Facultatea de Hidrotehnică, Geodezie şi Ingineria Mediului
Analiza Matematică II, Semestrul II
Conf. dr. Lucian MATICIUC

CURS I – II

Capitolul I: Integrala definită. Primitive

1 Integrabilitate Riemann. Criterii de integrabilitate

Fie $[a, b]$ un interval compact (închis şi mărginit).

Definiţia 1 *1) O familie finită de puncte $\Delta = (x_0, x_1, ..., x_n)$ astfel încât $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$, se numeşte* ***diviziune*** *a intervalului $[a, b]$.*

2) Lungimea celui mai mare interval de forma $[x_i, x_{i+1}]$, $i = \overline{0, n-1}$ se numeşte ***norma diviziunii*** *şi se notează cu $\|\Delta\| \overset{def}{=} \max\limits_{i=\overline{0,n-1}} (x_{i+1} - x_i)$.*

3) Punctele arbitrare $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$, $i = \overline{0, n-1}$ formează un ***sistem de punte intermediare*** *asociat diviziunii Δ.*

4) Suma notată prin $\sigma_\Delta (f) \overset{def}{=} \sum\limits_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)(x_{i+1} - x_i)$ se numeşte ***suma Riemann*** *asociată funcţiei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ corespunzătoare diviziunii Δ şi a sistemului de punte intermediare $\{\xi_i\}_{i=\overline{0,n-1}}$.*

Definiţia 2 *Spunem că funcţia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ este* ***integrabilă Riemann*** *pe $[a, b]$ dacă, oricare ar fi un şir de diviziuni $(\Delta_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $\Delta_n = (x_0^n, x_1^n, ..., x_{k_n}^n)$cu norma $\|\Delta_n\| \longrightarrow 0$, pentru $n \to \infty$, oricare ar fi sistemul de puncte intermediare $\xi_i^n \in [x_i^n, x_{i+1}^n]$, $i = \overline{0, k_n - 1}$, şirul sumelor Riemann $(\sigma_{\Delta_n}(f))_{n\in\mathbb{N}}$ este un şir convergent.*

Numărul $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_{\Delta_n}(f)$ din această definiţie se va nota cu $\int_a^b f(x)\, dx$ şi se numeşte **integrala definită Riemann** a funcţiei f pe $[a, b]$.

Au loc următoarele rezultate

Teorema 3 *Orice funcţie continuă pe $[a, b]$ este integrabilă pe $[a, b]$.*

Teorema 4 *Orice funcţie monotonă pe $[a, b]$ este integrabilă pe $[a, b]$.*

Teorema 5 *Orice funcţie integrabilă pe $[a, b]$ este mărginită pe $[a, b]$.*

2 Proprietăţi ale funcţiilor integrabile

Proposiţia 6 *Dacă f este integrabilă pe $[a,b]$ atunci*

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx \quad \text{şi} \quad \int_a^a f(x)\,dx = 0.$$

Proposiţia 7 (a) *(**proprietatea de liniaritate**) Dacă f,g sunt integrabile pe $[a,b]$ şi $\alpha,\beta \in R$ atunci funcţia $\alpha f + \beta g$ este integrabilă pe $[a,b]$ şi are loc*

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))\,dx = \alpha \int_a^b f(x)\,dx + \beta \int_a^b g(x)\,dx$$

(b) *(**proprietatea de aditivitate**) Dacă f este integrabilă pe $[a,b]$ atunci oricare ar fi punctul $c \in [a,b]$ avem*

$$\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$$

(c) *(**proprietatea de monotonie**) Dacă f,g sunt integrabile pe $[a,b]$ şi dacă $f \le g$ pe $[a,b]$ atunci*

$$\int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx$$

(d) *Dacă f este integrabilă pe $[a,b]$ atunci $|f|$ este integrabilă pe $[a,b]$ şi*

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \le \int_a^b |f(x)|\,dx$$

Teorema 8 (de medie) *Dacă f este continuă pe $[a,b]$ (deci şi integrabilă pe $[a,b]$) şi dacă g este integrabilă pe $[a,b]$ şi $g \ge 0$, atunci există $\xi \in (a,b)$ astfel încât*

$$\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx = f(\xi)\int_a^b g(x)\,dx$$

În particular, pentru $g \equiv 1$, obţinem

Corolarul 9 *Dacă f este continuă pe $[a,b]$ atunci există $\xi \in (a,b)$ astfel încât*

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(\xi)\,(b-a)$$

Proposiţia 10 *Dacă f este integrabilă pe intervalele $[a,c]$ şi $[c,b]$ atunci f este integrabilă pe $[a,b]$.*

3 Primitive. Metode de calcul

În continuare fie f o funcţie integrabilă pe $[a,b]$ şi $c \in [a,b]$

Definiţia 11 *Funcţia $F : [a,b] \to R$, dată de*

$$F(x) = \int_c^x f(t)\,dt$$

*se numeşte **integrala nedefinită** a funcţiei f*

Teorema 12 (continuitatea integralei nedefinite) *Fie f o funcţie integrabilă pe $[a,b]$. Funcţia $F:[a,b]\to R$, $F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$ este continuă pe $[a,b]$.*

Demonstraţie. Fie $x_0\in(a,b)$ un punct arbitrar. Funcţia f este mărginită pe $[a,b]$ (deoarece este integrabilă pe $[a,b]$) adică $|f(x)|\le M$, $\forall\, x\in[a,b]$. Avem că

$$F(x)-F(x_0)=\int_a^x f(t)\,dt-\int_a^{x_0} f(t)\,dt=\int_{x_0}^x f(t)\,dt$$

deci

$$|F(x)-F(x_0)|=\left|\int_{x_0}^x f(t)\,dt\right|\le\left|\int_{x_0}^x |f(t)|\,dt\right|\le\left|\int_{x_0}^x M\,dt\right|=M\,|x-x_0|$$

De aici avem continuitatea lui F în x_0, adică $\lim\limits_{x\mapsto x_0}F(x)=F(x_0)$. ■

Teorema 13 (derivabilitatea integralei nedefinite) *Fie f o funcţie continuă pe $[a,b]$. Funcţia $F:[a,b]\to R$, $F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$ este derivabilă pe (a,b) şi $F'(x)=f(x)$ (sau echivalent $\frac{dF}{dx}(x)=f(x)$).*

Demonstraţie. Demonstraţie: Fie $x_0\in(a,b)$ un punct arbitrar. Avem

$$F(x)-F(x_0)=\int_a^x f(t)\,dt-\int_a^{x_0} f(t)\,dt=\int_{x_0}^x f(t)\,dt\ ,\ \forall\, x\in(a,b)\ ,\ x\neq x_0$$

Conform unei teoreme de medie, deoarece f este continuă, avem că $\exists\ \xi$ între x_0 şi x a.î. $F(x)-F(x_0)=f(\xi)(x-x_0)$. Deci $\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0}=f(\xi)$, şi trecând la limită obţin, deoarece f este continuă

$$\lim_{x\mapsto x_0}\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\mapsto x_0}f(\xi)=f(x_0)$$

(dacă ξ este între x_0 şi x şi dacă $x\to x_0$ atunci $\xi\to x_0$). Deci există $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0}=f(x_0)\Leftrightarrow F'(x_0)=f(x_0)$. ■

Definiţia 14 *Se numeşte **primitivă a funcţiei** f pe $[a,b]$ o funcţie F cu proprietatea că este derivabilă pe $[a,b]$ şi are loc $F'(x)=f(x)$, $\forall\, x\in[a,b]$.*

Remarca 15 *Dacă f admite primitiva F atunci orice altă primitivă este de forma $F+C$, $C\in\mathbb{R}$*

Remarca 16 *Dacă f admite primitiva F atunci mulţimea $\{F+C,\ C\in R\}$ se numeşte tot **integrala nedefinită a lui f şi se notează cu $\int f(x)\,dx$***

Remarca 17 *Să remarcăm că integrala definită $\int_a^b f(x)\,dx$ este un număr, pe când primitiva unei funcţii este o funcţie (iar integrala nedefinită este mulţime infinită de funcţii).*

Exemplul 18 *Determinaţi primitivele următoarelor funcţii:*
a) $f(x)=x^4$, *b)* $f(x)=e^{3x}$, *c)* $f(x)=\sin(5x)$, *d)* $f(x)=\cos(2x)$.

Propoziţia 19 (proprietatea de liniaritate) *Dacă f, g admit primitive şi $\alpha, \beta \in R$ atunci funcţia $\alpha f + \beta g$ admite primitive şi are loc*

$$\int (\alpha f(x) + \beta g(x))\, dx = \alpha \int f(x)\, dx + \beta \int g(x)\, dx.$$

Exemplul 20 *Calculaţi următoarele primitive:*

a) $\int \left(4x^2 + 3x - 5\right) dx$, *b)* $\int \cos^2 x\, dx$, *c)* $\int \sin^2 x\, dx$.
(se vor folosi formulele $\cos(2x) = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x$ *şi* $\sin(2x) = 2 \sin x \cos x$*).*

Teorema 21 (formula lui Leibniz-Newton) *Fie f o funcţie integrabilă şi care admite primitive pe $[a, b]$. Atunci are loc*

$$\int_a^b f(x)\, dx = F(x)\big|_a^b = F(b) - F(a)$$

oricare ar fi F o primitivă a lui f.

Demonstraţie. Fie F o primitivă a lui f. Fie Δ_n un şir de diviziuni ale lui $[a, b]$ cu norma $||\Delta_n|| \to 0$. Conform teoremei creşterilor finite a lui Lagrange avem că există $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$ a.î.

$$F(x_{i+1}) - F(x_i) = F'(\xi_i)(x_{i+1} - x_i) = f(\xi_i)(x_{i+1} - x_i)\,,\ i = \overline{0, n-1}$$

Deci suma Riemann asociată diviziunii d cu s.p.i. date de Teorema lui Lagrange este

$$\sigma_{d_n} = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)(x_{i+1} - x_i) = \sum_{i=0}^{n-1} (F(x_{i+1}) - F(x_i)) = F(b) - F(a)$$

Deci şirul sumelor Riemann este constant deci $\sigma_{d_n} \to [F(b) - F(a)]$. Pe de altă parte, f fiind integrabilă, avem că $\sigma_{d_n} \to \int_a^b f(x)\, dx$. Limita fiind unică obţin că

$$\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a)\,.$$

■

Exemplul 22 *Calculaţi următoarele integrale definite:*

a) $\int_0^1 x^5 dx$, *b)* $\int_0^1 \sqrt{x} dx$, *c)* $\int_0^\pi \sin x dx$, *d)* $\int_2^6 \frac{1}{x} dx$.

Teorema 23 (metoda de integrare prin părţi) *Dacă f, g sunt derivabile cu derivatele continue pe intervalul I, atunci*

$$\int f(x)\, g'(x)\, dx = f(x)\, g(x) - \int f'(x)\, g(x)\, dx$$

Demonstraţie. Din ipoteză avem că funcţiile $f(x)g'(x)$ şi $f'(x)g(x)$ sunt continue, deci integralele $\int f'(x)g(x)\,dx$ şi $\int f(x)g'(x)\,dx$ au sens. Avem $(fg)' = f'g + fg'$ deci

$$\int \big(f'(x)g(x) + f(x)g'(x)\big)\,dx = \int (f(x)g(x))'\,dx = f(x)g(x) + C$$

deci

$$\begin{aligned}\int f(x)g'(x)\,dx &= f(x)g(x) + C - \int f'(x)g(x)\,dx \\ &= f(x)g(x) - \left(\int f'(x)g(x)\,dx - C\right)\end{aligned}$$

Dar

$$\int f'(x)g(x)\,dx - C = \int f'(x)g(x)\,dx$$

deci obţinem concluzia. ■

Propoziţia 24 *În aceleaşi condiţii ca mai sus are loc* ***formula de integrare prin părţi pentru integrale definite***

$$\int_a^b f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x)\big|_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)\,dx$$

Exemplul 25 *Calculaţi, folosind metoda de integrare prin părţi, următoarele integrale:*

a) $\int xe^{ax}\,dx$, *b)* $\int x^2e^{3x}\,dx$, *c)* $\int \ln x\,dx$, *d)* $\int x\ln x dx$,

e) $\int e^{ax}\sin(bx)\,dx$, *f)* $\int x^2\sin x\,dx$, *g)* $\int \ln^3 x\,dx$, *h)* $\int \sqrt{x^2+a}dx$, $a \in \mathbb{R}$

i) $\int \sqrt{1+x^2}dx$, *j)* $\int \sqrt{3+x^2}dx$, *k)* $\int \sqrt{1-x^2}dx$, *l)* $\int \sqrt{2-x^2}dx$,

e) Folosim $e^{ax} = \frac{1}{a}(e^{ax})'$:

$$\int e^{ax}\sin(bx)\,dx = \int \frac{1}{a}(e^{ax})'\sin(bx)\,dx = \frac{1}{a}e^{ax}\sin(bx) - \int \frac{1}{a}e^{ax}(\sin(bx))'\,dx =$$

$$= \frac{1}{a}e^{ax}\sin(bx) - \frac{b}{a}\int e^{ax}\cos(bx)\,dx = \textit{mai aplicăm odată}$$

$$= \frac{1}{a}e^{ax}\sin(bx) - \frac{b}{a}\int \frac{1}{a}(e^{ax})'\cos(bx)\,dx =$$

$$= \frac{1}{a}e^{ax}\sin(bx) - \frac{b}{a^2}\left(e^{ax}\cos(bx) - \int e^{ax}(\cos(bx))'\,dx\right) =$$

$$= \frac{1}{a}e^{ax}\sin(bx) - \frac{b}{a^2}\left(e^{ax}\cos(bx) + \int be^{ax}\sin(bx)\,dx\right) =$$

$$= \frac{1}{a}e^{ax}\sin(bx) - \frac{b}{a^2}e^{ax}\cos(bx) - \frac{b^2}{a^2}\int e^{ax}\sin(bx)\,dx$$

Deci

$$\int e^{ax}\sin(bx)\ dx+\frac{b^2}{a^2}\int e^{ax}\sin(bx)\,dx=\frac{1}{a}e^{ax}\sin(bx)-\frac{b}{a^2}e^{ax}\cos(bx)+C\ ,\quad C\in\mathbb{R}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\int e^{ax}\sin(bx)\ dx=\frac{a^2}{a^2+b^2}\left(\frac{1}{a}e^{ax}\sin(bx)-\frac{b}{a^2}e^{ax}\cos(bx)\right)+C,\ C\in\mathbb{R}$$

Observaţie: putem pleca şi de la $\sin(bx)=\frac{-1}{b}(\cos(bx))'$.

f) Observăm că $x^2=\left(\frac{x^3}{3}\right)'$ *şi că* $\sin x=-(\cos x)'$ *deci plecăm de la funcţia* $\sin$.

Teorema 26 (prima metodă de schimbare de variabilă) *Fie funcţiile* $u:I\to J$ *şi* $f:J\to\mathbb{R}$, *unde* I,J *sunt intervale. Dacă* u *este derivabilă pe* I *iar* f *admite primitive pe* J *atunci funcţia* $f(u)\,u':I\to R$ *admite primitive pe* I *şi are loc*

$$\int f(u(x))\,u'(x)\,dx=F(u(x))+C$$

unde F *este o primitivă a lui* f.

Demonstraţie. Avem că F este derivabilă, deci funcţia $F(u(x))$ este derivabilă şi are loc

$$(F(u(x)))'=F'(u(x))\,u'(x)=f(u(x))\,u'(x)$$

adică funcţia $F(u(x))$ este o primitivă a lui $f(u(x))\,u'(x)$ deci

$$\int f(u(x))\,u'(x)\,dx=F(u(x))+C$$

■

Remarca 27 *Practic: notăm* $y\overset{not}{=}u(x)$ *deci* $dy=u'(x)\,dx$ *deci*

$$\int f(u(x))\,u'(x)\,dx=\int f(y)\,dy=F(y)+C=F(u(x))+C$$

Propoziţia 28 (prima metodă de schimbare de variabilă pentru integrala definită) *Dacă* u *este derivabilă pe* J *cu derivata continuă şi* f *este continuă pe* I, *atunci*

$$\int_a^b f(u(x))\,u'(x)\,dx=\int_{u(a)}^{u(b)}f(y)\,dy=F(u(b))-F(u(a))$$

Exemplul 29 *Calculaţi următoarele integrale folosind prima metodă de schimbare de variabilă:*

$a)\int xe^{x^2}dx\ ,\quad b)\int \mathrm{tg}x\ dx\ ,\quad c)\int\frac{1}{e^x+e^{-x}}dx\ ,\quad d)\int\frac{x+\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}dx\ ,\quad e)\int\frac{1}{x\ln^2 x}dx\ ,$

$f)\int_0^{\pi/2}\frac{\cos x}{1+\sin^2 x}dx\ ,\quad g)\int_0^{\pi/4}\sin^3 x\cos x dx\ ,\quad h)\int_2^3\sqrt{6x-x^2-5}dx\ ,\ i)\int\sqrt{x^2+x+1}dx$

$d)$ *Observ că* $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (-\arccos x)'$

$$\int \frac{x+\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}dx = \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx + \int \frac{\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}dx =$$
$$= -\int \left(\sqrt{1-x^2}\right)' dx + \int \arccos x \,(-\arccos x)' \,dx =$$
$$= -\sqrt{1-x^2} - \int \arccos x \,(\arccos x)' \,dx = -\sqrt{1-x^2} - \int \arccos x \, d\,(\arccos x)$$

Acum dacă notăm

$$y \overset{not}{=} \arccos x \Rightarrow dy = (\arccos x)' \,dx$$

deci integrala devine

$$\int \frac{x+\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}dx = -\sqrt{1-x^2} - \int y dy =$$
$$= -\sqrt{1-x^2} - \frac{y^2}{2} + C = -\sqrt{1-x^2} - \frac{(\arccos x)^2}{2} + C\ ,\ C \in \mathbb{R}$$

$e)$ *Observ că* $\frac{1}{x} = (\ln x)'$ *şi voi nota* $y \overset{not}{=} \ln x \Rightarrow dy = (\ln x)' \,dx$

$f)$ *Observ că* $\cos x = (\sin x)'$ *şi voi nota* $y \overset{not}{=} \sin x \Rightarrow dy = (\sin)' \,dx$ *şi limitele de integrare devin: dacă* $x = 0$ *atunci* $y = \sin 0 = 0$ *şi dacă* $x = \pi/2$ *atunci* $y = \sin \pi/2 = 1$

$h)$ *Folosim* ***forma canonică a trinomului de gradul*** 2

$$\boxed{ax^2 + bx + c = a\left(x + \tfrac{b}{2a}\right)^2 + \tfrac{-\Delta}{4a}}$$

unde $\Delta = b^2 - 4ac$.

Deci

$$6x - x^2 - 5 = -x^2 + 6x - 5 = -\left(x + \tfrac{6}{-2}\right)^2 + \tfrac{-(36-20)}{-4}$$
$$= -(x-3)^2 + 4 = 4 - (x-3)^2$$

şi

$$\int_2^3 \sqrt{6x - x^2 - 5}dx = \int_2^3 \sqrt{4-(x-3)^2}dx = \int_2^3 \sqrt{4-(x-3)^2}\,(x-3)' \,dx =$$

Notez $y \overset{not}{=} x - 3 \Rightarrow dy = (x-3)' \,dx$ *şi limitele de integrare devin: dacă* $x = 2$ *atunci* $y = -1$ *şi dacă* $x = 3$ *atunci* $y = 0$.

$$\int_2^3 \sqrt{6x - x^2 - 5}dx = \int_{-1}^0 \sqrt{4-y^2}dy$$

care se va calcula prin raţionalizare.

Teorema 30 (a doua metodă de schimbare de variabilă) *Fie funcţiile* $u : I \to J$ *şi* $f : J \to \mathbb{R}$, *unde* I, J *sunt intervale. Dacă* f *e continuă pe* J *iar* u *este strict monotonă şi derivabilă pe* I *iar inversa sa* $v : J \to I$ *are derivata continuă pe* J *atunci funcţia* $f(u) : I \to R$ *admite primitive pe* I *şi are loc*

$$\int f(u(x))\,dx = F(u(x)) + C$$

unde F *este o primitivă a lui* fv', *adică* $\int f(y)\,v'(y)\,dy = F(y) + C$.

Demonstraţie. Avem că f şi v' sunt continue deci există primitiva $\int f(y)\, v'(y)\, dy = F(y)+C$ deci

$$F'(y) = f(y)\, v'(y)$$

Evident că $F(u(x))$ este derivabilă şi

$$(F(u(x)))' = F'(u(x))\, u'(x) = f(u(x))\, v'(u(x)) \cdot u'(x)$$

Dar u şi v sunt inverse una celeilate deci $v(u(x)) = x = u(v(x))$. Derivând prima egalitate obţin

$$(v(u(x)))' = 1 \Leftrightarrow v'(u(x))\, u'(x) = 1$$

deci

$$(F(u(x)))' = f(u(x))\, v'(u(x))\, u'(x) = f(u(x))$$

adică $F(u(x))$ este o primitivă a lui $f(u(x))$.

Practic: facem substituţia $x = u^{-1}(y) = v(y)$ deci $dx = v'(y)\, dy$ deci

$$\int f(u(x))\, dx = \int f(u(v(y)))\, v'(y)\, dy = \int f(y)\, v'(y)\, dy = F(y) + C = F(u(x)) + C$$

■

Propoziţia 31 (a doua metodă de schimbare de variabilă pentru integrala definită) *În aceleaşi ipoteze ca mai sus avem*

$$\int_a^b f(u(x))\, dx = \int_{u(a)}^{u(b)} f(y)\, v^{'}(y)\, dy$$

Practic: notăm $y \overset{not}{=} u(x)$ deci avem şi $x = u^{-1}(y) = v(y) \Rightarrow dx = v^{'}(y)\, dy$

$$\int_a^b f(u(x))\, dx = \int_{u(a)}^{u(b)} f(u(v(y)))\, v^{'}(y)\, dy = \int_{u(a)}^{u(b)} f(y)\, v^{'}(y)\, dy$$

Exemplul 32 *Fie $f : [-a,a] \to \mathbb{R}$ o funcţie integrabilă pe $[-a,a]$. Arătaţi că dacă f este pară, atunci*

$$\int_{-a}^{a} f(x)\, dx = 2\int_0^a f(x)\, dx$$

şi dacă f este impară, atunci

$$\int_{-a}^{a} f(x)\, dx = 0.$$

Exemplul 33 *Calculaţi următoarele integrale folosind a doua metodă de schimbare de variabilă:*

$a)\ \int \cos\sqrt{x}dx\ ,\ \ b)\ \int_0^1 x\sqrt{4-x^2}dx$

$a)$ Vom nota $\sqrt{x} = y \Leftrightarrow x = y^2$ deci $dx = 2ydy$ şi integrala devine

$$\int \cos^2\sqrt{x}dx = \int \cos y\ 2ydy = 2\int y\cos y\ dy$$

Pentru calculul acestei integrale vezi metoda de integrare prin părţi. La sfârşit se va înlocui $y = \sqrt{x}$

b) Folosim ***substituţia trigonometrică*** *$x = a\sin y$ sau $x = a\cos y$. Dacă folosim substituţia $x = 2\sin y$ atunci*

$$dx = (2\sin y)' \, dy = 2\cos y dy$$

şi

$$x = 2\sin y \Leftrightarrow y = \arcsin x/2$$

Limitele de integrare devin: dacă $x = 0$ atunci $y = \arcsin 0 = 0$ şi dacă $x = 1$ atunci $y = \arcsin 1/2 = \pi/6$.

4 Calculul integralelor unor clase de funcţii (vezi şi exerciţiile de la seminar).

În această secţiune vom prezenta pe scurt metode de calcul ale integralelor unor clase de funcţii.

I. Calculul primitivelor funcţiilor raţionale. Pentru calculul primitivelor unei funcţii raţionale $\frac{P(x)}{Q(x)}$ se parcurg următoarele etape:

- Dacă $\operatorname{grad} P(x) \geq \operatorname{grad} Q(x)$ atunci se va împărţi P la Q şi se va obţine $\frac{P(x)}{Q(x)} = C(x) + \frac{P_1(x)}{Q(x)}$ unde $\operatorname{grad} P_1(x) < \operatorname{grad} Q(x)$.
- Se va descompune numitorul $Q(x)$ în factori ireductibili, adică

$$\begin{aligned} Q(x) &= \prod_{i=1}^{k} (x-\alpha_i)^{r_i} \prod_{j=1}^{k} \left(x^2 + \beta_j x + \gamma_j\right)^{s_j} \\ &= (x-\alpha_1)^{r_1} \cdots (x-\alpha_k)^{r_k} \left(x^2+\beta_1 x+\gamma_1\right)^{s_1} \cdots \left(x^2+\beta_l x+\gamma_l\right)^{s_l} . \end{aligned}$$

- Fracţia raţională $\frac{P_1(x)}{Q(x)}$ (suntem în cazul când gradul numărătorului este mai mic strict decât gradul numitorului) se va descompune în fracţii simple (utilizând descompunerea de mai sus):

$$\frac{P_1(x)}{Q(x)} = \sum_{i=1}^{k} \frac{a_i}{(x-\alpha_i)^{r_i}} + \sum_{j=1}^{l} \frac{b_j x + c_j}{\left(x^2+\beta_j x+\gamma_j\right)^{s_j}} .$$

Exemplul 34 *Să se calculeze următoarele* ***integrale din funcţii raţionale (exemple fundamentale)****:*

$a) \int \frac{1}{x-a}dx$, $\quad b) \int \frac{1}{(x-a)^{\alpha}}dx$, $\alpha \neq 1$, $\quad c) \int \frac{1}{ax-b}dx$, $\quad d) \int \frac{1}{(ax+b)^{\alpha}}dx$,

$e) \int \frac{1}{2x^2-4x+8}dx$, $\quad f) \int \frac{1}{2x^2-5x+3}dx$, $\quad g) \int \frac{4x-5}{x^2-2x+10}dx$,

$h) \int \frac{-x+5}{x^2+x-2}dx$, $\quad i) \int \frac{x^2-3x+3}{x^3-2x^2+x}dx = \int (\frac{a}{x} + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{(x-1)^2})dx$,

$j) \int \frac{3x^2+x-4}{x^3+5x^2+9x+5}dx = \int (\frac{a}{x+1} + \frac{bx+c}{x^2+4x+5})dx.$

II. Calculul primitivelor unor expresii iraţionale.

- Fie integralele de forma $\int R\Big(x,(\frac{ax+b}{cx+d})^{\frac{p_1}{q_1}},(\frac{ax+b}{cx+d})^{\frac{p_2}{q_2}},...\Big)dx$ unde R este o expresie raţională. Aceste integrale se reduc la integrale raţionale cu ajutorul substituţiei
$$\frac{ax+b}{cx+d}=t^s$$
unde s este cel mai mic multiplu comun al numitorilor $q_1, q_2, ...$

Exemplul 35 *Să se calculeze integrala* $\int \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}-1}dx$.

- *Fie integralele de forma* $\int x^m\,(a+bx^n)^p\,dx$ *unde* $m,n,p\in Q$ (**integrale binome**). *Aceste integrale se reduc la integrale raţionale doar în următoarele trei situaţii (cu ajutorul substituţiilor respective) :*

  $i)$ *Dacă* p *este număr întreg.*

  $ii)$ *Dacă* $\frac{m+1}{n}$ *este număr întreg şi în acest caz este utilă substituţia* $a+bx^n=t^s$ *unde* s *este numitorul lui* p.

  $iii)$ *Dacă* $\frac{m+1}{n}+p$ *este număr întreg şi în acest caz este utilă substituţia* $\frac{a+bx^n}{x^n}=t^s$ *unde* s *este numitorul lui* p.

Exemplul 36 *Să se calculeze integralele* $\int\sqrt{x}\left(1+\sqrt[3]{x}\right)^3dx$ *(avem* $m=1/2$, $n=1/3$, $p=3$*) şi* $\int\frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}dx$ *(avem* $m=-1/2$, $n=1/4$, $p=1/3$*).*

III. Calculul primitivelor unor expresii ce conţin funcţii trigonometrice. *Fie integralele de forma* $\int R(\sin x,\cos x)\,dx$ *unde* $R(a,b)$ *este o expresie raţională în* a *şi* b. *Aceste integrale se reduc la integrale raţionale cu ajutorul următoarelor substiţituţii:*

$i)$ *Dacă* $R(-\sin x,\cos x)=-R(\sin x,\cos x)$ *atunci este utilă substituţia* $\cos x=t$.

$ii)$ *Dacă* $R(\sin x,-\cos x)=-R(\sin x,\cos x)$ *atunci este utilă substituţia* $\sin x=t$.

$iii)$ *Dacă* $R(-\sin x,-\cos x)=R(\sin x,\cos x)$ *atunci este utilă substituţia* $\mathrm{tg}x=t$.

$iv)$ *Substituţia universală* $\mathrm{tg}\frac{x}{2}=t$.

În acest caz **sunt utile următoarele formule trigonometrice**

$$\sin^2x+\cos^2x=1,$$
$$\sin x\cos x=\tfrac{\sin 2x}{2}\ ,\ \sin^2x=\tfrac{1-\cos 2x}{2}\ ,\ \cos^2x=\tfrac{1+\cos 2x}{2}\ ,$$
$$\sin x=\tfrac{2t}{1+t^2}\ ,\ \cos x=\tfrac{1-t^2}{1+t^2}\ ,\text{ unde } t=\mathrm{tg}\tfrac{x}{2}\ ,$$
$$\sin x=\tfrac{t}{\sqrt{1+t^2}}\ ,\ \cos x=\tfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}\ ,\text{ unde } t=\mathrm{tg}x\ .$$

5 Aplicaţii ale integralei definite

I. Aria unei suprafeţe plane (a unui domeniu din $\mathbb{R}^2$). Avem două cazuri:

$a_1)$ (curba care dă domeniul este dată explicit) Dacă domeniul este dat de
$D = \{(x, y) : a \leq x \leq b\ ,\ 0 \leq y \leq f(x)\}$ sau $D = \{(x, y) : a \leq x \leq b\ ,\ f(x) \leq y \leq 0\}$
atunci aria domeniului D este dată de

$$\mathcal{A}(D) = \int_a^b |f(x)|\, dx$$

$a_2)$ (curbele care dau domeniul sunt date explicit) Dacă domeniul este dat de
$D = \{(x, y) : a \leq x \leq b\ ,\ f_1(x) \leq y \leq f_2(x)\}$ atunci aria domeniului D este dată de

$$\mathcal{A}(D) = \int_a^b [f_2(x) - f_1(x)]\, dx$$

II. Volumul corpurilor de rotaţie

Dacă volumul $V \subset \mathbb{R}^3$ este obţinut prin rotaţia mulţimii $F = \{(x, y) : a \leq x \leq b\ ,\ 0 \leq y \leq f(x)\}$
atunci volumul este dat de

$$\mathcal{V}(F) = \pi \int_a^b f^2(x)\, dx$$

III. Lungimi de curbe (în plan şi spaţiu). Avem trei cazuri:

$a)$ (curba este dată explicit)

Curba este dată de $(C) : y = f(x)\ ,\ a \leq x \leq b$ atunci lungimea curbei este dată de

$$\mathcal{L}(C) = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx$$

$b_1)$ (curba este în plan şi este dată parametric)

Curba este dată de $(C) : \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}\ ,\ a \leq t \leq b$ atunci lungimea curbei este dată de

$$\mathcal{L}(C) = \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\, dt$$

$b_2)$ (curba este în spaţiu şi este dată parametric)

Curba este dată de $(C) : \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}\ ,\ a \leq t \leq b$ atunci lungimea curbei este dată de

$$\mathcal{L}(C) = \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}\, dt$$

Exemplul 37 *Să se calculeze aria suprafeţei plane cuprinsă între curbele de ecuaţie* $f(x) = \sqrt{x}$ *şi* $g(x) = x^2$.

Exemplul 38 *Să se calculeze aria discului de rază* r *(şi cu centrul în originea reperului):* $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$ *şi* $\mathcal{A} = 4\int_0^r f(x)\,dx = \ldots$

Exemplul 39 *Să se calculeze lungimea cercului de rază* r *(şi cu centrul în originea reperului):* $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$ *şi* $\mathcal{L} = 4\int_0^r \sqrt{1 + (f'(x))^2}dx = \ldots$

6 Tabloul integralelor nedefinite

1. $\displaystyle\int dx = x + \mathcal{C}$
2. $\displaystyle\int x^{\alpha} dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + \mathcal{C}\ ,\ \alpha \in \mathbb{R}\,, \alpha \neq -1$
3. $\displaystyle\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + \mathcal{C}$
4. $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+a^2} dx = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + \mathcal{C}\,,\ a \neq 0$
5. $\displaystyle\int \frac{1}{x^2-a^2} dx = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + \mathcal{C}\,,\ a \neq 0$
6. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} dx = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + \mathcal{C}\,,\ a \neq 0$
7. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} dx = \arcsin \frac{x}{a} + \mathcal{C}\,,\ a > 0$
8. $\displaystyle\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + \mathcal{C}\,,\ a > 0,\ a \neq 1\,,\quad \int e^x dx = e^x + \mathcal{C}$
9. $\displaystyle\int \sin x dx = -\cos x + \mathcal{C}$
10. $\displaystyle\int \cos x dx = \sin x + \mathcal{C}$
11. $\displaystyle\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + \mathcal{C}$
12. $\displaystyle\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{ctg} x + \mathcal{C}$
13. $\displaystyle\int \frac{1}{\sin x} dx = \ln\left|\operatorname{tg} \frac{x}{2}\right| + \mathcal{C}$
14. $\displaystyle\int \frac{1}{\cos x} dx = \ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| + \mathcal{C}$
15. $\displaystyle\int \operatorname{tg} x dx = -\ln|\cos x| + \mathcal{C}$
16. $\displaystyle\int \operatorname{ctg} x dx = \ln|\sin x| + \mathcal{C}$