SEMINAR NR. 2, REZOLVĂRI
Matematici Speciale, AIA

2.1. Câmp vectorial: linii de câmp, suprafeţe de câmp

Definiţia 1.
a) Se numeşte *câmp vectorial* o funcţie $\overrightarrow{\mathbf{v}} : D \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{V}_3$, unde D este un domeniu, $\mathbb{V}_3$ este mulţimea vectorilor tridimensionali şi

$$\overrightarrow{\mathbf{v}}(x,y,z) = v_1(x,y,z)\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + v_2(x,y,z)\,\overrightarrow{\mathbf{j}} + v_3(x,y,z)\,\overrightarrow{\mathbf{k}}.$$

Funcţiile componente v_1, v_2, v_3 sunt câmpuri scalare.
b) Se numeşte *linie de câmp* a câmpului vectorial $\overrightarrow{\mathbf{v}} : D \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{V}_3$ orice curbă din domeniul D care este tangentă în fiecare punct al său la câmpul vectorial $\overrightarrow{\mathbf{v}}$.
c) Se numeşte *suprafaţă de câmp* a câmpului vectorial $\overrightarrow{\mathbf{v}} : D \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{V}_3$ orice suprafaţă generată de liniile de câmp.
Comentariul 1. Se notează cu P punctul din $D \subseteq \mathbb{R}^3$ de coordonate (x,y,z) şi se scrie $\overrightarrow{\mathbf{v}}(P)$ în loc de $\overrightarrow{\mathbf{v}}(x,y,z)$, mai ales la punerea în evidenţă a unor interpretări fizice, în care dependenţa este legată de punct şi mai puţin de coordonatele sale.
Teorema 1. (ecuaţiile liniilor de câmp). Fie $\overrightarrow{\mathbf{v}} : D \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{V}$,

$$\overrightarrow{\mathbf{v}}(P) = \overrightarrow{\mathbf{v}}(x,y,z) = v_1(x,y,z)\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + v_2(x,y,z)\,\overrightarrow{\mathbf{j}} + v_3(x,y,z)\,\overrightarrow{\mathbf{k}}.$$

a) Ecuaţiile liniilor de câmp ale câmpului vectorial $\overrightarrow{\mathbf{v}}$ sunt soluţiile sistemului de ecuaţii diferenţiale:

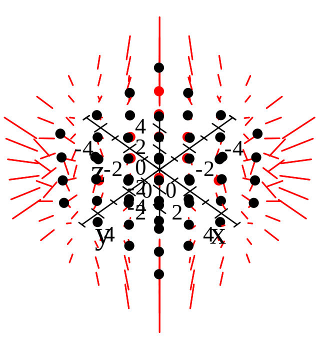
$$\frac{dx}{v_1(x,y,z)} = \frac{dy}{v_2(x,y,z)} = \frac{dz}{v_3(x,y,z)}. \tag{1}$$

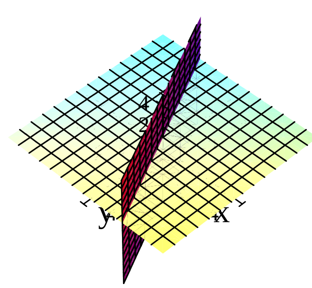
(2 ecuaţii diferenţiale⇒ 2 integrale prime).
b) Ecuaţia $F(x,y,z) = 0$ reprezintă o suprafaţă de câmp a câmpului vectorial $\overrightarrow{\mathbf{v}}$ dacă şi numai dacă F este soluţie a ecuaţiei cu derivate parţiale:

$$v_1(x,y,z)\frac{\partial F}{\partial x}(x,y,z) + v_2(x,y,z)\frac{\partial F}{\partial y}(x,y,z) + v_3(x,y,z)\frac{\partial F}{\partial z}(x,y,z) = 0. \tag{2}$$

Observaţia 2. Suprafaţa de câmp a câmpului vectorial $\overrightarrow{\mathbf{v}} : D \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{V}$ care trece printr-o anumită curbă (γ) se obţine formând un sistem algebric alcătuit din ecuaţiile integralelor prime ale sistemului (1) şi ecuaţiile curbei (γ).

Exerciţiul 1. Fie:
câmpul vectorial $\overrightarrow{\mathbf{v}}(P) = xy^2\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + x^2y\,\overrightarrow{\mathbf{j}} + z\left(x^2+y^2\right)\overrightarrow{\mathbf{k}}$;
curba $(\gamma) : \begin{cases} x = 2y \\ z = a \end{cases}$ plan∩plan=dreaptă.





a) Să se determine liniile de câmp ale câmpului vectorial;

b) Să se scrie ecuaţia suprafeţei de câmp ce conţine (γ).

Rezolvare. **a)** Conform (1) $\Rightarrow$ecuaţiile liniilor de câmp ale câmpului vectorial $\overrightarrow{\mathbf{v}}$ sunt soluţiile sistemului de ecuaţii diferenţiale::

$$\frac{dx}{xy^2} = \frac{dy}{x^2 y} = \frac{dz}{z\left(x^2 + y^2\right)}$$

$\bullet \dfrac{dx}{xy^2} = \dfrac{dy}{x^2 y} \Rightarrow x dx = y dy | \int_{EVS} \Rightarrow \dfrac{x^2}{2} = \dfrac{y^2}{2} + k_1 \Rightarrow$

$\boxed{x^2 - y^2 = c_1, c_1 \in \mathbb{R}.}$-o integrală primă.

$\bullet \dfrac{dx}{xy^2} = \dfrac{dy}{x^2 y} = \dfrac{dz}{z\left(x^2 + y^2\right)} \overset{\text{formal}}{=} \dfrac{\frac{1}{x}dx + \frac{1}{y}dy - \frac{1}{z}dz}{\frac{1}{x}xy^2 + \frac{1}{y}x^2 y - \frac{1}{z}z\left(x^2 + y^2\right)} \Rightarrow$

$\frac{1}{x}dx + \frac{1}{y}dy - \frac{1}{z}dz = 0 \overset{\text{formal}}{\Rightarrow} d\left(\ln|x| + \ln|y| + \ln|z|\right) = 0 \Rightarrow$

$\ln|x| + \ln|y| + \ln|z| = k_2 \Rightarrow \ln\left|\dfrac{xy}{z}\right| = \ln k_2' \overset{\text{formal}}{\Rightarrow}$

$\boxed{\dfrac{xy}{z} = c_2, c_2 \in \mathbb{R}.}$-o integrală primă.

Ecuaţiile liniilor de câmp sunt date de integralele prime funcţional independente:

$(*) \begin{cases} x^2 - y^2 = c_1, c_1 \in \mathbb{R} \\ \dfrac{xy}{z} = c_2, c_2 \in \mathbb{R} \end{cases}$ suprafaţă$\cap$suprafaţă=curbă.(o infinitate dublă).

b) Suprafeţele de câmp sunt alcătuite din linii de câmp. Ele sunt de forma:

$F\left(x^2 - y^2, \dfrac{xy}{z}\right) = 0, F \in \mathcal{C}^1(\mathbb{D})$ arbitrară.

Ecuaţia suprafeţei de câmp ce conţine (γ) este soluţia pentru sistemul algebric alcătuit din ecuaţiile integralelor prime şi ecuaţiile curbei (o relaţie între x, y, z fără c_1, c_2):

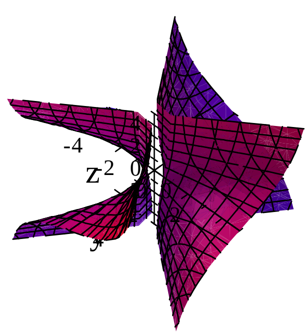
$$\begin{cases} x^2 - y^2 = c_1 \\ \dfrac{xy}{z} = c_2 \\ x = 2y \\ z = a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = a \\ xy = ac_2 \\ x^2 = 2ac_2 \\ 2ac_2 - \dfrac{2ac_2}{4} = c_1 \end{cases} \Rightarrow$$

$3ac_2 - 2c_1 = 0$-relaţia de condiţie (doar între c_1, c_2). Folosind $(*) \Rightarrow$

$3a\dfrac{xy}{z} - 2\left(x^2 - y^2\right) = 0$-ecuaţia suprafeţei de câmp cerute.

(cu $F(u, v) = 3av - 2u$)

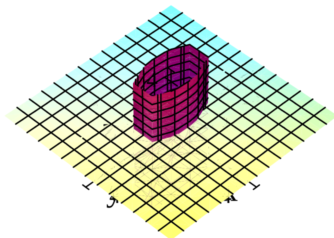
Pentru $a = 2 \Rightarrow$



Exerciţiul 2. Fie:

câmpul vectorial $\overrightarrow{\mathbf{v}}(P) = \operatorname{grad}\left(\overrightarrow{\mathbf{c}} \cdot \operatorname{grad} f(P)\right)$, unde $\overrightarrow{\mathbf{c}} = \overrightarrow{\mathbf{i}} + \overrightarrow{\mathbf{j}} + \overrightarrow{\mathbf{k}}$,

$f(P) = \dfrac{x^4}{12} - \dfrac{x^3(y+z)}{6} + \dfrac{x^2 yz}{2} + \varphi(y - z, z - x)$, cu φ funcţie arbitrară, derivabilă, curba $(\gamma):\left\{\begin{array}{l} x^2+4y^2=1 \\ z=1 \end{array}\right.$ cilindru eliptic$\cap$plan=elipsă.



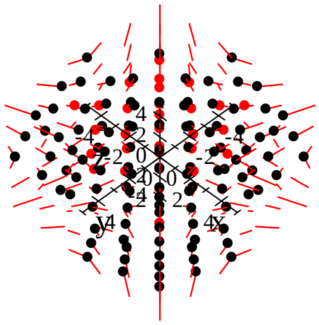
a) Să se determine liniile de câmp ale câmpului vectorial;
b) Să se scrie ecuaţia suprafeţei de câmp ce conţine (γ).

Rezolvare. $f(P)=\dfrac{x^4}{12}-\dfrac{x^3(y+z)}{6}+\dfrac{x^2yz}{2}+\varphi\left(\underbrace{y-z}_{u(x,y,z)},\underbrace{z-x}_{v(x,y,z)}\right)$

$$\left.\begin{array}{l} \operatorname{grad} f(P)=\nabla f(P)=\dfrac{\partial f}{\partial x}(P)\,\overrightarrow{\mathbf{i}}+\dfrac{\partial f}{\partial y}(P)\,\overrightarrow{\mathbf{j}}+\dfrac{\partial f}{\partial z}(P)\,\overrightarrow{\mathbf{k}} \\ \overrightarrow{\mathbf{c}}=\overrightarrow{\mathbf{i}}+\overrightarrow{\mathbf{j}}+\overrightarrow{\mathbf{k}} \end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\overrightarrow{\mathbf{c}}\cdot\operatorname{grad} f(P)=1\cdot\frac{\partial f}{\partial x}(P)+1\cdot\frac{\partial f}{\partial y}(P)+1\cdot\frac{\partial f}{\partial z}(P)=$$
$$=\frac{4x^3}{12}-\frac{3x^2(y+z)}{6}+\frac{2xyz}{2}+$$
$$+\frac{\partial\varphi}{\partial u}(u(x,y,z),v(x,y,z))\frac{\partial u}{\partial x}(x,y,z)+\frac{\partial\varphi}{\partial v}(u(x,y,z),v(x,y,z))\frac{\partial v}{\partial x}(x,y,z)+$$
$$+0-\frac{x^3}{6}+\frac{x^2z}{2}+$$
$$+\frac{\partial\varphi}{\partial u}(u(x,y,z),v(x,y,z))\frac{\partial u}{\partial y}(x,y,z)+\frac{\partial\varphi}{\partial v}(u(x,y,z),v(x,y,z))\frac{\partial v}{\partial y}(x,y,z)+$$
$$+0-\frac{x^3}{6}+\frac{x^2y}{2}+$$
$$+\frac{\partial\varphi}{\partial u}(u(x,y,z),v(x,y,z))\frac{\partial u}{\partial z}(x,y,z)+\frac{\partial\varphi}{\partial v}(u(x,y,z),v(x,y,z))\frac{\partial v}{\partial z}(x,y,z)=$$
$$=\frac{x^3}{3}-\frac{3x^2(y+z)}{6}+\frac{2xyz}{2}-\frac{x^3}{3}+\frac{x^2(y+z)}{2}$$
$$+\frac{\partial\varphi}{\partial u}(u(x,y,z),v(x,y,z))\cdot 0+\frac{\partial\varphi}{\partial v}(u(x,y,z),v(x,y,z))(-1)+$$
$$+\frac{\partial\varphi}{\partial u}(u(x,y,z),v(x,y,z))\cdot 1+\frac{\partial\varphi}{\partial v}(u(x,y,z),v(x,y,z))\cdot 0+$$
$$+\frac{\partial\varphi}{\partial u}(u(x,y,z),v(x,y,z))\cdot(-1)+\frac{\partial\varphi}{\partial v}(u(x,y,z),v(x,y,z))\cdot 1=xyz\Rightarrow$$

$$\operatorname{grad}\left(\overrightarrow{\mathbf{c}}\cdot\operatorname{grad} f(P)\right)=\frac{\partial}{\partial x}(xyz)\,\overrightarrow{\mathbf{i}}+\frac{\partial}{\partial y}(xyz)\,\overrightarrow{\mathbf{j}}+\frac{\partial}{\partial z}(xyz)\,\overrightarrow{\mathbf{k}}\Rightarrow$$
$$\overrightarrow{\mathbf{v}}(P)=yz\,\overrightarrow{\mathbf{i}}+xz\,\overrightarrow{\mathbf{j}}+xy\,\overrightarrow{\mathbf{k}}.$$



a) Conform (1) $\Rightarrow$ecuaţiile liniilor de câmp ale câmpului vectorial $\overrightarrow{\mathbf{v}}$ sunt soluţiile sistemului de ecuaţii diferenţiale::

$\dfrac{dx}{yz} = \dfrac{dy}{xz} = \dfrac{dz}{xy}$.

$\bullet \dfrac{dx}{yz} = \dfrac{dy}{xz} \Rightarrow xdx = ydy | \int_{EVS} \Rightarrow \dfrac{x^2}{2} = \dfrac{y^2}{2} + k_1 \Rightarrow$

$\boxed{x^2 - y^2 = c_1, c_1 \in \mathbb{R}.}$-o integrală primă.

$\bullet \dfrac{dx}{yz} = \dfrac{dz}{xy} \Rightarrow xdx = zdz | \int_{EVS} \Rightarrow \dfrac{x^2}{2} = \dfrac{z^2}{2} + k_2 \Rightarrow$

$\boxed{x^2 - z^2 = c_2, c_2 \in \mathbb{R}.}$-o integrală primă.

Ecuaţiile liniilor de câmp sunt date de integralele prime funcţional independente:

$(*) \begin{cases} x^2 - y^2 = c_1, c_1 \in \mathbb{R} \\ x^2 - z^2 = c_2, c_2 \in \mathbb{R} \end{cases}$.

b) Suprafeţele de câmp sunt alcătuite din linii de câmp. Ele sunt de forma:

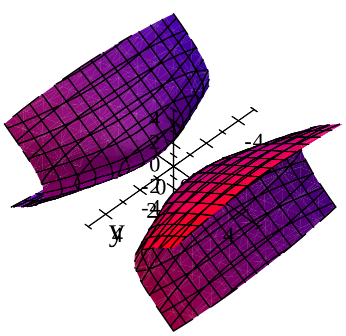
$F\left(x^2 - y^2, x^2 - z^2\right) = 0, F \in \mathcal{C}^1(\mathbb{D})$ arbitrară.

Ecuaţia suprafeţei de câmp ce conţine (γ) este soluţia pentru sistemul algebric alcătuit din ecuaţiile integralelor prime şi ecuaţiile curbei (o relaţie între x, y, z fără c_1, c_2):

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = c_1 \\ x^2 - z^2 = c_2 \\ x^2 + 4y^2 = 1 \\ z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 1 \\ x^2 = c_2 + 1 \\ y^2 = c_2 + 1 - c_1 \\ (c_2 + 1) + 4(c_2 + 1 - c_1) = 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$5c_2 - 4c_1 + 4 = 0$-relaţia de condiţie (doar între c_1, c_2). Folosind $(*) \Rightarrow$

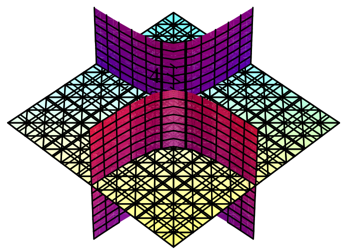
$5\left(x^2 - z^2\right) - 4\left(x^2 - y^2\right) + 4 = 0$-ecuaţia suprafeţei de câmp cerute.



Exerciţiul 3. Fie:

câmpul vectorial $\overrightarrow{\mathbf{v}}(P) = \text{grad}\, f(P) \times \text{grad}\, g(P)$, unde

$f(P) = x + y + z,$
$g(P) = xy + yz + zx.$
curba $(\gamma): \begin{cases} xy = 1 \\ z = 0 \end{cases}$ cilindru hiperbolic$\cap$planul xOy=hiperbolă echilateră.



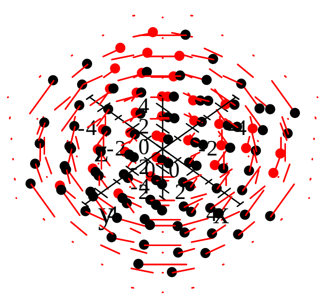
a) Să se determine liniile de câmp ale câmpului vectorial;
b) Să se scrie ecuaţia suprafeţei de câmp ce conţine (γ).
Rezolvare.

$$\operatorname{grad} f(P) = \nabla f(P) = \frac{\partial f}{\partial x}(P)\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \frac{\partial f}{\partial y}(P)\,\overrightarrow{\mathbf{j}} + \frac{\partial f}{\partial z}(P)\,\overrightarrow{\mathbf{k}} = \overrightarrow{\mathbf{i}} + \overrightarrow{\mathbf{j}} + \overrightarrow{\mathbf{k}}.$$

$$\operatorname{grad} g(P) = \nabla g(P) = \frac{\partial g}{\partial x}(P)\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \frac{\partial g}{\partial y}(P)\,\overrightarrow{\mathbf{j}} + \frac{\partial g}{\partial z}(P)\,\overrightarrow{\mathbf{k}} = (y+z)\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + (x+z)\,\overrightarrow{\mathbf{j}} + (y+x)\,\overrightarrow{\mathbf{k}}.$$

$$\operatorname{grad} f(P) \times \operatorname{grad} g(P) = \begin{vmatrix} \overrightarrow{\mathbf{i}} & \overrightarrow{\mathbf{j}} & \overrightarrow{\mathbf{k}} \\ 1 & 1 & 1 \\ y+z & x+z & y+x \end{vmatrix} = (y-z)\,\overrightarrow{\mathbf{i}} - (x-z)\,\overrightarrow{\mathbf{j}} + (x-y)\,\overrightarrow{\mathbf{k}} \Rightarrow$$

$$\overrightarrow{\mathbf{v}}(P) = (y-z)\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + (z-x)\,\overrightarrow{\mathbf{j}} + (x-y)\,\overrightarrow{\mathbf{k}}$$



a) Conform (1) $\Rightarrow$ecuaţiile liniilor de câmp ale câmpului vectorial $\overrightarrow{\mathbf{v}}$ sunt soluţiile sistemului de ecuaţii diferenţiale:

$$\frac{dx}{y-z} = \frac{dy}{z-x} = \frac{dz}{x-y}.$$

Nu se pot grupa încât să fie folosite EVS. Se folosesc şiruri de rapoarte egale.

$$\bullet \frac{dx}{y-z} = \frac{dy}{z-x} = \frac{dz}{x-y} \overset{\text{formal}}{=} \frac{1\cdot dx + 1\cdot dy + 1\cdot dz}{1\cdot(y-z) + 1\cdot(z-x) + 1\cdot(x-y)}$$

$\Rightarrow 1\cdot dx + 1\cdot dy + 1\cdot dz = 0 \Rightarrow$

$\boxed{x + y + z = c_1, c_1 \in \mathbb{R}.}$-o integrală primă.

$$\bullet \frac{dx}{y-z} = \frac{dy}{z-x} = \frac{dz}{x-y} \overset{\text{formal}}{=} \frac{x\cdot dx + y\cdot dy + z\cdot dz}{x\cdot(y-z) + y\cdot(z-x) + z\cdot(x-y)}$$

$\Rightarrow x \cdot dx + y \cdot dy + z \cdot dz = 0 \Rightarrow \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{y^2}{2} + \dfrac{z^2}{2} = k_2 \Rightarrow$

$\boxed{x^2 + y^2 + z^2 = c_2, c_2 \in \mathbb{R}.}$-o integrală primă.

Ecuaţiile liniilor de câmp sunt date de integralele prime funcţional independente:

$(*) \begin{cases} x + y + z = c_1, c_1 \in \mathbb{R} \\ x^2 + y^2 + z^2 = c_2, c_2 \in \mathbb{R} \end{cases}.$

b) Suprafeţele de câmp sunt alcătuite din linii de câmp. Ele sunt de forma:
$F\left(x + y + z, x^2 + y^2 + z^2\right) = 0, F \in \mathcal{C}^1\left(\mathbb{D}\right)$ arbitrară.

Ecuaţia suprafeţei de câmp ce conţine (γ) este soluţia pentru sistemul algebric alcătuit din ecuaţiile integralelor prime şi ecuaţiile curbei (o relaţie între x, y, z fără c_1, c_2):

$\begin{cases} x + y + z = c_1 \\ x^2 + y^2 + z^2 = c_2 \\ xy = 1 \\ z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 0 \\ x + y = c_1 \\ x^2 + y^2 = c_2 \\ (x + y)^2 - 2 \cdot 1 = c_2 \end{cases} \Rightarrow$

$c_1^2 - c_2 - 2 = 0$-relaţia de condiţie (doar între c_1, c_2). Folosind $(*) \Rightarrow$
$(x + y + z)^2 - \left(x^2 + y^2 + z^2\right) - 2 = 0 \Rightarrow xy + yz + zx + 1 = 0$-ecuaţia suprafeţei de câmp cerute.