ANALIZĂ ELEMENTARĂ

- **Limite de şiruri elementare:**

1) $$\lim_{n\to\infty} q^n = \begin{cases} 0, & \text{dacă } |q| < 1, \\ 1, & \text{dacă } q = 1, \\ \infty, & \text{dacă } q > 1, \\ \text{nu există, dacă } q \leq -1 \end{cases}$$

2) $$\lim_{n\to\infty} \left(a_1 n^p + a_2 n^{p-1} + a_3 n^{p-2} + \cdots a_p n + a_{p+1}\right) = \begin{cases} \infty \text{ , dacă } a_1 > 0, \\ -\infty \text{ , dacă } a_1 < 0 \end{cases} , \; p \in \mathbb{N}^*$$

(limită dintr-un polinom de grad p în variabila n)

3) $$\lim_{n\to\infty} \frac{a_1 n^p + a_2 n^{p-1} + a_3 n^{p-2} + \cdots a_p n + a_{p+1}}{b_1 n^q + b_2 n^{q-1} + b_3 n^{q-2} + \cdots b_q n + b_{q+1}} = \begin{cases} \infty \dfrac{a_1}{b_1} \text{ , dacă } p > q, \\ \dfrac{a_1}{b_1} \text{ , dacă } p = q, \\ 0 \text{ , dacă } p < q \end{cases} , \; p, q \in \mathbb{N}$$

(limită dintr-o fracţie de polinoame în variabila n)

4) $$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin x_n}{x_n} = 1, \text{ unde } x_n \to 0$$

5) $$\lim_{n\to\infty} \frac{\operatorname{tg} x_n}{x_n} = 1, \text{ unde } x_n \to 0$$

6) $$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{x_n}\right)^{x_n} = e, \text{ unde } x_n \to \infty,$$

7) $$\lim_{n\to\infty} (1 + x_n)^{\frac{1}{x_n}} = e, \text{ unde } x_n \to 0$$

8) $$\lim_{n\mapsto\infty} \frac{e^n}{n^p} = \infty \quad (p \in \mathbb{N})$$

9) $$\lim_{n\mapsto\infty} \frac{\ln n}{n^p} = 0 \quad (p \in \mathbb{N}^*)$$

10) $$\lim_{n\mapsto\infty} \frac{a^{x_n} - 1}{x_n} = \ln a, \text{ unde } x_n \to 0$$

11) $$\lim_{n\mapsto\infty} \frac{\ln(1 + x_n)}{x_n} = 1, \text{ unde } x_n \to 0$$

12) $$\lim_{n\mapsto\infty} \sqrt[n]{n} = 1, \; \left(\sqrt[n]{n}\right)_n \text{ este şir descrescător}$$

- **Limite de funcţii elementare:**

1) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{1}{x} = \frac{1}{0_+} = +\infty$

2) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{1}{x} = \frac{1}{0_-} = -\infty$

3) $\lim\limits_{x\to\infty} \ln x = \ln\infty = +\infty$

4) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \ln x = \ln 0_+ = -\infty$

5) $\lim\limits_{x\to\infty} e^x = e^\infty = +\infty$

6) $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = e^{-\infty} = \frac{1}{e^\infty} = 0$

7) $\lim\limits_{x\to\infty} a^x = a^\infty = \begin{cases} +\infty, & \text{dacă } a>1 \\ 0, & \text{dacă } 0<a<1 \end{cases}$

8) $\lim\limits_{x\to\infty} x^a = \infty^a = \begin{cases} +\infty, & \text{dacă } a>0 \\ 0, & \text{dacă } a<0 \end{cases}$

9) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

10) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1$

11) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$

12) $\lim\limits_{x\to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$

13) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \quad (p\in\mathbb{R})$

14) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x^p} = 0 \quad (p\in\mathbb{R}^*)$

15) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{a^x-1}{x} = \ln a$

16) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$

17) $$\lim_{x\to\infty} \frac{a_1x^p + a_2x^{p-1} + \cdots + a_px + a_{p+1}}{b_1x^q + b_2x^{q-1} + \cdots + b_qx + b_{q+1}} = \begin{cases} \frac{a_1}{b_1}, & \text{dacă } p=q \\ 0, & \text{dacă } p<q \\ +\infty, & \text{dacă } p>q \end{cases}$$

- **Proprietăţi ale funcţiei exponenţiale:**

$$1)\quad e^x\cdot e^y=e^{x+y},\quad e^{x-y}=\frac{e^x}{e^y}$$

$$2)\quad e^x\geq 1,\ \forall x\geq 0,\quad e^x<1,\ \forall x<0,\quad e^0=1$$

$$3)\quad \text{Funcţia } x\to e^x \text{ este crescătoare } \forall x\in\mathbb{R}$$

proprietăţi ale funcţiei logaritm:

$$4)\quad \ln(xy)=\ln x+\ln y,\quad \ln\frac{x}{y}=\ln x-\ln y,\quad \ln\frac{1}{x}=-\ln x$$

$$5)\quad \ln x\geq 0,\ \forall x\geq 1,\quad \ln x<0,\ \forall 0<x<1,\quad \ln 1=0,\ \ln e=1$$

$$6)\quad \text{Funcţia } x\to \ln x \text{ este crescătoare } \forall x>0$$

şi

$$7)\quad e^{\ln x}=x=\ln e^x,\ \forall x>0$$

- **Proprietăţi ale funcţiei sinus şi cosinus:**

$$1)\quad \cos(2n\pi)=1,\quad \cos\left((2n+1)\frac{\pi}{2}\right)=0,\quad \cos((2n+1)\pi)=-1,\ \forall n\in\mathbb{Z}$$

$$2)\quad \sin(n\pi)=0,\quad \sin\left((2n+1)\frac{\pi}{2}\right)=(-1)^n,\ \forall n\in\mathbb{Z}$$

$$3)\quad \sin(2n\pi+x)=\sin x,\quad \cos(2n\pi+x)=\cos x,\ \forall n\in\mathbb{Z},x\in\mathbb{R}$$

(adică funcţiile $\sin$ şi $\cos$ sunt periodice)

4) funcţiile periodice nu au limtă la infinit (deci nu $\exists\ \sin\infty \overset{def}{=} \lim\limits_{x\to\infty}\sin x$)

$$5)\quad |\sin x|\leq 1,\quad |\cos x|\leq 1,\ \forall x\in\mathbb{R}$$

6) există limita $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\underbrace{1/x}_{\to 0}\underbrace{\sin x}_{mărginită}=0$

- **Seria armonică generalizată**

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = \begin{cases} \text{convergentă}\,, & \text{dacă } p > 1 \\ \text{divergentă}\,, & \text{dacă } p \leq 1 \end{cases}$$

- **Seria geometrică**

$$\sum_{n=1}^{\infty} q^n = \begin{cases} \text{convergentă}\,, & \text{dacă } |q| < 1 \\ \text{divergentă}\,, & \text{dacă } |q| \geq 1 \end{cases}$$

- Binomul lui Newton

$$(a+b)^p = a^p + C_p^1\, a^{p-1}b + C_p^2\, a^{p-2}b^2 + \cdots + C_p^{p-1}\, ab^{p-1} + b^p\,, \text{ unde } p \in \mathbb{N}^*$$

- Suma primilor n termeni ai unei progresii geometrice

$$1 + q + q^2 + q^3 + \cdots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q},\ \forall q \neq 1$$

- Suma primelor n numere naturale

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n\,(n+1)}{2}$$

şi suma pătratelor primelor n numere naturale

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n\,(n+1)\,(2n+1)}{6}$$

- Partea întreagă $[a] \in \mathbb{Z}$ este cel mai mare întreg din stânga numărului real a, adică

$$[a] \leq a < [a] + 1,\ \forall a \in \mathbb{R}$$

De asemenea, partea întreagă verifică şi

$$a - 1 < [a] \leq a,\ \forall a \in \mathbb{R}$$

- Dacă avem ecuaţia

$$ax^2 + bx + c = 0$$

cu rădăcinile x_1, x_2, atunci are loc descompunerea

$$ax^2 + bx + c = a\,(x - x_1)\,(x - x_2)$$

Derivatele funcţiilor elementare

1. $c^{'} = 0$
2. $x^{'} = 1$
3. $(x^n)^{'} = nx^{n-1}\ ,\ n \in \mathbb{N}$
4. $(x^a)^{'} = ax^{a-1}\ ,\ a \in \mathbb{R}_+$
5. $(\sqrt{x})^{'} = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ (obţinută în particular pentru $a = 1/2$)
6. $\left(\dfrac{1}{x}\right)^{'} = \dfrac{-1}{x^2}$ (obţinută în particular pentru $a = -1$)
7. $(a^x)^{'} = a^x \ln a\ ,\ a \in \mathbb{R}_+,\ a \neq 1$
8. $(e^x)^{'} = e^x$ (obţinută în particular pentru $a = e$)
9. $(\ln x)^{'} = \dfrac{1}{x}$
10. $(\sin x)^{'} = \cos x$
11. $(\cos x)^{'} = -\sin x$
12. $(\operatorname{tg} x)^{'} = \dfrac{1}{\cos^2 x}$
13. $(\operatorname{ctg} x)^{'} = \dfrac{-1}{\sin^2 x}$
14. $(\arcsin x)^{'} = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
15. $(\arccos x)^{'} = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
16. $(\operatorname{arctg} x)^{'} = \dfrac{1}{1+x^2}$
17. $(\operatorname{arcctg} x)^{'} = \dfrac{-1}{1+x^2}$
18. $(\operatorname{sh} x)^{'} = \operatorname{ch} x$, unde $\operatorname{sh} x \overset{def}{=} \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ este sinusul hiperbolic
19. $(\operatorname{ch} x)^{'} = \operatorname{sh} x$ unde $\operatorname{ch} x \overset{def}{=} \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ este cosinusul hiperbolic

Derivatele funcţiilor compuse

1. $(u^n)' = nu^{n-1} \cdot u'$, $n \in \mathbb{N}$
2. $(u^a)' = au^{a-1} \cdot u'$, $a \in \mathbb{R}_+$
3. $(\sqrt{u})' = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u'$ (obţinută în particular pentru $a = 1/2$)
4. $\left(\frac{1}{u}\right)' = \frac{-1}{u^2} \cdot u'$ (obţinută în particular pentru $a = -1$)
5. $(a^u)' = a^u \ln a \cdot u'$, $a \in \mathbb{R}_+,\ a \neq 1$
6. $(e^u)' = e^u \cdot u'$ (obţinută în particular pentru $a = e$)
7. $(\ln u)' = \frac{1}{u} \cdot u'$
8. $(\sin u)' = \cos u \cdot u'$
9. $(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$
10. $(\operatorname{tg} u)' = \frac{1}{\cos^2 u} \cdot u'$
11. $(\operatorname{ctg} u)' = \frac{-1}{\sin^2 u} \cdot u'$
12. $(\arcsin u)' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$
13. $(\arccos u)' = \frac{-1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$
14. $(\operatorname{arctg} u)' = \frac{1}{1+u^2} \cdot u'$
15. $(\operatorname{arcctg} u)' = \frac{-1}{1+u^2} \cdot u'$
16. $(\operatorname{sh} u)' = \left(\frac{e^u - e^{-u}}{2}\right)' = \operatorname{ch} u \cdot u'$
17. $(\operatorname{ch} u)' = \left(\frac{e^u + e^{-u}}{2}\right)' = \operatorname{sh} u \cdot u'$

Operaţii cu funcţii derivabile

1. $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$
2. $(C \cdot f)'(x) = C \cdot f'(x)$
3. $(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$
4. $\left(\frac{1}{g}\right)'(x) = \frac{-1}{g^2(x)} g'(x)$
5. $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}$

Integrale nedefinite

1. $\int dx = x + \mathcal{C}$
2. $\int x^{\alpha} dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + \mathcal{C}\ ,\ \alpha \in \mathbb{R}\,, \alpha \neq -1$
3. $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + \mathcal{C}$
4. $\int \frac{1}{x^2+a^2} dx = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + \mathcal{C}\ , a \neq 0$
5. $\int \frac{1}{x^2-a^2} dx = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + \mathcal{C}\ , a \neq 0$
6. $\int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} dx = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + \mathcal{C}\ , a \neq 0$
7. $\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \arcsin\frac{x}{a} + \mathcal{C}\ , a > 0$
8. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + \mathcal{C}\ , a > 0,\ a \neq 1\ ,\ \int e^x dx = e^x + \mathcal{C}$
9. $\int \sin x dx = -\cos x + \mathcal{C}$
10. $\int \cos x dx = \sin x + \mathcal{C}$
11. $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + \mathcal{C}$
12. $\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{ctg} x + \mathcal{C}$
13. $\int \frac{1}{\sin x} dx = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + \mathcal{C}$
14. $\int \frac{1}{\cos x} dx = \ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| + \mathcal{C}$
15. $\int \operatorname{tg} x dx = -\ln|\cos x| + \mathcal{C}$
16. $\int \operatorname{ctg} x dx = \ln|\sin x| + \mathcal{C}$

Metode de calcul

1. Formula de **integrare prin părţi** pentru integrala definită
$$\int_a^b f(x)\, g^{'}(x)\, dx = [f(x)\, g(x)]\Big|_a^b - \int_a^b f^{'}(x)\, g(x)\, dx.$$
2. Prima **metodă de schimbare de variabilă** pentru integrala definită: pentru a calcula $\int_a^b f(u(x))\, u^{'}(x)\, dx$ se notează $y \overset{not}{=} u(x)$ deci $dy = u^{'}(x)\, dx$ şi are loc
$$\int_a^b f(u(x))\, u^{'}(x)\, dx = \int_{u(a)}^{u(b)} f(y)\, dy = F(y)\Big|_{u(a)}^{u(b)} = F(u(b)) - F(u(a)).$$