} = \\
&= 0, \text{ deci este un câmp solenoidal, care nu "emite-absoarbe".} \\
\operatorname{rot} \vec{v} &= \vec{0}, \text{ deci este un câmp irotational.}
\end{aligned}$$

Atunci câmpul este unul **armonic**.

• **Câmpul vectorial plan al atracțiilor newtoniene** realizate de O

$$\begin{aligned}
\vec{v} : D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{V}_2, \vec{v}(P) &= -\frac{k}{r^3(P)} \vec{r}(P) = \\
&= \frac{-kx}{\left(\sqrt{x^2 + y^2} \right)^3} \vec{i} + \frac{-ky}{\left(\sqrt{x^2 + y^2} \right)^3} \vec{j},
\end{aligned}$$

unde $\vec{r}$ este vectorul de poziție al lui P și $r = \|\vec{r}\|$ este un câmp pentru care:



$$\begin{aligned}
\operatorname{div} \vec{v} &= -k \left(\sqrt{x^2 + y^2} \right)^{-3} - kx \left(\frac{-3}{2} \right) (x^2 + y^2)^{\frac{-5}{2}} \cdot 2x - \\
&\quad - k \left(\sqrt{x^2 + y^2} \right)^{-3} - ky \left(\frac{-3}{2} \right) (x^2 + y^2)^{\frac{-5}{2}} \cdot 2y = \\
&= -2k \left(\sqrt{x^2 + y^2} \right)^{-3} + 3k (x^2 + y^2)^{\frac{-3}{2}} = \\
&= \frac{k}{r^3(P)} > 0 \text{ pe } D, \text{ deci este un câmp care "emite".}
\end{aligned}$$

$\operatorname{rot} \vec{v} = \vec{0}$, deci este un **câmp irotational**.

$\vec{v} = \operatorname{grad} \left(\frac{k}{r} \right)$, deci este un **câmp de gradienti**.

Teorema 2.2.5. (reguli de calcul)

Fie $\vec{v} : D \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{V}_3$, $\vec{v} \in \mathcal{C}^2(D)$ și $\varphi : D \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $\varphi \in \mathcal{C}^2(D)$. Atunci:

$\operatorname{grad}(\operatorname{div} \vec{v})$ –se poate calcula

$$\boxed{\operatorname{div}(\operatorname{rot} \vec{v}) = 0} \Rightarrow \text{un câmp de rotori este solenoidal, fără surse.}$$

$$\boxed{\operatorname{div}(\operatorname{grad} \varphi) = \Delta \varphi} \quad (\nabla \cdot (\nabla \varphi) = \nabla^2 \varphi = \Delta \varphi)$$

$$\boxed{\operatorname{rot}(\operatorname{grad} \varphi) = \vec{0}} \Rightarrow \text{un câmp de gradienti este irotational, conservativ.}$$

$\operatorname{rot}(\operatorname{rot} \vec{v})$ –se poate calcula.

Teorema 2.2.6. Fie $\vec{v} : D \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{V}_3, \vec{v} \in \mathcal{C}^1(D)$, cu D domeniu isimplu conex. Atunci următoarele afirmații sunt echivalente:

- (i) $\int_{\gamma} \vec{v} \cdot d\vec{r}$ este independentă de drum în D .
- (ii) $\int_{\gamma} \vec{v} \cdot d\vec{r} = 0$ pentru orice curbă închisă netedă pe porțiuni conținută în D .
- (iii) $\vec{v}$ este câmp de gradienti (derivând dintr-un potențial).
- (iv) $\vec{v}$ este câmp irotational.

Teorema 2.2.7. Fie $\vec{v} : D \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{V}_3, \vec{v} \in \mathcal{C}^1(D)$, cu D domeniu simplu conex, un câmp de gradienti (derivând dintr-un potențial) și fie $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ o curbă netedă pe porțiuni, cu $\text{Im } \gamma = \widehat{AB}$. Atunci:

$$\int_{\gamma} \vec{v} \cdot d\vec{r} = \varphi(B) - \varphi(A),$$

unde φ este un potențial pentru $\vec{v}$, adică $\vec{v} = \text{grad } \varphi$.

Teorema 2.2.8.

a) Fluxul unui câmp solenoidal $\vec{v} : D \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{V}_3, \vec{v} \in \mathcal{C}^1(D)$ (cu $\text{div } \vec{v} = 0$) printr-o suprafață netedă închisă este 0 (consecință a formulei Stokes).

b) Rotorul unui câmp $\vec{v} : D \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{V}_3, \vec{v} \in \mathcal{C}^2(D)$ este un câmp solenoidal ($\text{div}(\text{rot } \vec{v}) = 0$) (consecință a formulei Gauss-Ostrogradski).