Calcul Integral, Parţial
Barem de corectare
Miercuri, 16 Noiembrie 2016

1. Din oficiu .... pct.

   $(a)\quad I = \int_1^2 \frac{1}{x\sqrt{x^2+2x-3}}\,dx + \int_2^\infty \frac{1}{x\sqrt{x^2+2x-3}}\,dx$ .... pct.

   I_1 este improprie de specia II şi este (C) aplicând "Criteriul în λ" (luăm $\lambda = 1/2$) .... pct.

   I_2 este improprie de specia I şi este (C) aplicând "Criteriul în α" (luăm $\alpha = 2$) .... pct.

   Deci I este (C) .... pct.

   $(b)\quad I = \int_0^1 e^{\sin x}\,\frac{\sin 2x}{x}\,dx + \int_1^\infty e^{\sin x}\,\frac{\sin 2x}{x}\,dx$ .... pct.

   I_1 este improprie de specia II şi este (C) deoarece $|I_1| \le \int_0^1 e^{\sin x}\,\frac{|\sin 2x|}{x}\,dx$ care este (C) deoarece aplicăm "Criteriul în λ" (luăm $\lambda = 0$)
   (**sau**: integrandul este o funcţie care se poate prelungi prin continuitate în 0 deci integrala este bine definită) .... pct.

   $I_2 = \int_1^\infty \frac{1}{x}\cdot 2\sin x\cos x\, e^{\sin x}\,dx$ este improprie de specia I şi este (C) aplicând "Criteriul lui Dirichlet" .... pct.

   Într-adevăr,

   funcţia $x \mapsto \frac{1}{x}$ este descrescătoare la 0 pentru $x \to \infty$ iar integrala $\int_a^b 2\sin x\cos x\, e^{\sin x}\,dx$ este mărginită deoarece se poate calcula:

   $$\int_a^b 2\sin x\cos x\, e^{\sin x}\,dx = \int_{\sin a}^{\sin b} 2t\, e^t\,dt = 2e^t\,(t-1)\,\Big|_{t=\sin a}^{t=\sin b}$$

   şi deci $\left|\int_a^b 2\sin x\cos x\, e^{\sin x}\,dx\right| \le 2\cdot e\cdot 2$, pentru orice a, b .... pct.

2. Din oficiu .... pct.

   Se aplică **Formula lui Froullani** făcută la curs .... pct.

   sau

   se porneşte de la $\int_0^\infty e^{-tx}dt = \frac{1}{x}$ şi

   $$I = \int_0^\infty \frac{\pi\sin(ax) - a\sin(\pi x)}{x^2}\,dx = \int_0^\infty \frac{\pi\sin(ax) - a\sin(\pi x)}{x}\cdot\left(\int_0^\infty e^{-tx}dt\right)dx$$

   $= \int_0^\infty \left(\int_0^\infty \frac{\pi\sin(ax) - a\sin(\pi x)}{x}\cdot e^{-tx}dt\right)dx$ şi se schimbă ordinea de integrare şi apoi pentru fiecare integrală de tipul $\int_0^\infty \frac{\sin(cx)}{x} e^{-tx} dx$ se foloseşte Problema 3. .... pct.

sau

se porneşte de la $\displaystyle\int_0^\infty te^{-tx} dt = \frac{1}{x^2}$ şi

$$I = \int_0^\infty \frac{\pi \sin(ax) - a\sin(\pi x)}{x^2} dx = \int_0^\infty [\pi \sin(ax) - a\sin(\pi x)] \cdot \left(\int_0^\infty te^{-tx} dt\right) dx$$

$= \displaystyle\int_0^\infty \left(\int_0^\infty [\pi \sin(ax) - a\sin(\pi x)] \cdot te^{-tx} dt\right) dx$ şi se schimbă ordinea de integrare .. pct.

3. Din oficiu .... pct.

$$I(\alpha) = \int_0^1 e^{-kx} \frac{\sin(\alpha x)}{x} dx + \int_1^\infty e^{-kx} \frac{\sin(\alpha x)}{x} dx$$

I_1 este (C) (vezi rezolvarea problemei $1.b$) iar I_2 este (C) aplicând criteriul lui Abel, deoarece $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\sin(\alpha x)}{x} dx$ este (C) conform criteriului lui Dirichlet iar funcţia $x \mapsto e^{-kx}$ este monotonă şi mărginită pe $[1, \infty)$ cu $\lim_{x\to\infty} e^{-kx} = 0$ pentru orice $k > 0$ .... pct.

Calculăm derivata şi apoi aplicăm metoda de integrare prin părţi. Obţinem $I'(\alpha) = \frac{k}{\alpha^2+k^2}$.
Prin integrare obţinem $I(\alpha) = \displaystyle\int \frac{k}{\alpha^2 + k^2} d\alpha = \operatorname{arctg}\left(\frac{\alpha}{k}\right) + C$, unde $I(0) = 0$, deci $C = 0$.
Deci $I(1) = \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{k}\right) = \displaystyle\int_0^\infty e^{-kx} \frac{\sin(x)}{x} dx$ şi, trecând la limită,

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{k\to 0_+} \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{k}\right) = \lim_{k\to 0_+} \int_0^\infty e^{-kx} \frac{\sin(x)}{x} dx = \int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x} dx.$$

.... pct.

4. Din oficiu .... pct.

Se calculează $ds = a\, d\varphi$ .... pct.

$I = \displaystyle\int_0^\pi \frac{a^3}{2} \sin^2\varphi\, d\varphi = \frac{a^3}{2} \int_0^\pi \frac{1 - \cos(2\varphi)}{2} d\varphi$ .... pct.

5. Din oficiu .... pct.

Se verifică condiţia $\dfrac{\partial P}{\partial y}(x,y) = \dfrac{\partial Q}{\partial x}(x,y) = \dfrac{1 - x^2y^2}{(1 + x^2y^2)^2}$ .... pct.

Se determină, prin integrare, primitiva $F(x,y) = \operatorname{arctg}(xy) + C, \quad C \in \mathbb{R}$ .... pct.

Deci $I = \displaystyle\int_{(\widehat{AB})} dF(x,y) = F(B) - F(A) = F(x_B, y_B) - F(x_A, y_A)$ .... pct.

6. Din oficiu .... pct.

Se folosesc coordonatele polare $x = \rho\cos\theta$, $y = \rho\sin\theta$ cu iacobianul $J = \rho$ .... pct.

Se desenează domeniul şi se determină domeniul pentru ρ şi pentru θ :
$\rho \in [1, 2]$ iar $\theta \in [\theta_1, \theta_2] = [\pi/4, \pi/4 + \pi/2]$ .... pct.

Se scrie şi se calculează $I = \displaystyle\int_1^2 \left(\int_{\pi/4}^{3\pi/4} \rho^2 \cdot \rho \, d\theta \right) d\rho$ .... pct.