Facultatea de Hidrotehnică, Geodezie şi Ingineria Mediului
Analiza Matematică II, Semestrul II
Conf. dr. Lucian MATICIUC

CURS III – IV

Capitolul II: Integrale improprii.

1 Integrala improprie de primul tip

În capitolul precedent s-a studiat integrala definită $\int_a^b f(x)\,dx$ pentru cazul intervalului finit $[a,b]$ (interval compact) şi al funcţiei mărginite $f(x)$. Acest capitol este consacrat generalizării acestei noţiuni în diferite sensuri. Mai întâi extindem integrala la un interval infinit.

Definiţia 1 *Fie $f : [a,\infty) \to \mathbb{R}$, o funcţie integrabilă Riemann pe intervale compacte de tipul $[a,b]$, $\forall\ b > a$. Integrala $\int_a^\infty f(x)\,dx$ se numeşte **integrala improprie de primul tip**. Dacă $\lim\limits_{b\to\infty}\int_a^b f(x)\,dx$ există şi este finită vom spune că integrala improprie $\int_a^\infty f(x)\,dx$ este convergentă (C) şi vom scrie*

$$\int_a^\infty f(x)\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)\,dx$$

O integrală care nu este convergentă se va numi divergentă (D).

Exemplul 2 *Să se studieze natura integralei $\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2}dx$. Observăm că se integrează funcţia $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ care este continuă pe orice interval de tipul $[0,b]$, cu $\forall\ b > 0$ deci este integrabilă pe orice interval compact $[0,b] \subset [0,\infty)$. Atunci, prin definiţie*

$$\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2}dx = \lim_{b\to\infty}\int_0^b \frac{1}{1+x^2}dx$$

Dar $\int \frac{1}{1+x^2}dx = \mathrm{arctg}x$ deci

$$\lim_{b\to\infty}\int_0^b \frac{1}{1+x^2}dx = \lim_{b\to\infty} \mathrm{arctg}\,(x)\big|_0^b = \lim_{b\to\infty}\left(\mathrm{arctg}\,(b) - \mathrm{arctg}\,(0)\right) = \lim_{b\to\infty}\mathrm{arctg}\,(b) = \mathrm{arctg}\,(\infty) = \frac{\pi}{2}$$

ceea ce înseamnă că integrala improprie de primul tip $\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2}dx$ este convergentă şi

$$\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2}dx = \frac{\pi}{2}$$

Teorema 3 *Fie $a > 0$. Integrala*

$$\int_a^\infty \frac{1}{x^\alpha}dx$$

este convergentă pentru $\alpha > 1$ şi divergentă pentru $\alpha \le 1$.

Demonstraţie. Observăm că se integrează funcţia $f : [a, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{x^\alpha}$ care este continuă pe orice interval de tipul $[a, b]$, cu $\forall\ b > a$ deci este integrabilă pe orice interval compact $[a, b] \subset [a, \infty)$. Atunci, prin definiţie

$$\int_a^\infty \frac{1}{x^\alpha} dx = \lim_{b\to\infty} \int_a^b \frac{1}{x^\alpha} dx = \lim_{b\to\infty} \int_a^b x^{-\alpha} dx$$

Dar

$$\int x^{-\alpha} dx = \begin{cases} \dfrac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}, & \alpha \neq 1 \\ \ln x, & \alpha = 1 \end{cases}$$

deci, pentru $\alpha = 1$,

$$\lim_{b\to\infty} \int_a^b x^{-1} dx = \lim_{b\to\infty} \ln x|_a^b = \lim_{b\to\infty} (\ln b - \ln a) = \infty - \ln a = \infty$$

şi pentru $\alpha \neq 1$,

$$\begin{aligned} \lim_{b\to\infty} \int_a^b x^{-\alpha} dx &= \lim_{b\to\infty} \left. \frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} \right|_a^b = \lim_{b\to\infty} \frac{1}{1-\alpha} \left(b^{1-\alpha} - a^{1-\alpha} \right) = \\ &= \frac{1}{1-\alpha} \left(\lim_{b\to\infty} b^{1-\alpha} - a^{1-\alpha} \right) = \frac{1}{1-\alpha} \left(\infty^{1-\alpha} - a^{1-\alpha} \right) \end{aligned}$$

Dacă avem $\alpha > 1$ atunci $\alpha - 1 > 0$ deci $\infty^{1-\alpha} = \frac{1}{\infty^{\alpha-1}} = \frac{1}{\infty} = 0$, iar dacă avem $\alpha < 1$ atunci $1 - \alpha > 0$ deci $\infty^{1-\alpha} = \infty$.

Integrala iniţială este atunci

$$\int_a^\infty \frac{1}{x^\alpha} dx = \begin{cases} \lim\limits_{b\to\infty} \left. \dfrac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} \right|_a^b, & \alpha \neq 1 \\ \lim\limits_{b\to\infty} \ln x|_a^b, & \alpha = 1 \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{\alpha-1} a^{1-\alpha}, & \alpha > 1 \\ \infty, & \alpha \leq 1 \end{cases}$$

deci $\int_a^\infty \dfrac{1}{x^\alpha} dx = \frac{1}{\alpha-1} a^{1-\alpha}$ deci este (C) pentru $\alpha > 1$ şi (D) pentru $\alpha \leq 1$. ■

Remarca 4 *Similar putem defini* $\int_{-\infty}^a f(x)\, dx$ *.*

Remarca 5 *Integrala* $\int_{-\infty}^\infty f(x)\, dx$ *se poate defini prin egalitatea*

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)\, dx = \lim_{b\to\infty} \int_{-b}^a f(x)\, dx + \lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)\, dx = \int_{-\infty}^a f(x)\, dx + \int_a^\infty f(x)\, dx$$

Exemplul 6 *Să se studieze natura integralei* $\int_{-\infty}^0 \frac{1}{1+x^2} dx$. *Observăm că se integrează funcţia* $f : (-\infty, 0] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ *care este continuă pe orice interval de tipul* $[-b, 0]$, *cu* $\forall\ b > 0$ *deci este integrabilă pe orice interval compact* $[-b, 0] \subset (-\infty, 0]$. *Atunci, prin definiţie*

$$\int_{-\infty}^0 \frac{1}{1+x^2} dx = \lim_{b\to\infty} \int_{-b}^0 \frac{1}{1+x^2} dx$$

Deci

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{1+x^2}dx = \lim_{b\to\infty} \operatorname{arctg}(x)\Big|_{-b}^{0} = \lim_{b\to\infty}(\operatorname{arctg}(0) - \operatorname{arctg}(-b)) = \lim_{b\to\infty}\operatorname{arctg}(b) = \operatorname{arctg}(\infty) = \frac{\pi}{2}$$

ceea ce înseamnă că integrala improprie de primul tip $\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{1+x^2}dx$ *este convergentă şi*

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{1+x^2}dx = \frac{\pi}{2}$$

Exemplul 7 *Să se studieze natura integralei* $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}dx$. *Prin definiţie*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}dx = \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{1+x^2}dx + \int_{0}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}dx = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$$

Deci integrala improprie de primul tip $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}dx$ *este convergentă şi*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}dx = \pi$$

Să observăm că în exemplele date mai înainte, pentru a calcula integralele improprii, se calcula mai întâi integrala Riemann (pe interval finit) cu ajutorul primitivei iar apoi se trecea la limită. Astfel dacă avem $f : [a,\infty) \to \mathbb{R}$ integrabilă Riemann pe orice interval compact de tipul $[a,b]$, $\forall\ b > a$, astfel încât f admite primitiva F atunci, în cazul în care există $\lim_{x\to\infty} F(x) = F(\infty)$, are loc

$$\int_{a}^{\infty} f(x)\,dx = F(x)\big|_{a}^{\infty} = F(\infty) - F(a)$$

Exemplul 8 *Să se studieze natura integralei*

$$\int_{0}^{\infty} e^{-\alpha x}\sin(\beta x)\ dx\ , \alpha > 0.$$

Observăm că se integrează funcţia $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^{-\alpha x}\sin(\beta x)$ *care este continuă pe orice interval de tipul* $[0,b]$, *cu* $\forall\ b > 0$ *deci este integrabilă pe orice interval compact* $[0,b] \subset [0,\infty)$. *Atunci, prin definiţie*

$$\int_{0}^{\infty} e^{-\alpha x}\sin(\beta x)\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_{0}^{b} e^{-\alpha x}\sin(\beta x)\,dx$$

Dar pentru calculul integralei $\int_0^b e^{-\alpha x}\sin(\beta x)\,dx$ *(vezi Seminar / Curs - metoda de integrare prin părţi):*

$$\int e^{-\alpha x}\sin(\beta x)\,dx = -\frac{\alpha\sin(\beta x) + \beta\cos(\beta x)}{\alpha^2+\beta^2}\cdot e^{-\alpha x}$$

adică primitiva $F(x) = -\frac{\alpha\sin(\beta x)+\beta\cos(\beta x)}{\alpha^2+\beta^2}\cdot e^{-\alpha x}$. *Obţinem* $F(0) = -\frac{\beta}{\alpha^2+\beta^2}$ *şi deci*

$$\int_{0}^{\infty} e^{-\alpha x}\sin(\beta x)\,dx = F(\infty) - F(0) = \lim_{x\to\infty} F(x) + \frac{\beta}{\alpha^2+\beta^2}$$

Ţinând cont de faptul că funcţiile sin, cos *sunt mărginite de* 1 *obţinem că*

$$\left|-\frac{\alpha\sin(\beta x)+\beta\cos(\beta x)}{\alpha^2+\beta^2}\right|\leq\frac{|\alpha\sin(\beta x)|+|\beta\cos(\beta x)|}{\alpha^2+\beta^2}\leq\frac{|\alpha|+|\beta|}{\alpha^2+\beta^2}$$

şi pe de altă parte $\lim_{x\to\infty}e^{-\alpha x}=e^{-\infty}=\frac{1}{e^{\infty}}=\frac{1}{\infty}=0$. *Dar având în vedere că (vezi Seminar - Semestrul I) produsul dintre o funcţie mărginită şi o funcţie care tinde la* 0 *va tinde la* 0 *obţinem că*

$$\lim_{x\to\infty}F(x)=\lim_{x\to\infty}\left(-\frac{\alpha\sin(\beta x)+\beta\cos(\beta x)}{\alpha^2+\beta^2}\right)\cdot e^{-\alpha x}=0$$

deci

$$\int_0^\infty e^{-\alpha x}\sin(\beta x)\,dx=F(\infty)-F(0)=0+\frac{\beta}{\alpha^2+\beta^2}=\frac{\beta}{\alpha^2+\beta^2}$$

Exemplul 9 *Să se studieze natura integralei*

$$\int_0^\infty\sin x\,dx.$$

Observăm că se integrează funcţia $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sin x$ *care este continuă pe orice interval de tipul* $[0,b]$, *cu* $\forall\ b>0$ *deci este integrabilă pe orice interval compact* $[0,b]\subset[0,\infty)$. *Atunci, prin definiţie*

$$\int_0^\infty\sin x dx=\lim_{b\to\infty}\int_0^b\sin x dx=\lim_{b\to\infty}(-\cos b+\cos 0)=1-\lim_{b\to\infty}\cos b=1-\cos\infty$$

Dar $\cos\infty$ *nu există (funcţiile periodice nu au limită la* ∞*) deci* $\int_0^\infty\sin x dx$ *nu există adică*

$$\int_0^\infty\sin x dx\text{ este divergentă}$$

2 Convergenţa integralei în cazul funcţiilor pozitive

Dacă funcţia $f:[a,\infty)\to\mathbb{R}$, o funcţie astfel încât $f\geq 0$ pe $[a,\infty)$. Integrala

$$\Phi(b)\stackrel{def}{=}\int_a^b f(x)\,dx$$

va reprezenta atunci o funcţie monoton crescătoare pe $[a,\infty)$. Problema existenţei limitei finite $\lim_{b\to\infty}\Phi(b)$ se reduce atunci la mărginirea acestei funcţii (fiind monoton crescătoare limita există, ea fiind ∞ sau finită (în cazul în care funcţia este mărginită)). Astfel pentru convergenţa integralei $\int_a^\infty f(x)\,dx$, unde $f\geq 0$ pe $[a,\infty)$, este necesar şi suficient ca integrala $\Phi(b)$ să fie mărginită superior (cu a fixat)

$$\int_a^b f(x)\,dx\leq L,\ \forall\ b\in(a,\infty)$$

Dacă această condiţie nu este îndeplinită atunci integrala improprie dată are valoarea ∞. Pe aceasta se bazează următorul criteriu de comparaţie pentru integrale improprii de primul tip din funcţii pozitive.

Teorema 10 *Fie $f, g : [a, \infty) \to \mathbb{R}$ două funcţii astfel încât $f, g \geq 0$ pe $[a, \infty)$. Dacă există limita*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell,\ \ell \in [0, \infty]$$

atunci

1) Dacă $\ell < \infty$ atunci, dacă integrala improprie $\int_a^\infty g(x)\,dx$ este (C), obţinem că integrala improprie $\int_a^\infty f(x)\,dx$ este convergentă (C).

2) Dacă $\ell > 0$ atunci, dacă integrala improprie $\int_a^\infty g(x)\,dx$ este (D), obţinem că integrala improprie $\int_a^\infty f(x)\,dx$ este divergentă (D).

Corolarul 11 *Deci, în condiţiile teoremei de mai sus, obţinem că dacă $0 < l < \infty$ atunci cele două integrale au aceeaşi natură.*

Alegând în particular funcţia $g : [a, \infty) \to \mathbb{R}$, $a > 0$, $g(x) = \frac{1}{x^\alpha}$ obţinem un criteriu practic de convergenţă (vezi cazurile de convergenţă ale integralei $\int_a^\infty \frac{1}{x^\alpha}dx$, $\alpha \in \mathbb{R}$ date în Teorema 3).

Teorema 12 (Criteriu în α) *Fie $f : [a, \infty) \to \mathbb{R}$ astfel încât $f \geq 0$ pe $[a, \infty)$. Atunci*

1) Dacă $\exists\ \alpha > 1$ astfel încât $\lim\limits_{x\to\infty} x^\alpha f(x) < +\infty$ atunci $\int_a^\infty f(x)\,dx$ este convergentă (C).

2) Dacă $\exists\ \alpha \leq 1$ astfel încât $\lim\limits_{x\to\infty} x^\alpha f(x) > 0$ atunci $\int_a^\infty f(x)\,dx$ este divergentă (D).

Remarca 13 *Teorema este echivalentă cu următoarele afirmaţii:*

Presupunem că există $\alpha \in \mathbb{R}$ astfel încât $\lim\limits_{x\to\infty} x^\alpha f(x) = \ell \in (0, \infty)$. Atunci $\int_a^\infty f(x)\,dx$ este (C) dacă $\alpha > 1$ şi (D) dacă $\alpha \leq 1$.

Presupunem că există $\alpha \in \mathbb{R}$ astfel încât $\lim\limits_{x\to\infty} x^\alpha f(x) = 0$. Atunci $\int_a^\infty f(x)\,dx$ este (C) dacă $\alpha > 1$.

Presupunem că există $\alpha \in \mathbb{R}$ astfel încât $\lim\limits_{x\to\infty} x^\alpha f(x) = +\infty$. Atunci $\int_a^\infty f(x)\,dx$ este (D) dacă $\alpha \leq 1$.

Exemplul 14 *Să se studieze convergenţa următoarei integrale improprii*

$$\int_0^\infty \frac{\sqrt{x^3}}{1+x^2}dx$$

Avem $f(x) = \frac{\sqrt{x^3}}{1+x^2} = \frac{x^{3/2}}{1+x^2}$. Trebuie să determinăm α astfel încât să existe limita $\lim\limits_{x\to\infty} x^\alpha f(x)$.

$$\lim_{x\to\infty} x^\alpha f(x) = \lim_{x\to\infty}\left(x^\alpha \cdot \frac{x^{3/2}}{1+x^2}\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^{\alpha+3/2}}{1+x^2}$$

Având în vedere că limita este la ∞, scoatem factor forţat x la puterea cea mai mare

$$\lim_{x\to\infty} x^\alpha f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^{\alpha+3/2}}{x^2(1/x^2+1)} = \text{(aleg } \alpha + 3/2 = 2\text{)} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{1/x^2+1} = \frac{1}{0+1} = 1$$

Deci pentru $\alpha = 1/2 \leq 1$ obţin $\lim\limits_{x\to\infty} x^\alpha f(x) = 1 \in (0, \infty)$ deci $\int_0^\infty \frac{\sqrt{x^3}}{1+x^2}dx$ este (D).

Exemplul 15 *Calcul similar pentru* $\int_0^\infty \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}$.

Exemplul 16 *Să se studieze convergenţa integrale improprii* $\int_1^\infty \frac{\operatorname{arctg}(x)}{x^2}dx$.
Avem $f(x) = \frac{\operatorname{arctg}(x)}{x^2}$. *Trebuie să determinăm* α *astfel încât să existe limita* $\lim\limits_{x\to\infty} x^\alpha f(x)$.

$$\lim_{x\to\infty} x^\alpha f(x) = \lim_{x\to\infty}\left(x^\alpha \cdot \frac{\operatorname{arctg}(x)}{x^2}\right) = (\textit{aleg } \alpha = 2) = \lim_{x\to\infty} \operatorname{arctg}(x) = \frac{\pi}{2}.$$

Deci pentru $\alpha = 2 > 1$ *obţin* $\lim\limits_{x\to\infty} x^\alpha f(x) = \frac{\pi}{2} \in (0,\infty)$ *deci* $\int_1^\infty \frac{\operatorname{arctg}(x)}{x^2}dx$ *este* (C).

Exemplul 17 *Să se studieze convergenţa integrale improprii* $\int_1^\infty \frac{\operatorname{arctg}(x)}{x}dx$.
Avem $f(x) = \frac{\operatorname{arctg}(x)}{x}$. *Trebuie să determinăm* α *astfel încât să existe limita* $\lim\limits_{x\to\infty} x^\alpha f(x)$.

$$\lim_{x\to\infty} x^\alpha f(x) = \lim_{x\to\infty}\left(x^\alpha \cdot \frac{\operatorname{arctg}(x)}{x}\right) = (\textit{aleg } \alpha = 1) = \lim_{x\to\infty} \operatorname{arctg}(x) = \frac{\pi}{2}.$$

Deci pentru $\alpha = 1 \le 1$ *obţin* $\lim\limits_{x\to\infty} x^\alpha f(x) = \frac{\pi}{2} \in (0,\infty)$ *deci* $\int_1^\infty \frac{\operatorname{arctg}(x)}{x}dx$ *este* (D).

Exemplul 18 *Să se studieze convergenţa integrale improprii* $\int_1^\infty (\pi - 2\operatorname{arctg}(x))\,dx$.
Avem $f(x) = \pi - 2\operatorname{arctg}(x)$. *Trebuie să determinăm* α *astfel încât să existe limita* $\lim\limits_{x\to\infty} x^\alpha f(x)$.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} x^\alpha f(x) &= \lim_{x\to\infty}\left(x^\alpha \cdot (\pi - 2\operatorname{arctg}(x))\right) = (\textit{nedeterm. } \infty \cdot 0) = \lim_{x\to\infty} \frac{\pi - 2\operatorname{arctg}(x)}{\frac{1}{x^\alpha}} \\
&= (\textit{aleg } \alpha = 1 \textit{ şi aplic L'Hospital}) = \lim_{x\to\infty} \frac{0 - 2\frac{1}{1+x^2}}{\frac{-1}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x^2}{1+x^2} = 2.
\end{aligned}$$

Deci pentru $\alpha = 1 \le 1$ *obţin* $\lim\limits_{x\to\infty} x^\alpha f(x) = 2 \in (0,\infty)$ *deci* $\int_1^\infty (\pi - 2\operatorname{arctg}(x))\,dx$ *este* (D).

Exemplul 19 *Să se studieze convergenţa integrale improprii* $\int_1^\infty \frac{x+\cos x}{x^3+\sin x}dx = $.

Exemplul 20 *Să se studieze convergenţa integrale improprii* $\int_2^\infty \frac{1}{x(\ln x)^\beta}dx$.

3 Convergenţa integralei în cazul general

Vom da acum două criterii care permit stabilirea convergenţei integralelor improprii în cazul general.

Teorema 21 (Criteriul lui Abel) *Fie* $f, g : [a,\infty) \to \mathbb{R}$ *două funcţii astfel încât*
1) Integrala improprie $\int_a^\infty f(x)\,dx$ *este* (C).
2) Funcţia g *este monotonă şi mărginită.*
În aceste condiţii integrala improprie $\int_a^\infty f(x)\,g(x)\,dx$ *este* (C).

Teorema 22 (Criteriul lui Dirichlet) *Fie $f, g : [a, \infty) \to \mathbb{R}$ două funcţii astfel încât*

1) Funcţia f este integrabilă pe $[a, b]$, $\forall\, b > a$ şi

$$\left| \int_a^b f(x)\, dx \right| \leq K,\ \forall\, a < b < \infty$$

2) Funcţia g este monotonă şi $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = 0$.

În aceste condiţii integrala improprie $\int_a^\infty f(x)\, g(x)\, dx$ este (C). •

Exemplul 23 *Se observă imediat că integralele*

$$\int_a^\infty \frac{\sin x}{x^\alpha} dx,\ \int_a^\infty \frac{\cos x}{x^\alpha} dx,\ a > 0,\ \alpha > 0$$

sunt (C) deoarece putem aplica Criteriul lui Dirichlet funcţiilor $f(x) = \sin x$ şi $g(x) = \frac{1}{x^\alpha}$.

Într-adevăr avem $f(x) = \sin x$ integrabilă pe orice $[a, b]$ şi

$$\left| \int_a^b \sin x dx \right| = |-\cos b + \cos a| \leq 2,\ \forall\, a < b < \infty$$

Evident $g(x) = \frac{1}{x^\alpha}$ este descrescătoare ($\alpha > 0$) şi

$$\lim_{x\to\infty} g(x) = \frac{1}{\infty} = 0$$

În particular se obţine convergenţa integralelor

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx,\ \int_0^\infty \frac{\cos x}{x} dx$$

(am putut extinde la cazul $a = 0$ deoarece limita în 0 este finită, $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$).

4 Integrala improprie de al doilea tip.

Definiţia 24 *Fie $f : [a, b) \to \mathbb{R}$, o funcţie integrabilă Riemann pe intervale compacte de tipul $[a, c]$, $\forall\, a < c < b$ şi care satisface $\lim\limits_{x\nearrow b} f(x) = \infty$. Integrala $\int_a^b f(x)\, dx$ se numeşte **integrala improprie de al doilea tip**. Dacă $\lim\limits_{c\nearrow b} \int_a^c f(x)\, dx$ există şi este finită vom spune că integrala improprie $\int_a^b f(x)\, dx$ este convergentă (C) şi vom scrie*

$$\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{c\nearrow b} \int_a^c f(x)\, dx$$

Remarca 25 *Punctul b de mai sus spunem că este **punct singular**.*

Exemplul 26 *Să se studieze natura integralei* $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$. *Observăm că se integrează funcţia* $f : [0,1) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ *care este continuă pe orice interval de tipul* $[0,c]$, *cu* $\forall\ 0 < c < 1$ *deci este integrabilă pe orice interval compact* $[0,c] \subset [0,1)$. *Atunci, prin definiţie*

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx &= \lim_{c\nearrow 1}\int_0^c \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \lim_{c\nearrow 1} \arcsin x|_0^c = \lim_{c\nearrow 1}(\arcsin c - \arcsin 0)\\ &= \arcsin 1 - \arcsin 0 = \pi/2\end{aligned}$$

Deci integrala improprie $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$ *este* (C).

Remarca 27 *Similar putem defini* $\int_a^b f(x)\,dx$ *în cazul în care funcţia* $f : (a,b] \to \mathbb{R}$ *este o funcţie integrabilă Riemann pe intervale compacte de tipul* $[c,b]$, $\forall\ a < c < b$ *şi care satisface* $\lim\limits_{x\searrow a} f(x) = \infty$.

Exemplul 28 *Să se studieze natura integralei* $\int_{-1}^0 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$. *Observăm că se integrează funcţia* $f : (-1,0] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ *(deci punctul singular este* -1*).*

Exemplul 29 *Să se studieze natura integralei* $\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$. *Observăm că se integrează funcţia* $f : (-1,1) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ *(deci punctele singulare sunt* ± 1*).*

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \int_{-1}^0 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx + \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \cdots\cdots$$

Teorema 30 *Integrala*

$$\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^\lambda}$$

este convergentă pentru $\lambda < 1$ *şi divergentă pentru* $\alpha \geq 1$.

Demonstraţie. Observăm că se integrează funcţia $f : [a,b) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{(b-x)^\lambda}$ care este continuă pe orice interval de tipul $[a,c]$, cu $\forall\ a < c < b$ deci este integrabilă pe orice interval compact $[a,c] \subset [a,b)$. Atunci, prin definiţie

$$\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^\lambda} = \lim_{c\to b}\int_a^c \frac{dx}{(b-x)^\lambda} = \lim_{c\to b}\int_a^c (b-x)^{-\lambda}\,dx$$

Dar

$$\int (b-x)^{-\lambda}\,dx = \begin{cases} -\dfrac{(b-x)^{-\lambda+1}}{-\lambda+1}, & \lambda \neq 1\\ -\ln(b-x), & \lambda = 1\end{cases}$$

deci, pentru $\lambda = 1$,

$$\begin{aligned}\lim_{c\to b}\int_a^c (b-x)^{-1}\,dx &= -\lim_{c\to b}\ln(b-x)|_a^c = \lim_{c\to b}(-\ln(b-c) + \ln(b-a)) =\\ &= -\ln 0_+ + \ln(b-a) = -(-\infty) + \ln(b-a) = \infty\end{aligned}$$

şi pentru $\lambda \neq 1$,

$$\begin{aligned}\lim_{c\to b}\int_a^c (b-x)^{-\lambda}\,dx &= -\lim_{c\to b}\left.\frac{(b-x)^{-\lambda+1}}{-\lambda+1}\right|_a^c = \lim_{c\to b}\left(\frac{(b-c)^{-\lambda+1}}{\lambda-1}-\frac{(b-a)^{-\lambda+1}}{\lambda-1}\right)\\ &= \left(\frac{0_+^{-\lambda+1}}{\lambda-1}-\frac{(b-a)^{-\lambda+1}}{\lambda-1}\right)\end{aligned}$$

Dacă avem $\lambda > 1$ atunci $\lambda - 1 > 0$ deci $0_+^{-\lambda+1} = \frac{1}{0_+^{\lambda-1}} = \frac{1}{0_+} = +\infty$, iar dacă avem $\lambda < 1$ atunci $1-\lambda > 0$ deci $0_+^{-\lambda+1} = 0$.

Integrala iniţială este atunci

$$\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^\lambda} = \begin{cases} \lim\limits_{c\to b} -\left.\dfrac{(b-x)^{-\lambda+1}}{-\lambda+1}\right|_a^c , & \lambda \neq 1 \\ \lim\limits_{c\to b} -\ln(b-x)|_a^c , & \lambda = 1 \end{cases} = \begin{cases} +\infty , & \lambda \geq 1, \\ -\dfrac{(b-a)^{-\lambda+1}}{\lambda-1} , & \lambda < 1. \end{cases}$$

deci $\displaystyle\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^\lambda} = \frac{(b-a)^{1-\lambda}}{1-\lambda}$ este (C) pentru $\lambda < 1$ şi (D) pentru $\lambda \geq 1$. ■

Propoziţia 31 *Analog se poate studia natura integralei*

$$\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^\lambda}, \lambda \in \mathbb{R}.$$

Observăm că se integrează funcţia $f : (a,b] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{(x-a)^\lambda}$ *care este continuă deci integrabilă pe orice interval compact* $[a,c] \subset (a,b]$. *Se obţine că*

$$\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^\lambda} = \begin{cases} +\infty , & \lambda \geq 1, \\ \dfrac{(b-a)^{-\lambda+1}}{1-\lambda} , & \lambda < 1. \end{cases}$$

Teorema 32 (Criteriu în λ) *Fie* $f : [a,b) \to \mathbb{R}$ *astfel încât* $f(x) \geq 0$, $\forall\, x \in [a,b)$. *Atunci*

1) Dacă $\exists\, \lambda < 1$ *a.î.* $\lim\limits_{x\nearrow b} |x-b|^\lambda f(x) < \infty$ *atunci* $\int_a^b f(x)\,dx$ *este* (C).

2) Dacă $\exists\, \lambda \geq 1$ *a.î.* $\lim\limits_{x\nearrow b} |x-b|^\lambda f(x) > 0$ *atunci* $\int_a^b f(x)\,dx$ *este* (D).

Remarca 33 *Teorema este echivalentă cu următoarele afirmaţii:*

Presupunem că există $\lambda \in \mathbb{R}$ *astfel încât* $\lim\limits_{x\nearrow b} |x-b|^\lambda f(x) = \ell \in (0,\infty)$. *Atunci* $\int_a^b f(x)\,dx$ *este* (C) *dacă* $\lambda < 1$ *şi* (D) *dacă* $\lambda \geq 1$.

Presupunem că există $\lambda \in \mathbb{R}$ *astfel încât* $\lim\limits_{x\nearrow b} |x-b|^\lambda f(x) = 0$. *Atunci* $\int_a^b f(x)\,dx$ *este* (C) *dacă* $\lambda < 1$.

Presupunem că există $\lambda \in \mathbb{R}$ *astfel încât* $\lim\limits_{x\nearrow b} |x-b|^\lambda f(x) = +\infty$. *Atunci* $\int_a^b f(x)\,dx$ *este* (D) *dacă* $\lambda \geq 1$.

Exemplul 34 *Să se studieze natura integralei* $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[4]{1-x^4}}$. *Observăm că se integrează funcţia* $f : [0,1) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[4]{1-x^4}}$ *care este (continuă deci) integrabilă pe orice interval compact* $[0,c] \subset [0,1)$. *Trebuie să determinăm* λ *astfel încât să existe limita* $\lim\limits_{x\nearrow 1} |x-1|^\lambda f(x)$. *Deoarece* $x \in [0,1)$ *avem că* $x < 1 \Rightarrow |x-1|^\lambda = (1-x)^\lambda$, *deci*

$$\lim_{x\nearrow 1} |x-1|^\lambda f(x) = \lim_{x\nearrow 1} \frac{(1-x)^\lambda}{\sqrt[4]{(1-x)(1+x)(1+x^2)}} = \lim_{x\nearrow 1} \frac{(1-x)^\lambda}{(1-x)^{1/4}\sqrt[4]{(1+x)(1+x^2)}}$$

Aleg $\lambda = 1/4$ *şi obţin*

$$\lim_{x\nearrow 1} |x-1|^\lambda f(x) = \lim_{x\nearrow 1} \frac{1}{\sqrt[4]{(1+x)(1+x^2)}} = \frac{1}{\sqrt[4]{4}} \in (0,\infty)$$

Deci pentru $\lambda = 1/4 < 1$, $\lim\limits_{x\nearrow 1} |x-1|^\lambda f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[4]{4}} \in (0,\infty)$ *adică integrala este* (C).